



Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон

МАТЕМАТИКА

6 класс

Учебник
(в 3 частях)

Часть 2

Рекомендовано
к использованию при реализации имеющих государственную
аккредитацию образовательных программ начального общего,
основного общего, среднего общего образования



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

Оглавление

Глава 2. Арифметика

§ 3. Отношения

1. Понятие отношения	3
2. Масштаб изображения	10
3. Понятие пропорции. Основное свойство пропорции	16
4. Свойства и преобразование пропорций.....	24

§ 4. Пропорциональные величины

1. Зависимости между величинами.....	32
2. Прямая и обратная пропорциональные зависимости.....	40
3. Графики прямой и обратной пропорциональности.....	44
4. Решение задач с помощью пропорций.....	50
5. Пропорциональное деление.....	58

Глава 3. Рациональные числа

§ 1. Понятие рационального числа

1. Положительные и отрицательные числа	69
2. Противоположные числа и модуль	78
3. Сравнение рациональных чисел.....	87

§ 2. Арифметика рациональных чисел

1. Сложение рациональных чисел. Алгебраическая сумма	94
2. Вычитание рациональных чисел.....	105
3. Умножение рациональных чисел	112
4. Деление рациональных чисел	117
5. Какие числа мы знаем, и что мы о них знаем или не знаем.....	121
6*. О системах счисления	124

Ответы	128
---------------------	-----

В книге используются условные обозначения:



К

– задачи по новой теме для работы в классе,



Д

– задачи для домашней работы,



П

– повторение ранее пройденного,



С

– задачи на смекалку,



– более сложные задания по новым темам и темам повторения,



– задания, требующие умения находить нестандартные способы решения.

Глава 2

Арифметика

§ 3. Отношения

1. Понятие отношения.

Для решения практических задач человеку часто приходится сравнивать разные значения одной и той же величины – массы, расстояния, времени, скорости, стоимости, объема, площади и т. д.

Существуют два способа сравнения величин. Первый состоит в нахождении их разности и отвечает на вопрос «*На сколько больше (меньше)?*». Второй состоит в нахождении частного и отвечает на вопрос «*Во сколько раз больше (меньше)?*». Например, гиря массой 6 кг *тяжелее* гири массой 2 кг *на* 4 кг (6 кг – 2 кг = 4 кг), или *в* 3 *раза* (6 кг : 2 кг = 3).

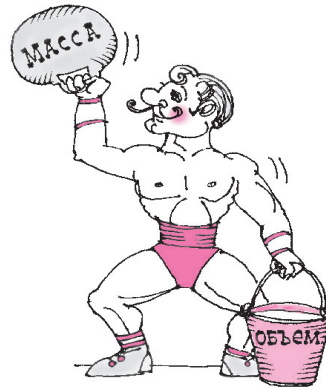
Эти два вида сравнения имеют специальные названия – *разностное сравнение* и *кратное сравнение*. Они часто встречаются в практической жизни и служат для разных целей. Разностное сравнение указывает разность, то есть *на сколько* величины отличаются друг от друга, а кратное даёт качественную, или относительную, оценку этого отличия.

Пусть, например, зарплата человека увеличилась *на* 1000 р. – *много это или мало?* Очевидно, что если раньше его зарплата была 4000 р., то новая зарплата стала в $5000 : 4000 = 1,25$ раза, или на четверть, выше и прибавка является существенной. Если же старая зарплата составляла 20 000 р., то она повысилась всего лишь в $21\,000 : 20\,000 = 1,05$ раза, то есть изменилась не так значительно. Таким образом, ответ на поставленный вопрос зависит не от самой величины прибавки, а от того, *во сколько раз* новая зарплата стала выше старой.

Для *результата кратного сравнения* двух чисел или двух величин в математике часто используют термин *отношение*.

Отношением двух чисел называют их частное. Как известно, при переводе с русского языка на математический и обратно используются два типа обозначения частного. Поэтому фразу «Отношение a к b равно 7» можно перевести как « $a : b = 7$ », или « $\frac{a}{b} = 7$ ».

Отношение двух чисел показывает, во сколько раз первое число больше второго, или какую часть первое число составляет от второго. Например, отношение числа 8 к числу 3 равно $\frac{8}{3}$ и показывает, что 8 больше, чем 3,



в $2\frac{2}{3}$ раза. А отношение числа 3 к числу 8 равно $\frac{3}{8}$ и выражает часть, которую 3 составляет от 8. Заметим, что отношения 8 к 3 и 3 к 8, как и дроби $\frac{8}{3}$ и $\frac{3}{8}$, называют *взаимно обратными*.

Для отношения двух чисел, как и для любого частного двух чисел, справедливы все свойства деления. В частности, **отношение не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля**.

На основании этого свойства отношения чисел можно упрощать. Например, отношение чисел 25 и 20 можно заменить отношением 5 к 4, а отношение чисел 1,4 и $2\frac{1}{3}$ – отношением 3 к 5:

$$\frac{25}{20} = \frac{25 : 5}{20 : 5} = \frac{5}{4}, \quad \frac{1,4}{2\frac{1}{3}} = \frac{1,4 \cdot 10 \cdot 3}{2\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3} = \frac{14 \cdot 3}{7 \cdot 10} = \frac{3}{5}.$$

Кроме того, для отношений справедливо «перекрёстное» правило:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad (b \neq 0, d \neq 0)$$

В словесной форме: ***a* относится к *b* как *c* относится к *d* в том и только в том случае, когда $ad = bc$ ($b \neq 0, d \neq 0$).**

Итак, мы видим, что с точки зрения математики в понятии отношения нет ничего нового: отношение чисел – это их частное. Возникает естественный вопрос: зачем же использовать два названия для одного и того же понятия? Однако точнее спросить: «**Почему** в математике длительное время употребляются оба эти названия?»

Все дело в том, что математика как наука возникла прежде всего для решения практических задач. А в реальной практике при сравнении величин употребляется обычное слово *отношение*, а вовсе не математический термин «частное». Вместе с тем *средством* для нахождения отношений является именно вычисление частного.

Чтобы найти отношение **одноименных величин** (длин, масс и т. д.), необходимо выразить их **в одной и той же единице измерения** – в противном случае полученный результат для сравнения величин использовать нельзя.

Например, чтобы найти отношение 50 см к 1 м, надо сначала выразить обе эти величины либо в метрах, либо в сантиметрах и только после этого находить частное. Так как 50 см = 0,5 м, а 100 см = 1 м, то

$$0,5 : 1 = \frac{1}{2}, \text{ или } 50 : 100 = \frac{1}{2}.$$

Если этого не сделать, то получится, что 50 см больше 1 м в $50 : 1 = 50$ раз.



Отношение иногда бывает удобно выражать в процентах. Как мы уже знаем, для этого достаточно умножить полученное частное на сто. Так, об увеличении зарплаты в 1,5 раза можно иначе сказать, что новая зарплата составила 150% старой, а об увеличении её в 1,05 раза – что новая зарплата составила 105% старой. Значит, в первом случае зарплата повысилась на 50%, а во втором – всего лишь на 5%.



Процентное отношение широко используется для сравнения на практике, поскольку проценты соответствуют дробям с одним и тем же знаменателем 100, а дроби с одним знаменателем сравнивать гораздо проще.

Итак, если a и b – два числа, причем $b \neq 0$, то

- 1) Отношение $a : b$ – это частное от деления a на b .
- 2) Если $a > b$, то отношение $a : b$ показывает, во сколько раз a больше b .
- 3) Если $a \leq b$, то отношение $a : b$ показывает, какую часть a составляет от b .
- 4) Процентное отношение a к b – это отношение $a : b$, выраженное в процентах; оно равно $\left(\frac{a}{b} \cdot 100\right)\%$.

Процентное отношение показывает, сколько процентов число a составляет от числа b .

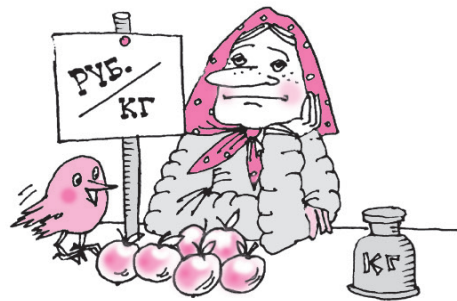
Как мы видели, отношение одноименных величин есть число. А вот отношение величин разных наименований образует новую величину. Так, скорость v – это отношение пройденного расстояния s ко времени движения t ; цена a – отношение стоимости товара C к количеству товара n ; производительность w – отношение объёма выполненной работы A ко времени работы t ; плотность вещества ρ – отношение массы этого вещества m к его объёму V :

$$v = \frac{s}{t}, \quad a = \frac{C}{n}, \quad w = \frac{A}{t}, \quad \rho = \frac{m}{V} \quad \text{и т. д.}$$

Каждая из этих новых величин представляет собой значение величины, стоящей в числителе дроби, приходящейся на единицу величины, стоящей в знаменателе. Скорость – это путь, пройденный за единицу времени, цена – это стоимость единицы товара, производительность – работа, выполненная за единицу времени, плотность – масса вещества в единице объёма.

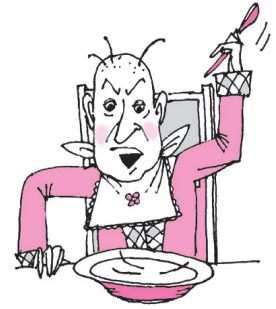
Не случайно поэтому единицами измерения этих новых величин являются дроби: для скорости – км/ч, м/с, см/с; для цены – р./кг, р./билет; для производительности – шт./мин, деталей/ч; для плотности – кг/дм³, г/см³ и т. д.

В обычной речи для производительности и цены такие обозначения не употребляют, а выражают их словами: «8 страниц в час», «5 рублей за килограмм».



К 1 Много или мало составляют:

- а) 5 уроков математики в день и в месяц;
 б) увеличение в весе в 1 г для муравья и для слона?
 Придумай свои примеры, когда одно и то же значение величины дает разную качественную оценку некоторой ситуации.



2 Кобра живёт около 15 лет, а крокодил – около 90 лет. Как можно сравнить продолжительность их жизни? Рассмотрите все возможные варианты.

3 Прочитай и упрости отношения. Какое свойство отношений при этом используется? Какими ещё свойствами обладают отношения?

- а) $15 : 30$; в) $2,5 : 3$; д) $\frac{0,34}{1,7}$; ж) $\frac{15abc}{5a^2b}$, где $a \neq 0, b \neq 0$;
 б) $\frac{48}{112}$; г) $4 : \frac{1}{3}$; е) $3\frac{1}{9} : 4\frac{2}{3}$; з) $(4x^2) : (20xy)$, где $x \neq 0, y \neq 0$.

4 На клумбе 6 белых и 12 красных роз. Что показывают отношения:

- $6 : 12$; $12 : 6$; $6 : 18$; $18 : 12$?

Какие ещё отношения можно составить к данному условию задачи?

5 По данному условию составь какие-нибудь отношения и объясни их смысл. Упрости, если возможно, полученные отношения.

- а) В классе 10 мальчиков и 15 девочек.
 б) В тетради 12 листов, из них 4 исписано.
 в) Биатлонист сделал 5 выстрелов и 2 раза промахнулся.
 г) Из 200 участников викторины 50 стали победителями.

6 Найди процентное отношение чисел:

- а) $4 : 5$; в) $\frac{15}{3}$; д) $1,6 : 5\frac{1}{3}$; ж) $\frac{a}{4a}$, где $a \neq 0$;
 б) $\frac{9}{25}$; г) $77 : 28$; е) $\frac{6,3}{70}$; з) $(8,4b) : (4\frac{1}{5}b)$, где $b \neq 0$.

7 Имеет ли значение порядок членов отношения? Почему? Вырази в процентах данное и обратное отношение чисел:

- а) $1 : 3$; б) $12 : 15$; в) $7,2 : 36$; г) $\frac{9}{20} : 0,75$.

8 Вырази данные отношения величин в процентах:

- а) 8 дм к 3,2 м; в) 12 ц к 4 т; д) 6 мин к 1 ч;
 б) 0,3 км к 500 м; г) 0,034 ц к 20 кг; е) 2 ч 20 мин к 40 мин.

- 9) 1) Для определения процента всхожести семян посадили 300 семян. Из них проросло 273. Сколько процентов посаженных семян проросло?
2) Отношение каких величин характеризует *всхожесть семян*?

- 10) 1) Отношение каких величин характеризует *концентрацию* раствора?
2) В 5,6 л воды растворили 140 г соли. Чему равна концентрация соли в полученном растворе? (Масса 1 л воды равна 1 кг.)
3) Смешали три раствора соли одинаковой массы. Концентрация первого раствора равна 18%, концентрация второго – 7%. Чему равна концентрация третьего раствора, если концентрация полученной смеси составляет 10%?

- 11) Найди отношение величин и назови, значение какой новой величины при этом образуется:

- а) 4 м к 2 мин; в) 280 р. к 7 м; д) 6 деталей к 3 мин;
б) 25 км к 4 ч; г) 120 р. к 5 кг; е) 50 страниц к 2 ч.

- 12) Начерти отрезок AB и отметь на нем точку C так, чтобы выполнялось условие:

- 1) $\frac{AC}{BC} = 1$; 2) $\frac{AC}{BC} > 1$; 3) $\frac{AC}{BC} < 1$; 4) $\frac{AC}{BC} = 2$.

- 13) 1) Начерти два отрезка, длины которых относятся как 2 к 3.
2) Начерти прямоугольник, отношение длин сторон которого равно 5 : 3.
3) Начерти прямоугольный треугольник, длины катетов которого относятся как 3 к 4. Измерь гипотенузу и найди отношение длины каждого из катетов этого треугольника к длине гипотенузы.
4) Начерти угол, равный 60° , и раздели его на 2 части, отношение которых равно 1 : 2.

- 14) 1) Прочитай определения и назови определяемые понятия.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины противолежащего катета к длине гипотенузы.

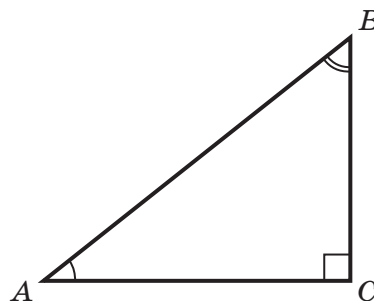
Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины прилежащего катета к длине гипотенузы.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины противолежащего катета к длине прилежащего.

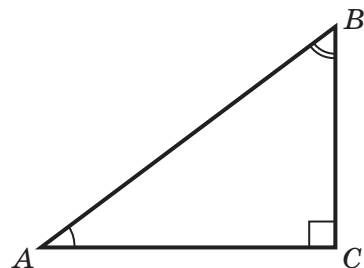
- 2) Синус, косинус и тангенс угла X обозначаются соответственно $\sin X$, $\cos X$ и $\operatorname{tg} X$. Запиши отношения длин сторон треугольника ABC , выражающие значения синусов, косинусов и тангенсов углов A и B .

Образец:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$$



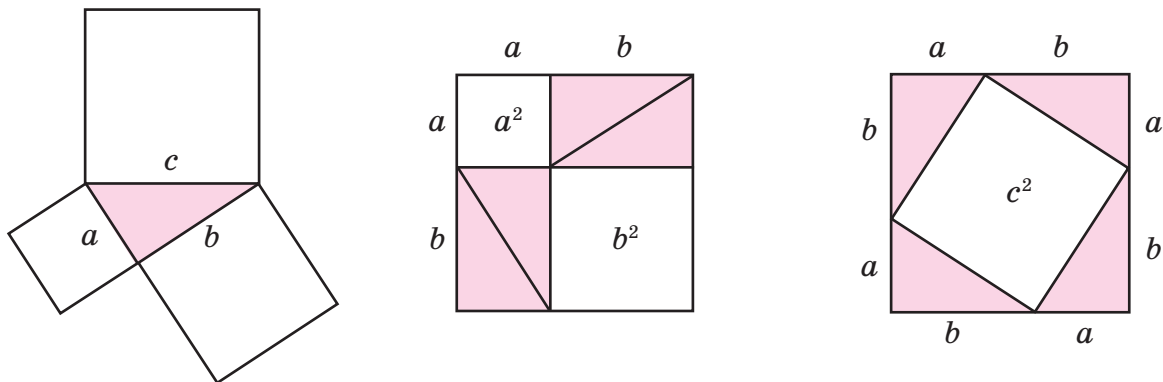
- 15** 1) Измерь стороны треугольника ABC и вычисли синус, косинус и тангенс угла A .
 2) Вычисли сумму квадратов синуса и косинуса угла A .
 3) Найди отношение синуса угла A к косинусу угла A и сравни его с тангенсом угла A .
 4) Выполни три предыдущих задания для угла B треугольника ABC . Что ты замечаешь?
 5) Повтори исследование для острого угла произвольного прямоугольного треугольника. Сформулируй *гипотезу*. Попробуй доказать её в общем виде, используя теорему Пифагора (см. № 18).



- π 16** 1) Увеличь $2,75$ на $\frac{1}{4}$.
 2) Уменьши $4\frac{2}{15}$ в $3,1$ раза.
 3) Уменьши $9\frac{3}{8}$ на $4,37$.
 4) Увеличь $5,4$ в $1\frac{1}{27}$ раза.

- 17** Запиши высказывания на математическом языке:
 1) Число a в 7 раз меньше числа b .
 2) Число c на 3 больше числа d .
 3) Число t составляет $\frac{2}{9}$ числа n .
 4) Число k составляет 80% числа t .
 5) Число x на 28% больше числа y .
 6) Число p на 40% меньше числа s .

- 18** Пусть катеты прямоугольного треугольника равны a и b , а гипотенуза – c . На сторонах этого треугольника построены квадраты. Используя рисунки, покажи, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе:



Доказательство этого равенства, называемого теоремой Пифагора, было известно уже в V веке до н. э. Запиши это равенство на математическом языке.

- 19** Реши уравнения, используя правило «весов»:

а) $0,9a + 4,96 = 3,6 + 1,4a$;

в) $0,4(2x + 0,3) = \frac{1}{3}(6x - 7,2)$;

б) $4\frac{1}{3}b + b = 6b - 10,4$;

г) $5(y - 3,8) = 4,7(y - 4)$.

20 Построй математическую модель задачи и найди ответ:

1) В первом вагоне трамвая ехало в 1,5 раза больше пассажиров, чем во втором. После того как из первого вагона вышли 5 пассажиров, а во второй вошли 3 пассажира, в обоих вагонах пассажиров стало поровну. Сколько пассажиров ехало в каждом вагоне первоначально?



2) В бидоне было в 2 раза больше молока, чем в банке. После того как из банки отлили 2 л, а из бидона — 3 л, в банке осталось молока в 4,5 раз меньше, чем в бидоне. Сколько литров молока было в бидоне и в банке вместе?

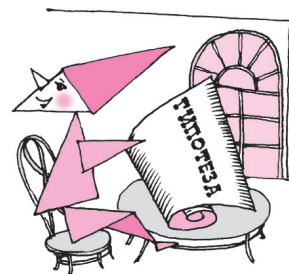
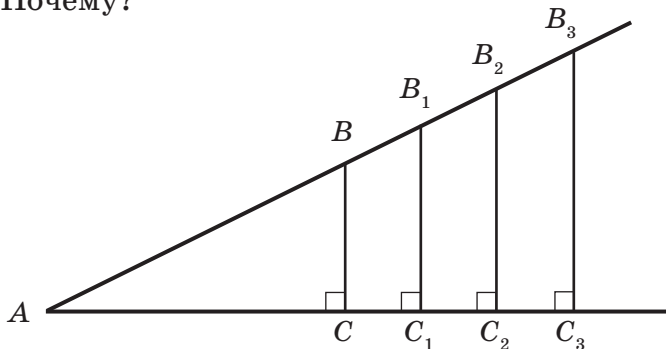
21 Найди процентное отношение чисел и величин:

а) $0,56 : 0,7$; в) $3,6 : 2\frac{4}{7}$; д) 2,8 см к 4 дм; ж) 5 ц к 400 кг;

б) $\frac{3}{22} : 1\frac{4}{11}$; г) $8\frac{1}{3} : 25$; е) 3 ч к 1 сут.; з) 180 м к 3 км.

22 Смешали три раствора соли с концентрацией соответственно 10%, 15% и 30%. Масса первого раствора равна 180 г, масса второго раствора в 2 раза больше массы первого, а масса третьего раствора на 100 г больше массы второго. Чему равна концентрация полученной смеси?

23 Пользуясь определением тангенса острого угла прямоугольного треугольника, приведённым на с. 7, найди тангенс угла A в треугольниках ABC , AB_1C_1 , AB_2C_2 , AB_3C_3 , выполнив необходимые измерения. Что ты замечаешь? Сформулируй гипотезу. Можно ли утверждать, что твоя гипотеза верна всегда? Почему?



24 Реши уравнения, используя правило «весов»:

а) $12x - 39 = 8x + 5$;

б) $6(y - 1,4) = 3,5y + 1,6$.

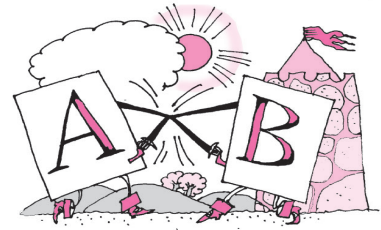
25 Построй математическую модель задачи и найди ответ:

На первой полке на 18 книг меньше, чем на второй. После того как число книг на первой полке удвоили, оно составило 80% от числа книг на второй полке. Сколько книг стояло на каждой полке первоначально?

- 26 Вычисли процентное отношение чисел A и B и определи: 1) на сколько процентов A меньше, чем B ; 2) на сколько процентов B больше, чем A ?

$$A \quad \frac{(7\frac{3}{8} - 2,125) \cdot 2\frac{2}{7} - 39,48 : 5,6}{(3,4 \cdot 0,9 - 2,7) : 0,06 \cdot 2\frac{2}{3} - 30,9 \cdot 0,5}$$

$$B \quad \frac{[6,1 \cdot 3,05 - 2,05 \cdot (4\frac{3}{5} + 4,46)] \cdot 22,5}{(1\frac{1}{4} + 0,5 + 2\frac{1}{3}) : 2\frac{1}{24} \cdot 0,01}$$



С

- 27* Старинная задача

Некто имеет 6 сыновей, один другого старше 4 годами, а самый старший сын втрое старше младшего. Чему равен возраст младшего сына?

2. Масштаб изображения.

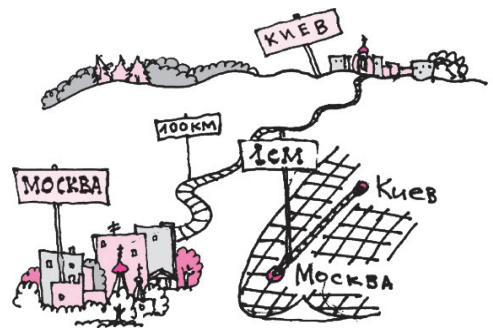
В предыдущем пункте мы рассмотрели задачи, приводящие к понятию отношения. Теперь мы познакомимся ещё с одним распространённым примером отношения одноименных величин, имеющим специальное название – **масштаб**.

В практической жизни человек часто пользуется не столько самими предметами, сколько их изображениями – чертежами, фотографиями, географическими картами. На этих изображениях все расстояния оказываются в уменьшенном или в увеличенном виде. Рассмотрим самый важный для практики случай, когда длины всех отрезков уменьшаются или увеличиваются *в одно и то же число раз*, в одном и том же отношении. Это число и называется *масштабом изображения*.

О п р е д е л е н и е: *Отношение длины отрезка на изображении к его реальной длине (в одних и тех же единицах измерения) называется масштабом изображения.*

Согласно этому определению, масштаб изображения – это число. На географической карте оно всегда меньше единицы – $1 : 2$, $1 : 10$, $1 : 100$ и т. д., – ведь ясно, что расстояние, например, от Москвы до Киева на карте значительно короче настоящего расстояния между этими городами.

В технических же чертежах масштаб нередко оказывается большим 1 – если требуется изобразить детали маленького размера, например детали наручных часов. В этом случае все размеры на чертеже, наоборот, увеличиваются в одно и то же число раз, так что масштаб получается с увеличением – $2 : 1$, $10 : 1$, $100 : 1$ и т. д. Точно так же, рисуя, например, клетку растения, используют масштаб, больший 1.



Масштаб карты можно записать в виде дроби с числителем 1 или в виде частного с делимым 1. Например, $\frac{1}{1\,000\,000}$ или $1 : 1\,000\,000$ (в современных картах обычно используют обозначение в виде частного). Это означает, что расстоянию в 1 см на карте соответствует расстояние на местности в $1\,000\,000$ см = 10 км.

Масштаб может задаваться также дробью с числителем, не равным 1, например, дробью $\frac{1}{50\,000}$ (или соответственно, частным с делимым, не равным 1). Смысл масштаба при этом, конечно, не меняется: он означает, что отрезок в 3 см изображает расстояние в 50 000 см, то есть в 500 м.

Знание масштаба географической карты позволяет, проводя измерения на карте, узнавать расстояния на местности с помощью вычислений. Если, скажем, масштаб карты равен $1 : 1\,000\,000$, то расстоянию на карте, равному 7,2 см, соответствует расстояние на местности в $1\,000\,000$ раз большее, то есть $7,2 \text{ см} \cdot 1\,000\,000 = 7\,200\,000 \text{ см} = 72 \text{ км}$.

Аналогично, если масштаб задан дробью с числителем 1, то для вычисления реального расстояния на местности длину соответствующего отрезка на карте достаточно *умножить на знаменатель дроби*.

Задача 1. На карте с масштабом $\frac{1}{150\,000}$ расстояние между деревней и станцией равно 2,8 см. Найдите расстояние между ними на местности.

Решение:

Масштаб $\frac{1}{150\,000}$ означает, что расстояние на местности в 150 000 раз больше, чем на карте. Следовательно, искомое расстояние равно

$$2,8 \cdot 150\,000 = 420\,000 \text{ (см)}.$$

Так как $1 \text{ км} = 100\,000 \text{ см}$, то $420\,000 \text{ см} = 4,2 \text{ км}$.

О т в е т: расстояние от деревни до станции на местности равно 4,2 км.

Обратная задача – нахождение расстояния на карте по расстоянию на местности – решается, естественно, обратным действием – *делением*.

Задача 2. Расстояние между двумя городами равно 560 км. Найдите длину отрезка, соединяющего эти города на карте, выполненной в масштабе $1 : 4\,000\,000$.

Решение:

Поскольку расстояние на карте в 4 000 000 раз меньше, чем на местности, то 560 км надо уменьшить в 4 000 000 раз. Для простоты вычислений вначале выразим это расстояние в сантиметрах, а затем выполним деление:

$$\begin{aligned} 560 \text{ км} &= 56\,000\,000 \text{ см}, \\ 56\,000\,000 : 4\,000\,000 &= 14 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

О т в е т: расстояние между городами на карте 14 см.

- К** **28** 1) Что называют масштабом? Чему равен масштаб чертежа, если на нём детали увеличены в 5 раз, уменьшены в 100 раз?
 2) Что означают выражения: а) масштаб плана местности равен 1 : 400; б) масштаб карты равен 1 : 500 000; в) масштаб чертежа равен 3 : 1?

29 Определи масштаб карты, если: 1) 1 см на карте соответствует 100 км на местности; 2) 3 см на карте соответствует 1 км 200 м на местности; 3) 50 км на местности соответствует 2 дм на карте.

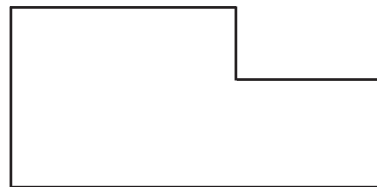
30 Расстояние от Москвы до Бреста равно примерно 1100 км. Изобрази шоссе от Москвы до Бреста на тетрадном листе в виде отрезка, подобрав удобный масштаб.

31 Масштаб карты равен 1 : 1 000 000. Известно, что расстояние между двумя точками на этой карте равно: 1) 1 см; 2) 0,6 см; 3) 1, 8 дм; 4) 35 мм. Вычисли соответствующие расстояния на местности.

32 Длина крыла насекомого, нарисованного в масштабе 20 : 1, равна 4 см. Чему равна его длина в действительности?

33 **Практическая работа**
 По карте определи приближённые расстояния между Москвой и городами: 1) Санкт-Петербург; 2) Казань; 3) Ижевск; 4) Киев; 5) Прага; 6) Берлин; 7) Париж; 8) Лондон.

34 План земельного участка выполнен в масштабе 1 : 4000. Сделай необходимые измерения и вычисли его периметр и площадь.



35 На рисунке изображен план квартиры в масштабе 1 : 200. Определи по плану, какие размеры имеют гостиная, спальня, кухня, прихожая, кладовая и ванная комната. Вычисли площадь этих помещений и общую площадь квартиры.



36 Длина Москвы-реки примерно 470 км. Чему равна её длина на карте, масштаб которой 1 : 5 000 000?

37 Размеры дачного участка прямоугольной формы 40 м × 30 м. Начерти план этого участка в масштабе 1 : 500. Изобрази на этом плане дом, размеры которого 10 м × 10 м, расположенный в центре участка. На одной из больших сторон прямоугольника посередине отметь ворота шириной 4 м.

38 **Практическая работа**

Начерти план кабинета математики в масштабе 1 : 100.

39 Размеры комнаты равны 4,2 м × 6 м. На плане комнаты её длина изображена отрезком, равным 4 см. Чему равна длина отрезка, изображающего на этом плане ширину комнаты?

40 На карте, масштаб которой 1 : 100 000, расстояние между двумя городами равно 12 см. Каким будет это расстояние на карте, масштаб которой 1 : 300 000?

π 41 Найди число, которое в указанном ряду чисел нарушает закономерность:

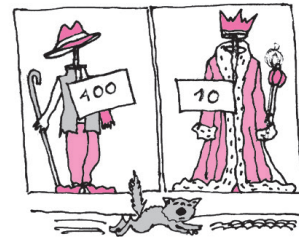
1) 10; 2; 0,4; 0,08; 0,16; 0,032; 3) 3; 0,5; 6; 0,8; 12; 1,1; 18; 1,4;

2) $\frac{1}{2}$; 1; $1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; 4; $6\frac{1}{2}$; 10; $16\frac{1}{2}$; 4) $\frac{5}{8}$; $\frac{6}{13}$; $\frac{7}{19}$; $\frac{8}{26}$; $\frac{9}{32}$; $\frac{10}{41}$; $\frac{11}{51}$; $\frac{12}{62}$.

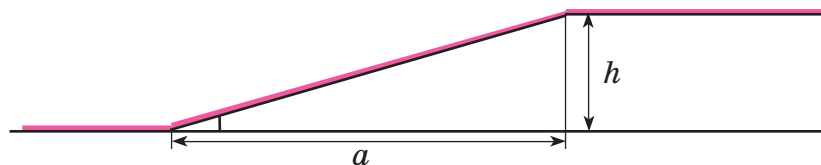
42 Имеется набор шестерёнок в 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120 зубцов. Подбери такие пары шестерёнок, чтобы отношение чисел их зубцов было равно:

1) 5; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{2}{5}$; 7) $\frac{5}{6}$; 8) $\frac{3}{4}$.

43 Комиссионные магазины, продав вещь, берут с её владельца *комиссионный сбор*, который составляет определённый процент от стоимости вещи. В одном магазине за вещь стоимостью 4000 р. взяли комиссионный сбор 240 р., а в другом за вещь стоимостью 18 000 р. взяли комиссионный сбор 900 р. В каком из этих магазинов комиссионный сбор больше?



44 *Крутизна участка дороги* выражается отношением высоты подъёма дороги h к горизонтальной протяженности этого участка a (см. рисунок):



а) Какова высота спуска, если на дорожном знаке, предупреждающем о спуске, указано 20%, а его горизонтальная протяженность равна 400 м?

б) Чему равна крутизна участка дороги, если горизонтальная протяженность составляет 1,2 км, а высота спуска 30 м?

45 Найди ложные высказывания и построй их отрицания:

- 1) Любую обыкновенную дробь, знаменатель которой кратен 10, можно записать в виде конечной десятичной дроби.
- 2) Число, произведение цифр которого кратно 9, делится на 9.
- 3) Существуют числа, кратные трём, сумма которых не делится на 3.
- 4) Есть такие нечётные числа, произведение которых – число чётное.

46 Представь выражение в виде дроби, если $a, b, c, d, k \neq 0$:

$$1) \frac{7}{2a} + \frac{4}{a^2}; \quad 2) 1 - \frac{5}{b}; \quad 3) 3d : \frac{d^3}{4c}; \quad 4) \frac{n}{5k^2} \cdot 10k.$$

47 БЛИЦтурнир

Составь и, если возможно, упрости выражение:

- 1) После увеличения цены альбома на 25% он стал стоить a р. Сколько стоил альбом первоначально?
- 2) В книге b страниц. В первый день Саша прочитал 20% книги, а во второй – половину остатка. Сколько страниц прочитал Саша за эти два дня?
- 3) Цена телевизора снизилась с x р. до y р. На сколько процентов снизилась цена телевизора?
- 4) Длина комнаты прямоугольной формы s метров, а ширина составляет 70% длины. Чему равны её периметр и площадь?
- 5) Клиент положил в банк d р. Какая сумма будет на его счёте через 4 года, если банк начисляет доход в размере 5% в год (простые проценты)?
- 6) Население города составляет сейчас k тыс. жителей и увеличивается ежегодно на 3%. Каким оно станет через 2 года?

48 Реши уравнения, пользуясь «перекрестным правилом»:

$$1) \frac{x}{7,2} = \frac{1}{0,25}; \quad 2) \frac{2\frac{1}{3}}{0,6x} = \frac{2,5}{1\frac{2}{7}}; \quad 3) \frac{7}{0,14} = \frac{50x}{4,8}; \quad 4) \frac{1\frac{3}{17}}{13,75} = \frac{2\frac{2}{11}}{3x}.$$

2

49 На туристской карте запись с указанием масштаба оказалась оторванной. Можно ли её восстановить, если известно, что расстояние от сельской почты до окраины села (по прямой дороге) равно 3,2 км, а на карте это расстояние изображено отрезком длиной 4 см? Если это возможно, определи масштаб данной карты.



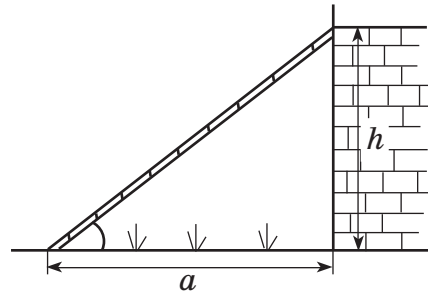
50 Практическая работа

Возьми три географические карты с разным масштабом. По каждой из них найди расстояние между двумя городами, взятыми по твоему выбору.

51 Практическая работа

Измерь размеры своей комнаты, задай масштаб и нарисуй план комнаты. Укажи на нём расположение окон, дверей, мебели.

52 Приставить лестницу к стене можно более круто или более полого. Её *крутизна* выражается отношением расстояния h от пола до верхнего края лестницы к расстоянию a от нижнего края до стены. В каком случае лестница имеет бóльшую крутизну: если $h = 1,5$ м и $a = 1,2$ м или если $h = 2,4$ м и $a = 2$ м?



53 Составь и, если возможно, упрости выражение:

- 1) Жилищному кооперативу принадлежит a га земли, из которых b га занимают гаражи. Какой процент площади, принадлежащей этому кооперативу, отведено под гаражи?
- 2) 40% участников первого тура олимпиады прошли во второй тур, а 50% участников второго тура в количестве c человек прошли в третий тур. Сколько человек приняли участие в первом туре олимпиады?
- 3) Турист за три дня прошёл путь, равный d км. В первый день он прошёл 40% всего пути, а во второй день – 75% пути, пройденного в первый день. Сколько километров прошёл турист в третий день?

54 Реши уравнения, пользуясь «перекрёстным правилом»:

$$1) \frac{x}{6,3} = \frac{9}{2,8}; \quad 2) \frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{5}{6}} = \frac{2}{0,25x}; \quad 3) \frac{6,125}{4x} = \frac{0,35}{\frac{2}{7}}; \quad 4) \frac{2\frac{1}{4}}{1,6} = \frac{0,125x}{2\frac{2}{3}}.$$

55 Вычисли и запиши в последовательности ответов следующее число, сохраняя закономерность:

$$1) (4,5 + 3\frac{5}{6}) \cdot 0,6; \quad 2) 3,7 : (1\frac{2}{9} - 0,4); \quad 3) \frac{4 : \frac{4}{7} \cdot 0,3}{2,88 : 4,8}; \quad 4) \frac{0,5 + \frac{1}{18}}{(1\frac{1}{6} - \frac{7}{18}) : 2,8}.$$

c

56* 1) В квадрате размером 10×10 клеток выписаны натуральные числа от 1 до 100, как показано на рисунке. Выбери внутри него любой квадрат размером 2×2 клетки и сравни суммы, записанные по его диагоналям. Что ты замечаешь? Будут ли обладать этим же свойством аналогичные суммы в любом другом квадрате размером 2×2 клетки? Обоснуй свой ответ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2) Рассмотрим теперь квадраты размером 3×3 клетки и найди в них группы из трёх чисел, суммы которых будут одинаковы.

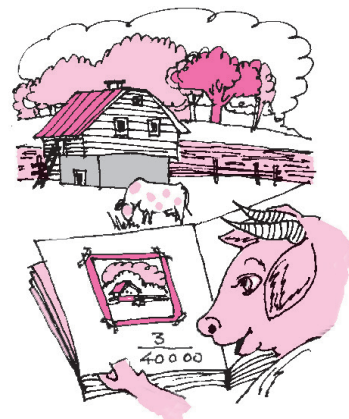
3. Понятие пропорции. Основное свойство пропорции.

Математической моделью многих практических задач является равенство двух отношений. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. План местности сделан в масштабе $\frac{3}{40\,000}$. На каком расстоянии от реки находится дом, который на плане удалён от реки на 3,6 см?

Все расстояния на плане уменьшаются в одно и то же число раз, поэтому отношения соответствующих расстояний равны между собой и равны $\frac{3}{40\,000}$. Обозначив искомое расстояние x , получаем, что число 3,6 так относится к x , как 3 к 40 000:

$$\frac{3,6}{x} = \frac{3}{40\,000}.$$



Задача 2. Автомобилист заметил, что расстояние 58 км он проехал за 45 мин. За сколько времени он преодолеет оставшиеся 174 км, если будет ехать с той же скоростью?

Скорость равна отношению пути ко времени. По условию, она не изменяется, поэтому

$$\frac{58}{45} = \frac{174}{y},$$

где y – искомое время в минутах.

Как удобнее и проще найти в полученных моделях неизвестные числа x и y ? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо провести математическое исследование истинных равенств вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \neq 0$. Для них уже много веков существует специальное название – *пропорция*.

Итак, *пропорцией называется истинное равенство двух отношений*. Пропорции записывают так:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ или } a : b = c : d,$$

где $a, b, c, d \neq 0$. Читают: «Отношение a к b равно отношению c к d » или « a относится к b как c относится к d ».

На основании перекрёстного правила можно записать:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc,$$

и тогда любой член пропорции легко вычисляется, исходя из перекрёстного правила и правила нахождения неизвестного множителя.

Так, в первой задаче

$$\frac{3,6}{x} = \frac{3}{40\,000} \Leftrightarrow 3x = 3,6 \cdot 40\,000 \Leftrightarrow x = \frac{3,6 \cdot 40\,000}{3} \Leftrightarrow x = 48\,000,$$

то есть дом находится на расстоянии $48\,000 \text{ см} = 480 \text{ м}$ от реки.

Во второй задаче

$$\frac{58}{45} = \frac{174}{y} \Leftrightarrow 58y = 45 \cdot 174 \Leftrightarrow y = \frac{45 \cdot 174}{58} \Leftrightarrow y = 135,$$

и, значит, оставшееся расстояние автомобиль пройдет за $135 \text{ мин} = 2 \text{ ч } 15 \text{ мин}$.

Таким образом, перекрёстное правило является основой решения задач на пропорции, и поэтому его также называют **основным свойством пропорции**.

При переводе решения задач с математического языка на русский часто используются ставшие традиционными термины «*крайние*» и «*средние*» члены пропорции. Эти названия связаны с тем, что при записи пропорции в строчку два члена располагаются «по краям», а два – «посередине», причём это как раз те члены, которые в записи пропорции с помощью дробей расположены «перекрёстно»:



крайние члены

$$a : b = c : d$$

средние члены

крайние
члены

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

средние
члены

В этих терминах основное свойство пропорции читается так:

Равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \neq 0$, является пропорцией тогда и только тогда, когда произведение крайних членов a и d равно произведению средних членов b и c .



А правила нахождения неизвестных членов пропорции формулируются следующим образом:

1) **Чтобы найти крайний член пропорции, надо произведение её средних членов разделить на второй крайний член:**

$$a = \frac{bc}{d}, \quad d = \frac{bc}{a}.$$

2) **Чтобы найти средний член пропорции, надо произведение её крайних членов разделить на второй средний член:**

$$b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b}.$$

Отметим, что новая терминология по сути ничего не добавляет к хорошо известному нам перекрёстному правилу, а является лишь сложившимся языком, описывающим решение задач на пропорции. Этот язык удобен при решении практических задач, поэтому каждому полезно его знать.



К

57 Запиши равенство двух отношений двумя способами. Проверь, является ли оно пропорцией. Если да, то назови крайние и средние члены пропорции.

- а) 7 так относится к 14, как 3 относится к 6;
 б) отношение 8 к 3 равно отношению 40 к 15;
 в) 36 во столько раз больше 20, во сколько раз 9 больше 5;
 г) 2 составляет такую же часть от 10, какую 3 составляет от 15.

58 Выбери из данных отношений те, из которых можно составить пропорцию:

- 1) $5 : 15$; 3) $3 : 1,2$; 5) $\frac{1}{3} : 3$; 7) $1,2 : 4$; 9) $3\frac{1}{3} : 50$;
 2) $\frac{2}{9} : \frac{2}{27}$; 4) $0,2 : 3$; 6) $4,2 : 21$; 8) $0,1 : 0,4$; 10) $1,5 : 0,05$.

59 В чём заключается *основное свойство пропорции*? Запиши его для пропорций:

- 1) $m : n = k : p$; 2) $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$. Как иначе называют это свойство?

60 Прочитай пропорцию разными способами, назови её крайние и средние члены:

- а) $9 : 1 = 18 : 2$; б) $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; в) $0,5 : \frac{1}{30} = 6 : 0,4$; г) $\frac{8}{2,4} = \frac{5}{1,5}$.

Докажи истинность утверждений, используя основное свойство пропорции.

61 Проверь двумя способами, является ли равенство пропорцией. Какой из способов проверки удобнее применить в каждом случае?

- а) $4 : 1\frac{1}{5} = 5 : 1,5$; б) $\frac{9}{10} = \frac{0,9}{0,01}$; в) $7 : 14 = 2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{2,5} = \frac{4}{3\frac{1}{3}}$.

62 Составь, если возможно, пропорцию из 4 данных чисел. Можно ли составить из этих чисел другие пропорции?

- а) 2; 5; 20; 8; б) 18; 4; 24; 3; в) 4,5; 6; 9; 12; г) $\frac{1}{7}$; 0,2; $\frac{5}{7}$; 1.

63 Напиши пропорцию, в которой каждое отношение равно: а) 2; б) $\frac{1}{3}$.

64 Составь различные пропорции из равенства $3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$. Сколько различных пропорций можно составить из чисел 3, 6, 2 и 9? Какие свойства чисел при этом используются?

65 Проверь истинность равенств. Из букв, соответствующих пропорциям, составь математический термин. Что он означает?

Р $1,5 : 5 = \frac{3}{5} : 2$

Д $\frac{0,125}{0,2} = \frac{5}{8}$

Н $\frac{\frac{2}{3}}{0,3} = \frac{12,4}{15}$

А $\frac{8}{9} : 1\frac{1}{3} = 0,2 : 0,3$

О $\frac{7,2}{0,08} = \frac{63}{0,7}$

Х $4,4 : \frac{2}{7} = 7 : \frac{5}{11}$

В $1,2 : 4 = 15 : 0,5$

М $\frac{0,48}{0,06} = \frac{2,4}{3}$

Л $1\frac{1}{6} : 2 = 2 : 3,5$

66 Найди неизвестный член пропорции (устно):

1) $\frac{a}{12} = \frac{5}{6}$;

3) $\frac{2,5}{4} = \frac{7,5}{c}$;

5) $k : 25 = 4 : 5$;

7) $7 : x = 2 : 3$;

2) $\frac{81}{b} = \frac{9}{4}$;

4) $\frac{3}{8} = \frac{d}{6,4}$;

6) $1,5 : 2 = n : 8$;

8) $0,3 : 4 = 9 : y$.

