



Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон

МАТЕМАТИКА

6 класс

Учебник
(в 3 частях)

Часть 1

Рекомендовано
к использованию при реализации имеющих государственную
аккредитацию образовательных программ начального общего,
основного общего, среднего общего образования



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

Оглавление

Глава 1. Язык и логика

§ 1. Отрицание высказываний

1. Понятие отрицания	3
2. Отрицания общих высказываний.....	10
3. Отрицания высказываний о существовании	17

§ 2. Переменная

1. Понятие переменной. Выражения с переменными.....	20
2. Предложения с переменными.....	26
3. Переменная и кванторы.....	33
4. Отрицание утверждений с кванторами	38

Глава 2. Арифметика

§ 1. Числа и действия с ними

1. Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями	44
2. Задачи на движение по реке	56
3. Среднее арифметическое.....	63

§ 2. Проценты

1. Понятие о проценте.....	74
2. Задачи на проценты	83
3. Простой процентный рост	97
4. Сложный процентный рост	105

Ответы	111
---------------------	-----

В книге используются условные обозначения:



К

– задачи по новой теме для работы в классе,



Д

– задачи для домашней работы,



П

– повторение ранее пройденного,



С

– задачи на смекалку,



– базовые задания,



– более сложные задания,



– задания, требующие умения находить нестандартные способы решения.

Глава 1

Язык и логика

§ 1. Отрицание высказываний

1. Понятие отрицания

Когда люди о чём-то спорят, одни из них считают некоторое утверждение истинным, а другие – ложным. Так, в течение многих веков учёные спорили о том, истинно или ложно утверждение «Солнце вращается вокруг Земли». Ещё несколько веков назад все были уверены, что это утверждение истинно, притом совершенно очевидно («видно очами»). И потребовалось не одно столетие, чтобы доказать гипотезу Николая Коперника (1473–1543), отрицающую это, казалось бы, «очевидное» утверждение.

Вообще, при споре двух людей один из них утверждает, что некоторое высказывание истинно, а другой *отрицает* это мнение, он имеет противоположное мнение. Например, если в контрольной работе ученик написал, что $2 \cdot 3 = 5$, а учитель перечеркнул это равенство, то он и ученик имеют по поводу произведения $2 \cdot 3$ противоположные мнения. Можно сказать, что утверждения

$$2 \cdot 3 = 5 \text{ и } 2 \cdot 3 \neq 5$$

отрицают друг друга, а каждое из них называют **отрицанием** другого.

Приведём ещё примеры предложений, где в каждой паре одно является отрицанием другого:

№	Предложение	Отрицание
1	Москва – столица России	Москва <i>не является</i> столицей России
2	Дважды два – пять	Дважды два <i>не равно</i> пяти
3	Масса Юпитера меньше массы Земли	Масса Юпитера <i>не меньше</i> массы Земли
4	32 делится на 3	32 <i>не делится</i> на 3
5	Существует наибольшее натуральное число	<i>Не</i> существует наибольшего натурального числа
6	36 больше, чем 36	36 <i>не больше</i> , чем 36
7	У Кати есть брат	У Кати <i>нет</i> брата
8	$a < b$	a <i>не меньше</i> , чем b



И в жизни, и в математике с отрицаниями приходится сталкиваться на каждом шагу, поэтому очень важно научиться правильно формулировать отрицание для любого заданного предложения. В принципе это несложно: для этого достаточно в начале данного высказывания приписать слова «Неверно, что». Например, отрицание предложения «У Кати есть брат» можно сформулировать как «Неверно, что у Кати есть брат», но, конечно, в обычной речи говорят «У Кати нет брата».



Надо сказать, что каждый из вас уже много тренировался в формулировке отрицаний различных предложений при изучении... иностранного языка: запись данного предложения «в отрицательной форме» – это и есть формулировка отрицаний.

Естественно, что в русском языке имеются специальные способы выражения отрицания в более простой форме. Так, в первом примере в исходном высказывании сказуемое «является» опущено, поэтому в его отрицании появились слова «*не является*». Точно так же в отрицании второго высказывания появились слова «*не равно*». Конкретная формулировка отрицания – это вопрос культурной, грамотной речи, что, конечно, очень важно и для математики: чем точнее сказано, тем яснее смысл сказанного.

Итак, для формулировки отрицания действуют как бы в два приёма: сначала мысленно присоединяют к предложению слова «Неверно, что», а затем «обрабатывают» полученное отрицание так, чтобы оно хорошо звучало на русском языке, – можно сказать, переводят его с русского «математического» языка на русский литературный.

№	Предложение	Понимание отрицания	Формулировка отрицания
1	На столе ничего нет.	Неверно, что на столе ничего нет.	На столе что-то есть.
2	Мы ещё не дожили до XXI века.	Неверно, что мы ещё не дожили до XXI века.	Мы уже дожили до XXI века.
3	Число 11 111 простое.	Неверно, что число 11 111 простое.	Число 11 111 не является простым.
4	Число, делящееся на 24, делится на 9.	Неверно, что число, делящееся на 24, делится на 9.	Число, делящееся на 24, может не делиться на 9.
5	У Серёжи есть не то овчарка, не то такса.	Неверно, что у Серёжи есть не то овчарка, не то такса.	У Серёжи нет ни овчарки, ни таксы.
6	Число 56 431 делится на 13 и на 17.	Неверно, что число 56 431 делится на 13 и на 17.	Число 56 431 не делится либо на 13, либо на 17, либо на оба эти числа.

Таким образом, задача формулировки отрицания – это в некотором смысле задача из грамматики языка, и для её решения не имеет значения, истинно или ложно то предложение, которое мы отрицаем. Например, мы не проверяли, является ли число 11 111 простым, и уж точно не можем сказать, есть ли у Кати брат, поскольку неизвестно, о какой Кате идёт речь. Однако это не помешало нам сформулировать отрицания этих предложений. Кстати, делая упражнения по иностранному языку, разве мы задумываемся о том, истинно или ложно предложение, которое предлагается записать в отрицательной форме?

Более того, часто можно вполне грамотно сформулировать отрицание даже тех предложений, смысл которых неясен. Например, мы можем сказать, что отрицанием предложения «Синус числа 0 *равен* нулю» является предложение «Синус числа 0 *не равен* нулю», хотя понятие синуса числа мы ещё не изучали.

Главное состоит в том, что *если данное высказывание истинно, то его отрицание ложно, и наоборот – если данное высказывание ложно, то его отрицание истинно*. Другими словами, одно из двух высказываний – либо данное утверждение, либо его отрицание – обязательно истинно.

Этот факт представляет собой *закон логики*, и он имеет специальное название – *закон исключённого третьего*: истинно либо само утверждение, либо его отрицание (имеются две возможности). И поэтому закон исключённого третьего часто произносится по-латыни: *tertium non datur* (тэрциум нон датур – «третьего не дано»).



Разумеется, утверждение и его отрицание не могут быть истинными *оба* одновременно – отрицание как раз и говорит о том, что данное утверждение неверно, то есть утверждение и его отрицание *противоречат* друг другу. Поэтому если в результате рассуждения мы получили, что истинны и утверждение, и его отрицание, то мы получили *противоречие*, и, значит, в рассуждении допущена ошибка.

Для обозначения отрицания используется похожий на кочергу символ – (читают: «не» или «неверно, что»). Таким образом, отрицание высказывания *A* обозначается как $\neg A$. Если высказывание не имеет буквенного обозначения, то после знака отрицания ставятся скобки: например $\neg (3 \cdot 4 = 16)$.



Иногда для высказываний, обозначенных буквой, используется иная запись отрицания – черта над этой буквой. Например, отрицание высказывания *A* есть \bar{A} .

В некоторых случаях отрицание можно записывать, не используя символов, обозначающих отрицание. Так, вместо отрицания равенства пишут знак \neq . Например, вместо $\neg (3 \cdot 4 = 16)$ пишут просто $3 \cdot 4 \neq 16$.