67 Реши уравнения:

1) $5,4 : a = 1,8 : 6,8$;

5) $2,4 : (0,5k) = 3,6 : 1\frac{2}{3}$;

9) $4 : (x - 3) = 2 : 3$;

2) $b : \frac{6}{7} = 5\frac{4}{9} : 4\frac{2}{3}$;

6) $7 : (\frac{4}{11}m) = 56 : 3,2$;

10) $\frac{2y + 1,6}{0,8} = \frac{30}{2,5}$;

3) $\frac{720}{91,2} = \frac{c}{0,513}$;

7) $\frac{8n}{9} = \frac{6,4}{0,45}$;

11) $\frac{1,5}{4x - 1} = \frac{0,4}{x + 4}$;

4) $\frac{4,2}{7\frac{5}{7}} = \frac{3\frac{1}{9}}{d}$;

8) $\frac{2,1}{27} = \frac{2\frac{1}{3}}{0,3p}$;

12) $\frac{5y}{1\frac{1}{3}} = \frac{y - 0,9}{0,2}$.

68 Найди значения x и y такие, чтобы каждое из двух равенств было верным:

1) $\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$ и $\frac{y}{25} = \frac{6,4}{5}$;

2) $x : 1\frac{2}{3} = y : 3\frac{1}{3}$ и $y : 1,5 = 0,2 : 0,75$.

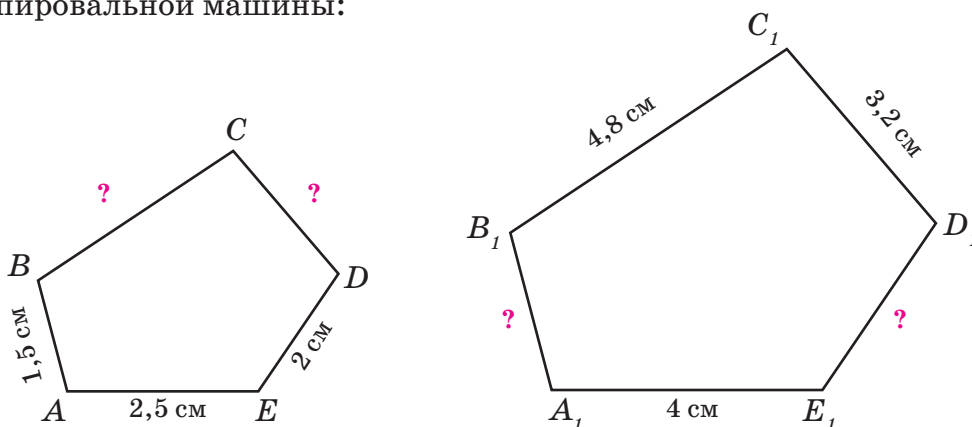
69 Дана пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Запиши другие пропорции, членами которых являются те же числа a , b , c и d .

70 Копировальная машина уменьшает размеры изображения в отношении 3 : 5.

1) Чему равна длина отрезка в оригинале, если на копии она равна 7,5 см?

2) Какой размер на копии будет иметь отрезок, длина которого в оригинале равна 8 см?

- 71 На рисунке показаны размеры фигуры и её копии, увеличенной с помощью копировальной машины:



- 1) В каком отношении увеличено изображение? Вырази это отношение в процентах. 2) Найди неизвестные длины сторон.

- 72 В сплаве золота и серебра масса золота так относится к массе серебра, как $2 : 5$. 1) Чему равна масса золота в сплаве, содержащем 80 г серебра? 2) Чему равна масса серебра в сплаве, содержащем 18 г золота?

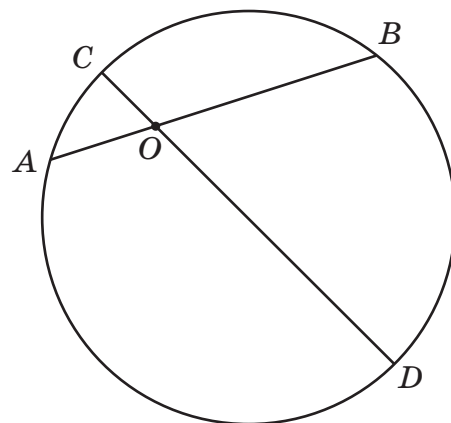
- 73 В любой окружности отношение длины окружности к её диаметру постоянно и равно примерно $22 : 7$. 1) Чему примерно равна длина окружности, если её диаметр равен 10 см? 2) Чему примерно равен диаметр окружности, если её длина равна 60 см? Ответы округли с точностью до десятых.

74 Математическое исследование

1) Проведи окружность произвольного радиуса и две хорды AB и CD этой окружности, пересекающиеся в точке O . Измерь длины отрезков хорд, на которые они разбиваются точкой O . Сравни произведения $AO \cdot OB$ и $CO \cdot OD$.

2) Повтори эксперимент ещё 2 раза. Что ты замечаешь? Сформулируй гипотезу. Можно ли на основании проведенного исследования считать твою гипотезу доказанной?

3) Какие пропорции можно составить из полученного равенства?



- π 75 Какое выражение может быть «лишним»? Как можно записать оставшиеся выражения с помощью одного буквенного равенства (в общем виде)?

1) $2x + 4$; $7x + 11$; $1,2x + 5$; $x^2 + 8$; $x + 1$; $0,4x + 25$; $x + 3,2$; $16x + 9$.

2) $5y + 2y$; $1,6y + y$; $0,2y + 4y$; $\frac{1}{3}y + 14y$; $3y + 4,6$; $y + \frac{2}{9}y$; $y + 0,7y$.

76 Найди истинные и ложные высказывания. Обоснуй свой ответ. Построй отрицания ложных высказываний.

1) $\forall a \in N: \frac{a}{8} = \frac{2}{a}$; 3) $\exists b \in R: b^2 + 9 = 0$ (R – множество дробей);

2) $\exists n \in N: n^2 - 16 = 0$; 4) $\forall c \in R: \frac{c}{5} > \frac{c}{6}$ (R – множество дробей).

77 Найди ложные высказывания и построь их отрицания:

1) Отношение двух чисел показывает, во сколько раз одно число больше или меньше другого.

2) Отношение двух чисел может быть равно обратному отношению этих чисел.

3) Масштаб изображения всегда выражается числом, меньшим 1.

4) Произведение крайних членов пропорции всегда равно произведению их средних членов.

5) Правильная дробь может быть равна 1.

6) Множество натуральных чисел является подмножеством множества дробей.

78 Запиши процентное отношение чисел 28 к 35 и 35 к 28. На сколько процентов первое число меньше второго? На сколько процентов второе число больше первого?

79 Как и на сколько процентов изменилось число, если:

1) его удвоили;

5) взяли от него треть;

2) его увеличили в 3,5 раза;

6) взяли от него две пятых;

3) его уменьшили в 4 раза;

7) разделили его пополам;

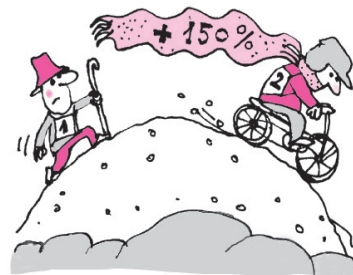
4) его уменьшили на четверть;

8) умножили его на 5?

80 Мотоциклист проехал путь между городами M и N со скоростью на 20% больше намеченной, а обратный путь – со скоростью на 20% меньше намеченной. Во сколько раз скорость мотоциклиста на обратном пути была меньше, чем по пути из M в N ?

81 Автобус проходит расстояние между двумя пунктами, равное 36 км, за 40 мин, а легковой автомобиль – на 40% быстрее. Через сколько времени они встретятся, если из конечных пунктов начнут одновременно двигаться навстречу друг другу? Есть ли лишнее данное в условии этой задачи?

82 Скорость велосипедиста на 250% больше скорости пешехода. Через 1,5 ч после того, как они одновременно начали двигаться из одного и того же пункта в одном направлении, расстояние между ними стало равно 16,5 км. Чему равны скорости движения велосипедиста и пешехода?



83 Расстояние между двумя пристанями s км. От этих пристаней одновременно отплыли два катера со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$). Построй формулу зависимости расстояния d между катерами от времени движения t , если они движутся: 1) навстречу друг другу; 2) в противоположных направлениях; 3) вдогонку; 4) с отставанием. (Считать, что встречи за это время не произойдет.)

84 Расстояние h , которое проходит в вакууме падающее вниз тело, не зависит от его массы, а зависит лишь от времени падения t . Приближённые значения величины h м в первые 5 секунд падения приведены в таблице. Построй формулу и график этой зависимости, подобрав на осях координат удобные единицы измерения.

t с	0	1	2	3	4	5
h м	0	5	20	45	80	125



Д

85 Найди верные равенства и из соответствующих им букв составь название денежной единицы. В каких странах она используется?

Д $0,2 : 6 = 1 : \frac{1}{3}$

Б $\frac{2}{3} = \frac{0,7}{10,5}$

Б $\frac{1,75}{0,2} = \frac{3,5}{4}$

А $2 : \frac{1}{3} = 3 : 0,5$

О $\frac{2,7}{0,36} = \frac{3}{0,4}$

Н $1\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 0,1 : 0,01$

П $1,5 : 3 = 3 : 4$

Л $\frac{1}{7} = \frac{10}{0,7}$

У $6,3 : 3 = 2 : 100$

С $0,9 : 6 = 0,06 : 4$

К $\frac{2,4}{0,6} = \frac{20}{5}$

Р $\frac{0,04}{0,8} = \frac{0,5}{10}$

86 Реши уравнения:

1) $x : 250 = 5,08 : 12,5$;

2) $1,32 : 3\frac{1}{7} = (1,4y) : \frac{5}{6}$;

3) $\frac{4,8}{2z + 15} = \frac{0,2}{5}$.

87 Размеры фигур, приведённых на рисунках 1 и 2, были увеличены в отношении 3 : 2.

1) Вырази увеличение изображения в процентах.

2) Изобрази в тетради копию чертежа, приведённого на рис. 1, произведя необходимые измерения и вычисления.

3) По копии чертежа, приведённого на рис. 2, восстанови его размеры в оригинале и нарисуй чертёж в тетради.

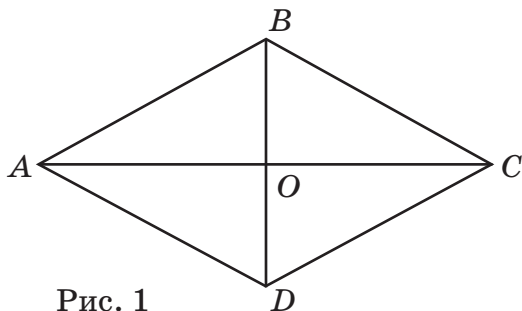


Рис. 1

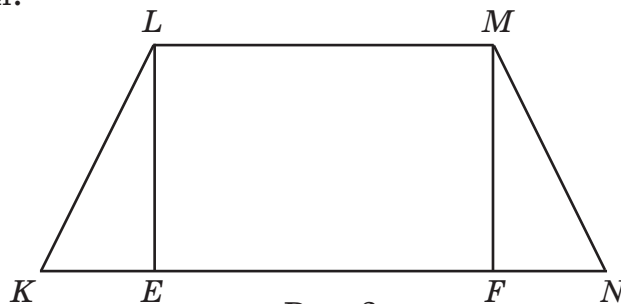


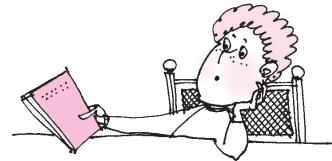
Рис. 2

88 Стороны прямоугольника относятся как 4 : 7, а его бóльшая сторона равна 31,5 см. Найди меньшую сторону, периметр и площадь этого прямоугольника.

89 Расстояние между двумя городами 145 км. Грузовая машина может пройти это расстояние за 2,5 ч. Скорость легковой машины на 50% больше скорости грузовой. Через сколько часов эти машины встретятся, если одновременно выедут из этих городов навстречу друг другу? Есть ли лишнее данное в условии этой задачи?

90 Площадь прямоугольника равна 12 см^2 . Построй формулу зависимости длины стороны b см этого прямоугольника от длины a см его второй стороны. Заполни таблицу соответственных значений a и b и построь график зависимости b от a .

a см	1	1,5	2	3	4	8	12
b см							



91 Математическое исследование

1) Начерти окружность радиуса 3 см и проведи её диаметр. Соедини концы диаметра с произвольной точкой окружности и измерь угол, образованный хордами. Проведи те же самые построения и измерения ещё для двух точек окружности. Что ты замечаешь?

2) Повтори эксперимент для окружности произвольного радиуса и сформулируй *гипотезу*. Можно ли считать её доказанной на основании проведенных тобой измерений? Почему?

92 1) Найди значения выражений A , B , C и D и из полученных чисел составь пропорцию. Можно ли из этих же чисел составить другую пропорцию?

A $3,6 \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12}\right)$

C $\left(4\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\right) : 0,15 - \frac{(14 - 0,14) : 0,014}{99}$

B $(84,8 \cdot 0,125) : (10,07 : 0,95)$

D $0,28 \cdot 4500 : 50,4 \cdot \left(\frac{16,2 - 12\frac{2}{5}}{190} + 0,1\right)$

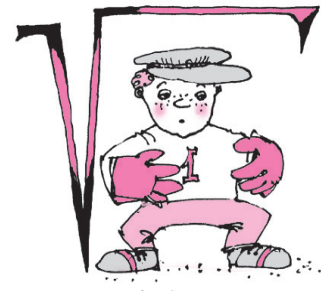
2) Сколько различных пропорций можно составить из этих чисел? Назови их.

C

93* Найди наименьшее число, кратное 36, в записи которого встречаются все 10 цифр по одному разу.

94*

Выполняя домашнее задание, Петя спешил на футбол и сделал ошибку. Вместо того чтобы данное однозначное число возвести в квадрат, он его удвоил. В результате он получил двузначное число, записанное теми же цифрами, что и искомый квадрат, но в обратном порядке. Какой правильный ответ должен был получить Петя?



95*

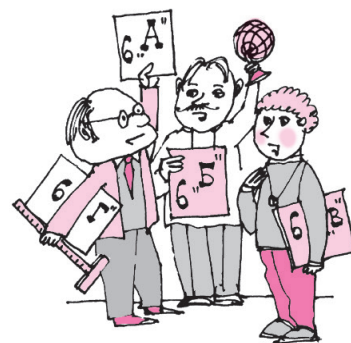
Предстоят спортивные соревнования между четырьмя шестыми классами одной школы. В учительской живо обсуждаются возможные результаты и высказываются прогнозы.

– Первое место займёт 6 «А», а второе – 6 «Б», – сказал учитель математики.

– Да что вы! – сказал учитель географии. – Я недавно ходил с ними в поход и знаю их возможности. 6 «А» займёт второе место, а 6 «Г» – только третье.

– А я думаю, что на втором месте будет 6 «В», а 6 «Г» будет на последнем месте.

Оказалось, что у каждого учителя один прогноз сбылся, а другой – нет. Какое место занял каждый класс?



4. Свойства и преобразование пропорций.

В предыдущем пункте мы назвали **основным свойством пропорций** следующее утверждение: **равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \neq 0$, является пропорцией тогда и только тогда, когда произведение крайних членов a и d равно произведению средних членов b и c .**

Как мы уже отмечали, основное свойство пропорций есть не что иное, как другая формулировка уже известного нам «перекрестного» правила равенства дробей:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad (a, b, c, d \neq 0).$$

Иначе говоря, мы имеем одно утверждение – «перекрёстное» правило для дробей, а называть его можно и основным свойством пропорций, и условием равенства дробей, и условием равенства отношений.

Использование различных терминов, имеющих один и тот же математический смысл, обусловлено тем, где и как они формировались. В арифметике, имеющей дело с числами, удобно говорить на языке дробей, язык отношений – со времен Древней Греции – распространён в геометрии, а язык пропорций общепринят в повседневной практике и при проведении математических расчетов в физике, химии и т. п.

Применение пропорций для решения различных практических задач требует определённой техники вычислений – использования некоторых дополнительных свойств пропорций. Эти свойства вытекают, естественно, из основного свойства пропорций, то есть все из того же «перекрестного» правила.



Простейшие преобразования пропорций связаны с перестановкой её членов. Итак, мы знаем, что

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Ясно, что равенство не нарушится, если, например, в нем поменять местами множители a и d . Следовательно, **в пропорции можно поменять местами её крайние члены**, то есть

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$$

Точно так же **в пропорции можно поменять местами её средние члены**. А значит, пропорция не нарушится, если в ней поменять местами одновременно и крайние, и средние члены: в этом случае получится пропорция, составленная из **обратных отношений**. На математическом языке данные равносильные преобразования можно записать так:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Вообще, **из данной пропорции можно составить несколько новых пропорций следующими преобразованиями**: 1) поменять местами крайние члены; 2) поменять местами средние члены; 3) составить пропорцию из отношений, обратных данным; 4) в четырёх имеющихся пропорциях поменять местами правую и левую части.

Однако при всех преобразованиях полезно проверять себя «перекрестным» правилом, поскольку числа, составляющие пропорцию, нельзя переставлять произвольным образом. Например, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, но $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{6}$.

Существуют и другие, менее очевидные преобразования пропорций. Например, **пропорция не нарушится, если к каждому крайнему её члену прибавить «соседний» средний член**:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Для доказательства этого свойства достаточно к левой и правой частям исходной пропорции прибавить по единице:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Далее, применим полученное свойство к пропорции, составленной из обратных отношений, и получим новое свойство:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \quad (a > b, c > d) \text{ и т. д.}$$

Пропорции, получаемые подобными преобразованиями, называют обычно *производными пропорциями*.

Несмотря на то что приведенные рассуждения имеют достаточно общий характер, производные пропорции часто оказываются полезными для решения практических задач. Например, мы знаем, что при равномерном движении скорость не меняется, поэтому отношения соответствующих значений расстояния и времени образуют пропорцию:

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2}.$$

Поменяв в полученной пропорции местами крайние члены, а затем левую и правую части равенства, получим новую пропорцию:

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Эта пропорция означает, что *при равномерном движении пройденный путь увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько раз увеличивается (уменьшается) время движения*. Поэтому, не выполняя вычислений, можно, например, сказать, что если скорость движения не изменяется, то при увеличении времени движения в 4 раза пройденный путь также увеличится в 4 раза.

К

96 Сделай все возможные перестановки членов пропорции, не нарушающие ее:

а) $1 : 2 = 5 : 10;$

в) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{3}{5} : \frac{3}{20};$

д) $m : n = k : p;$

б) $\frac{3}{12} = \frac{2}{8};$

г) $\frac{0,4}{0,8} = \frac{1,6}{3,2};$

е) $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}.$

97

Составь из равенства пропорцию и сделай все перестановки её членов, не нарушающие эту пропорцию:

а) $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6;$ б) $4 \cdot 0,5 = 2 \cdot 1;$ в) $2\frac{1}{3} \cdot 3 = 3\frac{1}{2} \cdot 2;$ г) $ab = xy.$

98

Составь пропорцию из данных чисел и сделай все перестановки её членов, не нарушающие эту пропорцию:

а) 2; 3; 4; 6; б) 3; 5; 12; 20; в) 0,5; 4; 1,6; 0,2; г) $\frac{1}{5}; \frac{1}{8}; 5; 8.$

99

Составь различные пропорции из соответствующих значений величин:

- 1) стоимости и количества товара при постоянной цене этого товара;
- 2) времени работы и объёма выполненной работы при постоянной производительности;
- 3) длины стороны прямоугольника и его площади при постоянной длине другой стороны;
- 4) массы вещества в растворе и массы раствора при постоянной концентрации.

Сделай вывод.



100 Докажи равносильность пропорций и определи, при каких значениях переменных данные утверждения истинны:

$$1) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};$$

$$4) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d};$$

$$2) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d};$$

$$5) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d};$$

$$3) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d};$$

$$6) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c};$$

$$7) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}.$$

101 Пользуясь свойствами, установленными в предыдущем задании, составь из данной пропорции три производные пропорции:

$$1) \frac{3}{2} = \frac{15}{10};$$

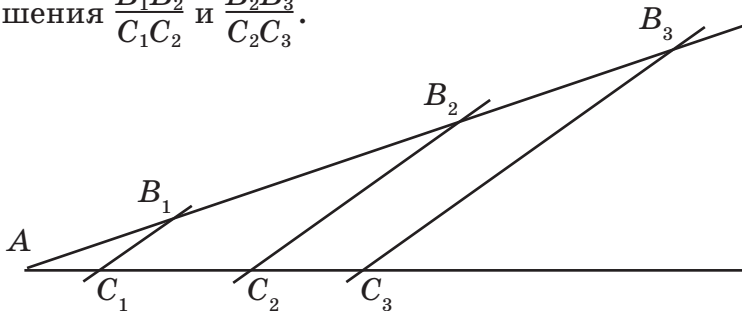
$$2) \frac{4}{5} = \frac{12}{15};$$

$$3) \frac{m}{n} = \frac{k}{p};$$

$$4) \frac{x}{y} = \frac{z}{t}.$$

102 Математическое исследование

1) Стороны угла A пересечены параллельными прямыми B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 . Измерь длины отрезков, образовавшихся на сторонах угла A , и сравни отношения $\frac{B_1B_2}{C_1C_2}$ и $\frac{B_2B_3}{C_2C_3}$.



2) Проведи исследование для произвольного угла A и произвольных параллельных прямых B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 , пересекающих его сторону. Сформулируй гипотезу. Можно ли считать её доказанной посредством проведенных измерений и вычислений?

3) Считая равенство $\frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}$ истинным, докажи, что $\frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_1B_3}{C_1C_3}$.

π

103 Найди верные равенства и расшифруй фамилию известного ученого. Когда и в какой стране он жил? Что ты о нем знаешь?

И $\frac{0,2}{1,3} = \frac{4}{2,6}$

А $\frac{2}{3} : 5 = 0,1 : \frac{3}{4}$

Е $2\frac{1}{6} : 10 = 1,3 : 6$

Ф $\frac{9,6}{0,3} = \frac{0,32}{0,01}$

Л $\frac{7}{15} : \frac{7}{9} = 0,3 : 0,5$

О $\frac{3,131}{31} = \frac{9,6}{0,3}$

П $\frac{60}{1,2} = \frac{0,5}{1}$

Г $\frac{5,5}{11} = \frac{0,77}{0,7}$

С $1,5 : 0,18 = 5 : 0,6$

104 Поставь вместо звездочек знаки действий так, чтобы получились верные высказывания:

а) $0,4 * \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$; б) $3 * 2\frac{1}{4} = 1\frac{1}{3}$; в) $1\frac{1}{5} * \frac{5}{8} = 0,75$; г) $2\frac{1}{6} * 0,5 = 1\frac{2}{3}$.

105 (Устно.) Найди неизвестные члены пропорций:

1) $\frac{5}{8} = \frac{15}{a}$; 3) $2 : c = 5 : 7$; 5) $\frac{k}{0,5} = 4 : 11$; 7) $\frac{1}{3} : 4 = \frac{x}{6}$;
 2) $\frac{b}{7} = \frac{5}{3}$; 4) $0,3 : 2 = d : 8$; 6) $9 : 2 = \frac{n}{5}$; 8) $\frac{0,8}{y} = 2 : \frac{3}{4}$.

106 Реши уравнения:

1) $2\frac{1}{7} : (1,5a) = \frac{5}{14} : 0,8$; 3) $3,8 : (4c + 3) = 2 : 2\frac{2}{19}$; 5) $\frac{3x - 1}{5} = \frac{x + 1}{3}$;
 2) $\frac{4,8}{1\frac{7}{9}} = (1,2b) : 6\frac{2}{3}$; 4) $\frac{0,3d - 1,5}{3\frac{1}{3}} = 0,84 : \frac{7}{15}$; 6) $\frac{0,5y}{\frac{4}{9}} = \frac{y + 3}{8}$.

107 Составь уравнения и реши их, используя правило «весов»:

1) Задуманное число увеличили в 5 раз, затем уменьшили на 3 и полученную разность уменьшили вдвое. В результате получили число на 0,3 меньше задуманного. Какое число задумали?

2) Задуманное число утроили, затем результат вычли из 10, полученную разность увеличили в 2 раза, а потом ещё на 2. Число, полученное в результате всех преобразований, оказалось в 5 раз больше задуманного. Какое число задумали?

108 1) Один трактор вспахал 15% всего поля и ещё 1,2 га, а второй – $\frac{3}{5}$ всего поля и остальные 0,3 га. Вместе они вспахали все поле. Чему равна площадь поля?

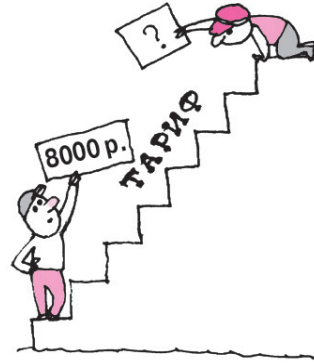
2) Рабочий сделал 60% всего задания и ещё 8 деталей, а его ученик – пятую часть всего задания и остальные 7 деталей. Вместе они сделали все задание. Сколько всего деталей сделали вместе мастер и ученик?

109 В результате реконструкции на одном заводе выпуск автомобилей увеличился с 8 до 10 тыс. штук в год, а на другом – с 10 до 12 тыс. штук в год. На каком заводе увеличение выпуска продукции в процентном отношении больше?

110 Выпуск продукции в прошлом году снизился на 10%, а в текущем – повысился на 20%. (Выпуск продукции сравнивается каждый раз с предыдущим годом.) Как изменился процент выпуска продукции за два года?

111 Во время эпидемии резко – в 3,6 раза по сравнению с обычным уровнем – возросло число заболеваний дифтерией. В результате лечебно-профилактических мероприятий число заболеваний снизилось на 75%. Когда заболеваемость была ниже – до эпидемии или после проведения профилактических мероприятий – и на сколько процентов?

- 112** Для рабочих некоторого предприятия в зависимости от разряда установлены различные тарифные ставки, причём для каждого следующего разряда тарифная ставка увеличивается на величину, равную 25% от ставки работника 1-го разряда. Чему равна зарплата у работника 9-го разряда, если у работника 1-го разряда она равна 8000 р.? Во сколько раз отличаются зарплаты работников 9-го и 1-го разрядов? На сколько процентов отличаются их зарплаты?



- 113** Тест состоит из четырёх заданий. Максимальная оценка за каждое задание составляет 100 баллов. Средний результат среди всех участников – 75 баллов. Коэффициентом успеха ученика называется отношение среднего балла этого ученика к среднему результату всех участников тестирования. В таблице указаны результаты прохождения теста несколькими учениками.

Фамилия, имя	Задача	Пример	Уравнение	Логика	Средний балл	Коэф. успеха
1. Логинов Боря	34	56	83	7		
2. Снежина Ира	95	100	96	69		
3. Тонков Ваня	21	75	99	45		
4. Осипова Катя	98	60	48	82		
5. Бейлин Витя	100	82	56	74		
6. Корин Саша	100	96	100	100		
7. Петрова Ира	57	100	93	44		

Найди коэффициент успеха каждого ученика из приведённого списка и расположи полученные числа в убывающем порядке. Если порядок коэффициентов определен верно, то из третьих букв соответствующих им фамилий учеников составит слово. Что оно означает?

D

- 114** Сделай все возможные перестановки членов пропорции, не нарушающие ее:

а) $16 : 8 = 2 : 1$; б) $\frac{0,3}{1,2} = \frac{2}{8}$; в) $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$.

- 115** Для данной пропорции составь несколько производных пропорций. Рядом запиши в буквенном виде, какие равносильные преобразования пропорций для этого использовались.

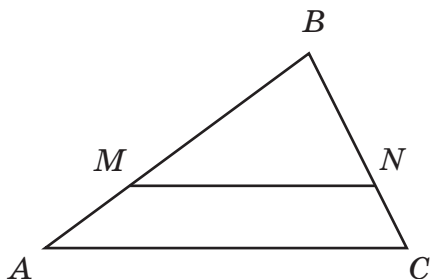
а) $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$; б) $\frac{3}{2} = \frac{18}{12}$; в) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.

- 116** Реши уравнения:

1) $\frac{6x}{25} = \frac{0,4}{0,15}$; 2) $1\frac{1}{9} : (0,8y) = \frac{1}{7} : 3,6$; 3) $\frac{1,25}{0,06} = \frac{z-6}{2,4}$; 4) $\frac{7}{2+t} = \frac{4,2}{t}$.

117 Математическое исследование

1) В треугольнике ABC проведен отрезок MN , параллельный стороне AC :



Измерь длины отрезков AM , MB , BN и NC и составь пропорцию из полученных чисел. Повтори исследование для произвольного треугольника ABC и отрезка MN , параллельного его стороне AC . Сформулируй гипотезу.

2) Используй преобразования пропорций, чтобы, исходя из гипотезы, получить новые свойства данной фигуры.

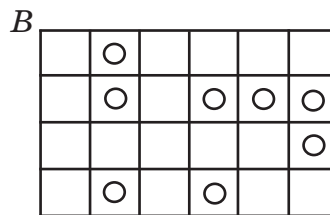
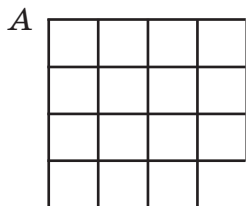
Можно ли на основании проведённых построений и измерений считать гипотезу и её следствия верными для общего случая? Почему?

118 Две трети учащихся класса поехали на экскурсию, а оставшиеся 25% учащихся и 3 человека пошли в кино. Сколько всего учащихся в классе?

119 При какой месячной процентной ставке (простой процентный рост) вклад на сумму 5000 р. возрастёт за 6 месяцев до 5225 р.? Чему равна в этом случае годовая процентная ставка (то есть процент роста вклада за год)?

120 Задуманное число удвоили, а затем уменьшили на 6. В результате оказалось, что полученное число так относится к 9, как 4 относится к 4,5. Какое число задумали?

с **121**^{*} 1) Разрежь фигуру A по линиям сетки на три одинаковые части.
2) Разрежь фигуру B по линиям сетки на 8 одинаковых по площади частей так, чтобы в каждой части был один кружок.



122^{*} Взяв у сестрёнки по одной карточке с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Гена разложил их по две на столе и вдруг увидел, что полученные двузначные числа относятся как 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Когда вечером он захотел показать этот интересный результат отцу, то обнаружил, что отсутствует карточка с цифрой 0. Однако, подумав, он из оставшихся карточек сложил пять чисел, отношение которых вновь было равно 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Как он раскладывал карточки в первый и во второй раз?

Задачи для самопроверки.

123 Прочитай и упрости отношения:

а) $18 : 30$; б) $7,2 : 0,64$; в) $5\frac{1}{3} : 3,2$; г) $\frac{2ab}{6a}$ ($a \neq 0$).

124 Найди процентное отношение:

а) 3 к 4; б) $0,15$ к $\frac{3}{8}$; в) 7 м к 5 м; г) 9 см^2 к $0,2 \text{ дм}^2$.

125 1) Расстояние между Москвой и Харьковом на карте равно 18,6 см, а в действительности – 744 км. Чему равен масштаб карты?

2) Расстояние от Москвы до Севастополя 1490 км. Какое расстояние между этими городами на карте, масштаб которой $1 : 10\,000\,000$?

3) На карте, масштаб которой равен $1 : 8\,000\,000$, расстояние от Москвы до Ростова-на-Дону 13,7 см. Какое расстояние между этими городами в действительности?

126 Найди неизвестный член пропорции:

1) $\frac{a}{8} = \frac{9}{4}$; 2) $5 : b = 15 : 12$; 3) $\frac{7}{3,6} = \frac{c}{1,44}$; 4) $0,5 : 3 = 1\frac{1}{3} : d$.

127 Реши уравнения:

1) $\frac{18}{5+x} = \frac{3}{2}$; 2) $(4y) : 1,2 = \frac{1}{6} : 0,1$; 3) $\frac{7}{3} = \frac{2z-11}{9}$.

128 Сделай все возможные перестановки членов пропорции $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$, не нарушающие пропорцию.

129 Реши уравнения, используя правило «весов»:

1) $1,5a - 3 = a + 7,5$; 2) $1,8b = 3(b - 0,12)$.

130 Составь выражение и, если можно, упрости его:

1) Аэросани прошли a км, что составляет 20% всего пути. Чему равен весь путь?

2) На печать отправили документ, в котором b страниц. В первую минуту принтер напечатал 30% всего документа, а во вторую – 25% всего документа. Сколько страниц ещё осталось напечатать?

3) Пылесос стоил s р. Его цена увеличилась на d р. На сколько процентов увеличилась цена пылесоса?

4) В соревновании участвовало x человек. Из них 10% стали призёрами соревнований. Среди призёров 40% составили женщины. Сколько женщин получили призы?

131 Найди значения выражений:

1) $27,21 + \left(3\frac{2}{5} - 1,141\right) : 0,45 \cdot 14,5$;

2) $\left[7,8 : \left(4\frac{3}{7} - 1\frac{9}{14}\right) + 0,312\right] : 0,02 - 3,89 \cdot 40$.



§ 4. Пропорциональные величины

1. Зависимости между величинами.

Как нам уже известно, математика зародилась тысячи лет назад и создавалась для решения многочисленных практических задач, возникавших как в жизни каждого человека, так и в жизни общества. Одним из наиболее значимых для практики результатов пройденного пути являются верные равенства, описывающие зависимости между величинами, – *формулы*.

Мы уже узнали многое из того, что открыли математики древности, в частности формулу площади прямоугольника: $S = ab$, где буквой S обозначена площадь прямоугольника, а буквами a и b – его длина и ширина. Эта формула описывает соотношение между тремя величинами – длиной, шириной и площадью прямоугольника. И надо сказать, что, хотя это соотношение было известно ещё в Древнем Египте и Месопотамии, пользоваться им могли лишь самые образованные люди того времени, так как действия умножения и деления были в те времена «высшей математикой».

Практический смысл формулы $S = ab$ состоит в том, что для вычисления площади заданного прямоугольника нет необходимости измерять её непосредственно, то есть укладывать прямоугольник квадратами единичной площади и подсчитывать их число. Достаточно лишь измерить и перемножить его длину и ширину.

Установление взаимосвязей между величинами имеет большое практическое значение. Например, в физике далеко не всякую величину можно измерить непосредственно каким-нибудь прибором, и, открывая связи между величинами, физики получают возможность **вычисления** значений таких величин с использованием формул. А математики разрабатывают способы вычислений, создавая аппарат для физики и других наук.

Примером физической формулы является хорошо известная нам формула пути $s = vt$, описывающая равномерное прямолинейное движение. Эта формула дает возможность по любым двум из величин – путь (s), скорость (v), время (t) – найти третью величину с помощью вычислений по одной из формул: $s = vt$, $v = s : t$, $t = s : v$.

Нам хорошо известны и многие другие зависимости между величинами. Каменщик выкладывает стену из кирпичей, наборщик набирает на компьютере текст, вода из трубы заполняет плавательный бассейн – во всех этих случаях совершается некоторая *работа*. Количественной характеристикой выполненной работы является соответственно число уложенных кирпичей, число набранных страниц, объём перекачанной воды.



Ещё одной важной характеристикой работы является то, насколько быстро она совершается. Для каменщика важно, сколько кирпичей он укладывает за час или за день, для наборщика – сколько страниц он набирает за час или за день, при наполнении бассейна водой важно, сколько воды поступает в него через трубу за секунду, минуту, час. В любом случае речь идет о том, какой *объём работы* совершается в некоторую *единицу времени*. Эта величина и называется **производительностью труда**, или просто **производительностью**.



Само понимание производительности приводит к соотношению между основными понятиями, связанными с работой, – объёмом работы, производительностью и временем работы. В самом деле, если в каждую единицу времени совершалась работа объёмом w , то за время t будет совершена работа wt , и поэтому объём выполненной работы $A = wt$.

Вообще зависимости, в которых одна из величин является произведением двух других, часто встречаются в жизни. В таблице приведены лишь некоторые примеры таких величин.

Произведение	Множитель	Множитель	Формула
Путь (s)	Скорость (v)	Время (t)	$s = vt$
Работа (A)	Производительность (w)	Время (t)	$A = wt$
Стоимость (C)	Цена (a)	Количество товара (n)	$C = an$
Площадь прямоугольника (S)	Длина (a)	Ширина (b)	$S = ab$
Масса вещества (m)	Плотность (ρ)	Объём (V)	$m = \rho V$
Масса вещества в растворе (m)	Концентрация (p)	Масса раствора (M)	$m = pM$

Подобных примеров можно привести очень много. Отвлекаясь от конкретных значений величин, общее свойство зависимостей между ними – а именно то, что одна из величин является произведением двух других, – можно записать так:

$$a = bc,$$

где a , b и c – это некоторые переменные величины. Вместо обозначений a , b и c могут использоваться другие буквы, но суть при этом не меняется. Полученную обобщенную формулу назовем **формулой произведения**.

Обратим внимание на существенную особенность формул, описывающих взаимосвязь между величинами: **единицы измерения входящих в неё величин должны быть согласованы между собой**.

Так, если в формуле пути скорость измерена в километрах в час, а время – в минутах, то формула даст неверный ответ. Например, если турист идет со скоростью 4 км/ч, то за 30 мин он пройдет не $4 \cdot 30 = 120$ км, а всего лишь $4 \cdot 0,5 = 2$ км. В данном случае, прежде чем воспользоваться формулой, необходимо привести в соответствие единицы измерения (перевести минуты в часы: 30 мин = 0,5 ч) и только после этого выполнять умножение.

Чтобы избежать подобных ошибок в применении формул, можно пользоваться любопытной арифметической связью между единицами измерения – их можно «перемножать» и «делить» по тем же правилам, что и... числовые дроби. При этом знак косой черты можно понимать именно как черту дроби:

$$\begin{aligned} \text{км/ч} &= \frac{\text{км}}{\text{ч}}, & \text{км} &= \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \text{ч}, & \text{ч} &= \text{км} : \frac{\text{км}}{\text{ч}}; \\ \text{р./кг} &= \frac{\text{р.}}{\text{кг}}, & \text{р.} &= \frac{\text{р.}}{\text{кг}} \cdot \text{кг}, & \text{кг} &= \text{р.} : \frac{\text{р.}}{\text{кг}}; \\ \text{м}^3/\text{мин} &= \frac{\text{м}^3}{\text{мин}}, & \text{м}^3 &= \frac{\text{м}^3}{\text{мин}} \cdot \text{мин}, & \text{мин} &= \text{м}^3 : \frac{\text{м}^3}{\text{мин}}. \end{aligned}$$

Естественно, не все зависимости между величинами описываются формулой произведения. Например, периметр прямоугольника равен удвоенной сумме его сторон $P = 2(a + b)$, а вовсе не их произведению.

Построением и исследованием различных зависимостей мы будем заниматься и дальше, а формула произведения дает лишь один из наиболее простых и распространенных типов зависимостей.

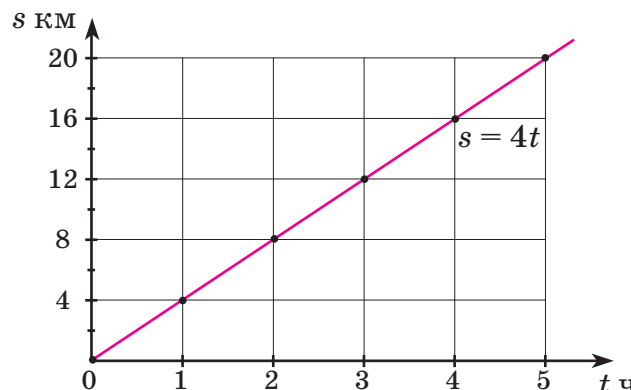
В заключение напомним, что зависимости между величинами можно задавать кроме формул, с помощью таблиц и графиков. Например, равномерное движение со скоростью 4 км/ч можно описать:

1) формулой: $s = 4t$;

2) таблицей:

t ч	0	1	2	3	4	5
s км	0	4	8	12	16	20

3) графиком:



К 132 Приведи примеры величин, связанных зависимостью вида $a = bc$. Из формул этих зависимостей вырази значение каждой величины.

Образец:

$$s = vt \Leftrightarrow v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$$

133 Построй формулу, устанавливающую зависимость: 1) числа n купленных тетрадей от их цены a , если стоимость всей покупки равна 600 р.; 2) времени t набора рукописи на компьютере от производительности w , если в рукописи 240 страниц; 3) массы m соли в растворе от массы M раствора, если концентрация раствора 30%.

134 Перерисуй в тетрадь и заполни таблицу единиц измерения величин в формулах:

1) $s = vt$

2) $A = wt$

3) $C = an$

s	v	t
м	м/с	?
?	км/ч	ч
км	?	мин
?	см/с	с

A	w	t
шт.	?	ч
м	м/день	?
?	шт./мин	мин
дм ³	?	с

C	a	n
?	р./шт.	шт.
р.	р./кг	?
р.	?	м
р.	р./тетр.	?

135 Прочитай формулу одновременного движения: $s = v_{\text{обл.}} \cdot t_{\text{встр.}}$. Что обозначают входящие в нее буквы? Перепиши эту формулу для случаев встречного движения и движения вдогонку, выразив $v_{\text{обл.}}$ через скорости v_1 и v_2 движущихся объектов ($v_1 > v_2$). По каждой из полученных формул вычисли:

- 1) s , если $v_1 = 36$ км/ч, $v_2 = 14$ км/ч, $t_{\text{встр.}} = 0,5$ ч;
- 2) $t_{\text{встр.}}$, если $s = 30$ км, $v_1 = 18$ км/ч, $v_2 = 12$ км/ч;
- 3) v_1 , если $s = 120$ км, $t_{\text{встр.}} = 1,5$ ч, $v_2 = 20$ км/ч.

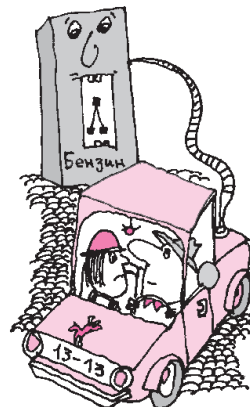
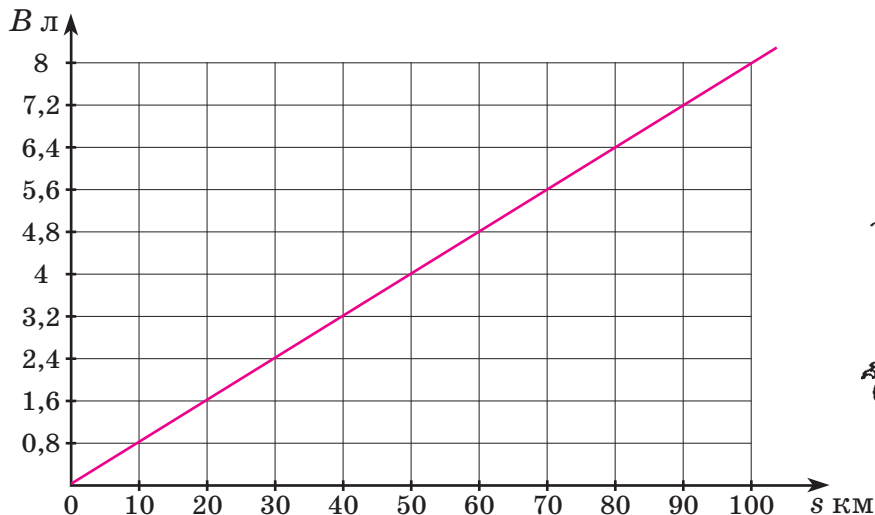
136 Две машины едут по одному шоссе со скоростями соответственно v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$). Сейчас расстояние между ними равно s_0 . Построй формулу зависимости расстояния d между машинами (до встречи) от времени движения t , если машины движутся: 1) навстречу друг другу; 2) в противоположных направлениях; 3) вдогонку; 4) с отставанием. Вырази из этих формул величины t и v_1 .

137 Запиши известные тебе формулы зависимостей величин, описывающие: 1) движение по реке; 2) процентное отношение чисел; 3) простой процентный рост; 4) сложный процентный рост. Вырази из этих формул (там, где это возможно) значения всех входящих в них величин.

138 При отправлении телеграммы оплата производится так: за подачу телеграммы оплачивается 18 р. и дополнительно за каждое слово – 1,1 р. Построй формулу зависимости стоимости C телеграммы от числа n слов в ней.

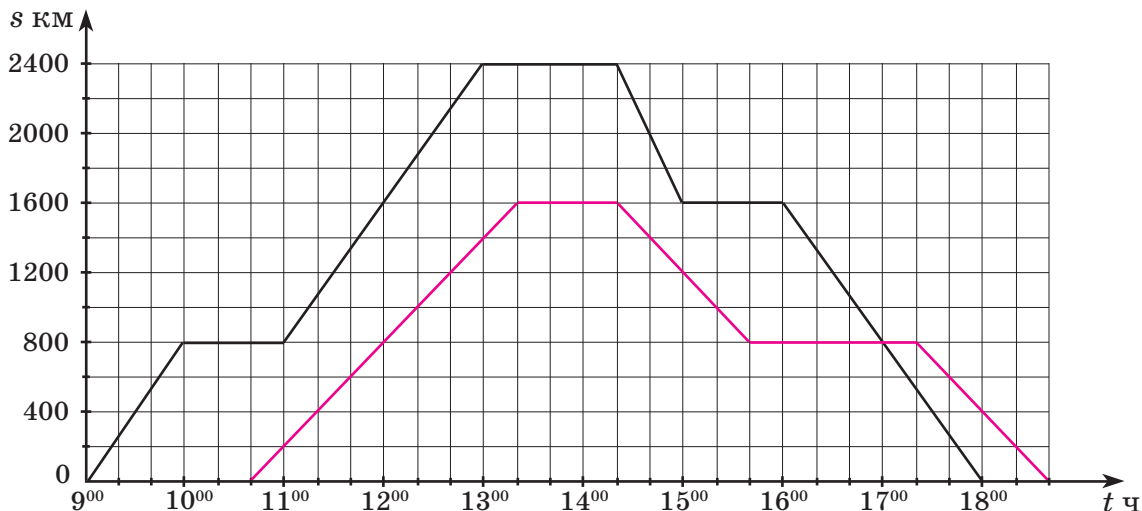
139 Построй формулу, устанавливающую зависимость между: 1) объемом V куба и его ребром a ; 2) площадью S прямоугольного треугольника и его катетами a и b ; 3) диаметром D и радиусом R некоторой окружности; 4) длиной стороны a прямоугольника, его периметром P и площадью S ; 5) площадью полной поверхности S куба и его ребром a ; 6) площадью полной поверхности S прямоугольного параллелепипеда и его измерениями a , b и c .

140 Ниже приведён график зависимости расхода бензина B л для автомобиля «Лада» от пройденного расстояния s км. Заполни таблицу и построй формулу зависимости B от s .



s км	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
B л										

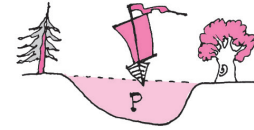
141 На рисунке изображены графики полета двух самолётов, вылетевших из аэропорта Внуково в одном направлении.



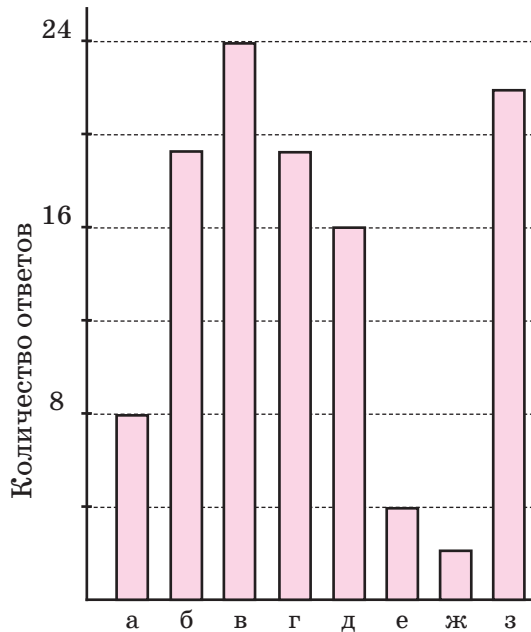
- 1) В какое время самолёты вылетели с аэродрома и вернулись обратно?
- 2) Сколько промежуточных посадок сделал в пути каждый из них? Чему равна продолжительность этих остановок?
- 3) С какой скоростью летели самолёты на всех участках пути?
- 4) На каком расстоянии от Внуково были они в 12 часов, в 14 ч 20 мин, в 16 ч 40 мин? Где были самолёты в это время – на земле или в воздухе?
- 5) В какое время они находились на расстоянии 400 км от Внуково?

- 142 В таблице показана зависимость скорости v м/с течения реки на отдельных участках от площади поперечного сечения P м² на этих участках. Построй формулу зависимости v от P и её график.

P м ²	120	80	60	48	40	30	24	20
v м/с	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,2



- 143 Для классного часа «Наши увлечения» шестиклассники провели в своём классе анкетирование. По его результатам они построили диаграмму.



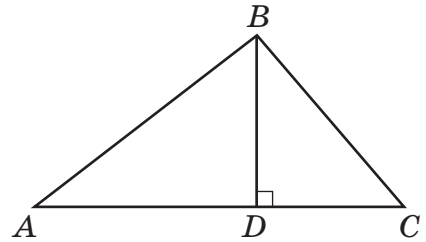
- а) Я занимаюсь музыкой (танцами).
- б) Я регулярно занимаюсь спортом.
- в) Мне нравятся компьютерные игры.
- г) Я люблю смотреть фильмы (мультфильмы)
- д) Я люблю слушать музыку.
- е) Я люблю читать.
- ж) Мне нравится ходить в театр.
- з) Я люблю путешествовать.

Используя диаграмму, ответь на вопросы:

- Сколько учеников любят читать, заниматься спортом?
 - Чем меньше всего любят заниматься эти школьники этого класса?
 - Назови два самых популярных увлечения ребят.
 - Какими занятиями увлекаются одинаковое число ребят?
 - Как ты думаешь, есть ли в этом классе ученики, которые имеют более одного увлечения?
- 143 Третьеклассникам задали вопрос: «Какая серия наборов Лего тебе нравится больше всего?» и представили результаты опроса в таблице. Переведи эти результаты в проценты и представь их в виде линейной диаграммы. При необходимости округли число процентов до целых.

Серия Лего	Френдс	Город (Сити)	Майнкрафт	Звёздные войны	Техник	Бионикл	Ниндзяго
Количество ответов	9	6	5	3	3	3	1

- 145** В треугольнике ABC отрезок BD перпендикулярен к основанию AC , $AC = a$, $BD = h$. Площадь треугольника ABC равна S . Построй формулу зависимости S от a и h . Вырази из этой формулы каждую из входящих в нее величин.



- π** **146** Объясни, какие преобразования пропорций произведены:

а) $\frac{7}{3} = \frac{14}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{3} = \frac{14}{7}$; в) $\frac{2}{5} = \frac{0,4}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{0,4} = \frac{5}{2}$; д) $\frac{5}{6} = \frac{20}{24} \Leftrightarrow \frac{5}{1} = \frac{20}{4}$;
 б) $\frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{8}{1} = \frac{16}{2}$; г) $\frac{3}{9} = \frac{5}{15} \Leftrightarrow \frac{12}{9} = \frac{20}{15}$; е) $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Leftrightarrow \frac{7}{1} = \frac{14}{2}$.

- 147** Реши уравнения:

1) $\frac{a}{1,8} = \frac{5}{3}$; 2) $\frac{2,5}{3\frac{1}{3}} = \frac{3c}{0,4}$; 3) $\frac{x+1}{7,2} = \frac{x}{4}$; 4) $\frac{12y-9}{2y} = \frac{0,5}{1\frac{1}{3}}$.

- 148** Упрости пропорции, используя равносильные преобразования, и найди x :

1) $\frac{3x+2\frac{1}{7}}{2\frac{1}{7}} = \frac{9}{2}$; 2) $\frac{5,2}{2x-5,2} = \frac{4\frac{1}{3}}{5\frac{2}{3}}$; 3) $\frac{19\frac{4}{13}}{9} = \frac{1,3x-0,72}{0,72}$.

- 149** Из посёлка A в поселок B выехал велосипедист со скоростью 16 км/ч. Через 2 ч ему навстречу из B в A вышел пешеход, скорость которого составляет 35% скорости велосипедиста. Через 1,5 ч после выхода пешехода расстояние между ним и велосипедистом стало равно 10,8 км. Чему равно расстояние между поселками A и B ?

- 150** Два поезда выехали с одной станции в одном направлении. Скорость первого поезда 72 км/ч, что составляет 80% скорости второго поезда. Второй поезд выехал на 2,5 ч позже первого. Через сколько времени он догнал первый поезд? На каком расстоянии друг от друга были поезда через 4 ч после выхода второго поезда? Через 15 ч после выхода второго поезда?

- 151** Автомобиль проехал по шоссе 250 км, а по проселочной дороге – на 80% меньше, чем по шоссе. Расход на каждые 100 км по шоссе составлял 12 л, а по проселочной дороге – на 50% больше. Сколько литров бензина в среднем расходовал автомобиль на каждые 10 км пути?

- 152** 1) Среднее арифметическое трёх чисел равно 9,4. Первое число на 3,5 больше второго, а третье составляет 60% второго. Найди меньшее число.
 2) Среднее арифметическое четырёх чисел равно 5,6. Второе число в 2,5 раза больше первого, третье составляет 120% второго, а четвёртое на 1,6 меньше первого. Найди среднее арифметическое первого и третьего чисел.

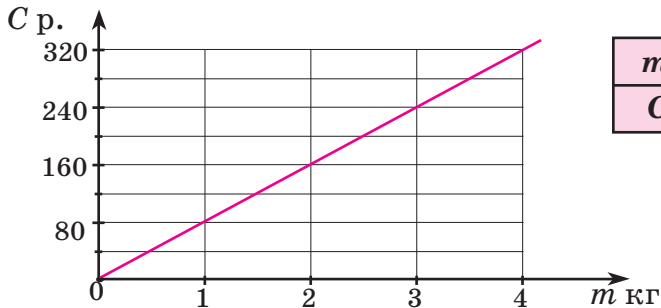
D

153 Построй формулу, устанавливающую зависимость между:

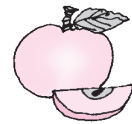
1) периметром P квадрата и его стороной a ; 2) площадью S квадрата и его стороной a ; 3) объёмом V прямоугольного параллелепипеда, площадью его основания S и высотой h .

154

На рисунке изображён график зависимости между массой m кг купленных яблок и их стоимостью C р. Перерисуй график в тетрадь и задай зависимость C от m таблицей и формулой.



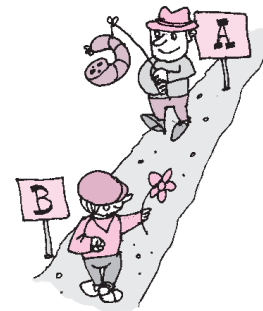
m кг	0	1	2	3	4
C р.					



155

Расстояние между двумя городами A и B равно 18 км. Задай с помощью формулы зависимость скорости v км/ч равномерного движения от времени t ч прохождения расстояния между данными городами. Заполни таблицу и построй график этой зависимости.

t	1	2	3	4	4,5	6	9	18
v								



156

Упрости пропорции, используя равносильные преобразования, и найди x :

$$1) \frac{x - \frac{2}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{48,3}{0,7}; \quad 2) \frac{1,8}{6,8} = \frac{0,042}{1\frac{1}{6}x + 0,042}.$$

157

С одной автобусной станции отошли в противоположных направлениях два автобуса. Первый автобус вышел на 0,8 ч раньше второго и через 2 ч прибыл в город A . Одновременно с ним второй автобус прибыл в город B , удалённый от A на 210 км. С какой скоростью ехали автобусы, если известно, что скорость второго автобуса была на 25% больше скорости первого автобуса?

158

Вычисли значения A , B , C и D и составь из полученных чисел какую-нибудь пропорцию:

A $(160,272 : 3,18 - 3,18) : 7,87$

C $6\frac{1}{3} : (2\frac{1}{9} \cdot 3,74 - 2,74 \cdot 2\frac{1}{9})$

B $64,78 : (3,16 \cdot 2,05) \cdot (8\frac{3}{25} : 8,12)$

D $1\frac{5}{7} \cdot 0,625 : \frac{2}{7} + [(1\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{4}] : 2,1$

C

159*

В магазин привезли 223 л масла в бидонах по 10 л и 17 л. Сколько было бидонов?

2. Прямая и обратная пропорциональные зависимости.

Если пешеход идёт с постоянной скоростью 4 км/ч, то движение его описывается формулой $s = 4t$. Из нее видно, что при увеличении множителя t в несколько раз во столько же раз увеличивается и произведение s . Например, если t увеличится в 3 раза, то и s увеличится в 3 раза:

$$s = 4t \Leftrightarrow 3s = 4 \cdot (3t).$$

Этот «математический» вывод согласуется и с житейскими представлениями. Действительно, если скорость постоянна, то за время в 3 раза большее и расстояние будет пройдено в 3 раза большее.

Величины, обладающие указанным свойством, называются **прямо пропорциональными** (или просто **пропорциональными**). В нашем примере путь при постоянной скорости прямо пропорционален времени движения. Это новое название величин связано с тем, что, как мы уже видели раньше, их соответственные значения образуют *пропорцию*:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{s_2}{s_1}.$$

И вообще, *две величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз другая увеличивается во столько же раз.*

Примеры таких величин возникают из формул вида $a = bc$, когда одна из величин постоянна. Если, например, величину b считать постоянной, то при увеличении c в несколько раз величина a увеличится во столько же раз, значит, величина a прямо пропорциональна величине c . Точно так же величина a прямо пропорциональна величине b – если считать постоянной величину c . В частности:

- стоимость товара пропорциональна его количеству при постоянной цене;
- количество товара пропорционально его стоимости при постоянной цене;
- объём выполненной работы пропорционален времени работы при постоянной производительности;
- время работы пропорционально объёму выполненной работы при постоянной производительности и т. д.

Постоянную величину в формуле $a = bc$ принято обозначать буквой k , а переменные величины – буквами x и y . Полученную формулу

$$y = kx$$

назовём **формулой прямой пропорциональности**, а число k в этой формуле – **коэффициентом пропорциональности**.

Рассмотрим теперь пример движения транспорта между двумя городами, расстояние между которыми 280 км. Мотоциклист, средняя скорость которого равна 40 км/ч, проедет это расстояние за 7 ч, а автомобиль, имеющий среднюю скорость 80 км/ч, – за 3,5 ч. Во сколько раз увеличилась скорость, во столько же раз уменьшилось и время пути.

Этот вывод можно было сделать и не обращаясь к конкретным числам, а проанализировав формулу $240 = vt$, которая описывает данное движение. Произведение в ней постоянно – это число 240. Поэтому во сколько раз увеличивается один множитель, во столько же раз уменьшается и второй.

Величины, обладающие таким свойством, называются **обратно пропорциональными**. В рассмотренном примере время обратно пропорционально скорости движения при постоянном пути.

И вообще, *две величины называют обратно пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз другая уменьшается во столько же раз.*

Величины, зависимость между которыми описывается формулой $a = bc$, обратно пропорциональны, если значение произведения постоянно. Так, обратно пропорциональными являются

- *время работы и производительность при постоянном объёме работы,*
- *цена и количество товара при постоянной стоимости,*
- *длина и ширина прямоугольника при постоянной площади* и т. д.

Если, как и раньше, постоянную величину в формуле $a = bc$ обозначить буквой k , а переменные величины – буквами x и y , то получим $k = xy$, или, как принято записывать,

$$y = \frac{k}{x}.$$

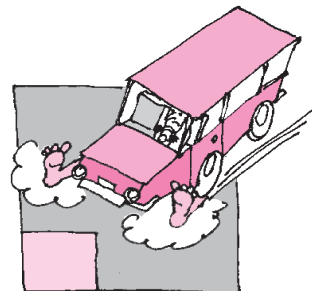
Полученную формулу назовем **формулой обратной пропорциональности**.

Таким образом, понятия прямой и обратной пропорциональности тесно связаны между собой. Их объединяет формула произведения $a = bc$. *Обе эти зависимости являются частными случаями формулы произведения: прямая пропорциональность – при постоянном множителе, а обратная – при постоянном произведении.*

Заметим, что далеко не всякие величины связаны друг с другом пропорциональной зависимостью. Например, рост человека зависит от его возраста, тормозной путь автомобиля – от его скорости, площадь квадрата – от его стороны. Однако все эти и многие другие зависимости не являются прямо или обратно пропорциональными. Так, увеличение возраста человека в 2 раза вовсе не означает, что в 2 раза увеличился и его рост.

Некоторые из непропорциональных зависимостей также могут быть описаны общими формулами, помогающими выявлять аналогию между различными физическими процессами. Например, если автомобиль, стоящий около дома, начал движение с постоянным ускорением и время движения увеличивается в 2, 3, 4 и т. д. раз, то пройденный им путь увеличивается соответственно в 4, 9, 16 и т. д. раз. Подобная же зависимость существует между длиной стороны квадрата и его площадью.

Если для зависимостей между величинами формулы ещё не найдены, то их описывают табличным или графическим способом.



К

160 Что общего у формул:

$$s = 5t, \quad C = 2,4n, \quad A = 16t, \quad m = 0,4M, \quad S = 5b, \quad P = 4a?$$

Запиши зависимость между величинами, которую задают эти формулы, в обобщенном виде. Как называется такая зависимость? Придумай свои примеры.

161 Какая формула может быть «лишней»:

$$a = 45 : n, \quad t = \frac{12}{v}, \quad ab = 5,6, \quad d = 18 + 4t, \quad k = 0,8 : M, \quad 360 = vt?$$

Запиши зависимость между величинами, которую задают остальные формулы, в обобщенном виде. Как называется такая зависимость? Придумай свои примеры.

162 Определи, является ли зависимость между величинами прямой или обратной пропорциональностью. Найди коэффициент пропорциональности и запиши формулу зависимости между этими величинами:

- 1) скорость и время движения на участке пути 50 км;
- 2) скорость движения и путь, пройденный за 3 ч;
- 3) объём работы, выполненной за 7 ч, и производительность труда;
- 4) производительность станка и время изготовления на нем 300 деталей;
- 5) стоимость отреза ткани и его длина при цене 120 р. за метр;
- 6) цена тетрадей и их количество, которые можно купить на 24 р.;
- 7) длина и ширина прямоугольника, площадь которого равна 60 м²;
- 8) масса вещества в 200 г раствора и его концентрация.

163 1) Автомобиль проехал за некоторое время расстояние 60 км. Какое расстояние проедет он за это же время, если: а) увеличит скорость в 1,5 раза; б) уменьшит скорость в 2 раза?

2) Велосипедист проехал некоторое расстояние за 0,6 ч. За какое время он проедет то же расстояние, если: а) увеличит скорость в 1,5 раза; б) уменьшит скорость в 2 раза?

3) На некоторую сумму денег можно купить 12 порций мороженого. Сколько порций мороженого можно будет купить на эти же деньги, если цена на мороженое: а) увеличится на треть; б) уменьшится на 50%?

4) За некоторое время с помощью принтера было распечатано 400 страниц. Сколько страниц распечатает за это же время принтер, производительность которого: а) на 100% больше; б) на 75% меньше?

164 Какие из приведённых ниже формул являются прямой пропорциональностью, обратной пропорциональностью или не являются ни тем, ни другим?

- | | | | | |
|-------------------|------------------------|------------------------|------------------|-------------------------|
| 1) $P = 5,2b$; | 3) $K = \frac{n}{2}$; | 5) $a = \frac{8}{b}$; | 7) $M = m : 5$; | 9) $G = \frac{1}{4k}$; |
| 2) $a = 8q + 1$; | 4) $c = 4 : d$; | 6) $300 = vt$; | 8) $ab = 18$; | 10) $S = a^2$. |

165 Каждая из зависимостей, приведенных в таблице, является прямой или обратной пропорциональностью. Установи вид зависимости, запиши её формулу и заполни пустые клетки:

1)

x	1	2	3	4	5	6
y	2,8	5,6				

3)

x	0,8	3,2	4,8		2,4	
y	4	16		20		8

2)

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	60	30				

4)

x	2	0,2		1		0,8
y	4	40	0,5		3,2	

166 Реши задачу двумя способами:

- 1) Имеется 100 граммов 30% -го раствора соли. Его смешали с 200 граммами воды. Чему равна концентрация полученного раствора?
- 2) К 300 граммам 20% -го сахарного сиропа добавили 100 граммов воды. Чему равна концентрация полученного сиропа?

π

167 Какое выражение может быть «лишним»:

- 1) $\frac{a}{b+c}$; $\frac{a+b}{c}$; $a:(b+c)$; $(a+b):c$; $a+b:c$;
- 2) $a:c-b:c$; $\frac{a-b}{c}$; $a-b:c$; $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$; $(a-b):c$?



168 Найди x из пропорции:

- 1) $\frac{x}{0,3} = \frac{2}{0,01}$;
- 2) $\frac{1\frac{1}{7}}{8x} = \frac{5}{4\frac{2}{3}}$;
- 3) $\frac{x-3,8}{3x} = \frac{0,4}{5}$.

д

169 1) Поезд проходит расстояние между двумя станциями за 3,2 ч. Сколько времени ему понадобится, чтобы пройти с той же скоростью путь:
а) в 4 раза меньший; б) в 2,5 раза больший?

2) Бригада рабочих отремонтировала некоторый участок дороги за 12 дней. Сколько дней потребовалось бы на ремонт этого участка бригаде, производительность которой: а) на 20% выше; б) на 50% ниже?

170 По таблице установи вид зависимости между величинами, если известно, что она является прямой или обратной пропорциональностью. Построй формулу и график этой зависимости.

1)

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

2)

x	1	2	3	4	6	9	18
y	18	9	6	4,5	3	2	1

171 Реши задачу двумя способами:

Смешали 200 граммов 25% -го раствора серной кислоты и 300 граммов воды. Чему равна концентрация полученного раствора?

с

172* Найди наименьшее число, которое начинается с цифр 2008 и делится на все числа от 1 до 9.

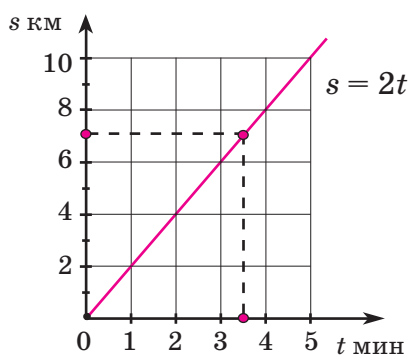
3. Графики прямой и обратной пропорциональности.

Зависимости между величинами можно задавать с помощью таблиц, формул и графиков. В таблицах фиксируется результат измерения величин, графики наглядно представляют зависимости между ними, а формулы позволяют исследовать их свойства. Именно поэтому способ задания зависимостей с помощью формул называется *аналитическим*, в отличие от *табличного* и *графического* способов.

Рассмотрим три ситуации: движение автомобиля со скоростью 2 км/мин, покупку тесьмы по цене 2 р./дм и распечатку текста на принтере с производительностью 2 стр./мин. Зависимости между временем движения и пройденным расстоянием, стоимостью покупки и длиной тесьмы, временем распечатки и числом напечатанных страниц являются прямо пропорциональными и задаются формулами: $s = 2t$, $C = 2n$, $A = 2t$. Составим таблицы и построим графики этих зависимостей:

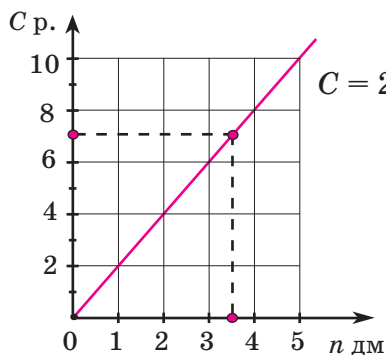
$$s = 2t$$

t	1	2	3	4	5
s	2	4	6	8	10



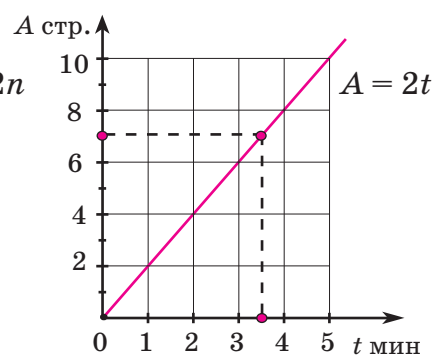
$$C = 2n$$

n	1	2	3	4	5
C	2	4	6	8	10



$$A = 2t$$

t	1	2	3	4	5
A	2	4	6	8	10

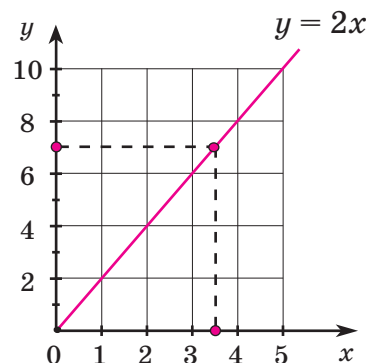


Мы видим, таким образом, что таблицы и графики получились совершенно одинаковыми, только обозначения на осях имеют разный смысл. Отвлекаясь от конкретных величин и обозначая их буквами x и y , получим общую формулу $y = 2x$, её таблицу и график. Он называется *графиком прямо пропорциональной зависимости $y = 2x$* .

Этот график позволяет анализировать все три рассмотренные выше ситуации *одновременно*. Так, определив по графику, что значению $x = 3,5$ соответствует $y = 7$, мы тем самым определяем сразу, что за 3,5 мин автомобиль проедет 7 км, за 3,5 дм тесьмы надо заплатить 7 р., а за 3,5 мин принтер распечатает 7 страниц.

$$y = 2x$$

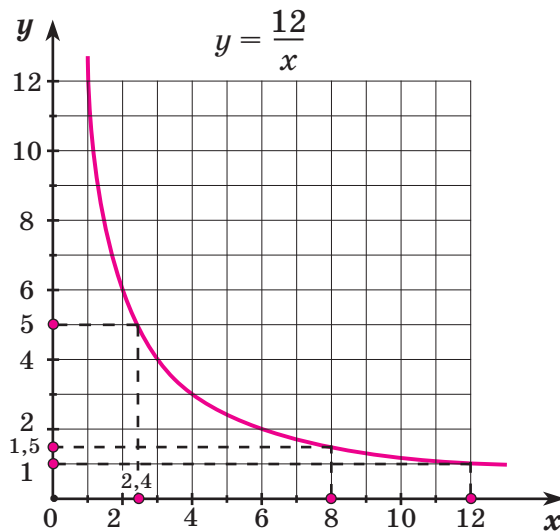
x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10



Формула $y = 2x$ является частным случаем формулы $y = kx$ при $k = 2$. Придавая коэффициенту k различные значения, мы будем получать различные расположения графиков на плоскости, но все эти графики – прямые линии.

Построим теперь график обратной пропорциональности при $k = 12$. Он задается формулой $y = \frac{12}{x}$. Вначале составим таблицу некоторых значений x и соответствующих им значений y , отметим точки с координатами $(x; y)$ на координатной плоскости и соединим точки линией.

x	1	2	3	4	6	8	12
y	12	6	4	3	2	1,5	1



Полученный график может служить моделью разнообразных практических ситуаций. Например, если расстояние между двумя поселками равно 12 км, то по этому графику можно проследить, как зависит время y прохождения этого пути от скорости x : при скорости 2,4 км/ч весь путь будет пройден за 5 ч, при скорости 8 км/ч – за 1,5 ч, а при скорости 12 км/ч – всего лишь за 1 ч.

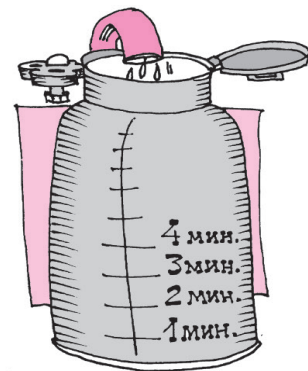
При различных значениях k графики обратной пропорциональности будут получаться различными. Но все они, как и графики прямой пропорциональности, будут похожи друг на друга.

К

173

Построй формулу, описывающую зависимости между величинами во всех четырех задачах. Какая это зависимость? Построй её таблицу и график и реши с помощью графика все четыре задачи одновременно.

- 1) Лыжник идет со скоростью 6 км/ч. Какое расстояние он пройдет за 2,5 ч? За какое время он пройдет 27 км?
- 2) Литр питьевой воды стоит 6 р. Сколько надо заплатить за 2,5 л питьевой воды? Сколько питьевой воды можно купить на 27 р.?
- 3) Через кран поступает в минуту 6 л воды. Сколько воды поступит через кран за 2,5 мин? За сколько времени через кран поступит 27 л воды?
- 4) Минутная стрелка поворачивается за 1 мин на угол 6° . На какой угол повернется она за 2,5 мин? За сколько времени повернется минутная стрелка на угол 27° ?

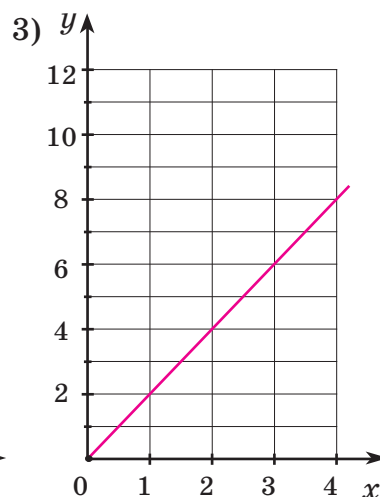
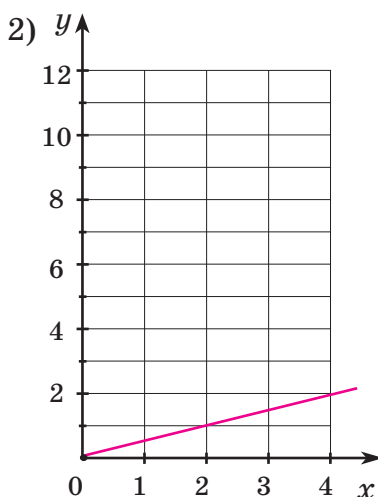
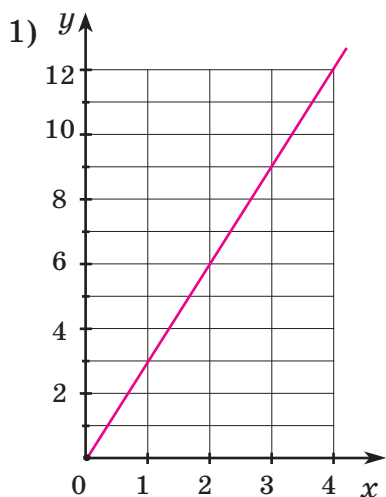


174

Построй на одном чертеже графики зависимостей:
 $y = 0,5x$, $y = x$, $y = 2x$, $y = 4x$, $y = 5x$.

Рассмотри их расположение и сделай вывод.

175 На чертежах представлены графики прямой пропорциональности. Определи по ним коэффициенты пропорциональности и запиши формулы. Какие значения может принимать y , когда x изменяется в границах: $1 \leq x \leq 4$?



176 Построй формулу, описывающую зависимости между величинами во всех четырех задачах. Какая это зависимость? Построй для нее таблицу и график. Используя график, реши все четыре задачи одновременно.

- 1) Расстояние от поселка до железнодорожной станции 24 км. Чему должна быть равна скорость движения, чтобы преодолеть это расстояние за 1,5 ч? За сколько времени пройдет его пешеход со скоростью 6 км/ч?
- 2) Объем бассейна 24 м³. Чему равна производительность трубы, подведенной к бассейну, если бассейн наполняется через неё за 1,5 ч? За сколько времени наполнится этот бассейн трубой производительностью 6 м³/ч?
- 3) За 1,5 кг моркови заплатили 24 р. Чему равна цена моркови за килограмм? Сколько капусты по цене 6 р. за килограмм можно купить на эти же деньги?
- 4) Площадь прямоугольника 24 см². Чему равна его длина, если ширина равна 1,5 см? Чему равна ширина прямоугольника той же площади, длина которого равна 6 см?

177 Построй на одном чертеже графики данных зависимостей. Рассмотр их расположение и сделай вывод.

1) $y = \frac{6}{x}$;

x	0,5	1	2	3	6	12
y						

3) $y = \frac{24}{x}$;

x	1	2	3	4	6	12
y						

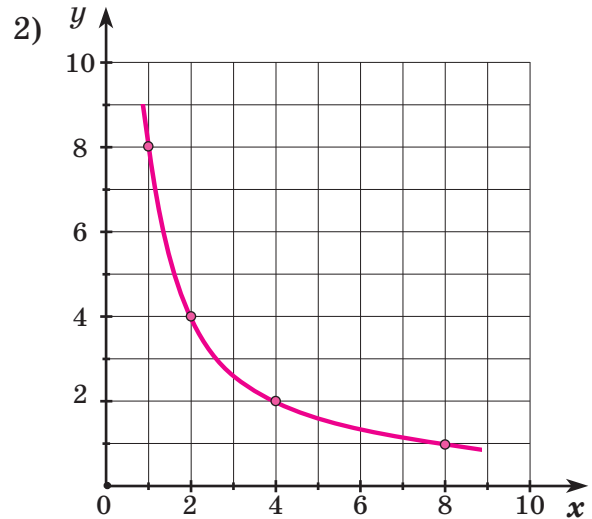
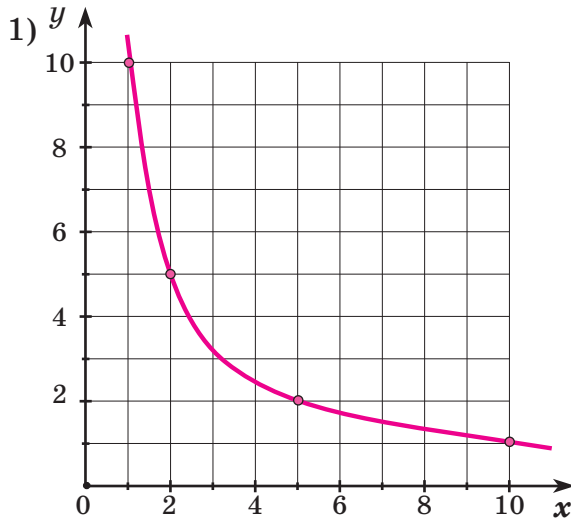
2) $y = \frac{12}{x}$;

x	2	3	4	6	8	12
y						

4) $y = \frac{36}{x}$.

x	3	4	6	9	12
y					

178 На чертежах представлены графики обратной пропорциональности. Определи по ним коэффициенты пропорциональности и запиши формулы. При каких значениях x значения y изменяются в границах: $2 \leq y \leq 5$?



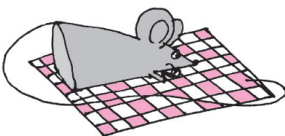
π

179 Счет-тест (Каждое задание выполняется в течение 2 мин. Записываются только ответы.)

- | | | | |
|--------------|-------------------|-----------------|--------------------|
| 1) $0,3 + 4$ | 2) $0,6 \cdot 10$ | 3) $5,8 : 10$ | 4) $0,5 \cdot 0,1$ |
| $1,2 + 0,5$ | $100 \cdot 2,4$ | $3,6 : 0,1$ | $0,18 : 0,2$ |
| $0,04 + 0,6$ | $0,08 \cdot 8$ | $2,5 : 100$ | $0,42 + 5,8$ |
| $0,52 + 0,4$ | $0,3 \cdot 0,05$ | $9,6 : 0,01$ | $2,4 \cdot 0,125$ |
| $21,8 + 0,6$ | $0,7^2$ | $0,56 : 7$ | $3,6 - 2,9$ |
| $4 - 0,9$ | $0,9 \cdot 0$ | $4,8 : 0,4$ | $600 \cdot 0,7$ |
| $1 - 0,08$ | $7,2 \cdot 0,01$ | $6 : 0,15$ | $4 : 0,25$ |
| $2,5 - 0,7$ | $1,25 \cdot 0,8$ | $0,48 : 0,006$ | $1,04 + 0,76$ |
| $0,3 - 0,03$ | $0,4 \cdot 0,25$ | $0,26 : 1,3$ | $545,4 : 54$ |
| $5,06 - 1,5$ | $0,2^3$ | $3,418 : 341,8$ | $2 - 0,012$ |

180 Вычисли значение выражения, запиши ответы в таблицу и расшифруй математический термин:

- | | | | |
|---|----------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| Ц $9\frac{3}{4} - 7\frac{5}{6}$ | З $10,32 - 8,6$ | К $0,9 \cdot 1\frac{1}{3}$ | Э $9\frac{2}{3} - 1,75$ |
| И $4\frac{2}{13} \cdot 1\frac{4}{9}$ | Е $4,78 \cdot 20,5$ | А $\frac{4}{5} + 2,7$ | О $3\frac{1}{7} \cdot 7$ |
| Р $6 : 5\frac{1}{7}$ | Т $22,57 : 7,4$ | Н $4\frac{3}{4} : 1,9$ | Ф $5,625 : \frac{5}{6}$ |



1,2	22	$\frac{11}{12}$	6,75	6,75	6	$1\frac{11}{12}$	6	97,99	2,5	3,05

181 К данной тройке чисел подбери четвёртое натуральное число так, чтобы из них можно было составить пропорцию. Укажи все возможные варианты.

- 1) 12; 4; 6; 2) 3; 1; 15.

182 Докажи утверждения, если $b \neq 0, d \neq 0$:

$$1) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a + nb}{b} = \frac{c + nd}{d}; \quad 2) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{nb - a}{b} = \frac{nd - c}{d}.$$

183 Являются ли величины прямо или обратно пропорциональными:

- а) время движения и пройденный путь при постоянной скорости;
- б) пройденный путь и скорость движения при постоянном времени;
- в) скорость и время, затраченное на один и тот же путь в школу;
- г) стоимость и количество товара при данной цене;
- д) производительность труда и объём выполненной работы при постоянном времени;
- е) длина и масса стандартного трамвайного рельса;
- ж) долгота дня и ночи в сутках;
- з) масса нескольких одинаковых конфет и их количество;
- и) расстояние по железной дороге и стоимость билета при постоянном тарифе за один километр;
- к) длина окружности колеса и количество оборотов этого колеса на данном расстоянии?

184 Реши задачу двумя способами:

- 1) За 2 кг картошки заплатили 30 р. Сколько стоят 8 кг картошки?
- 2) Два одинаковых трактора, работая равномерно, вспахали поле за 6 дней. За сколько дней вспашут это поле 4 таких трактора, если будут работать с той же производительностью?
- 3) Поезд проехал 612 км за 9 ч. Сколько километров он проедет за 3 ч, если будет ехать с той же скоростью?
- 4) Автомобиль на путь 250 км затратил 18 л бензина. Сколько бензина потребуется ему, чтобы проехать 500 км при том же расходе бензина на 1 км?

185 Реши уравнения:

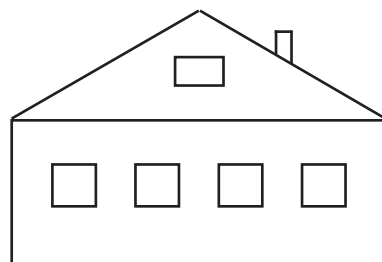
$$1) \frac{0,35}{\frac{2}{3}x} = \frac{0,45}{x - 10};$$

$$3) \frac{0,2x + 3}{2\frac{3}{11}} = \frac{1,1x}{5};$$

$$2) (6x + 2,4) : 3\frac{5}{9} = 2,25 : \frac{1}{3};$$

$$4) (x - \frac{6}{13}) : 0,8 = (5x + 6) : 13.$$

186 На рисунке изображён план фасада дома, выполненный в некотором масштабе. Длина фасада реального дома равна 10 м. Выполни на чертеже необходимые измерения и определи: а) высоту стен реального дома; б) высоту дома с учётом крыши.



187 Длина первого прямоугольника на 20% больше длины второго, а ширина – на 40% меньше ширины второго. На сколько процентов площадь первого прямоугольника меньше площади второго прямоугольника?

188 Рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при сохранении оплаты за единицу продукции заработная плата выросла на 5%?

D

189 Построй формулу, описывающую зависимости между величинами в данных задачах. Построй таблицу и график этой зависимости и реши по графику обе задачи одновременно.

1) Спортсмен бежит со скоростью 5 м/с. Какое расстояние он пробежит за 4 с? За сколько секунд он пробежит расстояние, равное 15 м?

2) Набор одной страницы рукописи на компьютере стоит 5 р. Сколько рублей надо заплатить за набор 4 страниц? Сколько страниц набрано, если оплата составила 15 р.?

190 Построй формулу, описывающую зависимости между величинами во всех трёх задачах. Построй таблицу и график этой зависимости и реши по графику все три задачи одновременно.

1) Расстояние от деревни до поселка 6 км. За сколько времени проедет его велосипедист, скорость которого 12 км/ч? С какой скоростью надо идти пешеходу, чтобы пройти это расстояние за 2 ч?

2) Бак вмещает 6 м³ воды. За сколько времени выкачает воду из этого бака насос, производительность которого 12 м³/ч? С какой производительностью работает насос, который выкачивает всю воду за 2 ч?

3) В бидоне 6 л молока. Его разлили поровну в 12 банок. Сколько литров молока в каждой банке? Сколько двухлитровых банок можно наполнить из этого бидона?

191 Реши каждую задачу несколькими разными способами:

1) За 3 одинаковые книги заплатили 324 р.

Сколько рублей стоят 12 таких книг?

2) Заготовленного корма хватит двум хомякам на 60 дней. На сколько дней хватит этого корма 8 хомякам при постоянном расходе корма на одного хомяка в день?



192 Реши уравнения:

$$1) 3x : 0,2 = 2 \frac{1}{7} : \frac{5}{14}; \quad 2) \frac{6,8}{x+8} = \frac{2}{x}.$$

193 Докажи высказывания, если $b \neq 0$, $d \neq 0$, $b \neq d$:

$$1) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+2b}{b} = \frac{c+2d}{d}; \quad 2) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}.$$

194 Найди значение выражений A , B и C . Подбери четвёртое число так, чтобы получилась пропорция. Сколько различных чисел можно подобрать?

A $0,992 + (8,109 : 1,5 + 840 \cdot 1,04 - 791,406) : 12,5;$

B $(2 \frac{3}{11} + 5 \frac{8}{11} \cdot 0) \cdot [3 \frac{5}{6} : (3 \frac{5}{6} - 0) + 2,7 \cdot 1 \frac{1}{3} - \frac{1}{3} : 1 \frac{2}{3} \cdot 1];$

C $[18 \frac{1}{3} : 11 + 0,8 \cdot (4 \frac{1}{6} - 3 \frac{3}{4})]^2.$

C

195* Имеется 4 арбуза различной массы. Как, пользуясь чашечными весами без гирь, расположить их по возрастанию массы посредством не более пяти взвешиваний?



196* Сколько всего натуральных чисел, меньших 100, которые: а) делятся на 2, но не делятся на 3; б) делятся на 2 или на 3; в) не делятся ни на 2, ни на 3?

4. Решение задач с помощью пропорций.

Если зависимости прямо или обратно пропорциональные, то соответствующие значения величин образуют пропорцию.

Действительно, из формулы прямой пропорциональности $y = kx$ следует, что $k = \frac{y}{x}$, поэтому отношения соответствующих значений пропорциональных величин равны k и, следовательно, равны между собой:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Переставив в этой пропорции крайние члены, получим пропорцию

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}.$$

Другими словами, *если величины прямо пропорциональны, то отношение двух значений одной величины равно отношению соответствующих значений другой величины.*

Аналогичные рассуждения проведем для обратно пропорциональных величин. Из формулы обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ следует, что $k = xy$, а значит, произведения соответствующих значений величин x и y равны. Из равенства $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ на основании перекрестного правила получаем

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Таким образом, *если величины обратно пропорциональны, то отношение двух значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой величины.*

Установленные правила позволяют использовать пропорцию для решения задач, в которых говорится о прямо или обратно пропорциональных величинах.

Алгоритм решения задач с помощью пропорций сформулируем следующим образом:

1. *Внимательно* прочитать условие и вопрос задачи.
2. Установить вид зависимости (прямая или обратная пропорциональность).
3. Проверить соответствие единиц измерения.
4. Обозначить неизвестную величину x .
5. Составить по условию задачи таблицу.
6. Записать пропорцию.
7. Решить полученное уравнение.
8. Проверить соответствие полученного ответа реальности.
9. Ответить на вопрос задачи.

Приведём несколько примеров решения задач с помощью пропорций.

Задача 1. Автомобиль на 56,8 км пути затратил 4,26 л бензина. Сколько литров бензина потребуется ему, чтобы проехать 160 км при постоянном расходе бензина на 1 км?