Точно так же если неравенство $a < b$ неверно, то есть a не меньше, чем b , то a или больше b , или равно b , а это можно записать короче: $a \geq b$. Другими словами, отрицание неравенства $a < b$ означает то же самое, что и неравенство $a \geq b$, то есть

$$-(a < b) \Leftrightarrow a \geq b.$$

Аналогично

$$-(a > b) \Leftrightarrow a \leq b,$$

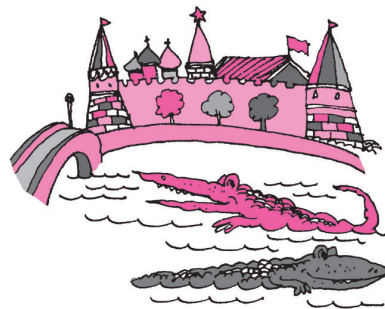
$$-(a \leq b) \Leftrightarrow a > b,$$

$$-(a \geq b) \Leftrightarrow a < b.$$

К

1 Построй отрицания высказываний с помощью слов «Неверно, что», а затем перефразируй их в более простой форме. Убедись в выполнении для них **закона исключённого третьего**.

- 1) Луна – спутник Земли.
- 2) В лесу растут мухоморы.
- 3) Мухомор – несъедобный гриб.
- 4) В Москве-реке водятся крокодилы.
- 5) Амазонка длиннее Нила.
- 6) Джомолунгма ниже Эвереста.
- 7) На Земле 7 или 8 материков.
- 8) Арбуз – это овощ или фрукт.
- 9) В среду по расписанию есть уроки математики и чтения.
- 10) В буфет не привезли ни булочек, ни коржиков.
- 11) Дроби $0,5$ и $\frac{1}{2}$ не равны.
- 12) Площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины.



2

Докажи, что высказывание является **ложным**, и построй его отрицание:

- 1) Число 0 является натуральным.
- 2) Число 1 – простое.
- 3) Между числами 2 и 3 нет других чисел.
- 4) Сумма $18 \cdot 947 + 456$ кратна 9.
- 5) Число 53 535 353 делится на 3 или на 5.
- 6) Корнями уравнения $x^2 + 2 = 18$ являются числа 0 и 4.
- 7) Дробь 8,9 больше или равна 9.
- 8) Неправильная дробь меньше единицы.

3

Запиши отрицание высказываний на математическом языке. Убедись в выполнении для них **закона исключённого третьего**.

- а) $87\ 504 < 87\ 504$; в) $\frac{5}{16} \leq \frac{7}{16}$; д) $2,5 + 0,25 = 2,75$; ж) $2 - \frac{1}{6} < 1\frac{5}{6}$;
 б) $9036 > 12\ 035$; г) $\frac{3}{11} \geq \frac{3}{5}$; е) $0,4 : 0,01 \neq 40$; з) $5\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} \leq 1,5$.

4

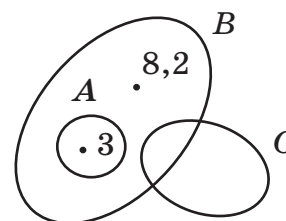
Придумай высказывание, выражающее свойство прямоугольника, и построй его отрицание. Убедись на этом примере в выполнении **закона исключённого третьего**.

- 5 Используя *закон исключённого третьего*, докажи, что отрицания построенны неверно.

№	Высказывание	Отрицание
1	Все кошки серые.	Все кошки несерые.
2	Некоторые ягоды сладкие.	Некоторые ягоды несладкие.
3	Есть месяцы, в которых 30 дней.	Есть месяцы, в которых не 30 дней.
4	Каждый день утром идёт дождь.	Утром никогда не идёт дождь.

- 6 Проверь по диаграмме Эйлера–Венна истинность высказываний. Для ложных высказываний построй отрицания и запиши их на математическом языке:

- а) $8,2 \in A$; в) $3 \notin C$; д) $A \not\subset B$; ж) $A \cap B = \emptyset$;
 б) $8,2 \in B$; г) $3 \notin B$; е) $C \subset B$; з) $A \cup B = B$.



- π 7 Запиши следующие два члена ряда так, чтобы сохранялась закономерность:

а) 2; 5; 11; 23; 47 ... в) 8,01; 8,002; 8,0003 ...

б) $\frac{1}{2}; \frac{2}{9}; \frac{4}{16}; \frac{8}{23} \dots$ г) $1\frac{2}{3}; 12\frac{3}{4}; 123\frac{4}{5} \dots$

- 8 Назови элементы множества $A = \left\{ \frac{5}{16}; 0; \frac{3}{1000}; 4,8; 25\,004; 5\frac{7}{9}; 1; 0,0095 \right\}$.

1) Какие из чисел, принадлежащих этому множеству, являются: а) натуральными числами; б) дробями?

2) Какие из дробей записаны в виде: а) обыкновенной дроби; б) смешанного числа; в) десятичной дроби?

- 9 Запиши в порядке возрастания элементов множество натуральных чисел, составленных из двух пятёрок и пяти нулей. Прочитай эти числа.

- 10 Запиши на математическом языке числа: а) шесть миллионов семьсот две тысячи пятьдесят восемь; б) семь целых четыре пятых; в) три целых двенадцать сотых.

- 11 Вычисли устно:

а) $1,2 + 0,3$;	б) $5,4 - 4$;	в) $0,9 \cdot 3$;	г) $4,8 : 8$;
$2,6 + 4$;	$2 - 0,07$;	$100 \cdot 0,6$;	$7,2 : 0,01$;
$0,9 + 0,6$;	$8,3 - 0,5$;	$0,1 \cdot 0,87$;	$6,3 : 0,9$;
$3,2 + 0,08$;	$20,4 - 1,02$;	$5,4 \cdot 0,2$;	$0,24 : 0,8$.

- 12 Вычисли:

а) $30,75 + 5,6136$; б) $21,6 - 13,823$; в) $7,05 \cdot 0,0308$; г) $15,6672 : 3,84$;
 $5,52 + 994,48$; $406,01 - 75,997$; $507,8 \cdot 3,005$; $0,03729 : 6,78$.

13 Найди значение выражения:

а) $(12 - 8,4) : 0,09 \cdot 0,7 - 0,3 \cdot (0,6 + 3,12) : (14,18 - 7,98) : 0,01$;

б) $10 \cdot (0,056 : 0,8 \cdot 700 - 40,2832) : (16 \cdot 0,6 - 0 : 3,2) + 5,4 : 9 : 30$.

14 Выбери окончания предложений так, чтобы получились истинные высказывания. Выпиши подряд все буквы, соответствующие твоим ответам.

1) Предыдущим для числа 79 399 является число: а) 78 399; б) 79 400; в) 79 398.

2) В разряде десятков тысяч числа 12 705 320 записана цифра: а) 2; б) 0; в) 5.

3) В разряде сотен миллионов числа 9 876 543 210 записана цифра: а) 8; б) 9; в) 5.

4) В разряде миллионных числа 0,123456789 записана цифра: а) 5; б) 6; в) 7.

5) В знаменателе дробной части числа $3\frac{2}{9}$ записана цифра: а) 3; б) 2; в) 9.

6) В записи смешанного числа между целой и дробной частью подразумевается знак: а) умножения; б) сложения; в) вычитания.

7) Сумма $80\,000\,000 + 3\,000\,000 + 4000 + 20$ является разложением по разрядам числа: а) 834 020; б) 83 004 020; в) 8 304 020.

8) Сумма $3 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^2 + 7$ является разложением по разрядам числа: а) 35 087; б) 350 807; в) 3 508 007.

15 Сравни числа:

а) 7 508 996 и 758 999; в) 3,275 и 3,6; д) 123,4 и 5,6789;

б) 2 371 405 и 2 371 054; г) 0,956 и 1; е) 0,0009 и 0,008.

16 Какие ты знаешь способы сравнений обыкновенных дробей? Сравни:

а) $\frac{9}{25}$ и $\frac{8}{25}$; б) $\frac{5}{19}$ и $\frac{5}{12}$; в) $\frac{111}{53}$ и $\frac{79}{84}$; г) $\frac{4}{7}$ и $\frac{3}{5}$; д) $\frac{44}{45}$ и $\frac{45}{46}$.

17 Реши задачи:

а) В летнем лагере 3 отряда. В первом отряде отдыхают 25 человек, во втором – в 1,2 раза больше, чем в первом, а в третьем – на 7 человек меньше, чем во втором. Для спортивной игры все отдыхающие разбились на две равные команды. Сколько человек было в каждой команде?

б) В летнем лагере за смену в 28 дней израсходовали 1 т картофеля. В первые 12 дней расход картофеля составил 38 кг в день. Каким будет расход картофеля в оставшиеся дни, если каждый день он будет одинаковым?

18 Пусть M – множество всех планет, названия которых начинаются с буквы M , C – множество всех планет Солнечной системы, а Γ – множество всех планет Солнечной системы, входящих в группу планет-гигантов. Нарисуй диаграмму Эйлера–Венна множеств M , C и Γ . Обозначь на этой диаграмме планету Земля.

D

19 Найди ложные высказывания и построй их отрицания (если потребуется, воспользуйся для этого энциклопедией или справочником).

- 1) Джордано Бруно был последователем учения Птолемея.
- 2) Пальмы – самые высокие деревья в мире.
- 3) В атмосфере Земли кислорода по массе содержится не меньше, чем азота.
- 4) Площадь Германии больше площади Франции.
- 5) Санкт-Петербург был основан в 1704 или 1705 году.
- 6) Кенгуру живут не то в Австралии, не то в Антарктиде.

20

Запиши предложение на математическом языке и построй его отрицание:

- 1) Число x меньше пяти девяток.
- 2) Число y больше или равно трём целым четырём тысячным.
- 3) Разность чисел a и b равна числу c .
- 4) Квадрат числа n не равен 16.
- 5) Число x больше своего квадрата.
- 6) Число x меньше своего квадрата на 1.

21

Построй отрицание высказывания «Все реки впадают в Каспийское море». Убедись в выполнении для него *закона исключённого третьего*.

22

Найди истинные высказывания. Расположи соответствующие им ответы в порядке возрастания, сопоставь их соответствующим буквам и расшифруй астрономический термин. Примеры, в которых допущены ошибки, реши правильно и запиши в тетрадь.

Р $0,4 + 3 = 3,4$

Д $9,1 - 1,05 = 8,05$

А $0,8 \cdot 0,04 = 0,032$

У $6 + 0,12 = 0,18$

Г $0,854 - 0,85 = 0,04$

К $5 : 1000 = 0,05$

Н $0,25 + 0,5 = 0,3$

Б $0,5 \cdot 3 = 0,15$

Т $3,6 : 9 = 0,4$

О $3,28 + 1,3 = 4,58$

И $4 \cdot 1,7 = 6,8$

Я $12,3 : 5 = 24,6$

Е $2,6 - 0,01 = 2,59$

Ж $17,2 \cdot 10 = 1,72$

С $0,056 : 0,7 = 0,08$

23

Выполни действия:

а) $(3,75 \cdot 6,8 - 7,32) : (1,08 + 0,72) \cdot 5,2 - 4,2 : (51,7 - 580 \cdot 0,089)$;

б) $164 - (22,62 : 3 + 208,27 : 29,5) \cdot 8,05$.

24

У дачника было три улья. С первого улья он получил 24,8 кг мёда, со второго – на 6,4 кг меньше, чем с первого, а с третьего – половину того, что собрал с первых двух ульев вместе. Весь мёд он разложил поровну в 18 банок. По сколько килограммов мёда было в каждой банке?



C

25* Расшифруй ребус, где одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные:

1) ЛЕТО + ЛЕТО = ПОЛЁТ

2) ПЧЁЛКА \times 7 = ЖЖЖЖЖЖЖ

2. Отрицания общих высказываний

В математике часто приходится строить отрицания общих высказываний и высказываний о существовании. При этом формулировка отрицания должна быть не только грамотной с точки зрения русского языка, но и удобной для дальнейшего использования в рассуждении.

Заметим сразу же, что самый простой приём – поставить «не» перед сказуемым – в этом случае не действует, он может привести к грубой ошибке. Так, если мы сформулируем, используя этот приём, отрицание высказывания «Все натуральные числа делятся на 3», то получим «Все натуральные числа не делятся на 3», или, другими словами, «Ни одно натуральное число не делится на 3». Но исходное высказывание ложно (контрпример – число 1), и второе также ложно (контрпример – число 3), а этого по закону исключённого третьего быть не может.

В результате использования общего приёма – поставить впереди данного предложения слова «Неверно, что» – получается предложение «Неверно, что все натуральные числа делятся на 3». Это предложение означает, что *не все* натуральные числа делятся на 3 или, что то же самое, что некоторые натуральные числа не делятся на 3. Мы получили, таким образом, высказывание о *существовании*: «Существует хотя бы одно натуральное число, которое не делится на 3». Это и есть отрицание данного высказывания.



Точно так же отрицанием высказывания «Все мужчины носят бороду» является высказывание «Есть мужчины, которые не носят бороды».

Общие высказывания могут иметь и другие формы выражения в языке. Ниже мы приведём несколько примеров, давая различные «допустимые» варианты формулировки отрицаний. При этом одни варианты более близки к обычному языку, другие более удобны для математических рассуждений.

№	Высказывание	Отрицание
1	Число, оканчивающееся цифрой 4, обязательно делится на 4.	Число, оканчивающееся цифрой 4, не обязательно делится на 4. Существуют числа, которые оканчиваются цифрой 4, но не делятся на 4. Существует хотя бы одно число, которое оканчивается цифрой 4, но не делится на 4.
2	Сумма двух чисел, делящихся на 7, всегда делится на 7.	Сумма двух чисел, делящихся на 7, не всегда делится на 7. Существуют два числа, делящиеся на 7, сумма которых не делится на 7.

№	Высказывание	Отрицание
3	Сумма двух правильных дробей также должна быть правильной дробью.	Сумма двух правильных дробей может не быть правильной дробью. Существуют две правильные дроби, сумма которых не является правильной дробью. Существуют две правильные дроби, сумма которых является неправильной дробью.
4	Натуральное число, записанное с помощью трёх единиц и 100 нулей, не может делиться на 2.	Натуральное число, записанное с помощью трёх единиц и 100 нулей, может делиться на 2. Существует натуральное число, записанное с помощью трёх единиц и 100 нулей, которое делится на 2.
5	Натуральное число, записанное с помощью трёх единиц и 100 нулей, не может не быть составным.	Натуральное число, записанное с помощью трёх единиц и 100 нулей, может не быть составным. Существует натуральное число, записанное с помощью трёх единиц и 100 нулей, которое не является составным.

Рассмотрим ещё один пример, когда исходное общее высказывание имеет более сложную форму: «*Ни один медведь не умеет плавать*». Оно означает то же самое, что «*Все медведи не умеют плавать*». А его отрицание «*Неверно, что все медведи не умеют плавать*» означает, что некоторые медведи всё же плавать умеют. И мы снова получили высказывание о *существовании*: «*Есть медведи, которые умеют плавать*».

И вообще, наше наблюдение состоит в том, что

**Отрицание общего высказывания
есть
высказывание о существовании.**



Проведём теперь обоснование полученного вывода в общем виде. Действительно, в общем высказывании утверждается, что *все* рассматриваемые предметы обладают некоторым свойством. Поэтому его отрицание означает, что *не все* предметы обладают этим свойством, то есть *существуют* предметы, которые этим свойством *не* обладают.

К

26 Построй несколько вариантов отрицания общих высказываний. Убедись в выполнении для них закона исключённого третьего.

- 1) **Все** европейские страны входят в Евросоюз.
- 2) Каждое государство Европы является республикой.
- 3) В любом городе России есть памятники истории.
- 4) **Все** города России находятся в Европе.
- 5) Планеты имеют форму шара.
- 6) У каждой планеты Солнечной системы есть естественный спутник.
- 7) Ни одна планета Солнечной системы не имеет колец.
- 8) Вода есть на любой планете.
- 9) Высказывания всегда являются повествовательными предложениями.
- 10) Вопросительное предложение не может быть высказыванием.
- 11) Во всяком четырёхугольнике диагонали равны.
- 12) Любой угол является острым или тупым.

27 Найди ложные высказывания, построй их отрицания и докажи, что отрицания истинны.