Решение:

Пусть x л – расход бензина на 160 км. Количество израсходованного бензина при данных условиях задачи пропорционально пройденному пути.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & 56,8 \text{ км} - 4,26 \text{ л} & \downarrow \\ & 160 \text{ км} - x \text{ л} & \downarrow \end{array}$$

$$\frac{56,8}{160} = \frac{4,26}{x} \Leftrightarrow x = \frac{160 \cdot 4,26}{56,8} \Leftrightarrow x = \frac{16 \cdot 426}{568} \Leftrightarrow x = 12$$

О т в е т: потребуется 12 л бензина.

Задача 2. На путь от одного посёлка до другого велосипедист, двигаясь со скоростью 12,5 км/ч, затратил 0,7 ч. С какой скоростью он должен был ехать, чтобы преодолеть этот путь за 0,5 ч?

Решение:

Пусть x км/ч – искомая скорость велосипедиста. Скорость движения (при постоянном пути) обратно пропорциональна времени.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & 12,5 \text{ км/ч} - 0,7 \text{ ч} & \uparrow \\ & x \text{ км/ч} - 0,5 \text{ ч} & \uparrow \end{array}$$

$$\frac{12,5}{x} = \frac{0,5}{0,7} \Leftrightarrow x = \frac{12,5 \cdot 0,7}{0,5} \Leftrightarrow x = \frac{125 \cdot 7}{5 \cdot 10} \Leftrightarrow x = 17,5$$

О т в е т: велосипедист должен был ехать со скоростью 17,5 км/ч.

С помощью пропорций можно решать и задачи на проценты, так как число процентов пропорционально соответствующей части величины. Преимущество данного способа состоит в том, что с помощью пропорций все три типа задач на проценты решаются одинаково. Приведём пример.

Задача 3. Цена сыра, равная 280 р., увеличилась на 15%. Какой стала новая цена сыра?

Решение:

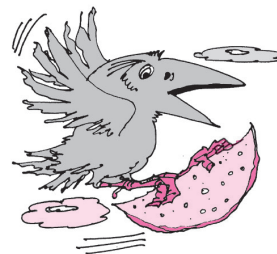
1) Пусть x р. – сумма, на которую произошло повышение цены.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & 280 \text{ р.} - 100\% & \downarrow \\ & x \text{ р.} - 15\% & \downarrow \\ \frac{280}{x} = \frac{100}{15} & \Leftrightarrow x = \frac{15 \cdot 280}{100} & \Leftrightarrow x = 42 \end{array}$$

2) $280 + 42 = 322$ (р.)

О т в е т: новая цена сыра 322 р.

Конечно, вычислить 15% от 280 р. быстрее умножением $0,15 \cdot 280$. Но зато способ пропорций «унифицирует» задачи на проценты, то есть делает их одинаковыми. Каким способом действовать – пусть каждый выбирает сам. Лучше всего знать оба способа, а решать тем, который удобнее.



К

197 В чём состоит способ пропорций? Объясни, почему величины в задачах прямо пропорциональны, и реши их способом пропорций.

- 1) Наташа готовит для школьного вечера пригласительные билеты. За полчаса она успела оформить 4 билета. За сколько времени, работая с той же скоростью, она оформит 30 билетов?
- 2) Для приготовления 4 порций салата требуется 50 г майонеза. Сколько майонеза потребуется для приготовления 10 порций салата?
- 3) Спортсмен, пробежав по кругу стадиона 20 раз, преодолевает 9 км. Сколько километров он преодолеет, пробежав 14 кругов?
- 4) Из 14 м ткани можно сшить 5 одинаковых платьев. Сколько метров ткани нужно на 3 таких платья?

198

Объясни, почему величины в задачах обратно пропорциональны, и реши их способом пропорций.

- 1) Автомобиль, двигаясь со скоростью 80 км/ч, проехал расстояние между двумя городами за 4 ч 30 мин. С какой скоростью ему надо ехать, чтобы пройти обратный путь за 4 ч?
- 2) С конвейера сходит 180 деталей в минуту, с такой скоростью работы заказ для подрядчика можно выполнить за 8 ч. Сколько времени потребуется на такой же заказ, если после усовершенствования технологии конвейер будет выпускать 200 деталей в минуту?
- 3) В магазин привезли одинаковое количество яблок и груш. Яблоки разложены в 25 ящиков по 18 кг в каждом, а груши – в 30 ящиков поровну. Сколько килограммов груш в каждом ящике?
- 4) Маленькое колесо повозки, имеющее длину окружности 2,4 м, при прохождении некоторого расстояния сделало 1250 оборотов. Сколько оборотов сделало при прохождении этого же расстояния большое колесо с длиной окружности 3 м?

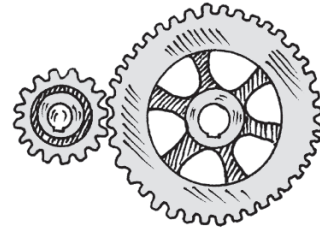
199 Определи вид зависимости между величинами в задачах и реши их способом пропорций.

1) Принтер распечатывает 27 страниц за 4,5 мин. За сколько времени он распечатает с той же скоростью 300 страниц?

2) В коробке 48 пачек чая по 250 г в каждой. Сколько получится из этого чая пачек по 150 г?

3) Автомобиль проехал 310 км, истратив 25 л бензина. Какое расстояние может проехать автомобиль на полном баке, вмещающем 40 л, если расход бензина на 1 км останется прежним?

4) На первой из двух сцепляющихся шестерен 32 зубца, а на второй – 40. Сколько оборотов сделает вторая шестерня, в то время как первая сделает 215 оборотов?



200 Реши задачи на проценты способом пропорций.

1) Сколько серной кислоты в растворе массой 75 г, если концентрация раствора составляет 12%?

2) В 80 т железной руды после её обогащения содержится 76 т железа. Какой процент железа в обогащённой руде?

3) Вкладчик положил деньги в банк под 6% годовых и получил через год доход 81 р. Какая сумма была положена в банк?

201 Определи, какие компоненты арифметических действий связаны прямой, а какие – обратной пропорциональной зависимостью. Используя способ пропорций, реши задачи.

1) Если некоторое число умножить на $9\frac{1}{3}$, то получится 3,5. Что получится, если умножить это же число на 0,8?

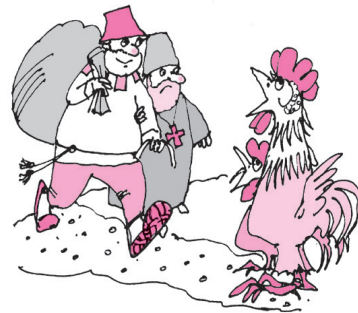
2) Если некоторое число разделить на $2\frac{1}{7}$, то получится 28. На сколько надо разделить это же число, чтобы получить в частном 0,6?

3) Если 7,68 разделить на некоторое число, то получится 240. Какое частное получится, если разделить на тот же делитель число 1,44?

202 Задача-шутка

Один петух разбудил своим пением двух человек. Сколько надо таких петухов, чтобы разбудить 10 человек?

203 Поп со своим работником Балдой возвращались с базара домой со скоростью 4,5 версты в час и прошли весь путь за $1\frac{2}{3}$ ч. С какой скоростью они должны были идти, чтобы вернуться домой на 10 мин раньше?



204 Самолёт, двигаясь со скоростью 720 км/ч, пролетел расстояние между двумя городами за 2,25 ч. На сколько ему надо увеличить скорость, чтобы сократить время перелёта на 15 мин?

205 Мотоциклист за 1,5 ч проехал 40% всего пути. Через сколько времени ему останется проехать треть всего пути, если скорость его не изменится?

206 Четверо рабочих могут выполнить некоторую работу за 18 ч. Сколько ещё надо пригласить рабочих, чтобы выполнить всю работу в 1,5 раза быстрее, если производительность всех рабочих одинакова? Есть ли лишнее данное в условии этой задачи?

207 Первая машинистка печатает страницу за 8 мин, а вторая – за 10 мин. Первая машинистка отпечатала за некоторое время 25 страниц. Сколько страниц отпечатала за это же время вторая машинистка?

208 Некоторое расстояние автомобиль проезжает за 3 ч, а грузовик – за 4 ч. Они одновременно выехали из двух городов навстречу друг другу. Автомобиль проехал до встречи 120 км. Какое расстояние проехал до встречи грузовик?

209 Реши задачи двумя способами – способом пропорций и по правилам решения задач на проценты. Какой способ ты находишь более удобным?

1) Площадь поля 80 га. Кукурузой засеяли 45% всей площади. Сколько гектаров поля засеяно кукурузой?

2) Завод выпустил за первую декаду месяца 1540 автомобилей, что составило 44% месячного плана. Сколько автомобилей должен по плану выпустить завод за месяц?

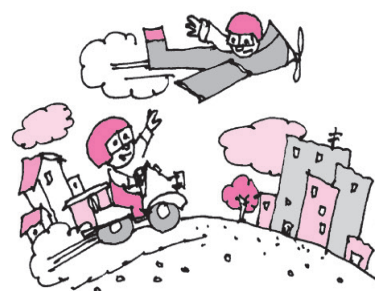
3) Из 150 деревьев, посаженных в парке, 84 тополя. Какой процент всех посаженных деревьев составляют тополя?

210 Найди два способа решения задачи.

Из 100 кг молока получается 8 кг сыра. Сколько килограммов молока нужно для приготовления 30 кг сыра?

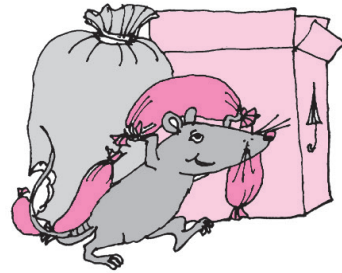
211 Бригада из 4 человек выложила за 6 ч стену из кирпичей высотой 4,8 м. За какое время могла бы выложить стену такой же ширины и высотой 8 м бригада из 2 человек, работающих с такой же производительностью?

212 Для трёх лошадей запасли 900 кг сена на 60 дней. Сколько сена надо запастись для пяти лошадей на 120 дней, если расход сена на каждую лошадь одинаков?



213 Для 8 человек, отправляющихся в экспедицию на 30 дней, заготовлено 180 кг крупы.

- 1) Сколько килограммов крупы при той же норме надо добавить к уже заготовленной, если в экспедицию отправляются 5 человек на 80 дней?
- 2) На сколько дней хватит 360 кг крупы, если в экспедицию отправляются 12 человек?



π

214 Интеллектуальная разминка

Подбери для данных трех слов четвертое так, чтобы оно «относилось» к третьему, как второе к первому:

- 1) Труд – награда, лень – ...
- 2) Дружба – любовь, вражда – ...
- 3) Кино – экран, театр – ...
- 4) Человек – туловище, дерево – ...

215 Вычисли и запиши следующее число в ряду ответов при сохранении закономерности:

- | | | | |
|--------------------|----------------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1) $1,2 \cdot 0,5$ | 2) $1\frac{7}{9} : 1\frac{5}{7}$ | 3) $1600 \cdot 0,00075$ | 4) $4\frac{1}{12} - 2,75$ |
| $0,024 : 0,08$ | $6 - 2\frac{8}{9}$ | $10,556 : 5,2$ | $16 : 6\frac{2}{3}$ |
| $3,1 - 2,95$ | $3,5 + 5\frac{5}{6}$ | $5 - 1,996$ | $1\frac{13}{14} + 1,5$ |
| $0,005 + 0,07$ | $11\frac{2}{3} \cdot 2,4$ | $2,647 + 1,3535$ | $1\frac{1}{9} \cdot 4$ |

216 Как изменятся:

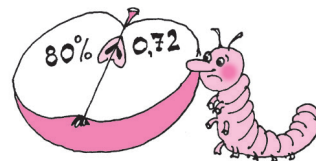
- 1) сумма, если одно слагаемое увеличить на 5, а другое увеличить на 4;
- 2) разность, если уменьшаемое увеличить на 5, а вычитаемое увеличить на 4;
- 3) произведение, если один множитель уменьшить в 3 раза, а другой – уменьшить в 6 раз;
- 4) частное, если делимое уменьшить в 3 раза, а делитель уменьшить в 6 раз?

217 Сравни выражения ($d, k \neq 0$):

- 1) $a + 1,8$ и $a + 1\frac{4}{7}$;
- 2) $2\frac{1}{4} - b$ и $1,4 - b$;
- 3) $c \cdot 1\frac{3}{5}$ и $1,6c$;
- 4) $d : \frac{3}{7}$ и $d : \frac{7}{3}$;
- 5) $n - 2,5$ и $n - 2\frac{1}{3}$;
- 6) $1\frac{5}{11} : k$ и $1\frac{7}{13} : k$.

218 Найди число, если:

- 1) четверть его трети составляет $3\frac{2}{3}$;
- 2) 80% от его половины равны 0,72;
- 3) $\frac{7}{12}$ числа на 0,5 меньше $\frac{5}{6}$ этого числа;
- 4) 120% от числа в 4 раза больше разности этого числа и 3,5.



219 1) Какое число надо прибавить к числителю и к знаменателю дроби $\frac{2}{7}$, чтобы получить дробь, равную 0,5?

2) Какое число надо вычесть из числителя и из знаменателя дроби $\frac{17}{22}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{2}{3}$?

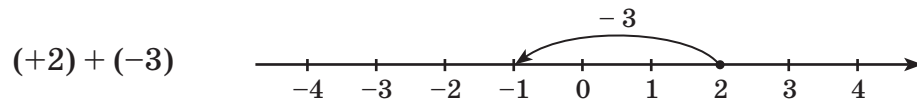
3) Знаменатель дроби на 8 больше числителя. Если к числителю дроби прибавить 1, а из знаменателя вычесть 1, то получится дробь, равная 0,4. Чему равен знаменатель данной дроби?

4) Знаменатель дроби на 1 меньше числителя. Если из числителя вычесть 4, а знаменатель умножить на 4, то получится дробь, равная 0,125. Чему равен числитель данной дроби?

220 Придумай по данному выражению задачу о «доходах» (прибавлении денег) и «расходах» (уменьшении денег) и найди ответ:

1) $(+3) + (-7)$; 2) $(-5) + (+8)$; 3) $(-1) + (-4)$.

221 Придумай задачу о доходах и расходах по данному выражению и схеме. Как, пользуясь этой аналогией, записать выражение короче, без скобок?



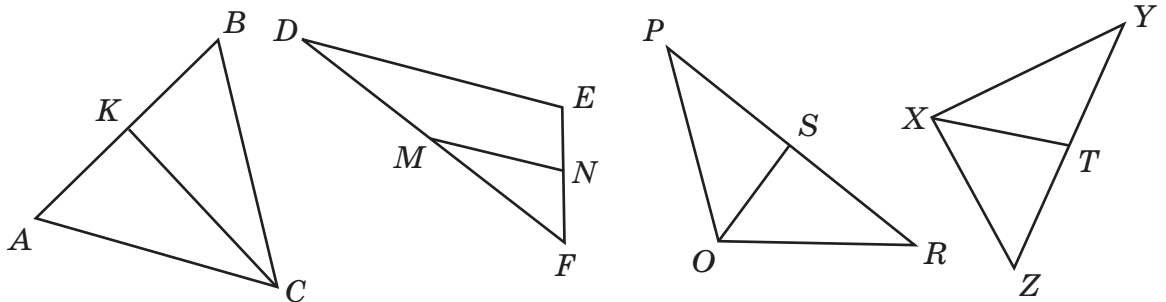
222 Найди значения выражений методом доходов и расходов и с помощью координатной прямой:

1) $4 - 5$; 2) $-3 + 8$; 3) $-2 - 4$; 4) $-1 + 5$.

223 1) Прочитай определение и назови определяемое понятие.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

2) Найди на рисунке отрезки, являющиеся медианами треугольников:



3) Сколько медиан в треугольнике? 4) Начерти произвольный треугольник и проведи все его медианы. Что ты замечаешь? Повтори эксперимент ещё раз и сформулируй гипотезу. Можно ли считать построенную гипотезу доказанной на основании выполненных построений?

224 Вычисли:

$$[(40,6 - 7,48) : 1,6 - (44,6 \cdot 0,0108) : 0,24] : 2,79 + (132 + 14,042 + 3,25) : 45,24.$$

D

225 Реши задачи способом пропорций:

1) Чтобы связать шарф длиной 1,4 м, нужно 350 г шерсти. Сколько шерсти потребуется, чтобы связать шарф такой же ширины длиной 180 см?

2) Для класса куплено 120 тетрадей по 12,5 р. Сколько тетрадей по цене 15 р. можно купить на эти же деньги?



226 Реши задачи на проценты способом пропорций:

1) За перевозку мебели заплатили 1200 р., что составило 4% её стоимости. Сколько рублей стоила мебель?

2) Костюм до снижения цен стоил 7500 р. Цена на костюм снижена на 6%. На сколько рублей снижена цена?

3) В растворе массой 280 г содержится 56 г соли. Чему равна концентрация этого раствора?

227 Подводная лодка, передвигаясь со скоростью 15,6 км/ч, пришла к месту назначения за 3 ч 45 мин. С какой скоростью она должна была идти, чтобы пройти весь путь на 30 мин быстрее?

228 Длина прямоугольника 18,4 см, а площадь – 276 см². На сколько см надо увеличить длину, чтобы при той же ширине площадь увеличилась до 300 см²?

229 Реши задачу двумя способами:

В зале расставили 288 стульев в 12 одинаковых рядов. Сколько таких рядов получится из 360 стульев?

230 Бригада из 4 человек за 28 дней сшила 560 одинаковых комплектов белья. За сколько дней сошьёт 300 таких же комплектов бригада из 6 человек, если все портные будут работать с одинаковой производительностью?

231 Числитель дроби на 8 меньше знаменателя. Если числитель увеличить в 2 раза, а знаменатель увеличить на 6, то получится дробь, равная $\frac{2}{3}$. На сколько данная дробь больше, чем $\frac{1}{6}$?

232 Построй треугольник ABC и проведи в нем медианы AM и BN . Пусть O – точка пересечения медиан. Найди отношение отрезков $AO : OM$ и $BO : ON$, выполнив необходимые измерения. Повтори эксперимент ещё раз и сформулируй гипотезу. Можно ли на основании проведённых построений и измерений считать данное утверждение доказанным?

233 Вычисли:

$$\frac{\left[\left(3\frac{8}{9} \cdot 2,4 + 0,6 \cdot 3\frac{8}{9} \right) \cdot 1\frac{6}{7} : 2,6 + 0,4 \cdot \left(2\frac{3}{28} - 1\frac{4}{21} \right) \right] : 0,1}{\left(3,125 + 1\frac{9}{40} \right) \cdot 4}$$



с 234* Адам Рис (1492 – 1559 гг.)

Трое подмастерьев купили дом за 204 гульдена. На покупку первый дал втрое больше денег, чем второй, а второй дал вчетверо больше, чем третий. Сколько гульденов внес на покупку дома каждый из подмастерьев?

235* Бхаскара I (VI в.)

Найти наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 остаток 1 и, кроме того, делящееся на 7.

236* Бхаскара II (1114 – 1185 гг.)

Одна треть, одна пятая и одна шестая цветков лотоса в венке посвящены соответственно богам Шиве, Вишну и Сурье, одна четвёртая – Бхавани. Остальные 6 цветков предназначены почитаемому праведнику. Сколько цветков лотоса сплетено в венок?



5. Пропорциональное деление.

Необходимость разделить заданную величину или число в данном отношении часто возникает в практической жизни человека – при приготовлении различных смесей, растворов, блюд по кулинарным рецептам, при распределении прибыли или мест в парламенте и т. д.

Например, если два предпринимателя вложили в проект соответственно 3 млн р. и 5 млн р. и получили 12 млн р. прибыли, то справедливость требует, чтобы полученная прибыль делилась *пропорционально* их вложениям, выраженным соответственно числами 3 и 5. Само слово «пропорционально» происходит от латинского *proportio* – «соразмерность».

Как же узнать, сколько денег должен получить каждый предприниматель? Обозначим части, которые они должны получить соответственно a и b . Тогда $a : b = 3 : 5$.

Поменяем в пропорции местами средние члены и обозначим коэффициент пропорциональности k . Получим равенство

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = k,$$

из которого следует, что $a = 3k$, $b = 5k$. Так как сумма двух частей составляет 12 млн р., то значение k должно удовлетворять равенству

$$3k + 5k = 12 \Leftrightarrow 8k = 12 \Leftrightarrow k = 1,5.$$

Значит, при справедливом распределении прибыли первый предприниматель должен получить $1,5 \cdot 3 = 4,5$ млн р., а второй – $1,5 \cdot 5 = 7,5$ млн р.

Задача. Для приготовления строительного раствора на 2 части цемента берут 2 части песка и 0,8 частей воды. Сколько цемента, песка и воды требуется для приготовления 180 кг раствора?

Решение:

1) Пусть для приготовления строительного раствора требуется a кг цемента, b кг песка и c кг воды. Обозначим коэффициент пропорциональности k , тогда

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{2} = \frac{c}{0,8} = k.$$

Следовательно, $a = 2k$, $b = 2k$, $c = 0,8k$. По условию, сумма всех частей равна 180 кг, значит:

$$2k + 2k + 0,8k = 180 \Leftrightarrow 4,8k = 180 \Leftrightarrow k = 37,5.$$

2) $37,5 \cdot 2 = 75$ (кг) – потребуется песка и цемента.

3) $37,5 \cdot 0,8 = 30$ (кг) – потребуется воды.

О т в е т: потребуется 75 кг цемента, 75 кг песка и 30 кг воды.

Для краткого обозначения условия таких задач – задач о прямо пропорциональном делении – в математическом языке используют иногда «длинные отношения». Например, условие последней задачи можно записать так:

$$a : b : c = 2 : 2 : 0,8.$$

При этом говорят: «Числа a , b и c относятся как 2 к 2 к 0,8».

Другими словами, длинные отношения – это *условные записи*, которые показывают, сколько равных долей величины, принятой за единицу, приходится на каждую часть. Их нельзя понимать как запись деления нескольких чисел. Действительно, подставив в последнее равенство вместо букв соответствующие им значения a , b и c , получим верное высказывание

$$75 : 75 : 30 = 2 : 2 : 0,8,$$

тогда как при непосредственном подсчете левой и правой частей получаются разные числа: в левой части – $\frac{1}{30}$, а в правой – 1,25.

Зато длинные отношения можно преобразовывать, как обычные дроби: умножать все его члены на одно и то же число, сокращать. Эти преобразования позволяют упрощать запись, а значит, и решение задач. Так, если бы в нашей задаче мы сначала умножили все члены отношения на 10, а затем разделили их на 4, то избавились бы от дробей:

$$2 : 2 : 0,8 = 20 : 20 : 8 = 5 : 5 : 2$$

и тем самым получили более простое уравнение.

Решая задачи на пропорциональное деление, мы вновь наблюдаем, как абстрактные математические понятия – в данном случае прямая и обратная пропорциональность – помогают отвечать на серьезные практические вопросы.

К 237 Раздели число: а) 60 в отношении 5 : 7; б) 15,4 в отношении 3 : 8; в) 210 в отношении 1 : 2 : 3; г) 0,32 в отношении 2 : 5 : 9.

238 Упрости отношения:

- а) $2,5 : 4,5$; в) $2 : 4 : 12$; д) $0,2 : 0,4 : 0,5$; ж) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1$;
 б) $\frac{2}{7} : 5$; г) $5 : 35 : 45$; е) $\frac{1}{9} : \frac{2}{9} : \frac{8}{9}$; з) $\frac{1}{6} : 0,2 : \frac{2}{15}$.

239 Раздели число:

- а) 39 в отношении 0,25 : 6,25; г) 330 в отношении 0,6 : 0,9 : 1,8;
 б) 8,4 в отношении $\frac{5}{9} : 1\frac{2}{3}$; д) $5\frac{2}{3}$ в отношении $\frac{3}{4} : 2 : 1,5$;
 в) 216 в отношении $0,3 : \frac{3}{14}$; е) 250 в отношении $\frac{7}{12} : 2,5 : \frac{1}{4} : \frac{5}{6}$.

240 В ателье поступил заказ на пошив 120 школьных форм. Его передали двум бригадам, в одной из которых 8 человек, а в другой – 7. Сколько школьных форм должна сшить каждая бригада при пропорциональном распределении заказа между работниками?

241 За компьютерный набор рукописи два оператора получили 3500 р. Один из них набрал 105 страниц данной рукописи, а другой – остальные 35. Какая сумма денег была выплачена за эту работу каждому оператору, если стоимость страницы набора была постоянна?

242 Отрезок AB разделён точкой C в отношении 2 : 5, причем одна из частей отрезка на 6 см больше другой. Найди длину каждой части.

243 Отрезок MN разделён точками K и T в отношении 1 : 2 : 3, причём самая маленькая из частей отрезка на 5 дм меньше самой большой. Чему равна длина всего отрезка?

244 Периметр треугольника равен 150 м. Чему равны длины его сторон, если их отношение равно 3 : 3 : 4?

245 Длины сторон четырёхугольника пропорциональны числам 2, 5, 3 и 7, а его бóльшая сторона на 30 см превышает меньшую. Чему равен периметр четырёхугольника?

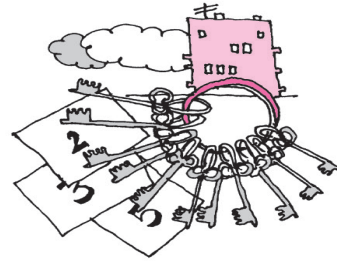
246 Для праздника купили красные и белые шары в отношении 5 : 3.

- 1) Чему равно отношение числа красных шаров к числу всех шаров?
- 2) Чему равно отношение числа белых шаров к числу всех шаров?
- 3) Сколько процентов всех шаров составляют красные, а сколько – белые шары?



247 Число однокомнатных, двухкомнатных и трёхкомнатных квартир в доме относится как $2 : 3 : 5$.

- 1) Чему равно отношение числа двухкомнатных квартир к числу всех квартир?
- 2) Сколько процентов всех квартир составляют однокомнатные квартиры?



248 Число мужчин, женщин и детей, отдыхающих в пансионате, пропорционально числам 3, 4 и 1.

- 1) Сколько всего отдыхающих в пансионате, если детей в нём 12?
- 2) Сколько мужчин в пансионате, если женщин и детей вместе 45?
- 3) Сколько в пансионате детей, если женщин на 42 больше, чем мужчин?
- 4) Сколько процентов всех отдыхающих составляют дети?

249 В хоровой студии занимаются 96 детей. Отношение числа детей в младшей, средней и старшей группах равно соответственно $7 : 5 : 4$. На сколько больше детей занимается в младшей группе, чем в старшей?



250 При посадке фруктовых садов в центральных районах России рекомендуется, чтобы число яблонь, груш и косточковых деревьев относилось как $10 : 3 : 7$. Сколько деревьев каждого вида следует посадить на прямоугольном участке размером $180 \text{ м} \times 80 \text{ м}$, если под каждое дерево выделяют участок 45 м^2 ?

251 Лиственные деревья занимают 40% площади лесного участка. Остальная площадь занята сосновым и еловым лесом, причем их площади относятся как $2 : 3$. Определи площадь всего участка, если сосновый лес занимает на 54 га меньше, чем еловый.

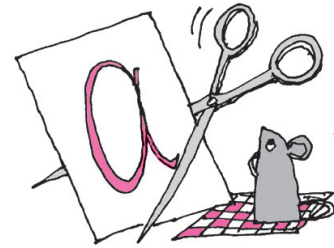
252 Три коммерсанта вложили в проект соответственно 0,5 млн р., 1,6 млн р. и 2,9 млн р. Проект принес 32% прибыли. На 80% полученной прибыли они закупили оборудование, а остальные деньги распределили пропорционально вложенным суммам. Сколько денег получил каждый из коммерсантов?

253 В трёх шестых классах школы 108 учащихся. Число учащихся 6 «А» относится к числу учащихся 6 «Б» как $4 : 5$, а число учащихся 6 «В» равно среднему арифметическому числа учащихся 6 «А» и 6 «Б». Сколько учеников в каждом из шестых классов?

254 Среднее арифметическое трёх чисел равно 8,4. Первое из них на 20% меньше второго, а второе относится к третьему как $5 : 9$. Найди эти числа.

255 Раздели число a на три части a_1 , a_2 и a_3 , если:

- 1) $a = 75$, $a_1 : a_2 = 3 : 4$ и $a_2 : a_3 = 8 : 11$;
- 2) $a = 12,3$, $a_1 : a_2 = 2 : 3$ и $a_2 : a_3 = 4 : 7$;
- 3) $a = 150$, $a_1 : a_2 = 0,8 : \frac{2}{7}$ и $a_2 : a_3 = 1,5 : 1,8$;
- 4) $a = 15\frac{1}{3}$, $a_1 : a_2 = 0,5 : 2$ и $a_2 : a_3 = 0,5 : \frac{1}{3}$.



256 Для изготовления фарфора берут глину, гипс и песок в следующих отношениях: масса гипса относится к массе глины как $1 : 25$, а масса песка относится к массе гипса как $2 : 1$. Сколько этих материалов надо взять, чтобы изготовить 56 кг фарфора?

257 Периметр треугольника ABC равен 32,5 см. Найди длины сторон этого треугольника, если AB относится к BC как $3 : 4$, а BC относится к AC как $2 : 3$.

258 1) Найди три числа, если известно, что первое число относится ко второму как $3 : 8$, второе к третьему – как $2 : 5$, а сумма первого и третьего равна 4,6.

2) Найди три числа, если первое относится ко второму как $0,5 : 0,6$, второе к третьему – как $\frac{2}{3} : 1\frac{1}{6}$, а разность третьего и первого равна 5,5.

3) Найди числа a , b , c и d , если $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 4$, $c : d = 2 : 7$, а их сумма равна 90.

4) Найди числа a , b , c и d , если $a : b = \frac{3}{4} : 0,5$, $b : c = 1,2 : \frac{1}{3}$, $c : d = 5 : 2$, а их среднее арифметическое равно 1,3.

259 Трём победителям соревнований по большому теннису присуждены денежные премии общей суммой 15 млн р. При этом вторая премия составила 60% первой и относится к третьей как $1 : \frac{2}{3}$. Чему равны размеры этих премий?

260 Фермер засеял три участка земли. Площадь первого составляет 30% площади второго, а площадь второго относится к площади третьего как $2,5 : 3$. Чему равна общая площадь всех трёх участков, если известно, что площадь третьего больше площади первого на 4,5 га?

π

261 Вычисли устно. Составь ряд, образованный ответами примеров, и продолжи его на два числа, сохраняя закономерность:

248 + 32	700 : 14	6 - 2,8	1 : 4	3,8 : 19	4,7 + 1,3
: 40	· 9	: 4	- 0,2	· 24	: 0,1
· 60	- 70	· 3	· 8	: 3	· 0,25
- 90	: 20	+ 0,8	+ 0,35	+ 5,4	: 50
: 33	+ 6	: 3,2	: 0,3	: 70	- 0,05
-----	-----	-----	-----	-----	-----
?	?	?	?	?	?

262 Выполни действия и расшифруй математические термины. Какие из них тебе уже известны, а какие – ещё нет?

О $0,768 + 4,32$

Ф $3,6 \cdot 41,25$

Г $0,216 : 0,06$

К $0,6472 : 0,8$

М $8 - 7,095$

И $2,75 \cdot 4,08$

У $0,6606 : 0,009$

П $293,48 : 5,8$

А $4,24 - 2,756$

Л $1500 \cdot 0,602$

Р $0,0595 : 1,7$

Я $14,408 : 1,6$

Н $40,7 - 4,07$

Е $80,4 \cdot 4,05$

Т $213,3 : 0,79$

Ц $1701,6 : 0,24$

1,484	
903	
3,6	
5,088	
0,035	
11,22	
270	
0,905	

50,6	
0,035	
5,088	
3,6	
0,035	
1,484	
0,905	
0,905	
1,484	

5,088	
50,6	
325,62	
0,035	
1,484	
7090	
11,22	
9,005	

148,5	
73,4	
36,63	
0,809	
7090	
11,22	
9,005	

263 Что общего и что различного в выражениях? Прочитай выражения и найди их значения при $a = \frac{1}{3}$, $b = 0,5$:

1) $3a + b^2$;

2) $(3a + b)^2$;

3) $3(a + b)^2$;

4) $3(a + b^2)$.

264 Переведи на математический язык:

1) Разность удвоенного числа a и куба числа b на 4 больше половины числа c .

2) 40% числа d на 5 меньше отношения квадратов чисел m и n .

3) Частное суммы двух чисел и первого из них в 12 раз меньше разности квадратов первого и второго числа.

4) Произведение разности двух чисел и вычитаемого составляет 20% от утроенного квадрата уменьшаемого.

265 Дачи двух друзей – Петра и Антона – находятся на одном шоссе: дача Петра – на расстоянии 60 км от Москвы, а дача Антона – на расстоянии 80 км от Москвы. Однажды друзья выехали одновременно со своих дач в Москву на велосипедах. Петр ехал со скоростью 15 км/ч, а Антон – со скоростью 20 км/ч. Запиши формулу зависимости расстояния d км между ними от времени движения t ч (до момента встречи). Составь таблицу и построй график этой зависимости для значений $0 \leq t \leq 4$.



266 В физике установлен следующий закон (закон Гука):

$$F = kx,$$

где F – сила упругости при растяжении (сжатии) упругого тела, k – коэффициент упругости этого тела, x – изменение его длины. Укажи вид зависимости между F и x при постоянном k . Вырази из этой формулы значения k и x .

267 Найди среди данных формул прямую и обратную пропорциональности. Построй для каждой из них таблицу и график:

- 1) $y = x + 5$; 3) $y = 2x$; 5) $y = x^2$; 7) $y = 8 : x$;
 2) $y = 12 - x$; 4) $y = \frac{x}{2}$; 6) $y = 5x - 3$; 8) $y = \frac{12}{x}$.

268 Для 6 порций суфле из тыквы требуется 800 г тыквы, 150 г манной крупы, 100 г муки, 8 яиц, 50 г сыра, 0,5 стакана молока, 100 г сливочного масла, 1 столовая ложка сахара и 1 чайная ложка соли. Какое количество каждого из продуктов потребуется для приготовления 15 порций этого суфле?

269 Найди x из пропорций, если значения всех переменных отличны от нуля:

- 1) $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; 2) $\frac{n}{x} = \frac{d}{n}$; 3) $\frac{a^2}{m} = \frac{x}{2m}$; 4) $\frac{3k}{b} = \frac{k^2}{x}$.

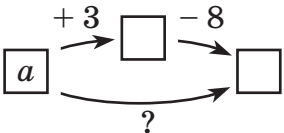
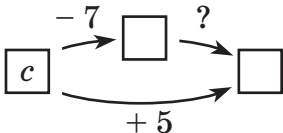
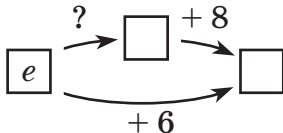
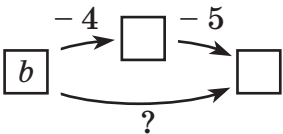
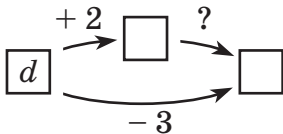
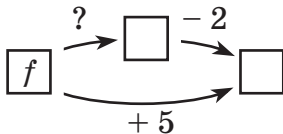
270 Реши уравнения:

- 1) $\frac{2,5}{6\frac{2}{3}} = \frac{2,1}{x - 0,6}$; 3) $\frac{\frac{x}{3} + 2}{0,05} = \frac{40x}{3}$;
 2) $(2x + 4) : 4,5 = 1\frac{7}{9} : 0,01$; 4) $4\frac{1}{7} : (16x + 8) = 0,25 : x$.

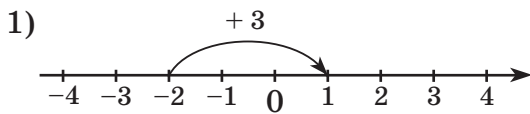
271 Реши задачи способом пропорций:

- 1) Машина грузоподъемностью 2,5 т может перевезти некоторый груз за 18 рейсов. За сколько рейсов сможет перевезти этот груз машина, грузоподъемность которой на 1 т меньше, если загрузка машин в обоих случаях полная?
 2) Хозяйка купила 4,5 кг крупы по цене 12,8 р. за килограмм. Сколько крупы по цене на 3,2 р. за килограмм большей можно купить на эти деньги?

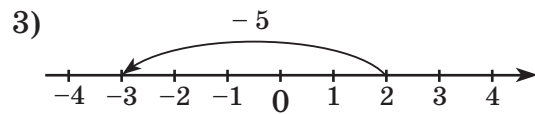
272 Найди неизвестную операцию:

- 1)  3)  5) 
 2)  4)  6) 

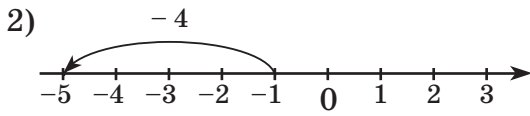
273 Пользуясь числовой прямой, найди ответы примеров:



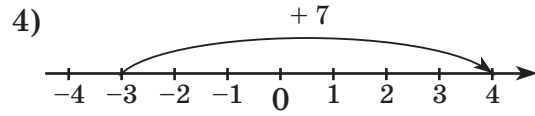
$$-2 + 3 = ?$$



$$+2 - 5 = ?$$



$$-1 - 4 = ?$$

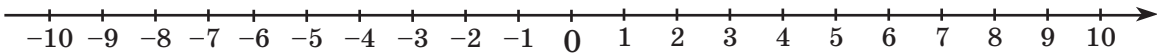


$$-3 + 7 = ?$$

274 Реши примеры: а) с помощью понятий доходов и расходов; б) пользуясь числовой прямой.

1) $-1 + 4$; 3) $+1 - 5$; 5) $-4 + 8$; 7) $-2 - 5$;

2) $-3 + 2$; 4) $-1 - 2$; 6) $+3 - 9$; 8) $-8 + 6$.



Д

275 Раздели число:

а) 240 в отношении 4 : 11;

в) 56 в отношении 2 : 3 : 9;

б) 7,2 в отношении $0,8 : 1\frac{1}{3}$;

г) 12,5 в отношении $\frac{3}{4} : 1,5 : 4$.

276 1) Отрезок AB длиной 15 см разделён точкой C в отношении 3 : 7. Найди длину каждой части.

2) Отрезок MN разделён точкой K в отношении $3,4 : 1\frac{8}{9}$, причём одна из частей отрезка на 8 м больше другой. Чему равна длина всего отрезка?

3) Длины сторон треугольника пропорциональны числам 3, 4 и 6, а среднее арифметическое его большей и меньшей сторон равно 1 м 8 дм. Чему равен периметр треугольника?

277 Число девочек в классе относится к числу мальчиков как 2 : 3.

1) Сколько в классе девочек и сколько мальчиков, если всего в классе 35 человек?

2) Сколько в классе мальчиков, если девочек в нем 8?

3) Сколько в классе девочек, если мальчиков в нем 15?

278 Предприятие выпустило акции. Владельцами 40% акций стали его работники, а остальные акции приобрели фирмы M и N в отношении 7 : 9. У какой из этих фирм акций больше и на сколько, если работникам этого предприятия принадлежат 48 000 акций?



279 Раздели число a на три части a_1 , a_2 и a_3 , если:

1) $a = 88$, $a_1 : a_2 = 1 : 2$ и $a_2 : a_3 = 4 : 5$;

2) $a = 12,4$, $a_1 : a_2 = 9 : 7,2$ и $a_2 : a_3 = \frac{3}{8} : 0,125$.



280 Три кладоискателя нашли клад, в котором оказалось 5600 одинаковых старинных монет. Государству принадлежит 75% всех монет, а 30% оставшейся части составили налоги. После уплаты налогов кладоискатели разделили между собой монеты так, что доли первого и второго относились как 2 : 3, а доли второго и третьего – как 5 : 8. Сколько монет получил каждый кладоискатель?

281 Реши задачи способом пропорций:

1) Поезд проехал 420 км, что составило 35% его пути. Чему равен путь поезда?

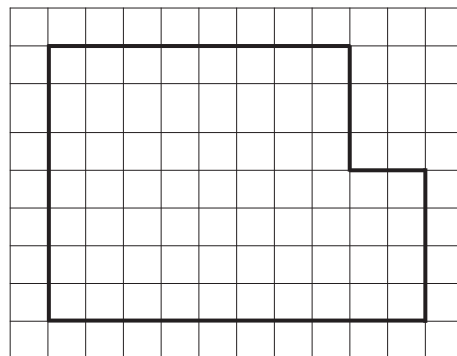
2) За 3,2 м ткани заплатили 284,8 р. Сколько рублей надо заплатить за отрез такой же ткани, в котором на 1,6 м больше, чем в первом?

282 Раздели число 21 на части пропорционально числам A и B :

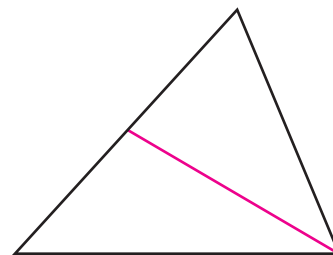
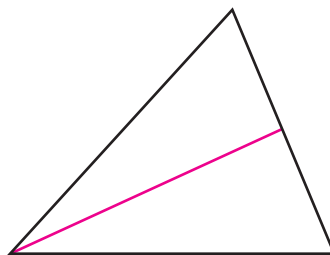
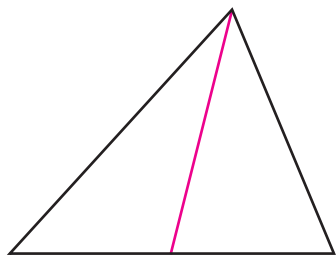
A $(1200 - 1,2) : 0,74 \cdot 0,508 + 7,704 : 0,1 - (3,59 - 3,59) \cdot 8 \frac{9}{34}$;

B $\frac{1,75 : 1,25 + 1,4 \cdot 1 \frac{4}{7} + (2,88 + 1 \frac{3}{25}) \cdot 0,1}{1 : [(2,5 : \frac{5}{18} - 0,9) : 0,09]}$.

283* Сделай один ступенчатый разрез фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы из двух получившихся частей можно было сложить квадрат.



284* Разрежь три одинаковых треугольника по разным медианам, показанным на рисунке, и сложи из полученных кусков один треугольник.



285* Разрежь квадрат на три части, из которых можно сложить тупоугольный треугольник.

Задачи для самопроверки.

286 Пусть длина шага пешехода равна l , а число сделанных им шагов – n .
1) Запиши формулу, выражающую зависимость расстояния s , пройденного пешеходом, от l и n .

2) Какие из двух величин в этой формуле при постоянной третьей прямо пропорциональны, а какие – обратно пропорциональны?

3) Вырази из этой формулы величины l и n .



287 Волк гонится за зайцем. Скорость волка 12 м/с, а скорость зайца – 8 м/с. Сейчас между ними 100 м. Пусть через t секунд расстояние между волком и зайцем станет d м. Запиши формулу зависимости расстояния d от времени движения t до момента их встречи.

288 Для определения возможностей спортсменов A , B и C тренер предложил им бежать по шоссе «как можно быстрее и дальше». Используя графики их бега, определи:

1) Кто пробежал дальше всех?

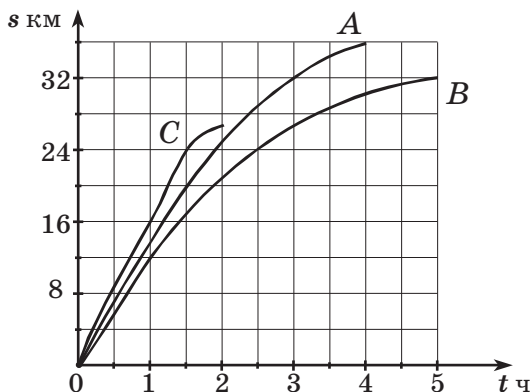
2) Кто бежал дольше всех?

3) Сколько километров пробежал спортсмен A за первый час? Где в это время находились спортсмены B и C – впереди или позади A ?

4) Сколько времени бежал спортсмен B ? Сколько километров он пробежал? Чему равна его средняя скорость?

5) Кто бежал быстрее всех (с наибольшей средней скоростью)?

6) Сколько километров пробежал спортсмен B , когда C пробежал 12 км?



289 Какие из приведённых ниже формул являются прямой пропорциональностью, обратной пропорциональностью или не являются ни тем, ни другим?