- 1) Все решения неравенства $1 < x \leq 8$ являются натуральными числами.
- 2) Никакое решение неравенства $2 \leq x < 3$ не является натуральным числом.
- 3) При делении натуральных чисел остаток всегда меньше делителя.
- 4) Любую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной.
- 5) Любую десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной.
- 6) Числа при округлении уменьшаются.
- 7) При умножении числа на 1 всегда получается то же самое число.
- 8) Сумма любых двух натуральных чисел больше каждого из них.
- 9) Произведение чисел, отличных от нуля, больше каждого множителя.
- 10) Частное десятичных дробей можно записать в виде конечной десятичной дроби.

28 Какие высказывания являются общими, какие – высказываниями о существовании, а какие – ни теми, ни другими? Для ложных общих высказываний построй отрицания.

- 1) Все птицы умеют плавать.
- 2) У телеги всегда четыре колеса.
- 3) Петя сидит за одной партой с Сашей.
- 4) Брат всегда старше сестры.
- 5) Любая медаль имеет две стороны.
- 6) Некоторые милиционеры – женщины.
- 7) В пятницу шёл сильный снег.
- 8) Иногда собаки дружат с кошками.
- 9) Нет попугаев, которые не умеют говорить.
- 10) Любые часы всегда спешат.
- 11) Арбуз бывает только полосатым.
- 12) Велосипед может иметь квадратные колеса.



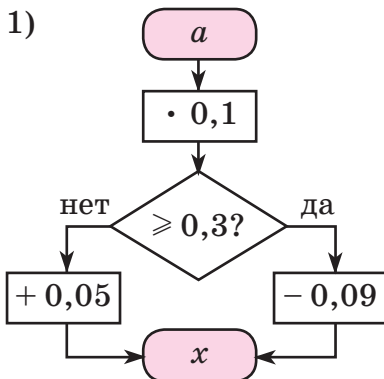
29 Определи вид высказывания. Найди истинные высказывания и докажи их. Для ложных общих высказываний приведи контрпример и построй отрицание.

- 1) Каждое натуральное число делится на себя и на 1.
- 2) Некоторые числа имеют только один делитель.
- 3) Любое натуральное число имеет хотя бы два делителя.
- 4) Простое число всегда меньше составного.
- 5) Взаимно простые числа сами являются простыми.
- 6) Числа 12 и 15 – взаимно простые.
- 7) Делитель числа всегда меньше самого числа.
- 8) Кратное числа больше самого числа.
- 9) Число, кратное 9, может не оканчиваться на 9.
- 10) Число, кратное 9, может быть представлено в виде $9n$, где $n \in N$.
- 11) Любое простое число можно представить в виде $2n + 1$, где $n \in N$.
- 12) Число, которое можно представить в виде $2n + 1$, где $n \in N$, является простым.

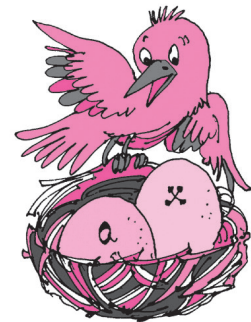
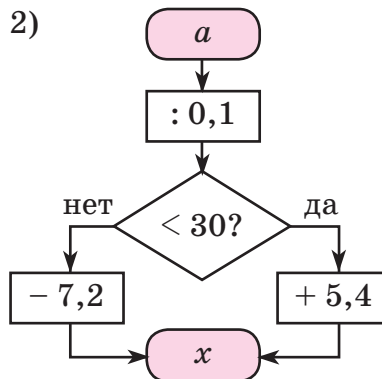
π

30 Нарисуй в тетради таблицу для записи соответствующих значений a и x и заполни её для $a = 0,08; 0,6; 2,9; 3; 7,2; 20,5$.

1)



2)



31 Прочитай неравенство и запиши множество всех его натуральных решений:

- а) $15 \leq x < 18$; б) $3,2 < x \leq 7,6$; в) $1,7 \leq x \leq 2$; г) $5 < x < 5,6$.

32 Найди три решения неравенства $0,5 \leq x \leq 0,6$. Укажи алгоритм, по которому можно найти его 1000 решений. А можно ли найти 10 000 решений этого неравенства?

33 1) $a = 149,5027$. Найди числа, являющиеся приближениями числа a с недостатком и избытком с точностью до сотен, десятков, единиц, десятых, сотых, тысячных. Ответы запиши в виде двойных неравенств.

Образец записи решения:

$$149,50 < a < 149,51 \text{ (с точностью до сотых)}$$

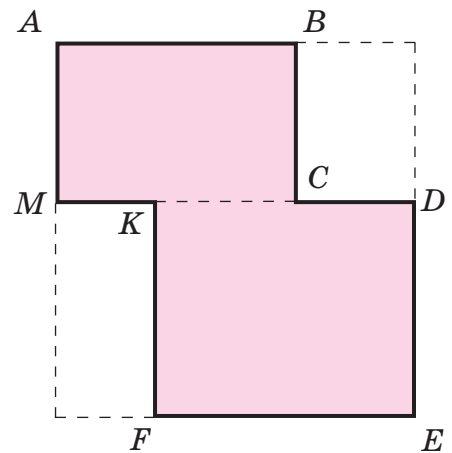
2) В записанных неравенствах подчеркни те числа, которые являются результатами округления числа a с точностью до сотен, десятков, единиц, десятых, сотых, тысячных.

- 34** Выполни действия и округли полученные ответы с точностью:
- а) до десятков: $2987,4 + 7,85$; $100,1 - 47,907$; $39,5 \cdot 5,09$; $163,846 : 0,79$;
 б) до единиц: $82,435 + 7,0684$; $203 - 75,48$; $470,5 \cdot 0,804$; $0,43236 : 0,045$;
 в) до десятых: $205,038 + 9,47$; $4,2 - 1,517$; $320 \cdot 0,0564$; $0,06111 : 0,063$;
 г) до сотых: $1,514 + 0,4872$; $5,1002 - 0,005$; $5,7 \cdot 0,053$; $0,649636 : 0,806$.

- 35** Верно ли, что любую обыкновенную дробь можно перевести в конечную десятичную? Представь дроби в виде бесконечных периодических дробей и округли с точностью до тысячных: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{11}$; в) $\frac{23}{90}$; г) $\frac{32}{33}$.

- 36** Всегда ли можно записать в виде конечной десятичной дроби сумму, разность, произведение и частное двух десятичных дробей? Вычисли частное данных дробей с точностью до десятитысячных: а) $0,5 : 0,006$; б) $0,04 : 1,5$.

- 37** 1) Запиши формулы периметра и площади прямоугольника, обозначив его стороны буквами a и b , периметр – буквой P , а площадь – S .
 2) Введи обозначения и запиши формулы периметра и площади квадрата.
 3) Из квадрата со стороной $10,6$ см вырезали два прямоугольника, как показано на чертеже. Известны длины отрезков $AB = 7,5$ см, $DE = KF = 5,8$ см, $EF = 8,6$ см. Найди периметр и площадь получившейся фигуры. Округли значение площади с точностью до десятых.



- 38** Найди ложные высказывания и перепиши их в тетрадь, исправив ошибки. Ответы остальных примеров расположи в порядке убывания, сопоставь соответствующим буквам и расшифруй математический термин. Что он означает?

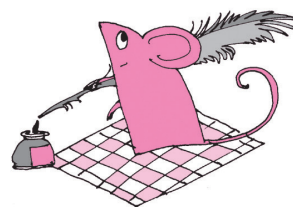
- | | |
|---|--------------------------------------|
| М $4,5 - 2 : 5 = 4,1$ | Д $4,9 : 7 \cdot 30 = 21$ |
| О $8 - 4 \cdot 1,4 = 2,4$ | А $0,54 : 0,9 : 0,1 = 0,6$ |
| Р $7 : 2 + 5 = 1$ | К $28 : (0,4 \cdot 0,7) = 10$ |
| Е $5,6 : 0,7 + 1,2 = 9,2$ | И $(8 - 3,2) : 0,6 = 8$ |
| С $14 \cdot 0,01 : 0,2 = 0,7$ | Л $0,81 : (2,7 : 30) = 9$ |
| Т $0,7 \cdot 0,06 \cdot 10 = 0,42$ | Б $0,24 : (0,5 + 0,3) = 0,3$ |



- 39** 1) Известно, что $a = 6n$, где $n \in N$. Какими свойствами обладает число a ?
 2) Известно, что $b = 4k + 2$, где $k \in N$. Какими свойствами обладает число b ?

40) Переведи высказывания с русского языка на математический.

- 1) Число a кратно семи.
- 2) Число 9 – делитель числа b .
- 3) Число c кратно 2 и 5.
- 4) Число d – чётное.
- 5) Число k не кратно 3.
- 6) Число t при делении на 7 даёт в остатке 1.



41) Известно, что $a = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Запиши множество $D(a)$ всех делителей числа a .

42) Какую цифру надо поставить в числе 273^* вместо звёздочки, чтобы полученное число делилось: а) на 2; б) на 5; в) на 10? Можно ли подобрать цифру так, чтобы это число делилось на 100, на 25, на 4?

43) Какую цифру надо поставить в числе 5^*12 вместо звёздочки, чтобы полученное число делилось: а) на 3; б) на 9? Можно ли подобрать цифру так, чтобы это число делилось на 6, на 15, на 18, на 90?

44) Пусть $A = \{315; 79; 8181; 490; 102\}$. Обозначим $A(n)$ подмножество множества A , состоящее из чисел, кратных n . Запиши, из каких элементов состоят $A(2)$, $A(5)$, $A(10)$, $A(3)$, $A(9)$, $A(6)$, $A(15)$.

45) Пусть $D(12)$ и $D(15)$ – множества делителей соответственно чисел 12 и 15. Запиши эти множества с помощью фигурных скобок и найди их пересечение. Чему равен наибольший общий делитель чисел 12 и 15? Как найти НОД(12; 15), пользуясь разложением на простые множители?

46) Запиши множества $K(6)$ и $K(8)$ чисел, кратных соответственно 6 и 8. Найди пересечение этих множеств и укажи в нём наименьший элемент. Как найти НОК(6; 8) с помощью разложения на простые множители?

47) Найди НОД(a ; b) и НОК(a ; b), если:

1) $a = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$; 2) $a = 2 \cdot 5^3$, $b = 3 \cdot 7$; 3) $a = 2 \cdot 3$, $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

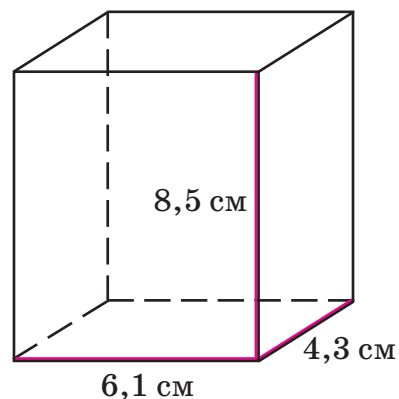
48) Найди с помощью разложения на простые множители НОД и НОК чисел:

а) 125 и 150; б) 210 и 2730; в) 35 и 72; г) 60, 75 и 111.

49) 1) Вычисли объём и площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями 4,3 см, 6,1 см и 8,5 см. Ответы округли с точностью до десятых.

2) Введи обозначения и построй формулу, выражающую зависимость объёма прямоугольного параллелепипеда от его измерений.

3) Построй формулу зависимости площади полной поверхности прямоугольного параллелепипеда от его измерений.



- Д** **50** Сформулируй разными способами отрицание высказывания «Все тигры живут в Африке».
- 51** Найди ложные общие утверждения и приведи для них контрпример. Сформулируй их отрицание с использованием оборота «Существует хотя бы один».
- 1) Все простые числа нечётны.
 - 2) Все нечётные числа простые.
 - 3) Любое число, кратное 9, кратно и 3.
 - 4) Любое число, кратное 3, кратно и 9.
 - 5) Каждое простое число имеет не больше двух делителей.
 - 6) Всякое число, которое имеет не больше двух делителей, – простое.
- 52** Выполни действия и округли ответы с точностью:
- а) до десятков: $413,78 + 94,456$; $302 - 6,988$;
 - б) до сотых: $17,05 \cdot 5,906$; $13,518 : 4,5$.
- 53** Пусть $A(n)$ – множество натуральных решений неравенства $297 < x \leq 312$, кратных числу n . Запиши множества $A(2)$, $A(3)$, $A(5)$, $A(9)$, $A(10)$.
- 54** Найди НОД и НОК чисел с помощью разложения на простые множители:
- а) 105 и 225; б) 84 и 420; в) 273 и 110; г) 45, 120 и 525.
- 55** Измерь длину и ширину своей комнаты в метрах с точностью до десятых. Найди её периметр и площадь. Ответ округли с точностью до целых.
- 56** Длина комнаты 4,2 м, ширина – 3,6 м, а высота – 3,5 м.
- 1) Найди объём этой комнаты. Ответ округли с точностью до целых.
 - 2) Стены комнаты надо оклеить обоями. Сколько рулонов обоев для этого надо купить, если в каждом рулоне 15 м при ширине 0,8 м, размеры окна 2 м \times 1,5 м, размеры двери 1,2 \times 2,5 м, а на отходы надо предусмотреть 10% расхода обоев?
- С** **57*** Алик, Боря, Витя и Гена ходили по грибы. Алик с Борей вместе собрали грибов столько же, сколько Витя с Геной, а у Алика с Геной грибов оказалось меньше, чем у Бори с Витей. Гена нашёл грибов больше, чем Витя. Расположи имена мальчиков в порядке уменьшения числа найденных грибов.

- 58*** Шифр устроен следующим образом: каждой цифре сопоставлено 3 буквы, а знаку * – 2 буквы и пробел, как указано в таблице:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*
а	г	ж	й	м	п	т	х	ш	ы	ю
б	д	з	к	н	р	у	ц	щ	ь	я
в	е	и	л	о	с	ф	ч	ть	э	<input type="checkbox"/>

Попробуй расшифровать следующую запись:

61551491 * 2 * 6561 * 051 * 51516566.



3. Отрицания высказываний о существовании

Предыдущий пункт мы начали с примеров, а закончили общим рассуждением о том, почему отрицанием общего высказывания является высказывание о существовании. Здесь мы поступим в обратном порядке.

Высказывание о существовании означает, что существует предмет, обладающий некоторым свойством. Его отрицание означает, наоборот, что *не существует* предмета с этим свойством, то есть *ни один* из рассматриваемых предметов этим свойством *не* обладает.

Полученное высказывание – общее, в нём отрицается существование предметов с данным свойством, и именно поэтому в нём применено словосочетание «*ни один... не*». Тот же смысл имеет предложение «*Все рассматриваемые предметы данным свойством не обладают*» – более «корявое» с точки зрения языка, но зато явно показывающее, что оно есть общее высказывание.

Таким образом,

**Отрицание высказывания о существовании
есть
общее высказывание.**

Проиллюстрируем полученный вывод конкретными примерами.

№	Высказывание	Отрицание
1	Некоторые птицы умеют плавать.	Ни одна птица не умеет плавать.
2	Некоторые птицы не умеют плавать.	Все птицы умеют плавать.
3	Существуют натуральные числа, кратные 6, но не кратные 2.	Всякое натуральное число, кратное 6, кратно 2.
4	Четыре различных числа могут давать различные остатки при делении на 3.	Четыре различных числа при делении на 3 не могут давать различные остатки. Для любых четырёх различных чисел верно, что среди их остатков от деления на 3 имеются равные.
5	Число 563 можно представить в виде $7k$, где k – натуральное число.	Число 563 нельзя представить в виде $7k$, где k – натуральное число. Для любого $k \in \mathbb{N}$: $563 \neq 7k$.
6	Можно найти такие два натуральных числа, сумма которых равна их произведению.	Сумма никаких двух натуральных чисел не может быть равна их произведению. Для любых $a, b \in \mathbb{N}$: $a + b \neq a \cdot b$.

К

59 Сформулируй данные высказывания с помощью слова «существует». Построй их отрицания и убедись в выполнении *закона исключённого третьего*.