1 $s = 7a$

4 $a = b + 3$

7 $d = 3m^2$

2 $v = \frac{40}{t}$

5 $c = \frac{n}{3}$

8 $an = 7,2$

3 $k = 8 : M$

6 $A = 0,5t$

9 $b = 2k - 3$

- 290** Определи, является ли зависимость между величинами прямой или обратной пропорциональностью или не является ни тем, ни другим:
 1) путь, пройденный за данное время, и скорость движения;
 2) время выполнения данного объёма работы и производительность труда;
 3) число мальчиков и девочек в классе при постоянном общем количестве учеников.
- 291** Чтобы приготовить 10 штук сладкого перца, фаршированного кабачками, потребуется 75 г жира и 400 г кабачков. Сколько жира и кабачков надо взять для приготовления 28 штук такого перца?
- 292** Пешеход, скорость которого 3 км/ч, прошёл некоторое расстояние за 2 ч 40 мин. За сколько времени проедет это расстояние повозка, если её скорость 6 км/ч?
- 293** Реши задачи способом пропорций:
 1) На конвейерной линии расфасовывается 5,4 кг сухого картофеля за 2,5 мин. Сколько килограммов сухого картофеля будет расфасовано на этой линии за один час, если производительность линии постоянная?
 2) Оператор набрал на компьютере рукопись за 4,2 ч, работая с производительностью 15 стр./ч. За сколько времени набрал бы эту рукопись другой оператор, производительность которого составляет 21 стр./ч?
 3) Картошка стоила 15 р. Её цена увеличилась на 20%. Чему равна новая цена картошки?
- 294** Раздели число:
 а) 85 в отношении 3 : 14; б) 9,6 в отношении 0,2 : 0,4 : 0,6.
- 295** В квартире проживают две семьи. Одна из них состоит из четырёх человек, а другая – из трёх. Как эти семьи должны распределить абонентскую плату за телефон, которая составляет 350 р. в месяц, если все они в одинаковой степени пользуются телефоном?
- 296** Периметр треугольника равен 68 см, а длины сторон пропорциональны числам 4, 5 и 8. Найди разность большей и меньшей сторон этого треугольника.
- 297** Сплав состоит из меди, олова и сурьмы, которые входят в него в отношении соответственно 3 : 11 : 6. Найди процентное содержание в этом сплаве меди, олова и сурьмы. Чему равна масса сплава, если олова в нём на 4 кг больше, чем меди?
- 298** Площадь трёх участков земли 45 га. Площадь первого участка составляет 20% общей площади, а площади второго и третьего относятся как 11 : 7. На сколько гектаров площадь первого участка меньше площади третьего?
- 299** Вычисли:
 1) $(2,35 \cdot 70,2) : 23,4 - (38,36 + 19,8) \cdot 0,1$; 2) $16 \frac{1}{3} : 1,4 - \frac{0,75 + \frac{7}{12}}{3 \frac{7}{15} + 0,1 - \frac{11}{30}} \cdot 1,6$.

Глава 3

Рациональные числа

§1. Понятие рационального числа

1. Положительные и отрицательные числа.

Числа появились в практической деятельности для подсчёта количества предметов и измерения величин – расстояний, масс, скоростей и т. п. Они были нужны прежде всего для ответа на вопрос «Сколько?» – два человека, восемь пальм, миллион рублей, 40 000 км, 100 кг, 60 км/ч.

Для тех случаев, когда нужное количество не выражалось натуральным числом, люди придумали дроби – делили целое на несколько равных частей, и тогда ответ на вопрос «Сколько?» мог быть дан в виде некоторого числа таких частей – $\frac{3}{5}$ урожая, $\frac{7}{10}$ пути, 8,5 лет.

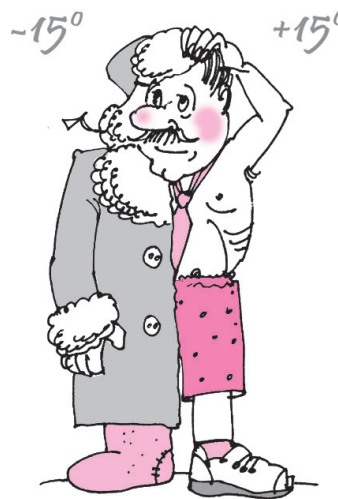
Однако и дробных чисел не всегда хватает, чтобы измерить, например, температуру воздуха. В самом деле, информация о том, что температура воздуха 15° , недостаточна, чтобы правильно выбрать одежду. Необходимо уточнить: 15° тепла или 15° мороза?

Для обозначения противоположного понятия в обычном языке для удобства иногда используется знак «минус». Всем известно, что 15° мороза обозначается « -15° ». Таким образом, появляются новые, так называемые **отрицательные**, числа, противоположные к уже известным нам. Вспомним, что и в логике отрицание – это «противоположное» высказывание.

Отрицательные числа используются для обозначения величин, таких, как: *расход* – то есть отрицательный доход, *долг* – отрицательное имущество, *глубина* – отрицательная высота и т. п. Например, отметка « $-1733,5$ » на географической карте означает *глубину* в 1733,5 м.

Итак, *отрицательные числа – это уже известные нам числа, только со знаком «минус»*: -1 , $-5\frac{3}{7}$, $-6,25$ и т. д. Читают: «минус 1», «минус $5\frac{3}{7}$ », «минус 6,25» и т. д.

Как только у нас появился термин «отрицательное число», то, по законам развития языка, мы должны дать новое название и для «старых», уже известных нам чисел: неудобно говорить, что (-3) – это отрицательное число, а 3 – это

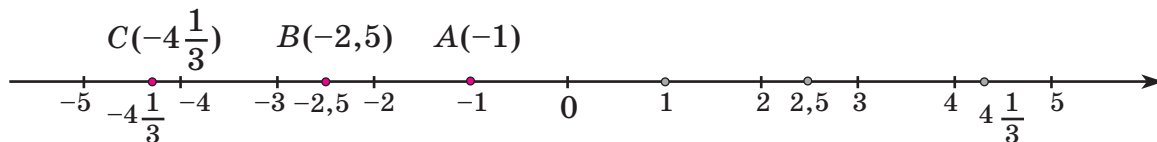


«просто» число. Поэтому «старые» числа, кроме 0, для противопоставления с отрицательными числами принято называть *положительными*. Иногда их записывают со знаком «плюс». Например, вместо 3 пишут +3 (читают: «плюс 3»). А число 0 не является ни положительным, ни отрицательным.

Введённые таким образом положительные и отрицательные числа вместе с нулем составляют множество **рациональных** чисел (обычно его обозначают буквой Q). Термином «рациональное число» мы будем далее часто пользоваться, иногда говоря для краткости просто «число».

Все положительные числа и 0 можно изобразить точками координатного луча. Аналогично для всех рациональных чисел есть место на **координатной прямой**. *Координатной (числовой) прямой называют прямую, на которой выбраны начало отсчёта, единичный отрезок и направление отсчёта.*

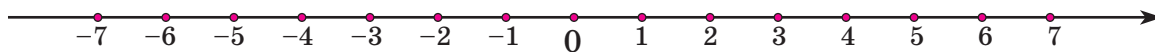
Началу отсчёта – точке O – соответствует, как и раньше, число 0. Положительные числа располагаются в положительном направлении от числа 0 (положительное направление указывается стрелкой), а отрицательные числа – в *противоположном* направлении на соответствующем расстоянии от нуля: число (-1) на расстоянии 1, число $(-2,5)$ на расстоянии 2,5, а число $(-4\frac{1}{3})$ – на расстоянии $4\frac{1}{3}$ и т. д.:



Число, показывающее положение точки на координатной прямой, называют координатой этой точки. Таким образом, координатой точки A является число (-1) , координатой точки B – число $(-2,5)$, а точки C – число $(-4\frac{1}{3})$. Обозначение координат остается прежним: $A(-1)$, $B(-2,5)$, $C(-4\frac{1}{3})$.

Натуральные числа, противоположные к ним отрицательные числа и число 0 образуют множество **целых** чисел. Множество целых чисел обозначается буквой Z . С помощью фигурных скобок его записывают так:

$$Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$



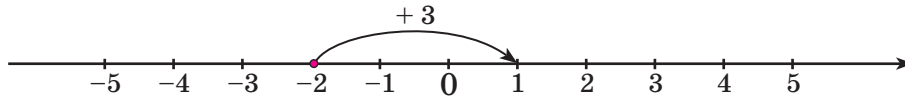
Таким образом, теперь мы можем сказать, что *рациональное число* – это число вида $\frac{p}{q}$, где p – целое число, а q – натуральное число. Множество рациональных чисел Q можно записать так:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q}, \text{ где } p \in Z, q \in N \right\}.$$



Координатная прямая может располагаться на плоскости по-разному. Но обычно её располагают горизонтально, а положительное направление выбирают «слева направо».

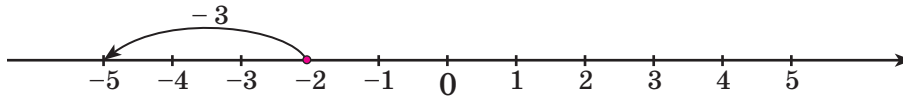
На координатной прямой точно так же, как и на координатном луче, можно показывать изменение величины числа: увеличение – с помощью перемещения на соответствующее число единиц вправо, а уменьшение – с помощью перемещения влево. Увеличение обозначается знаком «+», а уменьшение – знаком «-». Например, увеличение числа (-2) на 3 единицы можно показать стрелкой, идущей от точки (-2) на 3 единицы вправо, и обозначить это увеличение через «+3»:



Значит,

$$-2 + 3 = 1.$$

А уменьшение этого же числа на 3 единицы обозначается знаком «-3». Изображается и записывается это уменьшение так:



$$-2 - 3 = -5.$$

При решении практических задач часто возникает необходимость сравнивать рациональные числа, выполнять с ними арифметические действия. Например, чтобы узнать, какое понижение температуры было более значительным – с $+3^{\circ}\text{C}$ до $(-15)^{\circ}\text{C}$ или с $(-8)^{\circ}\text{C}$ до $(-24)^{\circ}\text{C}$, надо:

- 1) составить выражения $(+3) - (-15)$ и $(-8) - (-24)$;
- 2) найти их значения и сравнить полученные числа;
- 3) на основании полученного результата ответить на вопрос задачи.

Поэтому теперь нам надо научиться сравнивать рациональные числа и выполнять с ними арифметические действия.

К

300 Используя знаки «+» и «-», запиши:

- а) 7° тепла; в) расход 140 р.; д) выигрыш 8 очков;
 б) 12° мороза; г) доход 560 р.; е) проигрыш 4 очка.

301

- 1) Используя знаки «+» и «-», запиши: а) увеличение на 12° ; б) уменьшение на 5 кг;
- 2) Во время наблюдений за изменениями уровня воды в реке в течение недели были сделаны записи, приведенные в таблице. Что они означают?

Дни недели	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
Изменение уровня воды (м)	+ 0,40	+ 0,95	+ 0,20	- 0,30	- 0,55	- 0,70	- 0,80

302

Приведи примеры использования положительных и отрицательных чисел в практических задачах.

- 303** а) В чемпионатах по футболу места команд при равном числе набранных очков определяют по разности забитых и пропущенных мячей. Объясни, что означают записи:

Команда	Разница забитых и пропущенных мячей
«Спартак»	+ 2
«Сатурн»	0
«Метеор»	- 3

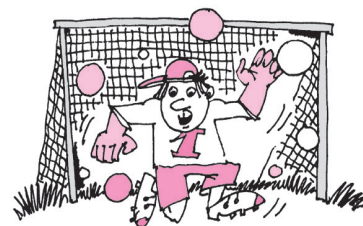


- б) Вырази числом разницу забитых и пропущенных мячей у команд:

Команда	Число забитых мячей	Число пропущенных мячей	Разница забитых и пропущенных мячей
«Динамо»	7	4	?
«Зенит»	5	5	?
«Рубин»	3	4	?
«Комета»	2	6	?

- в) Какой стала разница забитых и пропущенных мячей у этих команд, если каждая из них сыграла ещё по одному матчу со счетом (первое число равно числу мячей, забитых данной командой, а второе – числу мячей, забитых её соперниками):

Команда	Счет
«Динамо»	3 : 2
«Зенит»	1 : 3
«Рубин»	2 : 1
«Комета»	4 : 2



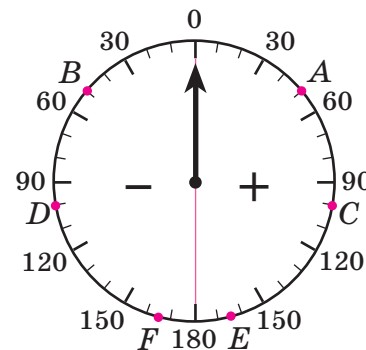
- 304** 1) Установи на модели термометра температуру: $+5^{\circ}$; -3° ; 0° ; -10° ; $+14^{\circ}$; -15° ; $+2,3^{\circ}$; $-8,2^{\circ}$.

- 2) Какой станет температура, если она:

- а) увеличится с -5° на 8° ; б) уменьшится с 2° на 6° ;
в) уменьшится с -3° на 7° ; г) увеличится с -4° на 10° ?

- 305** 1) Определи по изображённой на рисунке шкале прибора значение величины, которое показывает стрелка в положении А, В, С, D, E, F.

- 2) Пользуясь циркулем и транспортиром, построй данную шкалу прибора в тетради ($R = 3$ см). Отметь на шкале точки с указанными координатами: $M(+20)$, $N(-45)$, $P(+125)$, $R(-160)$, $S(-72)$, $T(+98)$.



306 Изобрази в тетради шкалу термометра и отметь на ней температуру:

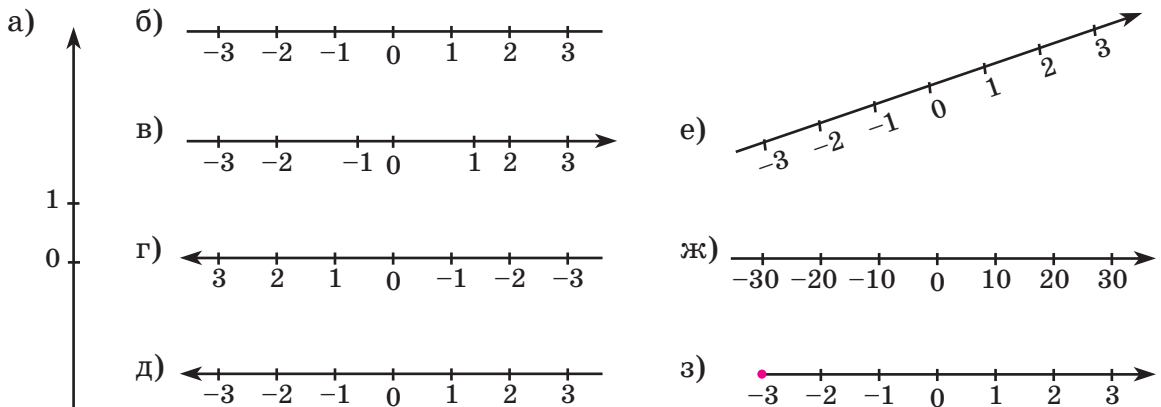
а) $+6^\circ$; б) -2° ; в) -7° ; г) $+3,6^\circ$; д) $-5,8^\circ$; е) $-4,3^\circ$.

307 Какие из перечисленных ниже признаков являются существенными для понятия «координатная прямая»:

- а) на прямой выбрано начало отсчёта;
- б) на прямой выбран единичный отрезок;
- в) на прямой выбрано направление;
- г) прямая расположена горизонтально?

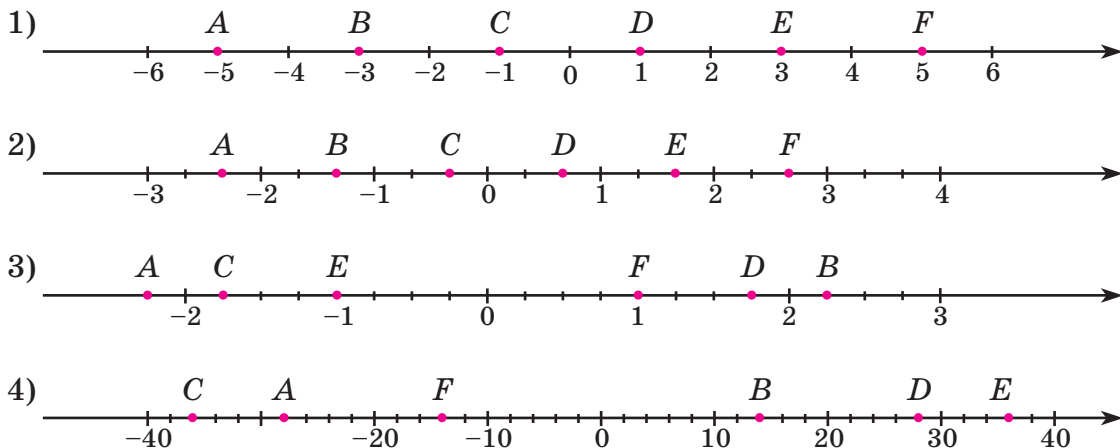
Сформулируй определение координатной прямой, перечислив все её существенные признаки. Сравни построенное тобой определение с определением, приведённым в тексте учебника на с. 70.

308 Какие из прямых на рисунке являются координатными прямыми, а какие — нет?



309 Найди в тексте учебника на с. 70 определение координаты точки. Построй на координатной прямой точки $O(0)$, $A(1)$, $B(-3)$, $C(5,8)$, $D(-12\frac{3}{4})$.

310 На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D, E и F . Запиши их координаты. Какие закономерности ты наблюдаешь?



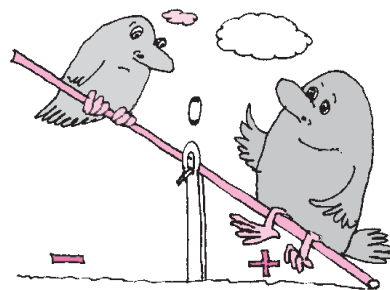
311 Начерти координатную прямую и отметь на ней точки. Что ты замечаешь?

1) $A(-9), B(-8), C(-5), D(-4), E(-1), F(0), G(3), H(4)$ (единичный отрезок – 2 клетки);

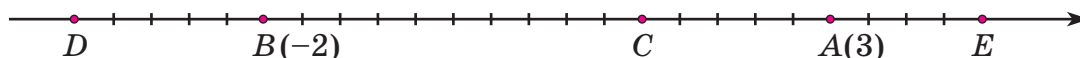
2) $A(2\frac{3}{4}), B(1,5), C(0,25), D(-1), E(-2\frac{1}{4}), F(-3,5)$ (единичный отрезок – 4 клетки);

3) $A(1,4), B(0,8), C(0,2), D(-0,4), E(-1), F(-1,6)$ (единичный отрезок – 10 клеток);

4) $A(-2\frac{1}{2}), B(-1\frac{1}{3}), C(-\frac{5}{6}), D(\frac{5}{6}), E(1\frac{1}{3}), F(2,5)$ (единичный отрезок – 3 клетки).



312 На координатной прямой даны точки $A(3)$ и $B(-2)$. Отметь на этой прямой начало отсчета и единичный отрезок. Запиши координаты точек C, D и E .



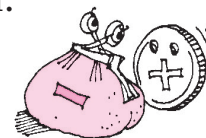
313 По данным выражениям придумай задачи о доходах и расходах и реши их. Запиши эти выражения без скобок, используя представления об *изменении* величин. Проверь ответы с помощью координатной прямой.

а) $(-4) + (+6)$;

в) $(-2) + (-5)$;

б) $(+3) + (-7)$;

г) $(-1) + (+4) + (-1)$.



314 Запиши сумму чисел и найди её с помощью координатной прямой. Что ты замечаешь?

1) $+5$ и -3 ;

3) -4 и -1 ;

5) -8 и $+2$;

7) -5 и 0 ;

9) $+7$ и -7 ;

2) -3 и $+5$;

4) -1 и -4 ;

6) $+2$ и -8 ;

8) 0 и -5 ;

10) -7 и $+7$.

315 Переведи запись на язык «изменения температур». Найди результаты этих изменений, пользуясь координатной прямой:

а) $1 - 3$;

в) $-2 + 7$;

д) $-1 + 5$;

ж) $2 - 4 + 1$;

б) $-4 - 6$;

г) $5 - 8$;

е) $-3 - 4$;

з) $-3 - 2 + 6$.

316 $A = \{7; -2; 0; 3,6; \frac{4}{9}; 54; -1\frac{2}{3}; -3108\}$. Назови элементы множества A , которые являются натуральными числами, целыми числами, рациональными числами.

317 Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств N, Z и Q , где N – множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, а Q – множество рациональных чисел. Отметь на диаграмме числа: $3; -0,2; 5\frac{3}{7}; 0; -1; 24; 1,8; -\frac{1}{6}$.

318 Прочитай высказывание и определи, истинно оно или ложно. Выпиши истинные высказывания и из соответствующих им букв составь имя русского полярного исследователя.

Е $3 \in Z$

Н $0 \in N$

В $-4 \in Q$

А $812 \in N$

Д $-7 \in N$

Т $0 \in Z$

И $\frac{3}{7} \in Z$

Р $3\frac{5}{9} \notin Q$

Ж $5 \notin Q$

Б $0 \notin Q$

П $0,9 \notin N$

Л $-15 \in Z$

319 Изобрази точкой на координатной прямой число x , если:

1) $x = -5; -2; +3; -4; +9; +2; -9; +4; -3; +5;$

2) $x = 1,5; -\frac{1}{4}; -1,75; \frac{5}{8}; 0,25; -1\frac{1}{2}; -0,625; 1\frac{3}{4}.$

π

320 Вычисли устно и найди произведение полученных чисел наиболее удобным способом:

$$\begin{array}{r} 3,6 \cdot 0,5 \\ : 0,6 \\ \cdot 80 \\ + 260 \\ \cdot 0,1 \\ \hline ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,6 : 0,03 \\ - 12 \\ \cdot 0,9 \\ + 2,6 \\ \cdot 0,1 \\ \hline ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 - 1,8 \\ : 7 \\ + 0,8 \\ \cdot 5 \\ - 4,5 \\ \hline ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,5 + 3,6 \\ : 3 \\ - 0,1 \\ : 0,04 \\ \cdot 10 \\ \hline ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 : 4 \\ - 0,9 \\ \cdot 3 \\ : 48 \\ - 0,08 \\ \hline ? \end{array}$$

321 Прочитай неравенство и найди множество его натуральных решений:

1) $9 < x \leq 11;$ 2) $4,8 \leq x < 9;$ 3) $2\frac{1}{7} \leq x \leq 3,6;$ 4) $3,2 \leq x \leq 3\frac{9}{11}.$

322 1) Моторная лодка прошла по течению реки 9,6 км за $\frac{3}{4}$ ч, а против течения это же расстояние она шла на 35 мин дольше. Чему равны собственная скорость лодки и скорость течения реки?

2) Собственная скорость катера в 8 раз больше скорости течения реки. Двигаясь против течения, катер прошел 21 км за 1 ч 15 мин. На сколько километров больше пройдёт он за то же время, двигаясь по течению реки? Есть ли лишнее данное в условии этой задачи?

323 Найди значения выражений:

1) $3ab$, если $a = 0,57, b = 2\frac{2}{19};$

2) $\frac{2c}{d^2}$, если $c = 2\frac{1}{4}, d = 0,3;$

3) $\frac{5}{6}n - \frac{4}{15}n + \frac{1}{12}n$, если $n = 1\frac{7}{13};$

4) $\frac{9}{35}k + \frac{3}{14}k - \frac{5}{21}k$, если $k = \frac{9}{14}.$



324 Что общего и что различного в выражениях? Прочитай выражения и найди их значения при $x = 1,5$; $y = 1$.

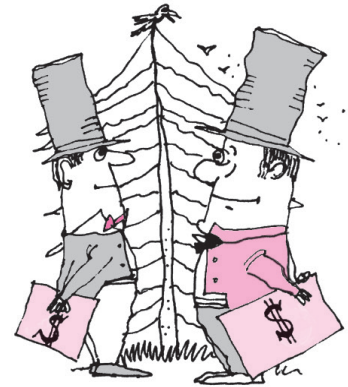
1) $2x - y^3$; 2) $(2x - y)^3$; 3) $2(x - y)^3$; 4) $2(x - y^3)$.

325 Переведи на математический язык высказывания:

- 1) Утроенное произведение числа a и квадрата числа b на 50% больше куба числа c .
- 2) Разность квадратов чисел x и y на 40% меньше их среднего арифметического.
- 3) Куб частного чисел m и n на 300% больше частного квадратов этих чисел.
- 4) Произведение суммы и разности чисел c и d на 90% меньше суммы их кубов.

326 1) Два коммерсанта вложили в проект соответственно 2,8 и 3,2 тыс. долларов. Полученная прибыль составила 1800 долларов. Как её распределить пропорционально вкладу каждого?

2) Лиственные деревья занимают 20% площади лесного массива. Остальная часть занята кустарником и хвойными деревьями, причем их площади относятся как 3 : 5. Чему равна площадь всего лесного массива, если кустарником занято на 14 га меньше, чем хвойным лесом?



327 Из цифр 2, 5, 7, 8 составь множество чисел, кратных: 1) девяти; 2) трем; 3) пяти; 4) четырём. Каждая цифра может входить в запись числа не более одного раза.

328 Сократи дроби, если значения всех переменных отличны от нуля:

1) $\frac{16\ 200}{39\ 600}$; 2) $\frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}$; 3) $\frac{13 \cdot 71 - 71 \cdot 7}{71 \cdot 13 + 71 \cdot 7}$; 4) $\frac{70abc^2}{84a^2bcd}$.

329 БЛИЦтурнир

- 1) Скорость парохода по течению реки равна a км/ч, а скорость плота на этой реке – b км/ч. Какое расстояние проплывёт пароход за 5 ч, двигаясь по озеру?
- 2) Скорость течения реки, равная c км/ч, составляет 20% собственной скорости лодки. Чему равна скорость лодки против течения?
- 3) Скорость теплохода по течению реки равна d км/ч, а против течения – на 20% меньше. Чему равна собственная скорость теплохода?
- 4) Катер проходит расстояние s км за 2 ч, двигаясь по течению реки, и за 3 ч – против течения. Чему равна скорость течения реки?



330 Запиши с помощью знаков «+» и «-» высоты гор и глубины морей:

- а) высота пика Победы 7439 м;
 б) высота горы Эльбрус 5642 м;
 в) наибольшая глубина Каспийского моря 1025 м;
 г) наибольшая глубина Тихого океана 10 920 м (Марианский жёлоб).
 Пользуясь справочником или энциклопедией, приведи ещё 4 примера обозначения величин с помощью знаков «+» и «-».

331 Начерти координатную прямую и отметь на ней данные точки. Выпиши точки, которые находятся на одинаковом расстоянии от начала отсчета. Что можно сказать о координатах этих точек?

1) $A(-5)$, $B(7)$, $C(-2)$, $D(-7)$, $E(1)$, $F(5)$, $G(2)$, $H(-1)$ (единичный отрезок – 2 клетки);

2) $A(2\frac{1}{3})$, $B(1,5)$, $C(-3)$, $D(-2\frac{1}{3})$, $E(-\frac{2}{3})$, $F(-1,5)$, $G(\frac{2}{3})$, $H(3)$ (единичный отрезок – 3 клетки).

332 Построй координатную прямую и отметь на ней точки $M(-5)$, $L(2)$, $U(0)$, $O(-3)$, $B(4)$, $D(-1)$. Если задание выполнено верно, то буквы образуют математический термин. Найди на с. 79, что он означает, и выпиши его определение в тетрадь.

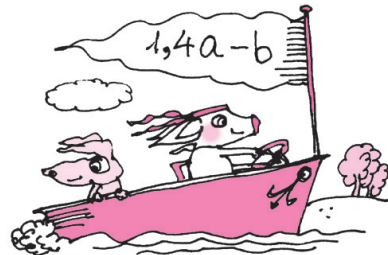
333 Расстояние между двумя пристанями на реке 32,4 км. За сколько времени катер проплывёт этот путь и вернётся обратно, если собственная скорость катера 18 км/ч, а скорость течения реки на 80% меньше скорости катера?

334 Найди значения выражений:

1) $1,4a - b$, если $a = 1\frac{3}{7}$, $b = 1,95$;

2) $3,2cd^2n$, если $c = 2\frac{7}{9}$, $d = 0,6$, $n = 1,25$;

3) $\frac{14}{15}x + \frac{5}{6}x - \frac{3}{10}x$, если $x = 1\frac{7}{11}$.



335 Предприятие выпустило 50 000 акций. 30% всех акций были распределены между работниками предприятия, а остальные проданы трем фирмам – «Альфа», «Бета» и «Гамма» – в отношении 1 : 2 : 4. На сколько акций больше купила фирма «Гамма», чем «Альфа»?

336 Сократи дроби:

1) $\frac{448}{720}$; 2) $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5^2}{3 \cdot 5 \cdot 11}$; 3) $\frac{49 \cdot 15 + 49 \cdot 3}{49 \cdot 15}$; 4) $\frac{ab^2}{abc}$ ($a, b, c \neq 0$).

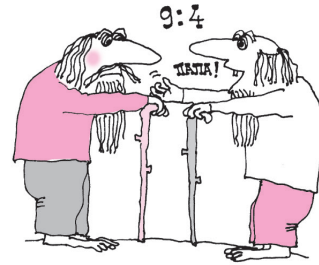
337 Составь выражение и найди его значение при $s = 45,6$; $b = 1,6$:

Теплоход проплыл расстояние s км по течению реки за 3 ч. Чему равна его скорость против течения, если скорость течения реки равна b км/ч?

338 Вычисли:

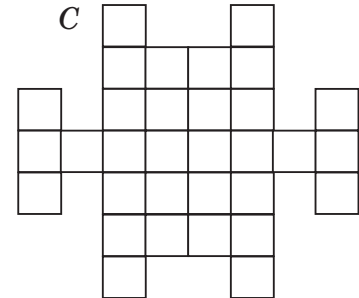
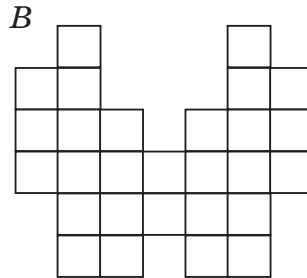
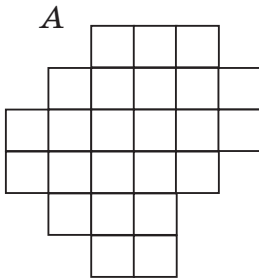
1) $(5,884 + 5,96 \cdot 20,5) : 3,2 - 30,144;$

2)
$$\frac{(2,7 - 2,45 + 3 \frac{2}{15} + 1 \frac{4}{20}) \cdot 4 \frac{4}{11}}{6,125 : 6 \frac{1}{8} - (0,59 \cdot \frac{7}{40} + 0,41 \cdot \frac{7}{40}) : 0,35}.$$



339* Отцу 45 лет, а сыну 10. Через сколько лет их возрасты будут относиться как 9 : 4?

340* Разрежь каждую фигуру по линиям сетки на четыре одинаковые части.



341* 1) Царь Дадон затеял построить 8 городов и соединить их прямыми дорогами так, чтобы из каждого города выходило ровно 4 дороги и никакие две дороги не пересекались. Помоги царю Дадону нарисовать схему расположения дорог и городов.

2) Царь Салтан решил построить для своих вассалов шесть замков и соединить каждые два из них дорогами. Но он хочет, чтобы было только 3 перекрестка и на каждом из них пересекались ровно две дороги. Сможешь ли ты нарисовать такую схему расположения дорог и замков?

2. Противоположные числа и модуль.

Число, которое отличается от данного только знаком, называется **противоположным** данному. Так, число (-3) противоположно числу 3 , а само число 3 противоположно числу (-3) . Можно сказать поэтому, что числа 3 и (-3) являются *взаимно противоположными*. Так, например, взаимно противоположными являются числа 7 и -7 , $-1 \frac{2}{3}$ и $1 \frac{2}{3}$, $4,25$ и $-4,25$.

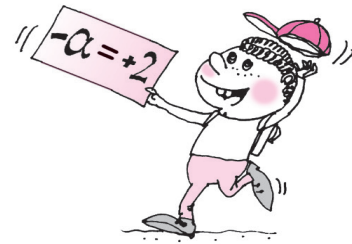
Число 0 считается противоположным самому себе: $-0 = 0$.

Число, противоположное к a , обозначается символом $(-a)$. Поэтому запись (-5) можно прочесть двумя способами: «минус 5» и «число, противоположное числу 5». А запись $-(-5)$ означает «число, противоположное числу минус 5», то есть само число 5.

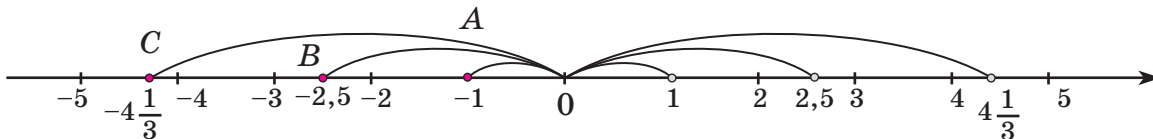
И вообще, для любого числа a выполняется равенство

$$-(-a) = a.$$

Заметим, что число $(-a)$ может быть и положительным. Например, если $a = -2$, то $-a = 2$, то есть $(-a)$ положительно. Итак, числа, противоположные отрицательным, положительны.



Взаимно противоположные числа расположены на координатной прямой по разные стороны от 0 на одинаковом расстоянии от него. Так, числа 2 и (-2) оба расположены на расстоянии 2 единиц от 0, а числа $(-4,5)$ и 4,5 – на расстоянии 4,5 от 0. Полученные точки попарно симметричны относительно начала отсчёта на координатной прямой.



Расстояние от начала отсчёта до точки, обозначающей данное число, называют модулем этого числа (от латинского *modus* – мера, величина).

Модуль числа a обозначается символом $|a|$. Например,

$$|2| = 2, \quad |-2| = 2, \quad |4,5| = 4,5, \quad |-4,5| = 4,5.$$

Так как противоположные числа находятся на одинаковом расстоянии от начала отсчёта, то их модули равны:

$$|-a| = |a|.$$

Модуль числа 0 считается равным 0: это число находится на «нулевом расстоянии» от самого себя:

$$|0| = 0.$$

Как и любое расстояние между двумя точками, модуль не может быть отрицательным. Таким образом, для любого числа a выполняется неравенство:

$$|a| \geq 0.$$

В заключение уточним правило знаков при раскрытии скобок в выражениях с рациональными числами. Так как знак «плюс» не изменяет знака числа, то

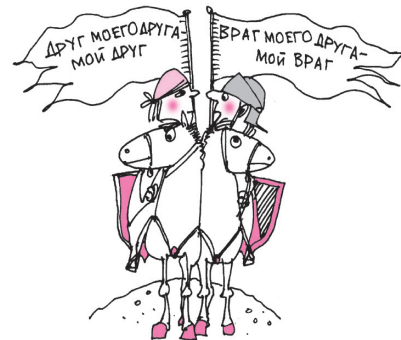
$$+(+a) = +a, \quad +(-a) = -a.$$

Знак «минус», наоборот, меняет знак числа на противоположный, то есть

$$-(+a) = -a, \quad -(-a) = +a.$$

Из этих равенств видно, что два одинаковых знака дают в итоге «+», а два разных знака дают «-». Чтобы лучше запомнить этот вывод, составим таблицу определения знака числа:

$+(+) = +$	$+(-) = -$
$-(-) = +$	$-(+) = -$



К 342 Какие числа называют противоположными? Найди пары взаимно противоположных чисел:

$$-5; +11; +3\frac{5}{8}; -11; +5; -2,3; -3\frac{5}{8}; +2,3.$$

343 Прочитай равенство и объясни, почему оно верно:

$$\text{а) } -(+4) = -4; \quad \text{б) } -(-2) = +2; \quad \text{в) } -0 = 0.$$

344 Назови и запиши число, противоположное данному:

$$+5; +12; -7; -800; +2\frac{1}{6}; -4,28; 0; -\frac{2}{3}.$$



345 Можно ли считать, что символ $(-a)$ обозначает отрицательное число? Приведи контрпример. Сделай вывод.

346 Запиши без скобок:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } -(+9); & \text{в) } -(-\frac{5}{12}); & \text{д) } -(-(+1)); & \text{ж) } -(-(-(+5))); \\ \text{б) } -(-3); & \text{г) } -(+1,7); & \text{е) } -(-(-2)); & \text{з) } -(-(-(-6))). \end{array}$$

347 Допиши равенства так, чтобы получились верные высказывания:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } -(...) = 8; & \text{в) } -(...) = -15; & \text{д) } -(...) = \frac{4}{9}; & \text{ж) } -(...) = +a; \\ \text{б) } -(...) = -8; & \text{г) } -(...) = 7; & \text{е) } -(...) = -3,5; & \text{з) } -(...) = -b. \end{array}$$

348 Реши уравнения:

$$\text{а) } -x = 5,4; \quad \text{б) } -y = -\frac{1}{6}; \quad \text{в) } -z = -(+2); \quad \text{г) } -t = -(-\frac{3}{7}).$$

349 Закончи предложения:

- 1) Если число положительно, то противоположное к нему число ...
- 2) Если число отрицательно, то противоположное к нему число ...
- 3) Если число неотрицательно, то противоположное к нему число ...
- 4) Если число неположительно, то противоположное к нему число ...

350 Прочитай высказывания и определи их истинность. Построй отрицания ложных высказываний:

$$\begin{array}{ll} 1) \forall a \in \mathbb{Q}: a = -a; & 3) \forall a \in \mathbb{Q}: a \neq -a; \\ 2) \exists a \in \mathbb{Q}: a = -a; & 4) \forall a \in \mathbb{Q}: -(-a) = a. \end{array}$$

351 Прочитай равенство, используя слова «модуль» и «расстояние». Является ли это высказывание истинным?

$$1) |-3| = 3; \quad 2) |4| = 4; \quad 3) |-5| = 5; \quad 4) -|-7| = -7.$$

352 Отметь на координатной прямой точки, модуль которых равен 2, 6, 0. Сколько точек отмечено в каждом случае? Сделай записи.

353 Запиши множество чисел, модуль которых равен:

а) 39; б) $\frac{5}{17}$; в) 4,8; г) $2\frac{11}{56}$; д) 0.

354 Найди модули чисел и запиши значение модулей. Расположи данные числа в порядке убывания модулей, сопоставь им соответствующие буквы, и ты узнаешь название самой северной точки одного из материков. На каком материке находится эта точка?

+42; 0; -96; +8; $+1\frac{3}{49}$; -45; -0,02; -100.

Ю Н Е С К Л И Ч



355 Сравни модули чисел. Проанализируй полученный результат и сформулируй гипотезу о сравнении модулей рациональных чисел.

а) 2 и -5; в) -3 и 2,96; д) $\frac{3}{7}$ и $-\frac{5}{7}$; ж) $-\frac{5}{3}$ и $-\frac{2}{11}$;

б) -8 и -6; г) -4,2 и -0,45; е) $-\frac{4}{5}$ и $-\frac{4}{9}$; з) $\frac{5}{12}$ и $-\frac{8}{15}$.

356 Вычисли:

а) $|-4| + |-5|$; д) $|-24,5| + |0|$; и) $|-6| - |-4,2| : |0,7|$;

б) $|-1,8| : |\frac{3}{25}|$; е) $|-3\frac{8}{9}| \cdot |-0,54|$; к) $|-1\frac{1}{4}| \cdot |-0,1| + |-0,125|$;

в) $|-5,6| \cdot |-1|$; ж) $|8,2| - |-0,32|$; л) $|-3| : |-7| \cdot |-3,5| - 0,6$;

г) $|2,25| - |-1\frac{3}{4}|$; з) $|-7,42| : |-\frac{1}{10}|$; м) $|\frac{5}{18}| \cdot |-9| - 0,25 \cdot |0|$.

357 Известно, что $|a| = 5$. Чему равен $|-a|$? Сделай вывод.

358 Прочитай высказывание и определи, истинно оно или ложно. Построй отрицания ложных высказываний:

1) $\forall a \in \mathbb{Q}: |-a| = |a|$; 3) $\forall a \in \mathbb{Q}: |a| > 0$;

2) $\exists a \in \mathbb{Q}: |-a| = -|a|$; 4) $\exists a \in \mathbb{Q}: |a| \leq 0$.

359 Реши уравнения с объяснением, пользуясь понятием «расстояние»:

а) $|x| = 3$; д) $|-a| = 8$; и) $|m| = 0$; н) $-|k| = -7$;

б) $5 = |y|$; е) $|-b| = 1$; к) $-|n| = 0$; о) $-|p| = 10$;

в) $|z| = -2$; ж) $|-c| = -6$; л) $|x - 4| = 0$; п) $-|-a| = 5$;

г) $-9 = |t|$; з) $|-d| = -4$; м) $|2y| = 0$; р) $-|-b| = -6$.

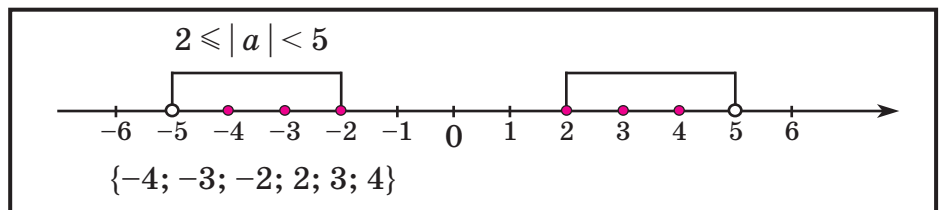
360 1) A – множество целых чисел, модуль которых меньше 4; B – множество целых чисел, модуль которых меньше или равен 4; C – множество натуральных чисел, модуль которых меньше или равен 4. Запиши множества A , B и C с помощью фигурных скобок и отметь их элементы на координатной прямой. Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств A , B и C .

2) E – множество целых чисел, модуль которых больше 2; F – множество целых чисел, модуль которых больше или равен 2; M – множество отрицательных целых чисел, модуль которых больше или равен 2. Запиши множества E , F и M с помощью фигурных скобок и сделай рисунки. Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств E , F и M .

361 Найди множество всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству, и сделай рисунки.

- | | | | |
|-------------------|-------------------|---------------------|--------------------------|
| а) $ x < 3$; | д) $5 > y $; | и) $ z < 1,8$; | н) $1 < t < 4$; |
| б) $ x \leq 3$; | е) $2 \geq y $; | к) $ z \leq 1,8$; | о) $1 \leq t < 4$; |
| в) $ x > 3$; | ж) $1 < y $; | л) $ z > 1,8$; | п) $1 < t \leq 4$; |
| г) $ x \geq 3$; | з) $6 \leq y $; | м) $ z \geq 1,8$; | р) $1 \leq t \leq 4$. |

Образец:



362 Раскрой скобки, пользуясь таблицей знаков:

- | | | | |
|-------------------------|------------------------|------------------------|----------------------|
| а) $-(+7)$; | д) $+(+2)$; | и) $-(-6)$; | н) $+(-(+3))$; |
| б) $-(-5)$; | е) $+(-1)$; | к) $-(+4)$; | о) $-(+(+5))$; |
| в) $-(-\frac{4}{11})$; | ж) $+(+\frac{3}{4})$; | л) $+(-\frac{2}{7})$; | п) $+((+(-(-7))))$; |
| г) $-(+3,2)$; | з) $+(-0,5)$; | м) $+(+1,6)$; | р) $-((+(-(+9))))$. |

π **363** Вычисли устно и продолжи ряд ответов на два числа, сохраняя закономерность:

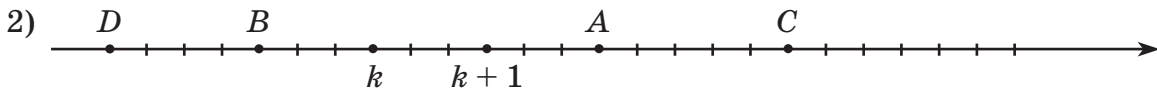
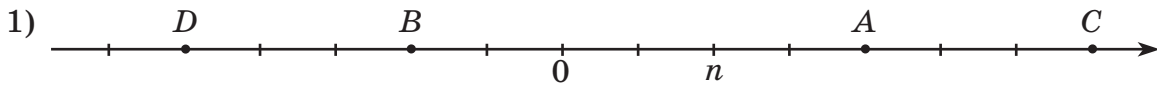
- 1) $1,8 \xrightarrow{\cdot 5} \bigcirc \xrightarrow{-3,6} \bigcirc \xrightarrow{: 0,9} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 0,2} \bigcirc \xrightarrow{+0,05} \boxed{?}$
- 2) $2 \xrightarrow{: 3} \bigcirc \xrightarrow{\cdot \frac{3}{4}} \bigcirc \xrightarrow{+0,5} \bigcirc \xrightarrow{-\frac{4}{9}} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 4,5} \boxed{?}$
- 3) $2,3 \xrightarrow{+1,7} \bigcirc \xrightarrow{: 5} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 0,1} \bigcirc \xrightarrow{-0,03} \bigcirc \xrightarrow{: 0,01} \boxed{?}$
- 4) $\frac{1}{3} \xrightarrow{+0,2} \bigcirc \xrightarrow{: \frac{2}{15}} \bigcirc \xrightarrow{\cdot \frac{3}{4}} \bigcirc \xrightarrow{-1\frac{1}{3}} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 6} \boxed{?}$



364 Найди координаты точек координатной прямой, удалённых: а) на 3 единицы от точки $A(1)$; б) на 2 единицы от точки $B(-1)$; в) на 4 единицы от начала координат.