- 1) Черепахи могут жить до 300 лет.
- 2) Есть млекопитающие, которые живут в воде.
- 3) Некоторые животные внесены в Красную книгу.
- 4) Не все птицы в России улетают зимой на юг.
- 5) Предложение может не иметь подлежащего.
- 6) Бывают словари, которые содержат все слова русского языка.
- 7) В некоторых книгах меньше 112 страниц.
- 8) Высказывание может быть вопросительным предложением.
- 9) Иногда высказывания бывают восклицательными предложениями.
- 10) Некоторые художники эпохи Возрождения жили в Италии.
- 11) Есть европейские страны, которые являются островными государствами.
- 12) Не все страны согласны с существующими границами.

60

Сформулируй разными способами высказывание «Некоторые дроби при сокращении уменьшаются». Построй его отрицание и приведи различные формулировки. Определи истинность данного высказывания и его отрицания.

61

Определи вид высказываний и установи их истинность или ложность. Для ложных высказываний построй отрицания.

- 1) Каждая неправильная дробь больше единицы.
- 2) Сумма двух неправильных дробей может оказаться правильной дробью.
- 3) Существует дробь с числителем 2, большая двух седьмых.
- 4) Некоторые дроби нельзя привести к одинаковому знаменателю.
- 5) Не из всякой неправильной дроби можно выделить целую часть.
- 6) Частное двух дробей может быть натуральным числом.
- 7) Дробь $\frac{7}{16}$ можно перевести в десятичную дробь.
- 8) Дробь, знаменатель которой представим в виде $2^n \cdot 5^m$, где n, m – натуральные числа, можно перевести в десятичную.

62

Пусть A – некоторое высказывание. Есть четыре задачи:

- 1) Доказать A .
- 2) Доказать $\neg A$.
- 3) Опровергнуть A .
- 4) Опровергнуть $\neg A$.

Какие из этих формулировок представляют одну и ту же задачу?

П

63 1) Представь данные дроби в виде несократимых и продолжи ряд на два числа, сохраняя закономерность:

$$\frac{27}{54}, \frac{270}{360}, \frac{405}{486}, \frac{210}{240}, \frac{225}{250} \dots$$

2) Приведи дроби к наименьшему общему знаменателю и продолжи ряд на два числа, сохраняя закономерность:

$$\frac{13}{280}, \frac{1}{21}, \frac{1}{20}, \frac{3}{56}, \frac{7}{120} \dots$$

64 Выполни действия. Какие из полученных чисел можно представить в виде конечных десятичных дробей? Выпиши соответствующие им буквы и переставь их так, чтобы получилось слово. Любое из оставшихся чисел замени конечной десятичной дробью с точностью до десятых, сотых, тысячных.

$$\text{Б } \frac{5}{9} - \frac{7}{18}$$

$$\text{Н } 3 + \frac{9}{16}$$

$$\text{М } 1\frac{7}{8} + 3\frac{5}{12}$$

$$\text{Л } \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{25}$$

$$\text{Т } \frac{4}{5} + \frac{3}{7}$$

$$\text{А } 1 - \frac{5}{8}$$

$$\text{П } 2\frac{3}{14} - 1\frac{5}{7}$$

$$\text{В } \frac{18}{35} : \frac{16}{49}$$

$$\text{О } \frac{2}{3} - \frac{5}{12}$$

$$\text{Г } 4 - 3\frac{5}{9}$$

$$\text{Ь } \frac{2}{45} \cdot 9$$

$$\text{И } 2\frac{11}{20} \cdot 1\frac{1}{15}$$

$$\text{С } \frac{12}{25} + \frac{8}{15}$$

$$\text{Р } 9 - 2\frac{17}{20}$$

$$\text{Е } \frac{48}{11} : 6$$

$$\text{Д } 10\frac{2}{7} : 2\frac{25}{28}$$

65 Вычисли. Ответ запиши в виде конечной десятичной дроби с точностью до десятых, сотых, тысячных.

$$1) 10\frac{5}{6} : 5 + 2\frac{5}{9} : \left(3\frac{2}{9} - 3 \cdot \frac{2}{9}\right) - 1\frac{3}{4}; \quad 2) \frac{15}{28} : \left[4\frac{1}{8} - 3\frac{1}{8} : \left(4\frac{5}{12} - 2\frac{13}{24}\right) + 19 : 6\right].$$

66 Составь математические модели задач:

- 1) Альбом стоит a р., а книга – в 1,4 раза дешевле. Сколько стоят альбом и книга вместе?
- 2) Объём одной коробки b дм³, а другой – на 8,4 дм³ меньше. Во сколько раз первая коробка вместительнее, чем вторая?

Д **67** Определи вид высказываний и построй их отрицания. Убедись в выполнении для них закона исключённого третьего.

- 1) Все врачи – хирурги.
- 2) Некоторые музыканты – виолончелисты.
- 3) Некоторые ящерицы имеют крылья.
- 4) Есть яблони, на которых растут груши.
- 5) Вода иногда бывает твёрдая.
- 6) Не все металлы тонут в воде.
- 7) В Антарктиде растут банановые пальмы.
- 8) Каждый человек умеет кататься на коньках.



68 Найди значения выражений:

$$1) \left(4\frac{1}{6} \cdot 3\right) : \left(7 \cdot \frac{5}{21}\right) - 1\frac{3}{4} \cdot 4; \quad 2) \left(3\frac{4}{9} - 1\frac{11}{12}\right) \cdot 3\frac{9}{11} + 6 : \frac{12}{25} - 2\frac{1}{3}.$$

69 Составь выражения к задачам:

- 1) В первом мешке a кг сахара, во втором – на 4 кг меньше, чем в первом, а в третьем – в 1,2 раза больше, чем во втором. Сколько сахара в трёх мешках?
- 2) От деревни до станции b км. Мальчик уже прошёл c км. Во сколько раз оставшийся путь больше пройденного?

С **70*** Сократима ли дробь, которая в сумме с данной правильной несократимой дробью даёт 1? Рассмотрю несколько примеров и докажи подмеченную закономерность.

§ 2. Переменная

1. Понятие переменной величины. Выражения с переменными

Решая текстовые задачи, мы видели, что буквы в выражениях играют роль символов, *вместо* которых можно подставлять числа. Такие буквы называют **переменными величинами**, или *переменными*, в отличие от цифр и знаков математических действий – «постоянных» символов математического алфавита. А сами буквенные выражения называют **выражениями с переменными**. Например,

$a^2 + 3a$ – это выражение с переменной a ,

$(5x - y) : 10$ – выражение с переменными x и y .

После замены букв числами выражение становится числовым, а его значение – числом. Например,

если $a = 7$, то $a^2 + 3a = 7^2 + 3 \cdot 7 = 70$;

если $x = 4$, $y = 2$, то $(5x - y) : 10 = (5 \cdot 4 - 2) : 10 = (20 - 2) : 10 = 1,8$.

Полученные числа 70 и 1,8 являются, соответственно, **значениями** данных выражений с переменными при указанных значениях букв.

С первого взгляда может показаться, что понятия «переменная» и «выражение с переменной» свойственны только математическому языку. Однако это не совсем верно. Примеры «переменных» можно встретить и в практической жизни: людям часто приходится заполнять разные анкеты, паспорта, избирательные бюллетени, справки и вообще тексты, заполненные лишь частично. На рисунке показан бланк справки с прочерками и заполненные бланки для конкретных людей. После заполнения всех прочерков бланк становится документом. Точно так же выражение с переменными – «бланк с прочерками» – после замены всех букв числами становится числом.

СПРАВКА

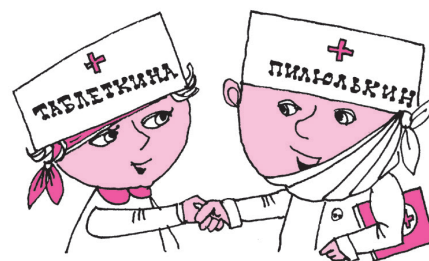
дана _____
 в том, что _____ 20__ г.
 во время контрольной работы
 он(а) болел(а).
 Диагноз: _____
 Врач _____

СПРАВКА

дана Иванову Петру
 в том, что 14 мая 2014 г.
 во время контрольной работы
 он(а) болел(а).
 Диагноз: болели зубы
 Врач Пилюлькин

СПРАВКА

дана Крыловой Кате
 в том, что 1 апреля 2014 г.
 во время контрольной работы
 он(а) болел(а).
 Диагноз: болела голова
 Врач Таблеткина



Итак, **переменной величиной**, или **переменной**, называют буквенное обозначение для произвольного элемента некоторого множества. А каждый элемент этого множества называют **значением переменной**.