365 $A = \{-16; -\frac{4}{7}; -0,3; 9; 1\frac{3}{4}; 0; -5; 2; 4,8\}$. Составь из элементов этого множества подмножества: 1) B – отрицательных рациональных чисел; 2) C – натуральных чисел; 3) D – целых чисел; 4) E – целых отрицательных чисел. Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств A , B , C , D и E .

366 Определи координаты точек A , B , C и D :



367 Прочитай неравенство и найди множество его целых решений. Сделай чертеж.

1) $-2 < x \leq 3$; 2) $-5 \leq x < -1$; 3) $-3 < x < 1,8$; 4) $-1,2 \leq x \leq 4\frac{2}{3}$.

368 Что общего и что различного в данных выражениях? Какое выражение может быть «лишним»? Запиши остальные выражения в общем виде с помощью переменной x :

1) $2a + 3$; $2n + 3$; $2c + 3$; $2b^2 + 3$; $2d + 3$;

2) $0,4b^2 + 5$; $5 + 0,4n^2$; $0,4c + 5$; $0,4d^2 + 5$; $5 + 0,4a^2$;

3) $n^2 + n + 1$; $a + a^2 + 1$; $1 + b + b^2$; $d^2 + 1 + d$; $c + 2c + 1$.

369 Прочитай и сравни выражения – в чём их сходство и в чём отличие? Найди значения этих выражений:

1) $3a^2$ и $(3a)^2$, если $a = 5; 0,2; \frac{1}{6}$; 2) $2b^3$ и $(2b)^3$, если $b = 2; 0,5; \frac{2}{3}$.

370 Сравни числа:

а) 29 374 и 9537;

б) 805 168 и 840 168;

в) 3,57 и 3,517;

г) 12,042 и 15,032;

д) $\frac{2}{11}$ и $\frac{6}{11}$;

е) $\frac{3}{7}$ и $\frac{3}{8}$;

ж) $\frac{5}{6}$ и $\frac{13}{9}$;

з) $\frac{4}{17}$ и $\frac{5}{18}$.



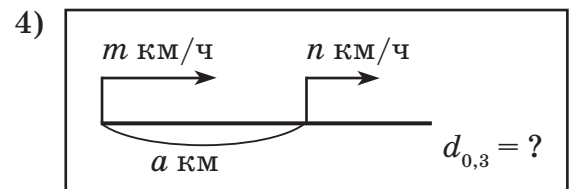
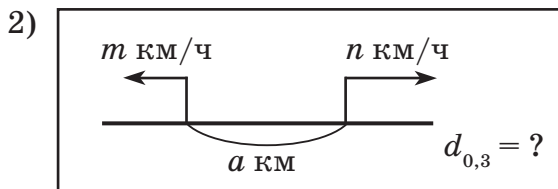
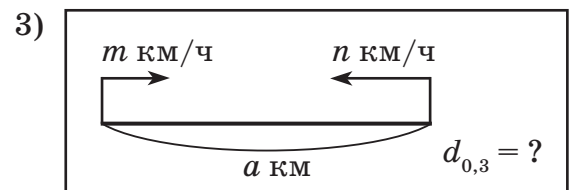
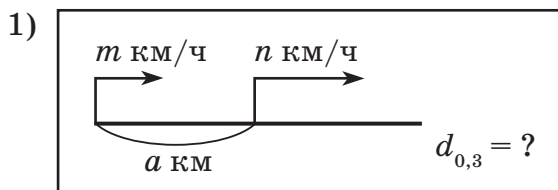
- 371** 1) Скорости двух пешеходов относятся как $5 : 4$. На сколько процентов скорость первого пешехода больше скорости второго? На сколько процентов скорость второго пешехода меньше скорости первого?
- 2) Скорости двух лыжников относятся как $9 : 10$. На сколько процентов скорость первого лыжника меньше скорости второго? На сколько процентов скорость второго лыжника больше скорости первого?



- 372** Из двух городов, расстояние между которыми равно 18 км, выехали одновременно в противоположных направлениях два автомобиля. Через 1 ч 45 мин после выезда расстояние между ними было равно 270 км. На сколько километров в час скорость первого автомобиля меньше скорости второго, если их скорости относятся как $5 : 7$?

- 373** В 8 ч 50 мин из деревни в село вышел пешеход. Через $\frac{1}{3}$ ч навстречу ему из села в деревню вышел другой пешеход, и в 10 ч 10 мин пешеходы встретились. Скорость второго пешехода была на 50% больше скорости первого, и поэтому первый, хотя вышел раньше, до встречи прошел на $0,5$ км меньше второго. Чему равно расстояние между селом и деревней?

- 374** Найди расстояние между объектами через $0,3$ ч после начала движения, считая, что в течение этого времени вид движения не менялся. Придай значения переменным и найди ответ.



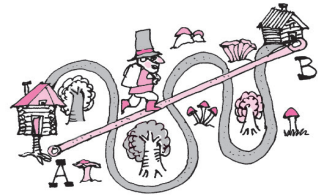
- 375** Представь выражения в виде дроби при ненулевых значениях переменных:

- 1) $\frac{a}{3} + \frac{2a}{15}$; 3) $\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc}$; 5) $\frac{2a}{y} - 3$; 7) $\frac{5y}{x} \cdot 6x^2 \cdot \frac{1}{2y^2}$;
- 2) $\frac{5b}{12} - \frac{7b}{18}$; 4) $\frac{n}{4a^2} + \frac{1}{an}$; 6) $b - \frac{2c}{3}$; 8) $45ac^2 : \frac{10c}{a} \cdot \frac{d}{6a^2}$.

376 Найди значение выражения наиболее рациональным способом:

$$1) (12,75 + 2,25 \cdot 1 \frac{5}{9} - 1 \frac{2}{3} - 12,75 + 3,6 \cdot 1 \frac{3}{4}) : 24,4;$$

$$2) \frac{11,2 \cdot 3,06 - 3,05 \cdot (13,25 - 3,69 : 1,8)}{0,056 \cdot 8,09 - 3,09 \cdot 0,056}.$$



D

377 Вставь число так, чтобы получилось истинное высказывание. Переведи высказывание с математического языка на русский и сделай чертеж:

а) $-(+2) = \dots$; б) $-(\dots) = 5$; в) $3 = -(\dots)$; г) $-4 = -(\dots)$.

378 Реши уравнения и расположи их корни на координатной прямой. Если задание выполнено верно, то соответствующие им буквы образуют имя древнегреческой богини судьбы и случая.

И $-x = 1$

Е $-y = -4$

Т $-z = -(-3)$

Х $-(+2) = -t$

379 Перерисуй в тетрадь и заполни таблицу. Запиши на математическом языке закономерности, которые ты наблюдаешь.

Число	x	5	-3	0		
Противоположное число					2	-4
Модуль числа						
Модуль противоположного числа	$ -x $	5				

380 Найди значение выражения:

1) $|x| + |y|$, если $x = 2 \frac{5}{6}$, $y = -1,3$;

2) $|x| - |y|$, если $x = -5,28$, $y = -2,8$;

3) $|x| \cdot |y|$, если $x = -4,8$, $y = -2 \frac{1}{12}$;

4) $|x| : |y|$, если $x = -872,9$, $y = 14,5$.



381 Реши уравнения:

а) $|x| = 6$;

б) $|-y| = 1$;

в) $|z| = 0$;

г) $-|t| = 5$.

382 Найди множество целых решений неравенства и сделай рисунок:

а) $|x| < 2$;

б) $|x| \leq 2$;

в) $|x| > 2$;

г) $|x| \geq 2$.

383 Раскрой скобки, пользуясь таблицей знаков:

- а) $-(+7)$; в) $+(+2)$; д) $-(-6)$; ж) $+(-(+3))$;
 б) $-(-5)$; г) $+(-1)$; е) $-(+4)$; з) $-(+(+5))$.

384 Прочитай выражения и запиши их перевод с математического языка на русский. Найди значения этих выражений при $b = 12$, $c = 3$:

- 1) $2b - c^2$; 3) $2(b - c)^2$;
 2) $2(b - c^2)$; 4) $(2b - c)^2$.

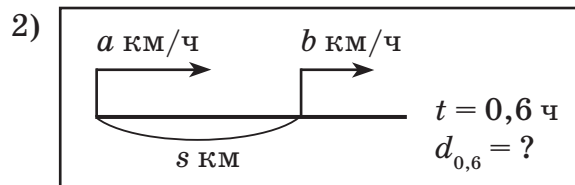
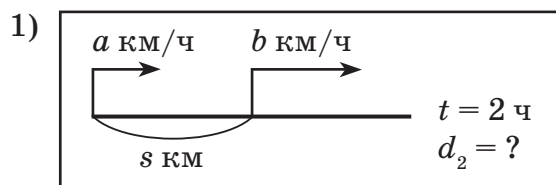
385 В классе число мальчиков относится к числу девочек как $8 : 5$. На сколько процентов мальчиков в классе больше, чем девочек? На сколько процентов девочек меньше, чем мальчиков?



386 Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух поселков, расстояние между которыми 27 км, и через 25 мин расстояние между ними стало равно 12 км. Скорости велосипедистов относятся как $5 : 4$.

- а) Через сколько времени после своего выезда они встретились? б) Какое расстояние проехал до встречи каждый велосипедист?

387 Придумай задачу по схеме, считая, что в течение указанного времени вид движения не менялся. Придай переменным значения, соответствующие условию твоей задачи, и найди ответ.



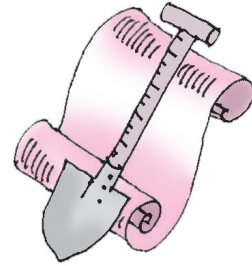
388 Найди значения выражений:

- 1) $0,9 : (3 \frac{2}{7} \cdot 2,8 - 2,79 + 7,2 : 2 \frac{4}{7} + 2,79)$;
 2) $\frac{15,04 \cdot 2,5 - 2,4 \cdot (85,24 - 84,24 : 1,2)}{0,047 \cdot 16,9 - 0,9 \cdot 0,047}$.



389* Путешественник Вася, живущий в 50 км от мест проведения турнира Архимеда, решил поехать на турнир на велосипеде. Рассчитав время, он проехал первые 10 км с запланированной скоростью, но затем велосипед сломался и Васе пришлось пойти пешком. Через некоторое время Васе повезло, и последние 24 км он ехал на попутной машине. Удалось ли Васе приехать на турнир к запланированному сроку, если скорость Васиной ходьбы была в 2,5 раза меньше скорости велосипеда, а скорость машины – в 6 раз больше?

390* Трое рабочих копали канаву. Сначала первый рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. Затем второй рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. И наконец, третий рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. В результате канавка была вырыта. Во сколько раз быстрее была бы вырыта канавка, если бы одновременно работали все трое рабочих?



391* Реши уравнения:

- 1) $|x| = x$; 3) $|x| = 2x$; 5) $|x - 1| = 0$; 7) $|x + 1| = 4$;
 2) $|x| = -x$; 4) $|2x| = 6$; 6) $|2x - 1| = 0$; 8) $|x - 2| = -3$.

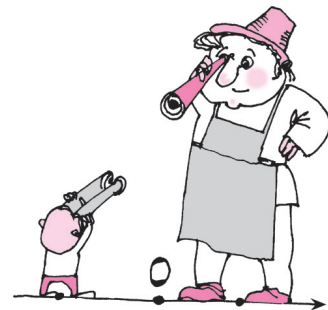
392* Реши неравенства:

- 1) $|x| \leq 0$; 2) $|x - 5| > 0$; 3) $|x + 1| < 3$; 4) $|x - 1| \geq 2$.

3. Сравнение рациональных чисел.

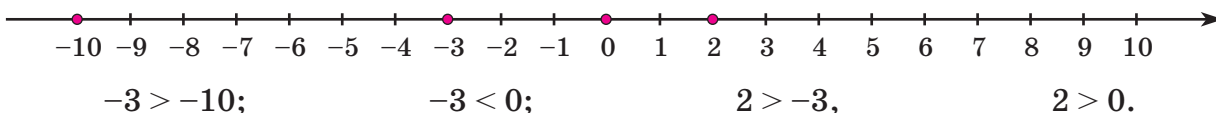
Для того чтобы использовать отрицательные числа при решении практических задач, мы должны научиться сравнивать их и совершать над ними арифметические действия.

При этом правила сравнения и правила действий с рациональными числами должны стать естественным продолжением соответствующих правил действий с уже известными нам положительными числами, иначе мы приходим к противоречию.



Правила сравнения рациональных чисел можно вывести из известного нам правила сравнения положительных чисел, которое подсказывает нам координатная прямая. Если она изображена, как обычно, горизонтально (см. с. 70), то *из двух чисел на координатной прямой больше то, которое расположено правее, а меньше то, которое расположено левее.*

Как мы уже говорили, положительные числа изображаются на координатной прямой точками, расположенными правее 0, отрицательные – левее 0. Это означает, что любое положительное число больше 0 и больше любого отрицательного числа, а любое отрицательное число меньше 0 и меньше любого положительного числа. Из двух отрицательных чисел левее расположено число с большим модулем, поэтому оно меньше. Например,



Тем самым мы приходим к следующим правилам сравнения рациональных чисел:

- 1) любое положительное число больше 0 и больше любого отрицательного числа;
- 2) любое отрицательное число меньше 0 и меньше любого положительного числа;
- 3) из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

Установленные правила сравнения рациональных чисел хорошо согласуются и с житейскими представлениями о сравнении реальных величин, которые могут изменяться в двух противоположных направлениях. Например, при температуре 2°C на улице теплее, чем при температуре -3°C , а при температуре -3°C теплее, чем при -10°C , то есть опять $2 > -3$, а $-3 > -10$.

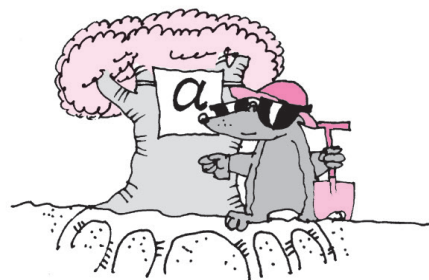
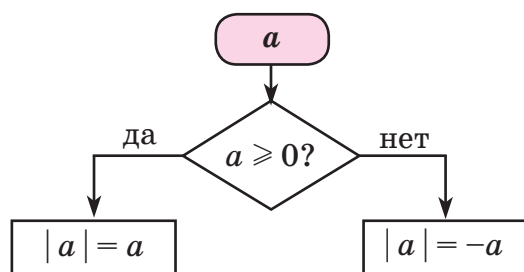
В предыдущем пункте мы ввели понятие модуля числа. Определение модуля было дано нами на геометрическом языке – с помощью координатной прямой. Однако геометрическое определение бывает далеко не всегда удобно. Сформулируем то же самое определение в алгебраической, буквенной форме.

Как мы видели,

- 1) модуль положительного числа a – само число a ,
- 2) модуль отрицательного числа a – противоположное ему число $(-a)$,
- 3) модуль числа 0 – само число 0.

Заметив схожесть первой и третьей строк, можно сказать и так: **если число a больше или равно 0, то его модуль равен самому числу a ; если же число a меньше 0, то его модуль равен $(-a)$.**

Здесь в первый раз встречается так называемое «разветвленное» определение. Модуль заданного числа вычисляется не сразу: надо сначала узнать, как заданное число «располагается» относительно 0 – больше, равно или меньше, – и лишь затем воспользоваться соответствующим правилом. Наглядно эту ситуацию можно представить в виде блок-схемы:



Такие ситуации в математике часто записываются с помощью фигурной скобки:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Найдем по этому определению, например, модули чисел 2 и -3 :

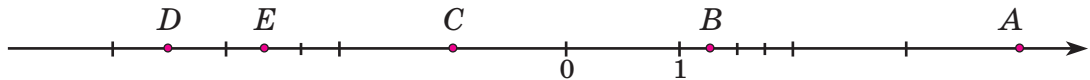
– так как $2 > 0$, то по *первой* строчке определения $|2| = 2$;

– так как $-3 < 0$, то по *второй* строчке определения $|-3| = -(-3) = 3$.

398 Сравни числа:

- | | | |
|------------------|--------------------------------------|--|
| а) 2 и -4,5; | д) $-\frac{1}{9}$ и $-\frac{1}{7}$; | и) $-2\frac{4}{15}$ и $-3\frac{2}{15}$; |
| б) -1,8 и -1,6; | е) 2,6 и -6,2; | к) -0,806 и -7,5; |
| в) -95,3 и 0,24; | ж) $-\frac{7}{8}$ и $-\frac{8}{9}$; | л) $-\frac{5}{6}$ и $-\frac{11}{14}$; |
| г) -59,9 и -60; | з) -0,2 и -0,03; | м) -4,009 и -4,01. |

399 Какие числа соответствуют точкам A, B, C, D и E координатной прямой? Запиши эти числа: а) в порядке возрастания; б) в порядке убывания.



400 Расположи числа в порядке возрастания, сопоставь им соответствующие буквы и расшифруй слова. Что они означают?

- 1) 8,5; -2,19; -2,9; -15; $-9\frac{1}{3}$; -16,4; 3; -9,2.
Я Ц Е Р А Т И П
- 2) -7,8; -60; 0; $-52\frac{4}{7}$; -0,4; -39,6; 7,2; 5,6; $-18\frac{6}{7}$; -21,5.
Н О С К О Р Б Т Ж У

401 Поставь вместо звездочки знак $>$ или знак $<$:

- | | | |
|---------------------|-------------------------------------|--|
| а) $0 * -8,3$; | г) $2\frac{5}{7} * 2\frac{8}{11}$; | ж) $-9\frac{7}{16} * -9\frac{5}{12}$; |
| б) $-3,9 * 2,7$; | д) $-0,048 * -0,05$; | з) $-21,3 * 0$; |
| в) $-5,18 * -5,4$; | е) $1\frac{4}{9} * -1,4$; | и) $-2,318 * -2,6$. |

402 Прочитай неравенство и запиши множество его целых решений:

- | | | | |
|------------------|--------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1) $x < 2$; | 3) $x > -5$; | 5) $-2 \leq x < 4$; | 7) $-5 < x \leq -0,5$; |
| 2) $x \leq -3$; | 4) $x \geq -1,4$; | 6) $-3 \leq x \leq 1$; | 8) $-2,7 < x < 2,7$. |

403 Известно, что a и b – положительные числа, а m и n – отрицательные. Сравни:

- | | | | |
|--------------|-----------------|------------------|--------------------|
| а) 0 и a ; | г) a и n ; | ж) $-a$ и b ; | к) a и $ a $; |
| б) 0 и m ; | д) m и b ; | з) $-m$ и $-a$; | л) $ m $ и m ; |
| в) $-n$ и 0; | е) n и $-m$; | и) $-b$ и $-n$; | м) $ -n $ и $-n$. |

404 Найди множество чисел, удовлетворяющих условию, и запиши его, если возможно, с помощью двойного неравенства:

- | | | | |
|-------------------|---------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $ x < 3$; | 3) $ x < 1,5$; | 5) $ x < a$, где $a > 0$; | 7) $ x < c$, где $c < 0$; |
| 2) $ x \leq 4$; | 4) $ x \leq 2,8$; | 6) $ x \leq b$, где $b \geq 0$; | 8) $ x \leq d$, где $d \leq 0$. |

- 405** Стоимость x р. билета в театр зависит от номера ряда n , в котором расположено место, в соответствии со следующими расценками:

$$x = \begin{cases} 1500, & \text{если } 1 \leq n \leq 10; \\ 1200, & \text{если } 10 < n \leq 15; \\ 900, & \text{если } 15 < n \leq 20. \end{cases}$$



Сколько стоит билет в этот театр на места, расположенные в 8-м ряду, 10-м ряду, 15-м ряду, 18-м ряду, 20-м ряду?

- 406** Скорость v км/ч пешехода изменялась в зависимости от времени его движения t ч следующим образом:

$$v = \begin{cases} 3, & \text{если } 0 \leq t \leq 1,5; \\ 4,2, & \text{если } 1,5 < t \leq 2; \\ 0, & \text{если } 2 < t \leq 3; \\ 2,8, & \text{если } 3 < t \leq 5. \end{cases}$$



Чему была равна скорость пешехода через 40 мин после выхода, через 1 ч 50 мин, через 2 ч 30 мин, через 4 ч 10 мин?

- 407** Запиши определение модуля в «разветвлённой» форме. Пользуясь им, найди модули чисел:

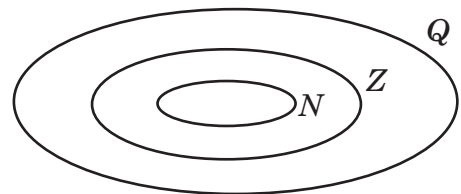
- 1) 9; 3) $-3,6$; 5) $1\frac{1}{8}$; 7) -82 ; 9) $5\frac{2}{3}$;
2) -5 ; 4) 0; 6) $-7,4$; 8) 4,5; 10) $-12,3$.

- 408** Найди множество корней уравнения, пользуясь определением модуля в «разветвлённой» форме:

- 1) $|x| = 4$; 3) $|z| = -3$; 5) $|x| = a$, где $a > 0$; 7) $|x| = c$, где $c < 0$;
2) $|y| = 0$; 4) $|t| = 1,5$; 6) $|x| = b$, где $b \geq 0$; 8) $|x| = d$, где $d \leq 0$.

π

- 409** Перерисуй в тетрадь диаграмму Эйлера–Венна множеств N , Z и Q и отметь на ней элементы множества $A = \{-6; 2,5; 0; 4; \frac{1}{3}; -1\frac{2}{7}\}$.



- 410** Реши уравнения:

1) $(\frac{2}{3}a - 0,7) : 1,5 + 0,5 = \frac{29}{30}$;

2) $4,2 - 0,2 : (\frac{1}{6} + 3b) = 3\frac{3}{5}$;

3) $2c + 0,2c - 0,8c + 3,4c = 6,4$;

4) $\frac{2}{3}d - \frac{1}{2}d + d + 2\frac{1}{6} = 4,5$;

5) $\frac{5\frac{1}{3}}{0,2x} = \frac{8}{0,75}$;

6) $0,2 : \frac{3}{16} = 2\frac{2}{3} : (0,4y - 1,5)$;

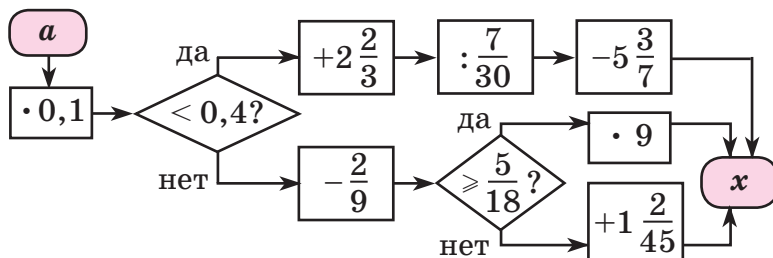
7) $6m - 2,6 = 2,8m + \frac{1}{15}$;

8) $4(n + \frac{5}{12}) = 1\frac{1}{6}(6n - 1\frac{1}{7})$.

411 На четырёх полках 180 книг. На первой полке в 2 раза больше книг, чем на второй, а число книг на третьей полке составляет 60% от числа книг на второй и $\frac{2}{3}$ от числа книг на четвертой полке. Сколько книг на каждой полке? На сколько процентов число книг на четвертой полке меньше среднего арифметического числа книг на первых трёх полках?

412 В четырёх классах начальной школы 106 учеников. Во втором классе на 3 ученика больше, чем в первом, а число учеников в третьем классе составляет $\frac{8}{9}$ от числа учеников в первом и 96% от числа учеников в четвертом классе. Сколько учеников в каждом классе? На сколько процентов среднее арифметическое числа учеников в первых трёх классах больше числа учеников в четвертом классе?

413 Выполни вычисления по алгоритму, заданному блок-схемой. Сопоставь полученным значениям x соответствующие буквы и расшифруй имя и фамилию известного художника и ученого. Где и когда он жил и чем знаменит?



a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x											

Р А Н И Ч Л О С Д Е В

2,5	6,1	3,4	$5\frac{3}{7}$	5	$4\frac{4}{7}$	5,2	3,4

5,2	5

7	$5\frac{6}{7}$	$5\frac{3}{7}$	$1\frac{2}{9}$	$5\frac{6}{7}$

414 Выполни деление и округли результат до сотых:

- 1) $63,04 : 0,9$; 2) $0,0348 : 0,07$; 3) $5,554 : 1,8$; 4) $11,31 : 0,56$.

415 Вычисли и запиши следующие три числа в ряду ответов так, чтобы сохранялась закономерность:

$$\begin{array}{r|l} 4 : 5 & \\ + 1,2 & \\ - 1,5 & \\ \cdot 16 & \\ \hline ? & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 : \frac{1}{8} & \\ \cdot 0,1 & \\ - \frac{4}{5} & \\ : 0,02 & \\ \hline ? & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 - \frac{3}{7} & \\ \cdot 3,5 & \\ : \frac{4}{15} & \\ + 1,5 & \\ \hline ? & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 0,9 \cdot 40 & \\ : 10 & \\ + 5,4 & \\ : 0,1 & \\ \hline ? & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{14}{19} : 7 & \\ \cdot 19 & \\ - 0,8 & \\ : 0,12 & \\ \hline ? & \end{array}$$

D

416 Расположи числа в порядке убывания. Сопоставь их соответствующим буквам и расшифруй названия геометрических фигур:

1) $-17,5$; $6,2$; 0 ; $-25\frac{2}{3}$; $-4\frac{2}{9}$; $-6,8$; $2\frac{4}{9}$.

Д

О

Т

Р

А

Э

К

2) $-0,2$; $19,6$; $-1,96$; $-2,06$; $19\frac{6}{7}$; $-\frac{2}{3}$; $91,2$; -2 .

С

О

Э

Р

К

А

И

Д

417 Поставь вместо звёздочки знак $>$ или знак $<$:

а) $1\frac{3}{4} * -1,85$;

г) $-3,06 * 2,6$;

ж) $-4\frac{5}{11} * -4\frac{7}{13}$;

б) $-78,9 * 0$;

д) $-9,4 * -9,2$;

з) $12,045 * 12,35$;

в) $-15 * -17$;

е) $-2\frac{1}{3} * -2\frac{1}{5}$;

и) $-7\frac{5}{6} * -7,8$.

418 Реши уравнения:

1) $(3,6 - 2,5x) \cdot 1\frac{5}{7} - \frac{5}{7} = 1,6$;

3) $9z - 14 = 7z + 8$;

2) $\frac{2}{3}y + 2y + \frac{5}{6}y + 1,5y = 0,35$;

4) $\frac{1,6}{n+6} = \frac{3}{5n}$.

419 Юбка, блузка и пиджак стоят вместе 5040 р. Стоимость блузки составляет 40% стоимости пиджака и $\frac{2}{7}$ стоимости юбки. Сколько стоит каждая вещь? Во сколько раз стоимость юбки больше среднего арифметического стоимости пиджака и блузки?

420 Выполни деление $15,5151 : 0,36$ и округли результат: 1) до десятков; 2) до единиц; 3) до десятых; 4) до сотых; 5) до тысячных.

C

421* Старинная задача

У Власа, Тараса и Панаса было поровну голов скота: лошадей, коров и овец. У трёх вместе лошадей в два раза меньше, чем коров, а коров в три раза меньше, чем овец. Лошадей у Власа и Тараса поровну, а у Панаса в четыре раза меньше, чем у трёх вместе. Коров у Тараса и Панаса поровну, а у Власа коров в три раза меньше, чем у Тараса и Панаса у обоих вместе. Овец у Власа было двумя больше, чем у Тараса. Сколько у кого было лошадей, коров и овец?



422* Имеются шестилитровая банка сока и две пустые банки: трёх- и четырёхлитровая. Как налить 1 литр сока в трёхлитровую банку?

§ 2. Арифметика рациональных чисел

1. Сложение рациональных чисел. Алгебраическая сумма.

Чтобы установить правила сложения рациональных чисел, рассмотрим практические задачи с «доходами» и «расходами». Для простоты мы будем проводить рассуждения, используя целые числа. Нетрудно будет убедиться, что они останутся верными и для дробных чисел.

Положительные числа, то есть числа, обозначающие доходы, мы складывать умеем:

$$(+5) + (+2) = +7.$$

Если израсходовано сначала 5 р., а потом 2 р., то всего израсходовано 7 р., значит:

$$(-5) + (-2) = -7.$$

Приведённые примеры иллюстрируют общее правило: *чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, можно сложить их модули и поставить общий знак.*

Рассмотрим теперь сложение чисел с разными знаками. При доходе 5 р. и расходе 2 р. получается прибыль 3 р.:

$$(+5) + (-2) = +3,$$

а при расходе 5 р. и доходе 2 р. получается убыток 3 р.:

$$(-5) + (+2) = -3.$$

В обоих случаях величина прибыли и убытка в итоге ищется вычитанием $5 - 2 = 3$, а знак зависит от того, какое слагаемое «перевешивает»: если доход больше расхода, то возникает прибыль, в противном случае – убыток.

Вообще говоря, *чтобы сложить два числа с разными знаками, можно вычесть их модули и поставить перед полученной разностью знак числа с большим модулем.*

Представим теперь, что доход и расход одинаковы и равны, например, 5 р. В этом случае прибыль равна нулю:

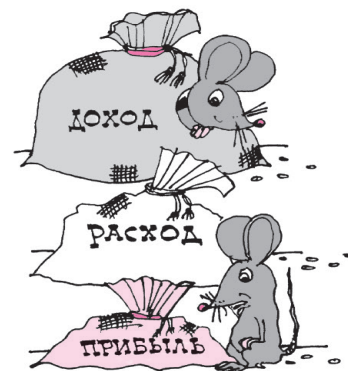
$$(+5) + (-5) = 0.$$

И вообще, *сумма двух противоположных чисел равна нулю:*

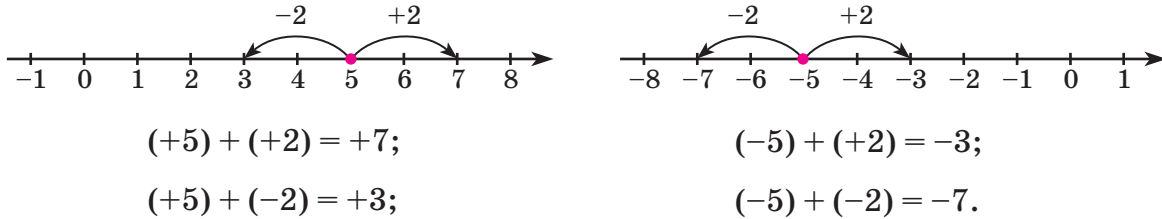
$$a + (-a) = 0.$$

Аналогично рассуждая, нетрудно получить и правила сложения рациональных чисел с числом 0, обобщающие соответствующие правила сложения для положительных чисел:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$



Сложение рациональных чисел можно проиллюстрировать на координатной прямой: прибавление положительного числа – перемещением на соответствующее число вправо, а прибавление отрицательного числа – перемещением влево. Например,



Правила знаков при раскрытии скобок позволяют упростить запись суммы. Так, сумму чисел

$$(-4) + (+5) + (-3) + (+1) + (-2)$$

можно записать короче: $-4 + 5 - 3 + 1 - 2$. И наоборот, полученное выражение можно прочитать как сумму чисел $-4, +5, -3, +1$ и -2 :

$$-4 + 5 - 3 + 1 - 2 = (-4) + (+5) + (-3) + (+1) + (-2).$$

И вообще, выражения, в которых содержатся одновременно плюсы и минусы, можно записать в виде суммы. Поэтому такие выражения часто называют *алгебраическими суммами*, или просто суммами, – несмотря на то что в них встречаются и знаки «минус».

Несложно показать, что результат подсчёта доходов и расходов зависит лишь от величины доходов и расходов и не зависит от порядка слагаемых и порядка действий. Значит, для рациональных чисел выполняются переместительное и сочетательное свойства сложения. Напомним эти свойства:

$$a + b = b + a \quad \text{– переместительное свойство сложения;}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{– сочетательное свойство сложения.}$$

Свойства сложения позволяют переставлять слагаемые и объединять их в группы произвольным образом, что помогает упрощать вычисления.

Пример 1.

$$52 - 78 + 20 - 52 + 8 = (52 - 52) + 20 + (8 - 78) = 0 + 20 - 70 = -50.$$

В практических вычислениях можно записать короче:

$$\cancel{52} - 78 + 20 - \cancel{52} + 8 = 20 - 70 = -50.$$

Ещё раз обратим внимание на то, что сумма противоположных слагаемых равна 0, а сложение с 0 не изменяет результата. Поэтому, если в сумме есть противоположные слагаемые, их обычно вычёркивают, или, как принято говорить, «взаимно уничтожают».

Если объединение слагаемых не позволяет свести решение примера к устным вычислениям, то для выполнения вычислений можно сначала сложить положительные числа, затем сложить отрицательные числа и к первой сумме прибавить вторую.

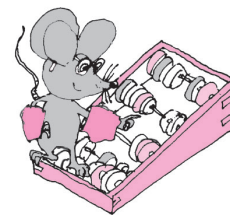
Пример 2.

$$475 + \cancel{624} - 712 + 208 - \cancel{624} + 27 - 289 = 710 - 1001 = -291.$$

$$\begin{array}{r} 1) \quad 475 \\ + 208 \\ \hline 27 \\ \hline 710 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad + 712 \\ + 289 \\ \hline 1001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad \overset{\cdot 9}{1001} \\ - 710 \\ \hline 291 \end{array}$$



Так обычно и поступают, подводя итоги проведённых за день денежных операций: сначала подсчитывают отдельно доходы и отдельно расходы, а затем находят итоговый результат.

К

423 Запиши данные изменения в виде суммы рациональных чисел и выполни действия:

- а) доход 5 р. и расход 8 р.;
- б) расход 30 р. и расход 40 р.;
- в) расход 2 тыс. р. и доход 7 тыс. р.;
- г) уменьшение температуры на 6°C и увеличение на 2°C ;
- д) уменьшение температуры на 3°C и уменьшение на 9°C ;
- е) увеличение уровня воды в реке на 25 мм и уменьшение на 40 мм;
- ж) из автобуса вышли 7 человек, а вошли 6 человек;
- з) со склада увезли 4 т картофеля, а привезли 10 т.

424 Придумай ситуацию, математической моделью которой может служить данное выражение, и найди ответ:

а) $(-9) + (+4)$; б) $(+6) + (+3)$; в) $(-5) + (-2)$; г) $(-1) + (+7)$.

425 Выполни сложение чисел с помощью координатной прямой:

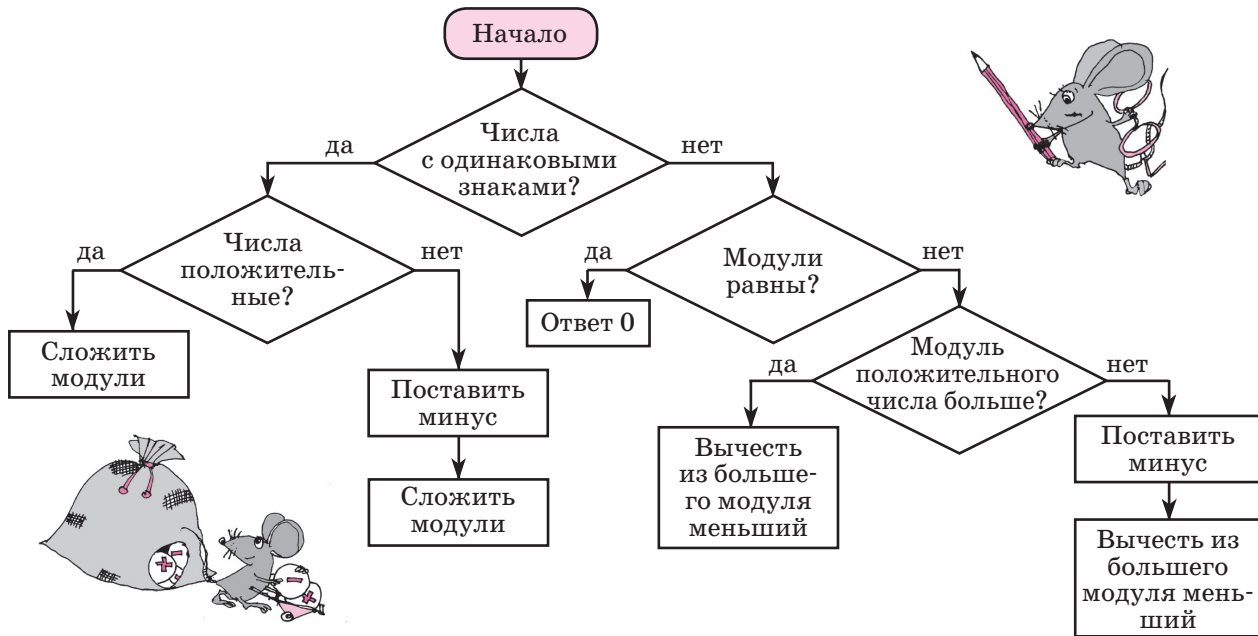
а) $(-3) + (+8)$; б) $(-1) + (-4)$; в) $(-6) + (+4)$; г) $(-2) + (+5) + (-3)$.

426 Что больше: 1) сумма двух положительных чисел или одно из них; 2) сумма двух отрицательных чисел или одно из них?

427 Найди результат действия, ориентируясь на некоторую практическую ситуацию, и проверь полученный ответ с помощью координатной прямой. Что общего в примерах каждого столбика? Сделай вывод.

а) $(+2) + (+3)$	б) $(-3) + (+4)$	в) $(+2) + (-5)$	г) $(-4) + (+4)$
$(-5) + (-1)$	$(-1) + (+5)$	$(+1) + (-3)$	$(+1) + (-1)$
$(-3) + (-4)$	$(+4) + (-2)$	$(-4) + (+3)$	$(-5) + (+5)$
$(-2) + (-7)$	$(+6) + (-3)$	$(-6) + (+1)$	$(+2) + (-2)$

- 428** Рассмотрим блок-схему алгоритма сложения рациональных чисел. Верно ли она составлена?



- 429** Пользуясь алгоритмом сложения рациональных чисел, найди сумму:

а) $(-28) + (-14)$ б) $(-32) + (+32)$ в) $(-9) + (+17)$ г) $(+3) + (-18)$
 $(+\frac{1}{3}) + (+\frac{1}{7})$ $(+\frac{5}{9}) + (-\frac{5}{9})$ $(+\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{3})$ $(-\frac{14}{15}) + (+\frac{5}{6})$
 $(-2,4) + (-3,6)$ $(-1,18) + (+1,18)$ $(-0,8) + (+4)$ $(+1,7) + (-7,3)$

- 430** Определи знак суммы:

а) $(-12) + (-7)$; в) $(+15) + (-8)$; д) $(-24) + (+19)$; ж) $(+3,7) + (-8,4)$;
 б) $(-8) + (+3)$; г) $(-6) + (-11)$; е) $(+53) + (-35)$; з) $(-245) + (+300)$.

- 431** Какое правило иллюстрирует следующая схема:

$$(+\square) + (-\square\square\square) = (-\square\square) ?$$

Дорисуй схемы и сформулируй правила:

а) $(-\square) + (-\square\square\square) = \dots$ б) $(-\square\square\square) + (+\square) = \dots$

- 432** Что общего в примерах каждого столбика? Выполни действия:

а) $(+3) + (-0,9)$ б) $(-10,2) + (-8)$ в) $(-5) + (+4,3)$ г) $0 + (-1,8)$
 $(+\frac{4}{5}) + (-1,2)$ $(-1\frac{1}{2}) + (-2,5)$ $(-\frac{8}{9}) + (+2\frac{1}{6})$ $(-0,375) + (+\frac{3}{8})$
 $(-1,2) + (+0,3)$ $(-2,4) + (-0,16)$ $(+0,04) + (-0,2)$ $(-2,7) + 0$
 $(-1\frac{2}{3}) + (+5\frac{1}{6})$ $(-1\frac{7}{15}) + (-3\frac{5}{6})$ $(+1\frac{11}{35}) + (-\frac{1}{21})$ $(+1\frac{1}{4}) + (-1,25)$

433 Вычисли и расположи ответы примеров в порядке убывания, сопоставив их соответствующим буквам. Если вычисления выполнены верно, то полученное слово – название второго по высоте действующего вулкана в мире. В какой части света он находится?

Л $(-3) + (+11)$

Ю $(+1,2) + (-0,8)$

Б $(-0,1) + (-0,02)$

О $(-9) + (-6)$

Л $(+0,7) + (-2)$

Я $(-\frac{3}{4}) + (+0,25)$

Б $(+8) + (-10)$

Й $(-0,4) + (-0,6)$

Я $(-2,08) + 0$

К $(-5) + (-7)$

Б $(-0,2) + (+5)$

Л $(-\frac{1}{2}) + (+0,5)$

434 Подбери неизвестные слагаемые в сумме:

а) $(+7) + \dots = +4$; в) $(-1) + \dots = -5$; д) $(-8) + \dots = -6$; ж) $0 + \dots = -7$;

б) $(+3) + \dots = -2$; г) $(-4) + \dots = +2$; е) $(+9) + \dots = 0$; з) $(-2) + \dots = -2$.

435 Прочитай высказывание и определи, истинно оно или ложно. Построй отрицания ложных высказываний:

1) $\forall a \in \mathbb{Q}: a + 0 = 0 + a = a$;

3) $\forall a \in \mathbb{Q}: a + |a| = 0$;

2) $\exists a \in \mathbb{Q}: a + (-a) \neq 0$;

4) $\exists a, b \in \mathbb{Q}: |a + b| > |a| + |b|$.

436 1) Сформулируй переместительное свойство сложения рациональных чисел и запиши его на математическом языке. Проверь переместительное свойство для значений переменных: а) $-4,8$ и $0,3$; б) $-3\frac{1}{4}$ и $-1,15$.

2) Сформулируй сочетательное свойство сложения рациональных чисел и запиши его на математическом языке. Проверь сочетательное свойство для значений переменных: а) $-1,5$; $+2,7$; $-0,2$; б) $-2\frac{3}{5}$; $-1,4$; $+0,8$.

3) Проверь переместительное и сочетательное свойства сложения для произвольно выбранных тобой рациональных чисел. В чём значение этих свойств для практических вычислений? Приведи примеры.

437 Раскрой скобки и запиши выражение в виде *алгебраической суммы*. Есть ли в этой сумме противоположные слагаемые? Если да, подчеркни их.

1) $(-3) + (-8) + (+9) + (-6) + (+8)$; 3) $(-a) + (+b) + (-x) + (-b) + (-x)$;

2) $(+0,2) + (-1,4) + (-2,3) + (-1,4)$; 4) $(+n) + (-d) + (-y) + (-n) + (-d)$.

438 Запиши выражение в виде суммы и назови противоположные слагаемые, если они есть:

а) $-4 - 5$; в) $2 - 7 + 2$; д) $-9 - 8 + 6 + 9 - 8$; ж) $-a + b + c - a - c$;

б) $3 - 12$; г) $0 - 5 - 5$; е) $0,7 - 1,2 + 0,7 + 1,2$; з) $x - y + n - x - y$.

439 Переставь слагаемые в сумме всеми возможными способами:

1) $-1 - 2$; 2) $3 - 4$; 3) $-5 - 7 + 9$; 4) $-a + b$; 5) $x - y - z$.

440 Вычисли:

- а) $-8 + 5$; д) $-1,9 + 2$; и) $-\frac{3}{20} + 0,15$; н) $2,45 - 3,7$;
 б) $4 - 6$; е) $6,4 - 8$; к) $0 - 4,8$; о) $-6,42 - 0,358$;
 в) $-2 - 9$; ж) $-0,5 - 0,7$; л) $-1,8 + 1\frac{4}{5}$; п) $-1\frac{3}{4} + 2,71$;
 г) $-3 + 7$; з) $-1,3 + 0,6$; м) $-5,2 + 0$; р) $-0,64 - 9,36$.

441 Переведи с русского языка на математический:

- 1) Сумма противоположных чисел равна нулю.
- 2) Модули противоположных чисел равны.
- 3) Сумма любого числа с нулем равна самому числу.
- 4) При перестановке слагаемых значение суммы не меняется.
- 5) Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего.

442 Сложив сначала противоположные числа, найди значения выражений:

- а) $158 - 392 + 75 - 158 - 75$; в) $-2,49 + 3,5 + 2,49 - 1,67 - 3,5$;
 б) $-4\frac{11}{56} + 1\frac{7}{40} - 2\frac{5}{18} + 4\frac{11}{56} - 1\frac{7}{40}$; г) $0,6 - 1\frac{7}{8} - \frac{3}{5} + 2,25 + 1,875 - 2\frac{1}{4}$.

443 Найди значения выражений, сложив отдельно положительные и отрицательные числа:

- а) $18 - 72 - 9 + 39 - 54 + 17 - 39$;
 б) $-46 + 283 - 745 + 179 - 594 + 745 + 82$;
 в) $0,17 - 6 + 1,3 + 2,8 - 0,17 - 0,9 + 7,4$;
 г) $-6,4 + 12 - 2,5 - 6,4 + 2,5 + 8,9 - 5,8$;
 д) $-0,1 - 14 + 3,05 + 4,2 - 0,85 - 0,05 + 0,85$;
 е) $-98,9 + 4,38 - 3,27 + 32,7 + 60,215 - 1,15 + 3,27$.



444 Выбрав удобный порядок вычислений, найди значения выражений:

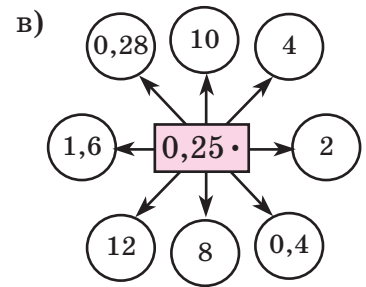
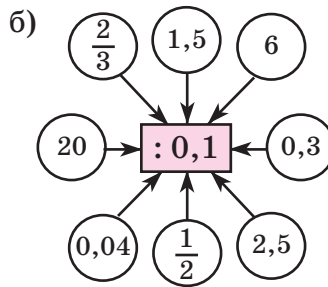
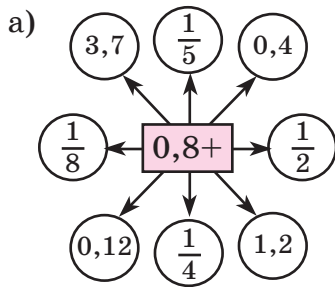
- а) $3\frac{2}{9} - 5,2 - 1\frac{5}{9} + 0,2$; в) $-1\frac{3}{16} + 4\frac{17}{25} - \frac{5}{16} - 1\frac{2}{25} - 0,5$;
 б) $-7,2 - 2\frac{5}{6} - 0,3 + 1\frac{1}{3}$; г) $3\frac{5}{12} - 1,4 - 5\frac{2}{3} - 2,6 + 2\frac{1}{4}$.

445 Вычисли наиболее удобным способом:

- а) $(-2,25 + 4\frac{2}{3}) + (7,6 - 1\frac{8}{9} - 1\frac{3}{4}) - 7,6$;
 б) $(-\frac{4}{15} + 1,18 - \frac{5}{7}) + 1\frac{3}{14} + (-1,68 + 2\frac{4}{15})$.



π 446 Вычисли устно:



447 Выбери из множества $A = \{\frac{2}{9}; 0; 1; -3,8; -\frac{5}{6}; 4; 3\frac{1}{7}; -50; 10,2; -76\}$ подмножество: 1) B – положительных чисел; 2) C – отрицательных чисел; 3) D – целых чисел; 4) E – натуральных чисел; 5) F – неотрицательных целых чисел; 6) K – отрицательных дробных чисел. Построй диаграмму множеств A, B, C и D и отметь на ней элементы множества A .

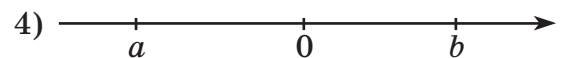
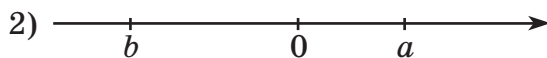
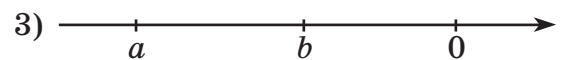
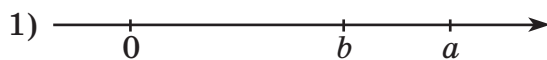
448 Расположи числа в порядке возрастания. Запиши ответ с помощью двойного неравенства:

а) $0; -1,75; \frac{12}{17}$; б) $0,3; -0,4; 0,05$; в) $-\frac{1}{7}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{3}$; г) $-\frac{4}{9}; -0,5; -\frac{2}{3}$.

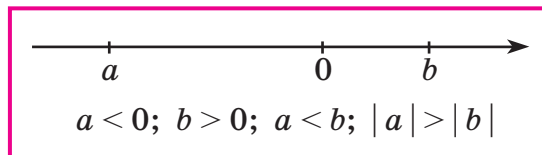
449 Сколько элементов содержит множество целых решений неравенства?

1) $-5 \leq x < 6$; 2) $-14 < y < 23$; 3) $-47 < x \leq -2$; 4) $-50 \leq x \leq 100$?

450 Пользуясь рисунками, сравни числа a и b с нулем, между собой и сравни их модули:



Образец:



451 Объясни, почему равносильны высказывания:

$$|x| = a, \text{ где } a > 0 \Leftrightarrow x = a \text{ или } x = -a$$

$$|x| < a, \text{ где } a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$$

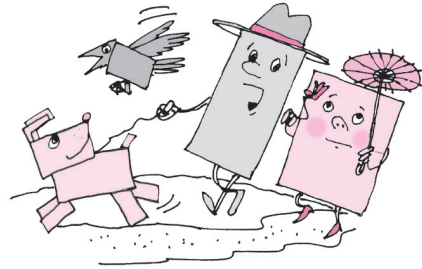


Пользуясь ими, реши уравнения и неравенства:

- а) $|x| = 5$; в) $|z| = 0,4$; д) $|x| < 2$; ж) $|z| \leq 6$;
 б) $|y| = 9$; г) $|t| = 28$; е) $|y| < 7$; з) $|t| \leq 15$.

452 Длина прямоугольника на 3 см больше ширины. Чему равны периметр и площадь прямоугольника, если:

- 1) длина больше ширины в 1,3 раза;
- 2) ширина составляет $\frac{4}{7}$ длины;
- 3) длина на 60% больше ширины;
- 4) ширина на 10% меньше длины?



453 БЛИЦтурнир

- 1) Ширина прямоугольника a см, а длина на 30% больше. Чему равен периметр прямоугольника?
- 2) Длина прямоугольника b дм, а ширина на 20% меньше. Чему равна площадь прямоугольника?
- 3) Ширина прямоугольника c м, что составляет $\frac{1}{3}$ его длины. Чему равна длина стороны квадрата с тем же периметром?
- 4) Сторону квадрата, равную d см, уменьшили на 40%. На сколько квадратных сантиметров уменьшилась его площадь?
- 5) Длина прямоугольника a дм, а площадь – n дм². Чему равен периметр прямоугольника?
- 6) Ширина прямоугольника b м, а периметр – p м. Чему равна площадь прямоугольника?

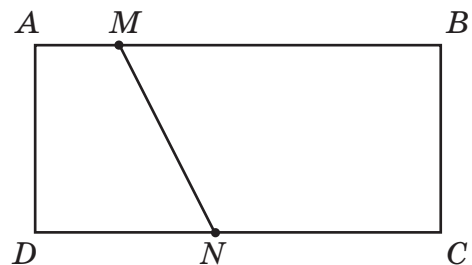
454 1) Одну сторону прямоугольника уменьшили на 25%, а вторую – увеличили на 60%. Уменьшилась или увеличилась его площадь и на сколько процентов?

2) Длина прямоугольника в 1,5 раза больше ширины. Длину уменьшили на 40%, а ширину увеличили на 40%. Уменьшился или увеличился его периметр и на сколько процентов?

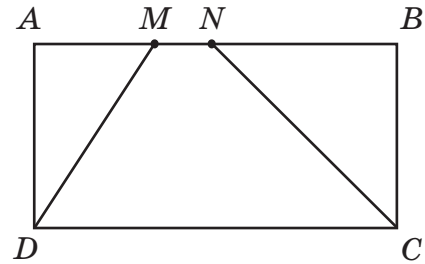
455 Прочитай и упрости отношения, если значения всех переменных отличны от нуля. Какое свойство отношений при этом используется?

- а) $39 : 52$; в) $4 : 1,6$; д) $0,3 : 0,18 : 0,12$; ж) $(3,2m^2) : (8mn)$;
 б) $\frac{320}{480}$; г) $5 \frac{2}{3} : 2,125$; е) $7 : 2 \frac{1}{3} : 2,8$; з) $\frac{4,5ab}{5,4b^2}$.

456 В прямоугольнике $ABCD$ точка M делит сторону AB в отношении $1 : 6$, а точка N делит сторону CD в отношении $3 : 4$, считая соответственно от вершин A и D . Известно, что $AB = 14$ см, $AD = 5$ см. Чему равно отношение площадей фигур, на которые отрезок MN делит прямоугольник $ABCD$? Найди лишние данные в условии этой задачи.



457 В прямоугольнике $ABCD$ точки M и N делят сторону AB в отношении $2 : 1 : 3$, считая от вершины A . Известно, что $AB = 24$ см, $AD = 15$ см. Чему равно отношение площадей фигур, на которые отрезки MD и NC делят прямоугольник $ABCD$? Найди лишние данные в условии этой задачи.



458 Найди неизвестный член пропорции:

а) $\frac{a}{15} = \frac{6}{25}$; б) $\frac{8}{50} = \frac{1,6}{b}$; в) $\frac{4,8}{7} = \frac{c}{35}$; г) $\frac{1,2}{d} = \frac{0,04}{0,1}$.

459 Реши уравнения:

а) $\frac{3x}{x+8} = \frac{5}{7}$; б) $\frac{y-4}{2y} = \frac{3}{8}$; в) $\frac{26}{3z} = \frac{7}{z-2}$; г) $\frac{3m+4}{0,8} = \frac{2m}{0,5}$.

460 1) Знаменатель дроби на 20% больше её числителя. Если числитель дроби увеличить на 4, а знаменатель увеличить в 3 раза, то дробь обратится в $\frac{1}{2}$. Чему равен знаменатель дроби?

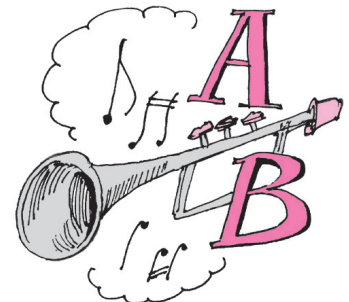
2) Отношение трёх чисел равно $2,4 : 0,8 : 0,64$, а четвёртое число составляет 25% третьего. Чему равно среднее арифметическое этих чисел, если сумма первых двух равна 8?

461 Сумма четырёх чисел равна 200. Первое число составляет 24% всей суммы и $\frac{2}{3}$ второго числа, а третье и четвёртое относятся как $\frac{3}{29} : \frac{1}{29}$. Найди эти числа. Какую часть четвёртое число составляет от среднего арифметического первых трёх чисел? Вырази эту часть в процентах.

462 Найди процентное отношение чисел A и B :

A $4,928 : 0,16 - 0,16 \cdot (52,1 \cdot 1 \frac{7}{16} + 47,9 \cdot 1 \frac{7}{16})$;

B $\frac{2,4 \cdot 3 \frac{1}{9} \cdot 0,34 \cdot 2 \frac{1}{2} \cdot 1,5}{0,16 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,8 \cdot 2 \frac{5}{6} \cdot 0,45}$.



463 Пользуясь алгоритмом сложения рациональных чисел, найди сумму:

а) $(-36) + (-9)$ б) $(-5,8) + 0$ в) $(-8) + (+11)$ г) $(-21) + (+16)$
 $(-\frac{2}{3}) + (-\frac{1}{6})$ $(+\frac{1}{2}) + (-0,5)$ $(+4,2) + (-\frac{3}{5})$ $(+\frac{5}{9}) + (-2\frac{1}{3})$
 $(-0,7) + (-0,5)$ $0 + (-4,3)$ $(-3) + (+1,6)$ $(-5,2) + (+4,7)$

464 Вычисли и расположи ответы примеров в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам. Что обозначает получившееся слово? Что тебе известно о нём?

К $(-7) + (-9)$

А $(-1,4) + (+0,8)$

Н $(+0,05) + (-0,5)$

О $(-3) + (+12)$

М $(-0,9) + (-0,5)$

А $(+\frac{5}{8}) + (-0,125)$

Л $(+5) + (-11)$

Д $(+3,7) + (-4)$

И $(-3,6) + 0$

И $(-4) + (-8)$

Р $(-2,9) + (+6)$

Ж $(+1\frac{4}{5}) + (-1,8)$

465 Подбери неизвестные слагаемые в сумме:

а) $(+5) + \dots = -3$;

г) $(+3) + \dots = -9$;

ж) $(+12) + \dots = 0$;

б) $(+4) + \dots = +1$;

д) $(-1) + \dots = +3$;

з) $0 + \dots = -6$;

в) $(-2) + \dots = -7$;

е) $(-9) + \dots = -7$;

и) $(-4) + \dots = -4$.

466 Вычисли:

а) $-3 + 9$;

г) $4,5 - 5$;

ж) $+0,75 - \frac{3}{4}$;

к) $1,08 - 2$;

б) $5 - 7$;

д) $-0,6 - 0,8$;

з) $0 - 2,4$;

л) $-2,56 - 4,4$;

в) $-4 - 6$;

е) $-2,9 + 5,4$;

и) $-2,6 + 1\frac{3}{5}$;

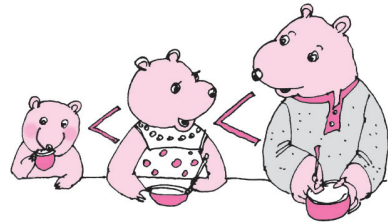
м) $-3\frac{5}{8} + 3,7$.

467 Найди значения выражений и расположи их в порядке возрастания. Ответ запиши в виде двойного неравенства.

А $-36 - 14 + 29 - 56 + 67 + 14$;

В $225 - 536 + 439 - 74 - 439 + 382$;

С $+0,42 - 9,3 + 2,4 + 3,8 - 0,9 + 1,08$.



468 Реши уравнения и неравенства:

а) $|x| = 7$;

б) $|y| = 1,2$;

в) $|x| < 4$;

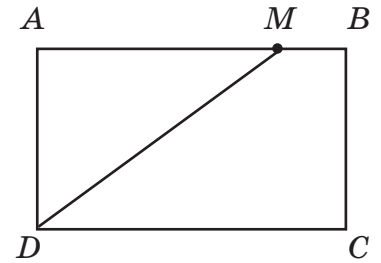
г) $|y| \leq 5$.

469 Ширина прямоугольника на 8 м меньше длины. Найди периметр и площадь прямоугольника, если: 1) ширина составляет $\frac{1}{5}$ длины; 2) длина больше ширины в 1,4 раза; 3) ширина на 20% меньше длины; 4) длина на 80% больше ширины.

470 1) Одну сторону прямоугольника увеличили на 50%, а вторую уменьшили на 30%. Уменьшилась или увеличилась его площадь и на сколько процентов?

2) Ширина прямоугольника в 4 раза меньше длины. Длину увеличили на 60%, а ширину уменьшили на 40%. Уменьшился или увеличился его периметр и на сколько процентов?

- 471** В прямоугольнике $ABCD$ сторона AD равна 20 см, а сторона AB на 60% больше стороны AD . Точка M делит сторону AB в отношении 4 : 1, считая от вершины A . Чему равно отношение площадей фигур, на которые отрезок MD делит прямоугольник $ABCD$? Найди лишние данные в условии этой задачи.



- 472** 1) Числитель дроби на 5 меньше её знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 2, а знаменатель увеличить на 2, то получится дробь, равная $\frac{1}{10}$. Чему равен знаменатель дроби?
 2) Отношение двух чисел равно $0,5 : 0,3$, а их разность равна $1\frac{1}{3}$. Чему равно их среднее арифметическое?
- 473** Сумма четырёх чисел равна 4,2. Отношение первых трёх чисел равно $1,2 : 4 : 0,8$, а четвёртое число составляет 60% второго. Найди первое число. Какую часть оно составляет от среднего арифметического остальных трёх чисел? Вырази эту часть в процентах.

- 474** Найди процентное отношение чисел A и B :

A $(7\frac{3}{11} \cdot 14,9 - 7\frac{3}{11} \cdot 3,9) \cdot 5,68 - 4,68 \cdot (526,35 : 8,7) + 8,74;$

B $\frac{4,2 \cdot 0,35 \cdot 8,1}{0,049 \cdot 5,4 \cdot 0,15}.$



475* Математические софизмы

Софизм (от греческого *sophisma* – хитрая уловка, измышление) – логически неправильное рассуждение, выдаваемое за правильное.



1) *Дважды два – пять!*

Возьмём верное равенство: $28 + 8 - 36 = 35 + 10 - 45$.

В каждой части этого равенства вынесем за скобки общий множитель:

$$4(7 + 2 - 9) = 5(7 + 2 - 9).$$

Теперь, разделив обе части равенства на общий множитель $(7 + 2 - 9)$, получим, что $4 = 5$, то есть $2 \cdot 2 = 5$. Где ошибка?

2) *Последние годы нашей жизни короче, чем первые!*

Говорят, что в молодости время идёт медленнее, а в старости скорее. Это изречение можно доказать математически. Действительно, человек в течение десятого года проживает десятую часть своей жизни, в течение двадцатого – двадцатую часть, в течение тридцатого – тридцатую часть, в течение сорокового – сороковую часть и т. д. Очевидно, что

$$\frac{1}{10} > \frac{1}{20} > \frac{1}{30} > \frac{1}{40} > \frac{1}{50} > \frac{1}{60} > \frac{1}{70} > \dots$$

Что неверно в этих рассуждениях?

2. Вычитание рациональных чисел.

В предыдущем пункте мы научились складывать любые рациональные числа. Получить правило вычитания можно примерно так же, как и правило сложения, – с помощью практических задач о доходах и расходах, изменении температуры и др. Например, если температура повысилась с -3°C до 5°C , то всего она изменилась на $5 + 3 = 8^{\circ}\text{C}$. В то же время, изменение температуры равно разности $5 - (-3)$, и поэтому

$$5 - (-3) = 5 + 3 = 8.$$

Таким образом, *вычитание* числа (-3) в данном примере свелось к *прибавлению* противоположного ему числа 3 .

Этот вывод имеет общий характер. Вспомним сначала, что разность двух чисел a и b – это такое число c , которое при сложении с b дает a :

$$a - b = c \Leftrightarrow c + b = a.$$

Легко догадаться, что таким числом c в множестве рациональных чисел является число $c = a + (-b)$. Действительно, при сложении его с числом b последние два слагаемых взаимно уничтожатся и останется как раз a :

$$c + b = a + (-b) + b = a + 0 = a.$$

Значит, $c = a - b = a + (-b)$, то есть *вычитание* рациональных чисел можно заменить *сложением*.

Итак, *чтобы вычесть из данного числа другое число, можно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому*:

$$a - b = a + (-b).$$

Например,

$$\begin{aligned} (-12) - (-8) &= (-12) + (+8) = -12 + 8 = -4, \\ (-8) - (+12) &= (-8) + (-12) = -8 - 12 = -20. \end{aligned}$$

И аналогично

$$a - (-b) = a + b, \quad a - (+b) = a - b.$$

Эти равенства показывают, что правила знаков при раскрытии скобок для вычитания остаются прежними: «минус минус» преобразуется в «плюс», а «минус плюс» – в «минус». Значит, любое выражение, содержащее только знаки сложения и вычитания, можно записать в виде алгебраической суммы, например:

$$(-8) + (+4) - (+12) - (-3) + (-5) = -8 + 4 - 12 + 3 - 5,$$

а значения алгебраических сумм мы уже вычислять умеем.

Правила знаков сохраняются и для случая, когда в скобках не одно число, а алгебраическая сумма чисел, например:

$$a - (-b + c) + (d - k + n) = a + b - c + d - k + n.$$



Представление выражений в виде алгебраической суммы позволяет упрощать вычисления.

Пример 1.

Найти значение выражения $(-8 + 35) - (4 - 19 + 13) + (2 - 19)$.

Решение:

Раскроем скобки и вычислим значение полученной алгебраической суммы:

$$(-8 + 35) - (4 - 19 + 13) + (2 - 19) = -8 + 35 - 4 + \cancel{19} - 13 + 2 - \cancel{19} = 12.$$

$$1) 35 + 2 = 37;$$

$$2) 8 + 4 + 13 = 25;$$

$$3) 37 - 25 = 12.$$

Легко показать, что правило вычитания рациональных чисел сохраняет все известные нам ранее свойства вычитания. Так, в частности:

$$a - 0 = a, \quad a - a = 0.$$

Действительно,

$$a - 0 = a + (-0) = a + 0 = a, \quad a - a = a + (-a) = 0.$$

Аналогичным образом сохраняются правила нахождения неизвестных компонентов действий при решении уравнений.

Пример 2.

Решить уравнение $-1,2 + (-x) = -0,9$.

Решение:

В левой части уравнения числа $(-1,2)$ и $(-x)$ – это слагаемые, а в правой части число $(-0,9)$ – это сумма. Чтобы найти неизвестное слагаемое, из суммы надо вычесть известное слагаемое:

$$-x = -0,9 - (-1,2)$$

$$-x = -0,9 + 1,2$$

$$-x = 0,3$$

$$x = -0,3$$

Ответ: $-0,3$.

Заметим, что перед решением уравнения его левую часть можно было упростить, раскрыв скобки:

$$-1,2 - x = -0,9.$$

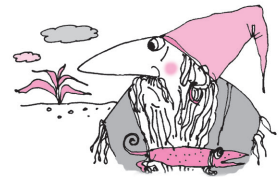
Тогда в левой части уравнения $(-1,2)$ можно рассматривать как уменьшаемое, x – как вычитаемое, а $(-0,9)$ – как разность. Чтобы найти неизвестное вычитаемое, надо из уменьшаемого вычесть разность:

$$x = -1,2 - (-0,9)$$

$$x = -1,2 + 0,9$$

$$x = -0,3$$

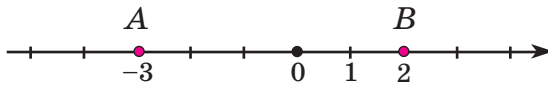
Естественно, получился тот же самый ответ – ведь корень уравнения не зависит от того, каким способом мы его находим.



Заметим также, что для рациональных чисел останется верным следующее утверждение, рассмотренное нами ранее для случая положительных чисел: *длина отрезка на координатной прямой равна разности координат его правого и левого концов*. Например, если $A(-3)$, $B(2)$, то

$$AB = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5,$$

что наглядно видно на чертеже:



Таким образом, установленное правило вычитания расширяет возможности решения задач и уравнений, распространяя уже известные нам способы действий на множество рациональных чисел.

К

476 Назови уменьшаемое и вычитаемое в разности. Замени вычитание сложением и вычисли:

- | | | | |
|--------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| а) $(+1) - (+9)$; | д) $3 - 8$; | и) $16 - (-5)$; | н) $-9 - (-9)$; |
| б) $(-3) - (+6)$; | е) $-2 - (-6)$; | к) $-23 - 9$; | о) $-37 - 0$; |
| в) $(+4) - (-2)$; | ж) $5 - (-4)$; | л) $14 - 30$; | п) $0 - 25$; |
| г) $(-7) - (-5)$; | з) $-7 - 3$; | м) $-30 - (-12)$; | р) $-46 - (-46)$. |

477 Выполни предыдущее задание, представляя выражения в виде алгебраической суммы. Какой способ вычислений ты находишь более удобным?

478 Вычисли:

- | | | | |
|-------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|--|
| а) $34 - (-6)$; | д) $-0,7 - 0,7$; | и) $2,5 - 4,1$; | н) $0 - 2,96$; |
| б) $5 - 32$; | е) $\frac{3}{8} - (-\frac{1}{4})$; | к) $-\frac{3}{4} - (-\frac{5}{6})$; | о) $-4\frac{3}{7} - (-4\frac{3}{7})$; |
| в) $-12 - 9$; | ж) $-5 - (-0,2)$; | л) $1,6 - (-1,6)$; | п) $-7,24 - 0$; |
| г) $-28 - (-4)$; | з) $\frac{7}{12} - \frac{8}{9}$; | м) $-\frac{2}{15} - \frac{1}{3}$; | р) $3,8 - 3\frac{4}{5}$. |

479 Найди значения выражений, расположи их в порядке возрастания и сопоставь соответствующим буквам. Как ты думаешь, что обозначает получившийся математический термин?

Н $(-12) + (-6) - (-3)$

Г $(+6) - (+9) + (-2) - (-4) - (+11)$

О $(+7) - (+4) + (-14)$

Н $(-8) - (+1) - (-14) - 0 + (-7)$

И $(-5) - (-15) - (+8)$

А $(+24) + (-2) - (-3) - (+24) + (-5)$

Н $(+1) - (+2) + (-3) - (-4)$

Г $(-4) - (+7) + (-16) - (-16) - (+1) - (-4)$

О $(-4) + (-8) - (-7) - (+9)$

К $(+2) - (-5) + (-12) - (+2) - (-12) + (+5)$

Р $(+3) + (-10) - (+6) - (-7)$

М $(-9) + (+1) - (+18) - (-9) + (-1) + (-18)$

480 Вставь пропущенное число:

- а) $7 - \dots = -6$; в) $-8 - \dots = -5$; д) $\dots - (-9) = 8$; ж) $0 - \dots = 10$;
 б) $4 - \dots = 9$; г) $-3 - \dots = -7$; е) $\dots - (+12) = -5$; з) $-2 - \dots = -2$.

481 Реши уравнения двумя способами. Сделай проверку.

- 1) $2,5 + (-x) = 3,2$; 2) $-0,6 - (-y) = 0,9$; 3) $-z + (-4,8) = -1,6$.

482 Реши уравнения и сделай проверку:

- 1) $-x = -7,2$; 4) $z + 1,4 = -1$; 7) $-0,6 - (-y) = -0,4$;
 2) $-a = -\frac{3}{16}$; 5) $1\frac{2}{9} - x = \frac{2}{3}$; 8) $3,1 + (-n) = -2\frac{4}{5}$;
 3) $-y = -2 - (-0,8)$; 6) $b - 5,6 = -4$; 9) $-x - (-1,2) = -0,8$.

483 Найди значения двух данных выражений и сравни их. Какие закономерности ты наблюдаешь? Запиши их в обобщенном виде.

- а) $5 - 8$ и $8 - 5$; в) $4 - 11$ и $11 - 4$; д) $3 - (-9)$ и $-9 - 3$;
 б) $11 - 7$ и $7 - 11$; г) $10 - (-5)$ и $-5 - 10$; е) $-2 - 6$ и $6 - (-2)$.

484 Раскрой скобки в выражении $a - (b + c)$ и переведи с математического языка на русский правило вычитания суммы из числа. Проверь его при:

- 1) $a = -4$; $b = -2$; $c = 7$;
 2) $a = 1,5$; $b = -0,6$; $c = -2,9$;
 3) произвольно выбранных тобой значениях переменных.

485 Раскрой скобки и упрости выражения:

- 1) $a - (b - c + d) - c + (d + b - a)$; 3) $(a - b - c) - (a - d) + d - (b - c)$;
 2) $-(a - b + c) - (d + b - a + c) + d$; 4) $-(c - b - d) + a - (b + c) - (d - a)$.

486 Раскрой скобки и упрости выражения:

- а) $-(2,4 + 3,5) - (4,2 + 0,6 - 3,5) + 2,4$;
 б) $0 - (2,5 - 5,8 + 0,4) + (-14,07 + 2,5 - 0,58)$;
 в) $0,62 + (3,9 - 12,04 + 0,5) - (-0,62 - 12,04 + 7,2)$;
 г) $(0,376 + 2,8 - 9,12) + 3,5 - (4,35 + 2,8 - 9,12 - 0,524)$.

487 Раскрой скобки и вычисли наиболее удобным способом:

- а) $-3,4 + (-1\frac{2}{9} + 5,07 - 6\frac{7}{15}) - \frac{7}{9} - (-2,53 + 1\frac{2}{15} - 3,4)$;
 б) $(8,9 - \frac{2}{3}) - (-1,2 + 6\frac{1}{3} - 2\frac{3}{58} + \frac{3}{11}) + (0,6 - 4\frac{8}{11} - 2\frac{3}{58})$.



488 На координатной прямой отмечены точки $A(-2,4)$, $B(0,8)$, $C(-4)$ и $D(-0,9)$. Сколько получилось отрезков? Назови их. Найди длину наибольшего и наименьшего из этих отрезков.

489 Реши уравнения и сделай проверку:

1) $|x + 2| = 1$; 2) $|z - 4| = 6$; 3) $|y - 5| = 3$; 4) $|n + 7| = 2$.

Образец:

$$\begin{aligned} |x - 9| &= 4 \\ x - 9 &= -4 \quad \text{или} \quad x - 9 = 4 \\ x &= -4 + 9 & x &= 4 + 9 \\ x &= 5 & x &= 13 \\ \text{Ответ: } &\{5; 13\}. \end{aligned}$$

π

490 Индийские математики в древности трактовали положительные числа как «имущества», а отрицательные числа – как «долги». Вот как в рукописях VII в. излагались правила сложения и вычитания: «Сумма двух имуществ есть имущество», «Сумма двух долгов есть долг», «Сумма имущества и долга равна разности имущества и противоположного долгу имущества». Переведи эти древнеиндийские правила на современный математический язык.



491 Найди значение выражения $a + b$, если:

1) $a = -1$; $b = -1\frac{5}{7}$; 4) $a = -7,5$; $b = 0$; 7) $a = -0,625$; $b = +\frac{5}{8}$;
 2) $a = +4$; $b = -0,8$; 5) $a = -0,9$; $b = -0,3$; 8) $a = +0,05$; $b = -0,3$;
 3) $a = +\frac{1}{5}$; $b = -1,3$; 6) $a = +1\frac{1}{2}$; $b = -0,7$; 9) $a = -0,84$; $b = -\frac{3}{5}$.

492 Вычисли устно, используя переместительный и сочетательный законы сложения, и сопоставь ответы соответствующим буквам. Расшифруй имя древнеиндийского математика (VII в.), сформулировавшего правила сложения «долгов» и «имуществ».

Р $12 - 50 + 24 + 38 - 26$	Г $0,25 - 0,58 + 0,75 - 0,4 - 0,32$
Т $-42 + 73 - 58 + 11 + 27 - 9$	У $-0,44 + 0,98 + 0,2 - 0,56 + 0,02$
А $-89 + 300 - 156 - 211 + 160$	М $-4,81 + 2,48 - 0,98 - 1,19 + 4,52$
Х $-298 + 96 + 379 - 702 + 521$	Б $-1,45 + 7,16 - 8,55 + 1,97 + 0,84$
П $572 - 387 + 197 + 128 - 513$	

-0,03	-2	4	-4	0,02	4	-0,3	0,2	-3	2	4



493 Отметь числа m и n на координатной прямой, если известно, что:

1) $m > 0$; $n < 0$; $|m| > |n|$;

3) $m < 0$; $n < 0$; $|m| < |n|$;

2) $m < 0$; $n > 0$; $|m| < |n|$;

4) $m < 0$; $n < 0$; $|m| > |n|$.

494 Реши уравнения (устно):

1) $a + 0,2 = 5$;

3) $c - 0,9 = 0,5$;

5) $0,1 - x = 0,02$;

2) $4,6 - b = 1,4$;

4) $3,9 + d = 6,4$;

6) $y - 0,6 = 0$.

495 Переведи условие задачи на математический язык и реши уравнение:

1) Задумали число, увеличили его в 4 раза, потом увеличили на 12, результат уменьшили в 5 раз, затем вычли 6 и получили 2. Какое число задумали?

2) Задумали число, увеличили его в 3 раза, а затем уменьшили на 18. В результате получилось число в 1,5 раза больше задуманного. Какое число задумали?

496 Составь по данной математической модели задачу и реши её:

1) $0,48 : (1,6 - 2x) + 5,2 = 6$;

2) $2(x - 1,8) = \frac{2}{3}x$.

497 Переведи условие задачи на математический язык и реши её методом *проб и ошибок*:

Задуманное положительное число сначала увеличили на 0,3, потом его же уменьшили на 0,2, полученные результаты перемножили и получили 0,36. Найти задуманное число.

498 Переведи условие задачи на математический язык и реши её методом *перебора*:

Если цифры двузначного числа поменять местами, то оно уменьшится на 45. Какое это число?

499 Построй треугольник ABC , проведи три его медианы и найди их точку пересечения O (см. № 223, стр. 56). Найди для каждой медианы отношение отрезков, на которые она делится точкой O , считая от вершины. Повтори эксперимент. Что ты замечаешь? Можно ли *утверждать*, что полученный вывод имеет *общий характер*? Как называется высказывание, являющееся предположением?

2

500 Вычисли:

а) $(+2) - (-8)$;

г) $7 - 25$;

ж) $-2,9 - 0,6$;

к) $0 - 9,6$;

б) $(-5) - (+4)$;

д) $9 - (-3)$;

з) $\frac{4}{5} - 1,5$;

л) $-1\frac{2}{3} - (-4)$;

в) $(+3) - (+11)$;

е) $-8 - (-1)$;

и) $0,8 - (-0,5)$;

м) $-3,4 - 2,8$.

501 Реши уравнения и сделай проверку:

а) $-x = 1,8$;

б) $y + 5,6 = -4$;

в) $-3 - z = -2,6$;

г) $t - (+0,8) = -0,05$.

502 Раскрой скобки и найди значение полученной алгебраической суммы:

а) $-0,8 - (1,6 - 9,2) + (-3,6 + 7,4 - 9,2)$;

б) $0,3 - (8,04 - 0 + 5,306 - 0,09) + 0 - (-5,36 + 1,004 - 8)$.

503 На координатной прямой отмечены четыре точки $M(-0,7)$, $N(-5,2)$, $P(1,5)$ и $Q(-3,4)$. Сколько получилось отрезков? Назови их. Найди длину наибольшего и наименьшего из этих отрезков.

504 Реши уравнения:

а) $|x| = 9$;

б) $|y - 3| = 5$;

в) $|z + 1| = 4$;

г) $|a + 2| = 0$.

505 Переведи условие задачи на математический язык и реши уравнение:

Задуманное число уменьшили в 3 раза, результат вычли из 40, то, что получилось, увеличили в 5 раз, потом уменьшили на 50 и получили 90. Какое число задумали?

506 Переведи условие задачи на математический язык и реши её методом *проб и ошибок*:

Одно из двух положительных чисел на 0,5 больше другого, а их произведение равно 0,14. Найти эти числа.

507 Переведи условие задачи на математический язык и реши её методом *перебора*:

Если цифры двузначного числа поменять местами и полученное двузначное число умножить на 2, то результат окажется на 34 меньше исходного числа. Какое это число?

508 Раскрой скобки и вычисли наиболее удобным способом:

а) $(5,219 - 1\frac{4}{7}) - (\frac{3}{7} - 1,781)$;

б) $-(1,08 + 3\frac{5}{9}) - (1\frac{4}{9} - 5,8)$.



509* Когда пассажир проехал половину пути, он стал смотреть в окно и смотрел до тех пор, пока не осталось проехать половину от того пути, что он проехал, смотря в окно. Какую часть всего пути пассажир смотрел в окно?

510* В бассейне с горизонтальным дном площадью 0,5 га содержится 1 000 000 л воды. Можно ли в этом бассейне проводить соревнования по плаванию?

511* Два токаря получили задание изготовить детали, общее число которых меньше 1000. За первый, второй и третий день первый токарь выполнил соответственно $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{9}{20}$ своего задания, а второй за эти же дни $-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{11}$ и $\frac{3}{7}$ своего задания. Сколько деталей изготовил каждый токарь в третий день?

3. Умножение рациональных чисел.

Сформулируем теперь правила умножения рациональных чисел. Начнём с умножения целых чисел. Как понимать, например, произведение двух отрицательных чисел $(-2) \cdot (-3)$? Ясно, что нельзя взять число (-2) сомножителем (-3) раза.

Поэтому в данном случае мы будем исходить не из житейской практики, а из того, что при умножении рациональных чисел должны выполняться установленные ранее свойства умножения положительных чисел, в частности:

$ab = ba$ – *переместительное* свойство;

$(ab)c = a(bc)$ – *сочетательное* свойство;

$a(b + c) = ab + ac$ – *распределительное* свойство.

Кроме того, должны выполняться частные случаи умножения на 0 и 1:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Рассмотрим вначале произведение $(-2) \cdot 3$. Так как второй множитель – натуральное число, то мы можем воспользоваться «старым» определением, известным ещё из начальной школы: $(-2) \cdot 3$ есть сумма 3 слагаемых, каждое из которых равно (-2) . Поэтому $(-2) \cdot 3 = (-2) + (-2) + (-2) = -6$, то есть

$$(-2) \cdot 3 = -6.$$

Мы видим, что умножить число (-2) на число 3 можно по простому правилу: перемножить «числа без знаков» (то есть *модули*) и перед произведением поставить знак «минус».

Теперь рассмотрим пример умножения положительного числа на отрицательное. Так как при перестановке множителей произведение не должно меняться (переместительное свойство умножения), то сохранится и правило, по которому мы ищем результат. В нашем примере:

$$3 \cdot (-2) = (-2) \cdot 3 = -6.$$

Таким образом, мы рассмотрели оба случая умножения двух чисел с разными знаками. Остается случай, когда и первый, и второй множители отрицательны, например $(-2) \cdot (-3)$. Попробуем сначала понаблюдать имеющиеся закономерности. Заметим, что в последнем примере

$$3 \cdot (-2) = -6$$

при умножении на отрицательное число модули перемножаются, а знак произведения противоположен знаку первого множителя. Распространяя данное свойство на случай, когда первый множитель отрицателен, приходим к равенству:

$$(-2) \cdot (-3) = 6.$$

Полученное равенство можно проиллюстрировать также, используя известные свойства чисел.

СВОЙСТВА
АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ



Для этого составим сумму произведений $(-3) \cdot (-2)$ и $3 \cdot (-2)$ и применим к ней сначала распределительное свойство умножения, а затем свойство суммы противоположных чисел:

$$(-3) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) = (-2) \cdot (-3 + 3) = (-2) \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, числа $(-3) \cdot (-2)$ и $3 \cdot (-2)$ должны быть противоположны. А поскольку $3 \cdot (-2) = -6$, то следует считать, что $(-3) \cdot (-2) = 6$. Произведение двух отрицательных чисел оказывается положительным.

Полученные правила умножения можно распространить на умножение любых рациональных чисел.

Итак, произведение двух чисел одного знака положительно, а произведение двух чисел разных знаков отрицательно; чтобы найти модуль произведения, нужно перемножить модули сомножителей.

Этими правилами умножения пользовался ещё в III веке до н.э. древнегреческий математик Диофант Александрийский.

Запомнить правила знаков для умножения очень просто – они совпадают с известными нам правилами знаков при раскрытии скобок. Коротко их можно сформулировать так:

«Плюс на минус дает минус»,

«Минус на минус дает плюс».

Обычно вначале определяют знак, а потом уже находят модуль произведения, например:

$$(-5) \cdot 0,8 = -(5 \cdot 0,8) = -4,$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-3,6) = \frac{1}{3} \cdot 3,6 = 1,2.$$



В «длинных» выражениях, в которых фигурирует только умножение, при четном числе отрицательных множителей ответ будет положительным, а при нечетном числе – отрицательным. Например, в выражении

$$(-8) \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot 125 \cdot (-1)$$

пять отрицательных множителей. При умножении знак результата будет «минус». Произведение модулей вычисляем, уже не глядя на знаки:

$$8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 125 \cdot 1 = (5 \cdot 2) \cdot (8 \cdot 125) \cdot 3 = 30\,000.$$

Следовательно, значение данного выражения равно числу $(-30\,000)$.

Особую роль при умножении рациональных чисел играет число (-1) . **При умножении на (-1) любое число меняется на противоположное.**

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a.$$

К

512 Запиши в виде произведения сумму:

1) $a + a + a + a + a + a + a + a + a + a$;

3) $-4x - 4x - 4x - 4x - 4x$;

2) $-n - n - n - n - n - n - n$;

4) $(b - 2c) + (b - 2c) + (b - 2c)$.

513 Составь блок-схему алгоритма умножения рациональных чисел.

514 Переведи с математического языка на русский частные случаи умножения рациональных чисел:

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$; 2) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; 3) $a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$.

515 Выполни умножение:

а) $-3 \cdot 9$; д) $8 \cdot (-0,7)$; и) $0 \cdot (-7,4)$; н) $-0,125 \cdot (-6,4)$;
 б) $-4 \cdot (-15)$; е) $-0,5 \cdot 40$; к) $-\frac{7}{9} \cdot 3$; о) $2,4 \cdot (-4\frac{1}{6})$;
 в) $12 \cdot (-7)$; ж) $-0,1 \cdot (-3)$; л) $-0,04 \cdot (-10)$; п) $-1 \cdot 3,2$;
 г) $-45 \cdot (-1)$; з) $0,9 \cdot (-0,6)$; м) $\frac{6}{7} \cdot (-9\frac{1}{3})$; р) $-\frac{9}{28} \cdot (-2\frac{4}{5})$.

516 Реши уравнения:

а) $-2(x - 9) = 0$; в) $-a(a - 4) = 0$; д) $-3(b + 1)(b - 1) = 0$;
 б) $-0,5(y + 7) = 0$; г) $8n(n + 6) = 0$; е) $c(c - 5)(c + 2) = 0$.

517 Сравни с нулем:

а) $-23,798 \cdot (-18\frac{74}{169})$; в) $-34\frac{2}{705} \cdot 0,0000125$; д) $(-16\frac{4}{89})^2$;
 б) $450,06 \cdot (-9,9042)$; г) $-7,30329 \cdot (-56,080808)$; е) $(-42,725)^3$.

518 Запиши на математическом языке: 1) Числа a и b одного знака. 2) Числа x и y разных знаков.

519 Каким числом – положительным, отрицательным или нулем – является произведение:

а) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$; е) $(-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6) \cdot (-56)$;
 б) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$; ж) $(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8) \cdot (-678)$;
 в) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-2007)$; з) $(-1 + 2 - 3 + 4 - \dots - 9 + 10) \cdot (-10)$;
 г) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-2008)$; и) $(-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot (-1)^5 \cdot (-1)^6 \cdot (-1)^7$;
 д) $(-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$; к) $1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \dots \cdot n \cdot (-n)$?

520 Найди значения выражений:

1) $-2,5a$, если $a = 0$; 1; -1; 4; -30; -3,2; $\frac{4}{15}$;
 2) $-\frac{3}{7}b$, если $b = 0$; 1; -1; 7; 350; -1,4; $-8\frac{1}{6}$;
 3) x^2 , если $x = -1$; -2; $-\frac{1}{3}$; -0,4; -0,05; $-1\frac{3}{4}$;
 4) y^3 , если $y = -1$; -2; -0,3; $-\frac{4}{5}$; -0,01; $-2\frac{1}{2}$.



521 Вычисли:

а) $(-3,4 + 4) \cdot (-1,6 - 0,9)$; в) $(-0,05 - (-0,5) - (+1,2)) \cdot (-4,8)$;
 б) $(-0,8 - 0,5 + 2,1) \cdot (\frac{2}{5} - 1)$; г) $0,375 \cdot (-0,08 - 0,52 - (-0,04))$.

522 1) Запиши на математическом языке переместительный, сочетательный и распределительный законы умножения и проверь их для произвольно выбранных тобой значений переменных.

2) Вычисли, используя законы умножения:

а) $-50 \cdot 0,9 \cdot (-2) \cdot (-0,03)$; г) $0,3 \cdot (-4,28) + 0,3 \cdot (-5,72)$;
 б) $-12,5 \cdot 0,25 \cdot (-0,6) \cdot 0,8 \cdot (-4)$; д) $-15,87 \cdot (-1,09) - (-5,87) \cdot (-1,09)$;
 в) $-1 \frac{4}{5} \cdot (-\frac{2}{7}) \cdot (-5) \cdot \frac{1}{9} \cdot (-1 \frac{3}{4})$; е) $(-\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12}) \cdot (-24)$.