Понятие переменной величины в современном виде появилось в математике сравнительно недавно – лишь в XVII веке – и оказало огромное влияние не только на развитие самой математики, но и на развитие других наук.

Дело в том что в окружающем нас мире многие величины связаны друг с другом. Так, например, стоимость покупки уменьшается при уменьшении цены товара, время работы увеличивается с уменьшением производительности и т. д. Понятие переменной позволяет наглядно представлять эти зависимости формулами, таблицами и графиками. Например, если пешеход движется с постоянной скоростью 3 км/ч, то зависимость пройденного пути s от времени движения t выражается формулой $s = 3t$. График движения пешехода для значений t , удовлетворяющих неравенству $0 < t < 4$, показан на рис. 1.

$$s = 3t, 0 \leq t \leq 4$$

t	0	1	2	3	4
s	0	3	6	9	12

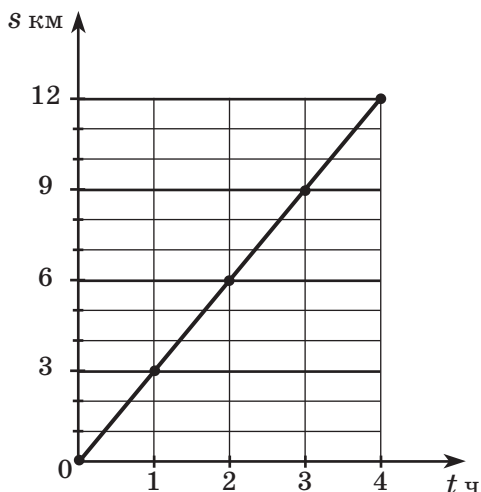


Рис. 1

$$S = a^2, 0 \leq a \leq 4$$

a	0	1	2	3	4
S	0	1	4	9	16

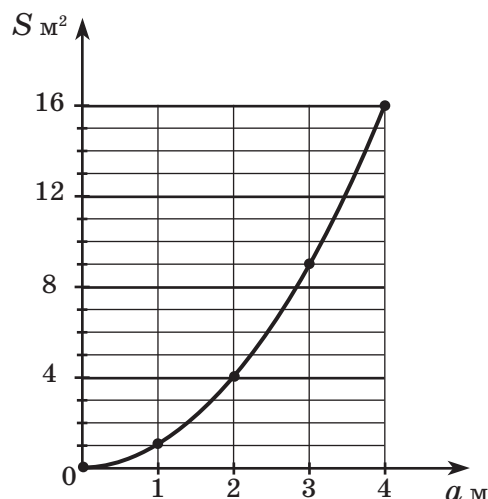


Рис. 2

Точно так же зависимость площади квадрата S от длины его стороны a выражается формулой $S = a^2$. Таблица и график этой зависимости для значений a , удовлетворяющих неравенству $0 \leq a \leq 4$, приведены на рис. 2.

Обычно на графике независимые переменные отмечают на горизонтальной оси координатного угла (*оси абсцисс*), а зависимые – на вертикальной оси (*оси ординат*).

Понятие переменной помогло описать в удобной для исследования форме многие процессы и явления, изучаемые физикой, химией и другими науками, и этим способствовало научно-техническому прогрессу.

К

71 На рисунке приведены три товарных чека. Что меняется и что остаётся неизменным на чеках одного магазина? На чеках разных магазинов?

Кассир 3	Касса 0412321
	Чек 00081
	Сумма: 247.20
<hr/>	
27.07.08	12:35
000 "ПИРС"	

Кассир 1	Касса 0412393
	Чек 00345
	Сумма: 1200.00
<hr/>	
04.12.07	17:43
000 "ПИРС"	

ОАО "Заря"	
<hr/>	
Сумма: 158.40	
Кассир 1	
	14.05.08
Касса 3456756	
Чек 0002345	

72 Найди значение выражения с переменной:

- $228\,150 - (203x + 8569)$, если $x = 604$;
- $y + 7,25y + 4,2y + 12,55y$, если $y = 0,708$;
- $3\frac{7}{9} : x + 2\frac{2}{15} : y$, если $x = 2\frac{5}{6}$, $y = 0,8$;
- $(3x)^2 - 2y^3$, если $x = \frac{1}{6}$, $y = 0,5$.



73 Подбери значение переменной в предложении так, чтобы оно превратилось в истинное высказывание:

- Сегодня по классу дежурит a .
- Сегодня по расписанию b уроков.
- Сегодня в классе отсутствуют c учащихся.
- Сегодня занятия заканчиваются в t часов.
- $2x - 7 = 31$.
- $y < 45$.
- $z \geq 3$.
- $8 < k \leq 9$.

74 Вырази из данной формулы каждую переменную. В качестве формы записи приведен образец.

- $s = vt$;
- $A = wt$;
- $S = ab$;
- $P = 2(a + b)$;
- $V = abc$;
- $a = bc + r$.

Образец:

$$C = an \Leftrightarrow a = C : n \Leftrightarrow n = C : a \quad (a, n \neq 0)$$

75 Составь выражение к задаче и найди его значение при данном значении переменной:

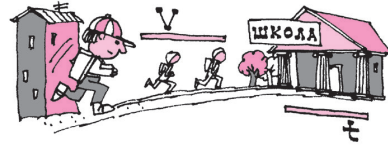
- Ширина прямоугольника равна a м и составляет 0,4 его длины. Найти периметр прямоугольника. ($a = 8,6$.)
- Длина прямоугольника b дм, а ширина – c дм. Какую часть длины прямоугольника составляет его ширина? ($b = 5,4$; $c = 3,6$.)
- Объём прямоугольного параллелепипеда V см³, длина – d см, а ширина составляет 30% длины. Найти высоту параллелепипеда. ($V = 48$; $d = 8$.)
- Ширина прямоугольного параллелепипеда n м, длина в 1,5 раза больше ширины, а высота составляет 24% суммы длины и ширины. Найти объём параллелепипеда. ($n = 2$.)

76 Кубометр горячей воды стоит 140 р. Пусть n – количество кубометров воды, которое согласно счётчику потратили в этом месяце, C р. – стоимость этой воды. Составь таблицу и построй график этой зависимости для значений n , удовлетворяющих неравенству $0 \leq n \leq 5$.

77) Бассейн наполняется водой из трубы со скоростью $2 \text{ м}^3/\text{мин}$. Пусть t мин – время работы трубы, а $V \text{ м}^3$ – объём воды, налитой в бассейн. Запиши формулу зависимости V от t . Составь таблицу и построй график этой зависимости для $0 \leq t \leq 5$.

78) Расстояние от дома до школы 6 км. Пусть v км/ч – скорость, а t ч – время пути в школу. Запиши формулу зависимости t от v . Заполни таблицу и построй график этой зависимости для значений v , удовлетворяющих неравенству $0,5 \leq v \leq 12$.

v	0,5	1	1,5	2	3	4	6	12
t								



79) Пусть продолжительность дня x ч, а продолжительность ночи y ч. Запиши формулу, выражающую зависимость y от x . Какие значения может принимать x ? Заполни таблицу и построй график этой зависимости для всех допустимых значений x .

x	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y									



80) Из квадрата со стороной 5 см вырезали квадрат со стороной a см. Площадь оставшейся части квадрата – $S \text{ см}^2$. Запиши формулу зависимости S от a . Какие значения может принимать a ? Построй график этой зависимости для всех допустимых значений a .

π 81) Определи вид высказываний и установи их истинность. Построй отрицания ложных высказываний.