523 Раскрой скобки, пользуясь распределительным законом умножения:

1) $-(a - b)$; 4) $x(-x + 2y + 1)$; 7) $-4(a - 2b + 3c - 0,5)$;
 2) $-3(c + d)$; 5) $-y(x - y + 3)$; 8) $c(-3a + 2c - d + 1)$;
 3) $2(-x + y)$; 6) $-2a(-a + b - 4)$; 9) $-5x(x - 0,2y + 0,6n - 1,8)$.

524 ЗаклЮчи выражение в скобки двумя способами – ставя перед скобками знак «+» и знак «-»:

1) $a - b$; 3) $x + y - 2$; 5) $a + b - c$; 7) $-3a - b + 2c - 4$;
 2) $-c - d$; 4) $-m + n + 5$; 6) $-x + y - z$; 8) $2x - 5y + z + 3$.

525 Вынеси за скобки общий множитель:

1) $-2a + 2b$; 3) $-5m - 10$; 5) $-14x - 21y + 28$; 7) $4a^2 + 12ab - 16ac$;
 2) $xc - xd$; 4) $-3n + n^2$; 6) $-am + m^2 - 3bm$; 8) $-15xy + 3yz - 9y^2$.

π

526 Вычисли:

а) $0,3 \cdot 0,6$ б) $15 \cdot 0,01$ в) $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 25$ г) $-12 - 6$
 $0,08 \cdot 40$ $0,68 \cdot 1000$ $16 \cdot 0,25 \cdot 0 \cdot 8,6$ $8 - 15$
 $0,7 \cdot 0,12$ $0 \cdot 3,412$ $4 \cdot 3,9 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 2,5$ $-0,5 + 0,9$
 $0,04 \cdot 1,5$ $4,56 \cdot 1$ $8 \cdot 0,01 \cdot 7,4 \cdot 12,5$ $3,4 - (-0,8)$
 $2 \frac{6}{7} \cdot 3,5$ $\frac{2}{11} \cdot 5,5$ $\frac{1}{3} \cdot 5,6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{7}$ $-2 \frac{1}{5} - 8,5$

527 По таблице, задающей зависимость между x и y , построй формулу и график зависимости и установи, является ли она прямой или обратной пропорциональностью. Придумай по три примера величин, которые могут быть связаны этой зависимостью.

1)

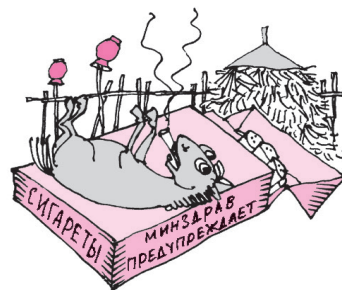
x	1	2	3	4	5	6
y	1,5	3	4,5	6	7,5	9

2)

x	1	2	3	4	5	6
y	12	6	4	3	2,4	2

528 Реши задачи, составляя пропорции:

- 1) Выкурив 3 сигареты, человек принимает 2,4 мг яда никотина. Сколько яда примет человек, если выкурит за день пачку сигарет (20 штук)?
- 2) Из 0,4 т винограда получается 72 кг изюма. Сколько надо взять винограда, чтобы получить 0,18 т изюма?
- 3) Если пешеход будет идти со скоростью 3,6 км/ч, то он пройдёт путь от деревни до станции за 0,5 ч. Сколько он сэкономит времени, если увеличит скорость на 25%?
- 4) Фермер засеял под картошку 7,5 га и получил урожай 14 т картофеля с гектара. На сколько процентов надо увеличить урожайность картофеля, чтобы сократить посевные площади на 0,5 га? (Ответ округли с точностью до целых.)



529 Реши уравнения:

1) $|a + 5| = 4$; 2) $|b - 8| = 1$; 3) $|x - 3| = 7$; 4) $|y + 2| = 6$.

530 Реши неравенства (ответ запиши в виде двойного неравенства):

1) $|x| < 2,5$; 2) $|y| \leq 9,6$; 3) $|a - 1| < 3$; 4) $|n + 2| \leq 5$.



531 Вычисли:

- | | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|--|
| а) $-3,6 \cdot (-0,25)$; | д) $4,32 \cdot (-12,5)$; | и) $(1,6 - 12) \cdot (-2,5 + 3)$; |
| б) $-\frac{1}{7} \cdot 14,56$; | е) $-\frac{5}{9} \cdot (-18,18)$; | к) $(-9 + 6,8 - 1,2) \cdot (-0,49 - 0,51)$; |
| в) $0,75 \cdot (-480)$; | ж) $-2,106 \cdot 1050$; | л) $-1,2 \cdot (-0,4 - (-4,6) - (+4,7))$; |
| г) $-2 \frac{4}{13} \cdot (-2,6)$; | з) $704,5 \cdot (-2,008)$; | м) $[-0,9 - 2,5 - (-8,2)] \cdot (-0,625)$. |

532 Реши уравнения:

а) $-8(x + 6) = 0$; б) $-y(y - 3) = 0$; в) $3(z + 2)(z - 4) = 0$.

533 Вычисли, используя законы умножения:

а) $\frac{5}{14} \cdot (-4,75) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot \frac{4}{19} \cdot 2,8 \cdot (-15)$; б) $\frac{7}{12} \cdot 1,9 - \frac{7}{12} \cdot 4,3$.

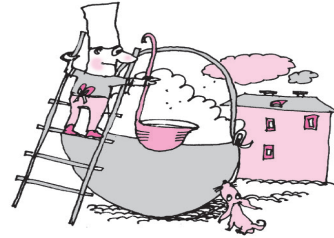
534 Заполни таблицу. Какие закономерности ты наблюдаешь? Попробуй записать свою гипотезу на математическом языке.

x	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	0
x^2										
x^3										



535 Реши задачи, составляя пропорции:

- 1) В 2,5 стаканах 400 г пшеничной муки. Сколько пшеничной муки в 1,5 стаканах?
- 2) Мясо теряет при варке 36% своей массы. Сколько надо взять свежего мяса, чтобы получить 960 г вареного?



536* Через железнодорожную станцию прошло три военных состава. В первом находилось 462 солдата, во втором – 546 и в третьем – 630. Сколько вагонов было в каждом составе, если известно, что в каждом вагоне находилось одинаковое число солдат и что это число солдат было максимальное из всех возможных?

537* На месте единиц в трёхзначном числе стоит цифра 2. Если эту цифру поставить впереди двух остальных, то получится число, большее заданного на одну треть (от заданного числа). Какое число задано?

4. Деление рациональных чисел.

Деление рациональных чисел уже не представляет проблем, поскольку деление – это действие, обратное умножению. Как известно, разделить число a на число b – это значит найти такое число c , которое при умножении на b дает a :

$$a : b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a \quad (b \neq 0)$$

Поэтому, например,

$$2,8 : (-7) = -0,4, \text{ так как } (-0,4) \cdot (-7) = 2,8,$$

$$(-4) : (-5) = \frac{4}{5}, \text{ так как } \frac{4}{5} \cdot (-5) = -4.$$

Уже из приведённых примеров видно, что деление рациональных чисел производится самым естественным образом: операцию деления выполняют, пользуясь тем же правилом знаков, что и при умножении.

Итак, *частное двух чисел одного знака положительно, а частное двух чисел разных знаков отрицательно; чтобы найти модуль частного, нужно разделить модуль делимого на модуль делителя.*

Ясно, что таким же образом преобразуются и дроби: ведь черта в записи обыкновенной дроби – это тот же знак деления. Например,

$$\frac{-2}{7} = (-2) : 7 = -\frac{2}{7}, \quad \frac{2}{-7} = 2 : (-7) = -\frac{2}{7}.$$

И вообще, для любых чисел a и b

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b},$$

так что для преобразования дроби *знак «минус» можно перенести из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель, а можно поставить его перед самой дробью.*

При вычислении «длинных» выражений, в которых фигурируют только умножение и деление, пользоваться правилом знаков очень удобно. Например, для вычисления значения выражения

$$\frac{2 \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 5 \cdot (-6) \cdot (-7)}{(-1) \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-4) \cdot 6}$$

можно заметить, что в числителе четыре знака «минус», которые при умножении дадут «плюс». Аналогично в знаменателе три знака «минус», которые при умножении дадут «минус». Поэтому после совершения всех действий у результата получится знак «минус».

Дальнейшие действия с модулями чисел выполняются так же, как и раньше:

$$\frac{\overset{1}{2} \cdot \overset{1}{3} \cdot \overset{1}{4} \cdot 5 \cdot \overset{1}{6} \cdot 7}{-1 \cdot \underset{1}{2} \cdot \underset{1}{3} \cdot \underset{1}{4} \cdot \underset{1}{6}} = - \frac{5 \cdot 7}{1} = -35.$$

Отметим, что все известные ранее правила деления с 0 и 1 распространяются и на множество рациональных чисел:

$$a : 1 = a, \quad a : a = 1, \quad 0 : a = 0 \quad (a \neq 0).$$

На ноль, как и раньше, делить нельзя!

К **538** Составь блок-схему алгоритма деления рациональных чисел.

539 Переведи с математического языка на русский и докажи утверждения:

$$1) a : (-1) = -a; \quad 2) a : (-a) = (-a) : a = -1. \quad (a \neq 0)$$

540 Выполни деление:

а) $-45 : (-9)$;	д) $-12 : 0,3$;	и) $-7,8 : 7,8$;	н) $0,3 : (-0,125)$;
б) $-84 : (-6)$;	е) $0,18 : (-0,2)$;	к) $-\frac{5}{6} : (-\frac{1}{3})$;	о) $-1\frac{3}{4} : (-0,25)$;
в) $-64 : 16$;	ж) $-0,36 : (-9)$;	л) $0 : (-16,2)$;	п) $-4,2 : (-1)$;
г) $132 : (-1)$;	з) $-1,5 : 0,005$;	м) $-12\frac{9}{11} : (-3)$;	р) $-2\frac{3}{5} : 0,13$.

541 Найди значения выражений:

1) $-3,6 : a$, если $a = -1; 0,01; -0,4; -10; -180; \frac{2}{7}$;

2) $x : (-3\frac{1}{3})$, если $x = 0; 3\frac{1}{3}; -0,1; 10; -2,5; -5\frac{5}{9}$.

542 Реши уравнения:

а) $-8x = 2,4$;	г) $-0,5(-a) = -2$;	ж) $\frac{-3,5}{k} = 70$;
б) $0,72 : (-y) = -0,4$;	д) $-b : 0,06 = -60$;	з) $-1,8m = -1$;
в) $-z : 5,6 = -3\frac{4}{7}$;	е) $0,4 : c = -\frac{1}{3}$;	и) $\frac{-n}{9,4} = -0,5$.



543 Найди значения выражений:

$$а) \frac{2,1 \cdot (-4,5) \cdot 0,14 \cdot (-0,6)}{-1,2 \cdot (-0,49) \cdot 0,9};$$

$$в) \frac{-0,36 \cdot (-1,7) \cdot 0,05 \cdot (-6,4) \cdot 2,7}{4,8 \cdot (-0,51) \cdot (-5,4) \cdot 0,08};$$

$$б) \frac{-\frac{2}{3} \cdot 2,4 \cdot (-4,2)}{-0,35 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1,6 \cdot (-4,8)};$$

$$г) \frac{-\frac{2}{7} \cdot (-1,5) \cdot \left(-1\frac{2}{5}\right) \cdot 8,1}{-0,18 \cdot (-6,3) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot (-7,5) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)}.$$

544 Какие из дробей можно перевести в конечную десятичную дробь? Расположи их в порядке убывания, сопоставь соответствующим буквам и расшифруй название озера. Остальные дроби переведи в бесконечные периодические дроби, указав период.

$$\frac{7}{30}, -\frac{2}{25}, \frac{-8}{75}, \frac{-9}{-20}, \frac{39}{800}, -\frac{10}{11}, -\frac{3}{8}, \frac{7}{-4}, \frac{-4}{240}, \frac{3}{6}.$$

У **К** **Р** **А** **Й** **Н** **А** **Л** **И** **Б**

545 Прочитай высказывание и определи, истинно оно или ложно. Построй отрицания ложных высказываний:

$$1) \forall a \in \mathbb{Q}: \frac{a}{-a} = \frac{-a}{a} = -1; \quad 3) \forall a \in \mathbb{Q}, a > 0: \frac{a}{|a|} = \frac{|a|}{a} = 1;$$

$$2) \exists a \in \mathbb{Q}: (-a)^2 < 0; \quad 4) \forall a \in \mathbb{Q}, a < 0: \frac{a}{|a|} = \frac{|a|}{a} = -1.$$

546 Вычисли и проверь с помощью умножения:

$$а) 44,24 : (-5,6); \quad б) -190,76 : (-3,8); \quad в) -2,7744 : 1,36.$$

547 Известны следующие свойства деления для положительных чисел:

$$1) (a + b) : c = a : c + b : c; \quad 3) (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = (b : c) \cdot a;$$

$$2) (a - b) : c = a : c - b : c; \quad 4) a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b.$$

Переведи высказывания с математического языка на русский и проверь их справедливость для произвольно выбранных тобой рациональных чисел.

548 Вычисли, используя свойства деления:

$$а) (-0,78 \cdot 4,6) : (-0,78); \quad г) 17\,000 : (17 \cdot (-125));$$

$$б) \left(-\frac{8}{17} \cdot \left(-12\frac{3}{4}\right)\right) : (-3); \quad д) -1\frac{2}{9} : (-0,25 \cdot 1\frac{2}{9});$$

$$в) (25,8 \cdot (-6,09)) : (-60,9); \quad е) -0,548 : (-0,548 \cdot (-1,5)).$$

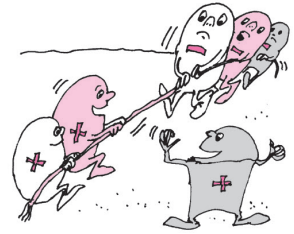
549 Выполни действия:

$$а) -3\frac{7}{20} + \left(-0,25 : \left(-\frac{1}{4}\right) - 1,5 : \left(-\frac{3}{16}\right)\right) : \left(-4\frac{1}{11}\right);$$

$$б) \left(6\frac{8}{25} : (-1) - (-0,8) \cdot (-0,1)\right) : \left(-0,25 : 1,25 - 1\frac{3}{5} : \left(-5\frac{1}{3}\right)\right).$$

π **550** Вычисли (устно):

а) $5 : 8$	б) $-7 + 36$	в) $-0,3 \cdot (-0,5)$
$0,12 : 0,4$	$-0,8 - 0,4$	$-3,6 \cdot 0,1$
$\frac{7}{16} : 0,25$	$0,5 - \frac{3}{4}$	$\frac{1}{25} \cdot (-300,2)$
$4,8 : 0,06$	$-6 + 4,3$	$-0,06 \cdot (-0,7)$

**551**

- Вторая в мире по длине река, Амазонка, на карте с масштабом $1 : 40\,000\,000$ имеет длину 16 см. Чему примерно равна её длина в действительности?
- Длина самого большого по протяженности пролива, Мозамбикского, равна примерно 1760 км. Чему будет равна длина этого пролива на карте с масштабом $1 : 25\,000\,000$?
- На плане, масштаб которого $3 : 8$, отрезок имеет длину 12 см. Чему будет равна длина этого отрезка на плане с масштабом $5 : 4$?

552

Через один кран бак наполняется за 2 ч, а через второй – за 3 ч. На сколько времени надо открыть оба крана, чтобы наполнить $\frac{2}{3}$ бака?

553

В бассейн подведено две трубы – большая и маленькая. Через большую трубу бассейн наполняется за 10 ч, а через маленькую – за 15 ч. После того как в течение 2,5 ч работала одна большая труба, дополнительно была подключена маленькая. Через сколько времени работы обеих труб бассейн наполнился на три четверти?

 \mathcal{D} **554** Выполни деление:

а) $-128 : (-40)$;	в) $(-7,5) : 0,015$;	д) $0 : (-9,7)$;	ж) $3,56 : (-3,56)$;
б) $0,24 : (-0,3)$;	г) $-1\frac{5}{9} : (-2\frac{1}{3})$;	е) $-8,48 : \frac{2}{5}$;	з) $-24\frac{6}{25} : (-2,4)$.

555

Реши уравнения:

1) $-7,2 : (-x) = -1\frac{4}{5}$;	2) $-3\frac{2}{11}y = -17,5$;	3) $\frac{-z}{0,8} = 4,5$.
------------------------------------	--------------------------------	-----------------------------

556

Найди значения выражений:

а) $\frac{-5,6 \cdot 0,38 \cdot (-4,2)}{-1,9 \cdot (-4,9) \cdot 0,96 \cdot 0,4}$;	б) $\frac{-2\frac{4}{7} \cdot 6,4 \cdot (-0,45) \cdot (-\frac{10}{11}) \cdot 0,5}{\frac{3}{11} \cdot (-0,72) \cdot (-3\frac{3}{7})}$.
--	--

557

Выполни действия:

а) $(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) \cdot 0,6 - 0,6 : (-\frac{3}{5})$;	б) $-5 : ((-\frac{1}{5} - \frac{3}{4}) : (-1,9) + \frac{1}{6} : (-2))$.
--	--

558

- Расстояние от Екатеринбурга до Челябинска равно примерно 202 км. Чему равна длина отрезка, соединяющего эти города, на карте с масштабом $1 : 2\,000\,000$?
- Земельный участок имеет форму прямоугольника. Найди его периметр и площадь, если на плане с масштабом $3 : 500$ стороны прямоугольника имеют длину 12 см и 45 см.

559 Один экскаватор может вырыть котлован за 24 дня, а второй – за 36 дней. За сколько времени, работая вместе, экскаваторы выкопают $\frac{5}{6}$ котлована?

с **560*** Может ли дробь, в которой числитель меньше знаменателя, быть равной дроби, в которой числитель больше знаменателя?

5. Какие числа мы знаем, и что мы о них знаем или не знаем.

Мы знаем, что числа были придуманы на заре развития человечества для решения практических задач – счёта предметов и измерения величин. Проходили века и тысячелетия, и на вопрос «Сколько?» людям становились необходимы более точные ответы. Появлялись и исчезали различные способы записи чисел и действий над ними, шло осмысление свойств этих действий. Так медленно и постепенно создавалась *арифметика*.

За последний год мы узнали, как развивалась математика, по сути, в течение нескольких веков, и наши представления о числах отражают сегодня примерно те представления, которые сложились к XVI–XVII вв., то есть около 300–400 лет назад.

Итак, мы знаем, что множество *натуральных* чисел бесконечно:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$$

умеем записывать натуральные числа в десятичной позиционной системе записи, представлять их в виде суммы разрядных слагаемых, например:

$$28\ 156 = 2 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0,$$

умеем выполнять над натуральными числами арифметические действия, знаем свойства этих действий, среди которых основными являются *переместительный, сочетательный и распределительный законы* сложения и умножения.

На множестве натуральных чисел любые два числа можно сложить и перемножить, но вычесть одно число из другого можно не всегда. Например, нельзя из 3 вычесть 5. Расширением множества натуральных чисел до множества, в котором выполняема операция вычитания, является множество *целых* чисел Z :

$$Z = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}.$$

Таким образом, арифметика целых чисел, образно говоря, «богаче» арифметики натуральных чисел. Вместе с тем на множестве целых чисел не всегда можно разделить одно число на другое. Например, 7 не делится на 5 до тех пор, пока не появляются дроби. Расширением множества целых чисел до множества, в котором выполняема операция деления на число, не равное 0, является множество *рациональных* чисел Q .



Любое рациональное число можно представить в виде дроби, в которой числитель – целое число, а знаменатель – натуральное, поэтому множество рациональных чисел обычно записывают так:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q}, \text{ где } p \in Z, q \in N \right\}.$$

На множестве рациональных чисел самая «богатая» арифметика – в нём всегда выполнимы все четыре арифметических действия (кроме деления на 0). И конечно, в каждом из множеств N , Z и Q выполняются основные свойства арифметических действий.

На диаграмме, показывающей соотношение между множествами N , Z и Q , хорошо видно, что натуральные числа являются в то же время целыми. Вместе с тем и натуральные, и целые числа являются рациональными. В самом деле,

$$5 = \frac{5}{1}, \text{ где } 5 \in Z, 1 \in N; \quad -7 = \frac{-7}{1}, \text{ где } -7 \in Z, 1 \in N.$$

Ещё мы знаем, что любое рациональное число может быть изображено точкой числовой прямой. А вот верно ли обратное? Любая ли точка числовой прямой является рациональным числом?

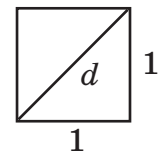
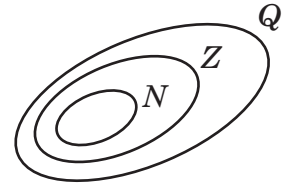
Рассмотрим квадрат со стороной, равной единице. Согласно известной теореме Пифагора, квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов, поэтому $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Ясно, что число d не является целым, так как $1 < d < 2$. Но d не является и дробным.

Действительно, если бы число d можно было записать в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$), то её квадрат – несократимая дробь $\frac{p^2}{q^2}$ ($q^2 \neq 0$) – был бы равен целому числу 2. А значит,

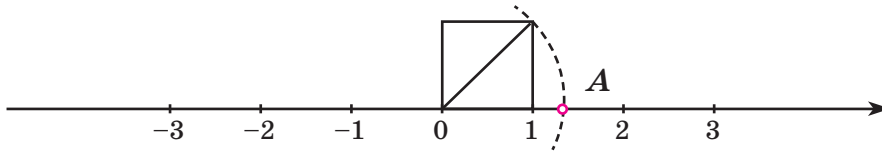
$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p : 2 \Rightarrow q : 2.$$

(Знак « $:$ » означает «делится».) Следовательно, дробь $\frac{p}{q}$ сократима, что противоречит условию о её несократимости.

Таким образом, получается, что диагональ у квадрата есть, а выразить её длину мы пока не можем. Эта проблема была известна ещё математикам Древней Греции, но они не смогли её решить, осознав, что их числового запаса (как и нашего сейчас) для измерения отрезков недостаточно. Возникла необходимость в изобретении новых чисел. Их назвали *иррациональными*, то есть «недоступными для понимания» («*ratio*» в переводе с латинского – «разум»). Тогда привычные, «хорошие», «понятные» числа для противопоставления и стали называть «разумными», рациональными.



Мы познакомимся с иррациональными числами в старших классах. А сейчас придется смириться с тем фактом, что если на координатной прямой поставить все рациональные числа, то на ней останутся «свободные места» – например, точка A :



К

561

- 1) Какая разница между цифрами и однозначными числами?
 2) Назови классы и разряды в записи чисел: 518, 1045, 27 019, 780 780, 1 230 456. Представь эти числа в виде суммы разрядных слагаемых.

562

Выпиши основные арифметические законы и известные тебе свойства арифметических действий. Выполняются ли они на множествах N , Z , Q ?

563

$A = \{-2; 0,8; 15; -\frac{4}{11}; -36; 0; -1; 3\frac{1}{5}; 4\}$. Нарисуй диаграмму Эйлера–Венна множеств N , Z , Q и отметь на ней элементы множества A .

564

Выбери из множества $A = \{5; -\frac{2}{7}; 0; -12; -7,8; 1\frac{6}{13}; -0,95; 8,6; 21; -3\frac{1}{5}\}$ подмножество: 1) B – положительных чисел; 2) C – отрицательных чисел; 3) D – целых чисел; 4) E – натуральных чисел; 5) F – неотрицательных целых чисел; 6) K – отрицательных дробных чисел. Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств A , B , C и D . Обведи на ней красным карандашом множество E , зеленым – множество F , а желтым – множество K .

565

Является ли рациональным числом: а) длина диагонали квадрата со стороной, равной 2; б) длина гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2?

566

Приведи примеры точек координатной прямой, координаты которых не принадлежат множеству рациональных чисел.

П

567

Вычисли (устно):

- а) $0 - (-4,8)$ б) $-0,3 + 1,2 - 0,5 - 0,4$ в) $-0,2 \cdot (-0,5)$ г) $0,9 : (-1,8)$
 $\frac{7}{12} - 1$ $2,6 - 2 + \frac{2}{5} - 0,8$ $4,5 \cdot (-\frac{2}{3})$ $-\frac{3}{20} : 0,15$
 $-0,6 + 0,24$ $-1,5 - 2,25 + 1,9 - 0,25$ $-5,6 : 0,1$ $-80,8 \cdot (-0,25)$

568

Сравни числа A и B и их модули:

A
$$\frac{(2\frac{5}{6} - 7\frac{1}{9}) \cdot (-0,54) : (-0,7)}{(\frac{4}{23} \cdot (-\frac{3}{19}) - \frac{4}{23} \cdot (-1\frac{3}{19})) \cdot (-5,75)}$$

B
$$\frac{(-0,009 : 0,01) : (\frac{1}{6} - 0,8 + \frac{2}{3})}{(-3\frac{6}{25} + (-\frac{1}{4}) : (-0,02) - 4,76)}$$

569 Найди значения выражений:

а) $(-0,864 : 1,2 - 0,2 \cdot (-3,5 \cdot \frac{9}{11} - \frac{9}{11} \cdot 7,5) + 0,92) : (-\frac{4}{7})$;

б) $(2,19 \cdot (-5,4)) : (-2,19) - (-1,25 \cdot 0,7 \cdot (-8)) : (-1\frac{5}{9}) - (0,21 : (-0,1))$.

Д

570 Выбери из множества $A = \{1,5; -7; \frac{3}{4}; 0; 9; -2\frac{1}{3}; 68\}$ подмножество:
1) B – натуральных чисел; 2) C – целых чисел; 3) D – рациональных чисел.
Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств A , B , C и D и отметь на ней элементы множества A .

571 Выполни действия:

а) $3,27 - 5,4$; г) $0,04 - 0,096$; ж) $0,08 \cdot (-260)$; к) $-45,54 : 0,9$;

б) $-0,56 + 2,5$; д) $-13,9 - 8,21$; з) $-1,6 \cdot 3,46$; л) $-1,203 : (-0,6)$;

в) $-1,38 - 14,2$; е) $-15,172 + 17,2$; и) $-40,8 \cdot (-1,05)$; м) $17,69 : (-5,8)$.

572 Найди длину отрезка AB координатной прямой, если координаты точек A и B равны значениям выражений:

А $\frac{-2,4 \cdot (-0,08) \cdot 7,4 \cdot (-2,5)}{-6,4 \cdot 3,7 \cdot (-0,75)}$

В $-0,48 : (-\frac{1}{12} : (-\frac{1}{3}) + 0,9 : (-2)) + (-5,4)$

С

573* В школьной олимпиаде по математике участвовали 100 человек, по физике – 50, по информатике – 48. Когда учеников спросили, в скольких олимпиадах они участвовали, ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем ответ «в одной», а ответ «в трёх» – втрое меньше, чем «в одной». Сколько всего учеников участвовало в этих олимпиадах?

6*. О системах счисления.

В десятичной позиционной системе записи чисел 10 единиц каждого разряда образуют 1 единицу следующего разряда. Если же в группы объединять не 10, а другое число единиц – например, 2, 3, 4 и т. д., то получим систему записи чисел (или *систему счисления*) с основанием соответственно 2, 3, 4 и т. д. Эти системы называют соответственно двоичной, троичной, четверичной и т. д. системами счисления.

В десятичной системе числа записывают с помощью степеней числа 10. Подобно этому и в остальных системах счисления числа записывают с помощью степеней основания. Так, чтобы записать в троичной системе некоторое число например, 145, – надо выяснить, сколько в нём содержится троичных «единиц», «десятков», «сотен», «тысяч» и т. д., то есть соответствующих степеней числа 3. Ими являются:

$$3^0 = 1, \quad 3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243...$$



Для этого вначале разделим 145 с остатком на 3^4 – наибольшую возможную в нашем случае степень числа 3 – и определим цифру разряда десятков тысяч, затем остаток разделим на 3^3 – определим цифру разряда тысяч и т. д. В итоге получим:

$$145 = \underline{1} \cdot 3^4 + \underline{2} \cdot 3^3 + \underline{1} \cdot 3^2 + \underline{0} \cdot 3^1 + \underline{1} \cdot 3^0. \text{ Значит, } 145_{10} = 12\ 101_3.$$

Перевод натурального числа из десятичной системы в троичную можно делать по более простому правилу, а именно: *цифрами, представляющими число в троичной системе, будут остатки от последовательного деления этого числа на 3, записанные в обратном порядке.*

В сокращённом виде последовательную запись деления можно провести так:

$$\begin{array}{r} 145 \overline{) 3} \\ \underline{1} \textcircled{1} 48 \\ \textcircled{0} 16 \overline{) 3} \\ \underline{\textcircled{1}} 5 \\ \textcircled{2} \textcircled{1} \end{array} \quad 145_{10} = 12\ 101_3$$

Чтобы понять происхождение этого правила, достаточно разделить по этой же схеме какое-нибудь натуральное число в десятичной системе на основание этой системы – число 10.

При переводе из троичной системы в десятичную надо представить число в виде суммы разрядных слагаемых и найти значение полученного выражения. Например, $2011_3 = \underline{2} \cdot 3^3 + \underline{0} \cdot 3^2 + \underline{1} \cdot 3^1 + \underline{1} \cdot 3^0 = 54 + 0 + 3 + 1 = 58_{10}$.

Поскольку остатки не могут быть больше делителя, в троичной системе для записи любого числа достаточно трех цифр – 0, 1 и 2. Аналогично записываются числа и в других позиционных системах счисления. Например, в *пятеричной* системе будет использоваться пять цифр (от 0 до 4), в *восьмеричной* – восемь цифр (от 0 до 7) и т. д.

Натуральный ряд в разных системах счисления выглядит по-разному. Например, в пятеричной системе он имеет вид:

$$1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 24, \dots$$

А вот как необычно выглядят в ней таблицы сложения и умножения:

+	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

•	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

Можно себе представить, как считали бы люди, если бы в разных странах использовались разные системы счисления. Для сравнения результатов вычислений нужны были бы специальные числовые словари.

Самая простая система счисления, получившая широкое распространение в современной компьютерной технике, имеет основание 2. Натуральный ряд в этой системе записывается так:

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1111 ...

И особенно просто выглядят в ней таблицы сложения и умножения:

+	1
1	10

·	1
1	1

Таким образом, кроме равенств $1 + 1 = 10$ и $1 \cdot 1 = 1$ ничего и помнить не нужно. Только, к сожалению, запись чисел в двоичной системе гораздо длиннее: например, $2000_{10} = 11111010000_2$.

К **574** Запиши первые 15 чисел натурального ряда в троичной системе счисления. Построй в этой системе таблицы сложения и умножения.

575 Переведи в десятичную систему счисления числа: $11\ 010_2$, 2103_4 , 555_6 , 424_8 , 176_9 .

576 Переведи числа 7, 25, 42, 79, 156, 273 из десятичной системы счисления в пятеричную. Сделай проверку.

Д **577** Прочитай стихотворение и переведи числа в десятичную систему счисления.

Ей было 1100 лет.
Она в 101 класс ходила,
По 100 учебников носила.
Всё это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней бежал её щенок
С одним хвостом, зато – стоногий!

Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали,
И десять тёмно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет всё совсем обычным,
Когда поймёшь ты наш рассказ.

(Стариков А. Н.)

578 Реши уравнения:

а) $x + 1,8 = -5,8$; в) $-z + 0,7 = 1,02$; д) $-4 + |a| = -2,6$;
б) $-2\frac{3}{4} - y = -1\frac{1}{2}$; г) $m : (-6,4) = -\frac{1}{8}$; е) $\frac{-n + 0,5}{0,8} = -1,5$.

579 Найди значения выражений:

а) $(+2,5) - (+1,9) - (-4,2) + (-5,3)$; в) $-\frac{2}{5} \cdot 3,5 \cdot (-1\frac{5}{7}) \cdot (-0,3) \cdot 4\frac{1}{6}$;
б) $-0,1 - (-0,1)^2 + (-0,1)^3$; г) $(-3,75 + 6) \cdot (-1\frac{1}{3}) + (-1\frac{1}{6}) : (0,5 - \frac{2}{3})$.

580 Построй математическую модель и реши её методом *перебора*:

На двух полках было 52 книги. Когда с первой полки взяли 40% стоящих на ней книг, а со второй полки — $\frac{4}{9}$ стоящих на ней книг, то на обеих полках книг стало поровну. Сколько книг было на каждой полке первоначально?

581 * Запиши число 100_{10} в двоичной, пятеричной, восьмиричной, двенадцатиричной системах счисления.

582 * Составь таблицы сложения и умножения для троичной системы счисления и выполни действия: а) $21\ 021_3 + 210\ 202_3$; б) $102_3 \cdot 201_3$.

Задачи для самопроверки.

583 Закончи предложение и переведи его на математический язык:

- 1) Число, противоположное числу $+4$, равно ...
- 2) Число, противоположное числу $-2,5$, равно ...

584 Сравни: а) -8 и 4 ; б) $-3,6$ и -5 ; в) -7 и 0 ; г) $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{9}$.

585 Вычисли:

- а) $0,3 - 3$; в) $-2,4 + 0,9$; д) $-2,9 \cdot (-0,2)$; ж) $-4,048 : (-0,8)$;
 б) $-1,4 - 5,8$; г) $-4,6 + 4\frac{3}{5}$; е) $1,2 : (-\frac{3}{25})$; з) $-1,35 \cdot \frac{2}{3}$.

586 Реши уравнения:

- 1) $-2,4 + a = -4$; 3) $8 + (-x) = -3,5$; 5) $2c(c + 6) = 0$; 7) $|m| = 4$;
 2) $-0,7b = -0,28$; 4) $y - 1,7 = -6,2$; 6) $\frac{d}{-5,3} = 0,1$; 8) $\frac{3}{-k} = -3$.

587 Найди значения выражений:

- а) $-2,5 + (-7,4) - (-1,2) - (+3,9) + (+0,6)$; в) $-2 \cdot 1,9 \cdot (-5) \cdot 2,5 \cdot (-0,4) \cdot 3$;
 б) $-(4,8 - 1,92) - (-5,4 + 8,04) - 1,92$; г) $\frac{-5,4 \cdot 3,9 \cdot (-0,02)}{0,42 \cdot (-0,18) \cdot (-2,6)}$.

588 В доме 126 квартир. Число однокомнатных квартир в 1,5 раза больше числа двухкомнатных, а число трёхкомнатных составляет 75% числа двухкомнатных. Остальные 9 квартир — четырёхкомнатные. Сколько в доме однокомнатных, двухкомнатных и трёхкомнатных квартир?

589 Длина прямоугольника на 1,2 см больше ширины. Чему равны площадь и периметр прямоугольника, если: а) длина больше ширины в 1,6 раза; б) ширина составляет $\frac{2}{3}$ длины; в) длина на 30% больше ширины; г) ширина на 20% меньше длины?

Глава 2. § 3. 3. ж) $\frac{3c}{a}$; з) $\frac{x}{5y}$. 6. з) 200 %. 7. г) 60 %, $166\frac{2}{3}\%$. 8. е) 350 %. 19. в) 2,1; г) $\frac{2}{3}$. 20. 2) 7,2 л. 21. г) $33\frac{1}{3}\%$; ж) 125 %. 22. 21%. 24. б) 4. 25. 12 и 30 кн. 26. $A = 9$; $B = 36$. 1) На 75 % меньше; 2) на 300 % больше. 27. 10 лет. 48. 4) 8,5. 49. 1 : 80 000. 53. 2) 5с чел.; 3) 0,3d км. 54. 2) 1; 4) 30. 67. 3) 4,05; 5) $2\frac{2}{9}$; 8) 100; 11) 64; 12) 3,6. 73. 2) $\approx 19,1$ см. 80. В 1,5 раза. 81. Через 15 мин; лишнее данное – 36 км. 86. 2) 0,25. 92. 1) 5 : 1 = 15 : 3. 93. 1 023 457 896. 94. 81. 95. I – 6 «А»; II – 6 «В»; III – 6 «Г»; IV – 6 «Б». 106. 1) 3,2; 3) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{3}{8}$. 107. 1) 0,8; 2) 2. 108. 1) 6 га; 2) 75 д. 110. Увеличился на 8 %. 112. 24 000 р.; в 3 раза; на 200%. 116. 2) 35; 4) 3. 118. 36 уч. 119. 0,75%; 9%. 120. 7. 122. Во П раз – 9, 18, 27, 36, 45. 124. б) 40 %; г) 45 %. 126. 3) 2,8; 4) 8. 127. 2) 0,5; 3) 16. 129. 1) 21; 2) 0,3. 130. 1) 5a км; 2) 0,45b стр.; 3) $\frac{100d}{c}\%$; 4) 0,04x чел. 131. 1) 100; 2) 0.

§ 4. 148. 2) 6; 3) 16. 149. 75,2 км. 150. Через 10 ч; 108 км; 90 км. 151. 1,3 л. 152. 1) 5,7; 2) 6,4. 156. 1) 20; 2) 0,1. 157. 60 км/ч; 75 км/ч. 158. $A = 6$, $B = 10$, $C = 3$, $D = 5$. 159. 7б. по 10 л, 9б. по 17 л. 168. 3) 5. 169. 2. а) 10 д.; б) 24 д. 172. 2 008 440. 181. 1) 2; 8; 18; 2) 5; 45. 185. 1) 70; 4) 1,2. 187. На 28 %. 188. На 20 %. 192. 1) 0,4; 2) $3\frac{1}{3}$. 194. $A = 8$, $B = 10$, $C = 4$. Числа 3,2; 5; 20. 196. а) 33; б) 66; в) 33. 204. На 90 км/ч. 205. Через 1 ч. 206. 2 рабочих. 208. 90 км. 211. 3 т. 213. 1) 120 кг; 2) 40 дн. 218. 3) 2. 219. 2) 7; 3) 11. 224. 10. 227. 18 км/ч. 228. На 1,6 см. 230. 10 дн. 231. На 0,3. 233. 5. 234. 144, 48 и 12 гульд. 236. 120 цв. 245. 102 см. 250. 160 яблонь, 48 груш, 112 кост. дер. 254. 5,6; 7; 12,6. 255. 1) 18, 24, 33; 3) 84, 30, 36. 258. 2) 5; 6; 10,5; 4) 2,7; 1,8; 0,5; 0,2. 260. 12,5 га. 270. 1) 6,2; 4) 14. 271. 1) 30 рейсов; 2) 3,6 кг. 275. б) 2,7 и 4,5; г) 1,5; 3 и 8. 276. 2) 28 м; 3) 5,2 м. 278. На 9000 акций больше у N. 279. 2) 6; 4,8; 1,6. 280. 200, 300 и 480 монет. 281. 2) 427,2 р. 282. $A = 900$, $B = 360$; 15 и 6. 292. 1 ч 20 мин. 294. б) 1,6; 3,2; 4,8. 295. 200 р. и 150 р. 296. 16 см. 299. 1) 1,234; 2) 11.

Глава 3. § 1. 322. 2) На 6 км; лишнее условие – 1 ч 15 мин. 323. 2) 50; 4) 0,15. 326. 2) 70 га. 329. 1) $5(a - b)$ км; 2) $4c$ км/ч; 3) $0,9d$ км/ч; 4) $\frac{s}{12}$ км/ч. 333. 3 ч 45 мин. 334. 2) 4; 3) 2,4. 335. На 15 000 акций. 336. 3) $\frac{6}{5}$. 337. 12 км/ч. 338. 1) 9,876; 2) 40. 339. 18 лет. 356. к) 0,25; л) 0,9. 372. На 24 км/ч. 373. 8,5 км. 376. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 0,4. 380. 1) $4\frac{2}{15}$; 4) 60,2. 384. 1) 15; 2) 6; 3) 162; 4) 441. 388. 1) 0,075; 2) 2. 390. В 2,5 раза. 391. 1) $x \geq 0$; 2) $x \leq 0$; 4) 3; -3; 6) 0,5; 7) 3; -5; 8) \emptyset . 392. 1) 0; 2) $x \neq 5$; 3) $-4 < x < 2$; 4) $x \leq -1$ или $x \geq 3$. 404. 6) $-b \leq x \leq b$; 7) \emptyset ; 8) $\{0\}$. 408. 2) $\{0\}$; 3) \emptyset ; 5) $\{-a; a\}$; 6) $\{0\}$, если $b = 0$; $\{-b; b\}$, если $b > 0$; 7) \emptyset ; 8) $\{0\}$. 410. 2) $\frac{1}{18}$; 4) 2; 6) 10; 8) 1. 411. 80, 40, 24 и 36 книг; на 25 %. 412. 27, 30, 24 и 25 учеников; на 8 %. 414. 2) $\approx 0,50$; 4) $\approx 20,20$. 418. 1) 0,9; 2) 0,07; 3) 11; 4) 3,6. 419. 2520 р., 720 р., 1800 р.; в 2 раза. 420. 3) $\approx 43,1$; 4) $\approx 43,10$. 421. У Власа – 3, 4 и 17; у Тараса – 3, 6 и 15; у Панаса – 2, 6 и 16 лошадей, коров и овец соответственно.

§ 2. 440. ж) -1,2; з) -0,7; п) +0,96; р) -10. 443. б) -96; г) +2,3; е) -2,755. 444. б) -9; в) +1,6. 445. а) $-1\frac{2}{9}$. 453. 5) $2(a + n : a)$ дм; 6) $b(p : 2 - b)$ м². 454. 2) Ум. на 8 %. 456. 2 : 5; лишние условия – АВ и АД. 459. в) 10,4; г) 20. 460. 1) 6; 2) 2,5. 461. 48, 72, 60 и 20; $33\frac{1}{3}\%$. 462. $A = 7,8$; $B = 50$; 15,6 %. 463. в) +3; +3,6; -1,4. 466. л) -6,96; м) 0,075. 467. $-3 < -2,5 < 4$. 468. г) $-5 \leq y \leq 5$. 469. 2) 96 м; 560 м²; 4) 56 м; 180 м². 470. 2) Ув. на 40 %. 472. 1) 8; 2) $2\frac{2}{3}$. 474. 1) $A = 180$, $B = 300$; 60 %. 486. в) -1,56; г) +0,05. 487. а) -2; б) -1,3. 489. 1) -3; -1; 2) -2; 10; 3) 2; 8; 4) -9; -5. 495. 1) 7; 2) 12. 497. 0,6. 498. 50, 61, 72, 83, 94. 500. е) -7; л) $2\frac{1}{3}$. 501. в) -0,4. 502. а) 1,4; б) -0,6. 503. 6 отрезков; $NP = 6,7$ ед.; $NQ = 1,8$ ед. 504. в) 3; -5; г) -2. 506. 0,2 и 0,7. 507. 92. 508. а) 5; б) -0,28. 509. $\frac{1}{3}$ часть пути. 511. 189 д.; 132 д. 521. в) 3,6; г) -0,21. 522. г) -3; д) 10,9; е) 7. 528. 2) 1 т; 3) 6 мин; 4) \approx на 7 %. 531. ж) -2211,3; з) -1414,636; л) 0,6; м) -3. 533. а) -5; б) -1,4. 535. 2) 1 кг 500 г. 536. 42 солдата; 11, 13 и 15 вагонов. 537. 162. 542. ж) -0,05; и) 4,7. 543. в) -0,5; г) $1\frac{2}{3}$. 549. а) -5,55; б) -64. 551. 3) 40 см. 552. 0,8 ч. 553. 3 ч. 556. а) 2,5; б) -5. 557. а) 1,1; б) -12. 558. 2) 190 м; 15 а. 559. 12 дней. 568. $A = 3,3$; $B = -6$; $3,3 > -6$; $|3,3| < |-6|$. 569. а) -3,5; б) 12. 571. в) -15,58; г) -0,056; е) 2,028; и) 42,84; л) 2,005; м) -3,05. 572. $A = -0,2$, $B = -3$; $AB = 2,8$ ед. 575. 26, 147, 215, 276, 150. 576. $7_{10} = 12_5$; $25_{10} = 100_5$; $42_{10} = 132_5$; $79_{10} = 304_5$; $156_{10} = 1111_5$; $273_{10} = 2043_5$. 578. а) -7,6; б) $-1\frac{1}{4}$; в) -0,32; д) -1,4; 1,4; е) 1,7. 579. б) -0,111; в) -3; г) 4. 580. 25 и 27 книг. 581. $100_{10} = 1\ 100\ 100_2$; $100_{10} = 400_5$; $100_{10} = 144_8$; $100_{10} = 84_{12}$. 582. а) 1 002 000; б) 21 202. 585. ж) 5,06; з) -0,9. 586. 1) -1,6; 4) -4,5; 5) 0; -6; 7) 4; -4; 8) $\frac{2}{3}$. 587. а) -12; б) -7,44; в) -57; г) $2\frac{1}{7}$. 588. 54, 36 и 27 квартир. 589. а) 10,4 см; 6,4 см²; б) 12 см; 8,64 см²; г) 21,6 см; 28,8 см².