- Любая правильная дробь меньше любой неправильной дроби.
- Знаменатель неправильной дроби всегда является простым числом.
- Квадрат числа может быть меньше самого числа.
- Ни одну из дробей со знаменателем 6 нельзя перевести в десятичную.
- Куб числа всегда больше самого числа.
- 1% числа составляет $\frac{0}{100}$ долю этого числа.
- Есть числа, 125% которых меньше их самих.
- При делении натуральных чисел остаток может быть больше или равен делителю.
- Все числа, кратные 3, кратны и 9.
- Существует дробь, удовлетворяющая неравенству $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$.

82) Как найти часть от числа, выраженную дробью? Найди:

- $\frac{2}{5}$ от $1\frac{7}{8}$;
- 0,8 от $2,75 \text{ м}^2$;
- 15% от 64 т;
- 300% от 7.

83 Как найти число по его части, выраженной дробью? Найди число:

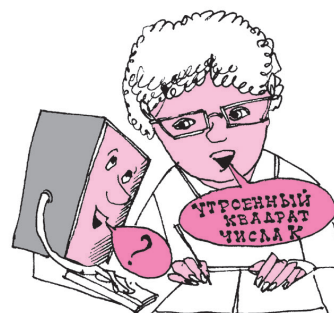
- 1) $\frac{3}{7}$ которого составляют $1\frac{1}{14}$; 3) 45% которого составляют 99;
 2) 1,6 которого составляют 8; 4) 120% которого составляют 8,4.

84 Как найти часть, которую одно число составляет от другого? Какую часть:

- 1) число 24 составляет от числа 60; 3) число 1,5 составляет от числа 3;
 2) число $2\frac{1}{6}$ составляет от числа $8\frac{2}{3}$; 4) число 0,4 составляет от числа $\frac{8}{9}$?

85 Переведи на математический язык:

- 1) Сумма числа a и утроенного числа b .
 2) Утроенная сумма чисел a и b .
 3) Частное квадратов чисел c и d .
 4) Квадрат частного чисел c и d .
 5) Утроенный квадрат числа k .
 6) Квадрат утроенного числа k .
 7) Куб суммы удвоенного числа x и числа y .
 8) Сумма кубов удвоенного числа x и числа y .



86 1) Найди дроби, которые можно перевести в конечные десятичные. Представь их в виде конечных десятичных дробей, расположи в порядке возрастания и сопоставь соответствующим буквам. Что означает получившееся слово?

$$\frac{7}{18}, \frac{3}{6}, \frac{12}{25}, \frac{5}{14}, \frac{21}{50}, \frac{9}{16}, \frac{11}{24}, \frac{17}{20}, \frac{9}{36}, \frac{25}{48}, \frac{15}{13}, \frac{27}{40}, \frac{12}{61}, \frac{2}{45}.$$

М **О** **Р** **И** **А** **К** **Д** **О** **Б** **Е** **Л** **К** **У** **В**

2) Найди наибольшую из оставшихся дробей. Замени ее конечной десятичной дробью, округлив с точностью до десятых, сотых, тысячных.

87 Докажи, что обыкновенные дроби в данных примерах нельзя перевести в конечные десятичные. Переведи десятичные дроби в обыкновенные и выполни действия в обыкновенных дробях.

- 1) $0,2 + \frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{9} - 0,4$; 5) $\frac{1}{6} \cdot 0,15$; 7) $4,2 : 1\frac{13}{15}$;
 2) $2\frac{2}{7} + 0,5$; 4) $3\frac{5}{6} - 2,6$; 6) $3,2 \cdot 1\frac{1}{24}$; 8) $13\frac{1}{3} : 1,25$.

88 Докажи, что данные обыкновенные дроби можно перевести в конечные десятичные. Запиши выражения, используя десятичные дроби, и выполни действия в десятичных дробях.

- 1) $0,8 + \frac{1}{5}$; 3) $3,75 - \frac{1}{4}$; 5) $\frac{13}{25} \cdot 11,111$; 7) $\frac{9}{25} : 0,036$;
 2) $\frac{1}{2} + 2,3$; 4) $5\frac{1}{8} - 3,125$; 6) $2,002 \cdot \frac{1}{24}$; 8) $70,707 : \frac{7}{50}$.

89

Реши задачи и определи, есть ли в их условиях лишние данные.

1) Длина прямоугольника равна 7,2 дм, а его ширина составляет 25% длины. Какую часть площадь этого прямоугольника составляет от площади квадрата с тем же периметром? Вырази эту часть в процентах.

2) Измерения прямоуугольного параллелепипеда равны 0,45 м, 1,2 м и 0,8 м. Меньшее ребро параллелепипеда составляет 75% ребра некоторого куба. Какую часть объём куба составляет от объёма параллелепипеда? Вырази эту часть в процентах.

D

90

Переведи на математический язык тремя разными способами:

1) Натуральное число a больше натурального числа b в 5 раз.

2) Число c меньше числа d на 8.

91

Переведи письменно с математического языка на русский:

1) $(a + b)^2$; 2) $a^2 + b^2$; 3) $(a - b)^2$; 4) $a^2 - b^2$; 5) $(a + b)^3$; 6) $a^3 + b^3$.

Найди значения всех данных выражений при $a = 0,6$, $b = 0,4$.

92

Брат на два года старше сестры. Пусть x лет – возраст сестры, а y лет – возраст брата. Запиши формулу зависимости y от x . Составь таблицу и построй график этой зависимости для значений x , удовлетворяющих неравенству $0 \leq x \leq 5$.

93

Составь выражение к задаче и найди его значение при данном значении переменной:

1) Длина прямоугольника a см, а ширина составляет 80% длины. Найди площадь прямоугольника. ($a = 2,5$.)

2) Ширина прямоугольника равна b дм. Ширина составляет 0,2 его длины. Найди периметр прямоугольника. ($b = 2,05$.)

3) Ребро первого куба равно c м, а второго – d м. Какую часть площадь поверхности первого куба составляет от площади поверхности второго куба? ($c = 3,2$; $d = 6,4$.)

94

Квадрат и прямоугольник имеют одинаковый периметр. Сторона квадрата равна 5,6 м, что составляет 0,7 длины прямоугольника.

1) Найди ширину прямоугольника.

2) На сколько площадь прямоугольника меньше площади квадрата?

95

Докажи, что дробь, полученную в ответе примера, нельзя перевести в конечную десятичную дробь. Замени её десятичной дробью с точностью до сотых.

1) $\frac{54,2737 : 10,79 + [3 - (5 - 4,7)] \cdot 1,1}{(100 - 0,628) : 9,1 + 28,152 : 6,9}$; 2) $\left[2\frac{3}{16} : 1\frac{3}{4} + \left(10\frac{1}{3} - 4\frac{5}{6}\right) : 2\frac{1}{5}\right] : 6\frac{7}{8}$.

C

96*

Задача Ал-Хорезми (Средняя Азия, около 783 г. – 850 г.)

Разложить число 10 на 2 слагаемых, сумма квадратов которых равна 58.

97*

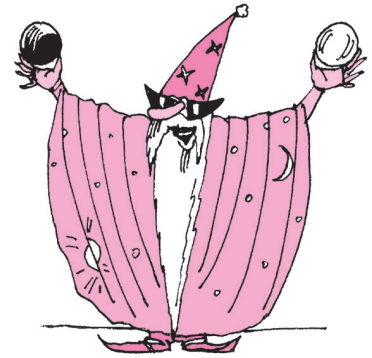
Задача Брахмагупты (Индия, около 598 г. – 660 г.)

Если число дней уменьшить на 1, затем разделить на 6 и прибавить 3, то получится $\frac{1}{5}$ первоначального числа дней. Сколь велико число дней?

2. Предложения с переменными

В предыдущем пункте мы видели, что переменные употребляют в математике не только в выражениях. Они встречаются и в самых различных математических предложениях.

Рассмотрим предложение $x + 3 = 8$. По своей форме это предложение похоже на высказывание, но на самом деле высказыванием не является. Понятно, что здесь x – какое-то число, но мы его не знаем. Поэтому мы и не можем сказать, истинно или ложно это предложение. Вместе с тем мы можем утверждать, что при $x = 5$ оно истинно, а при остальных значениях x – ложно.



Другими словами, данное предложение становится высказыванием – истинным или ложным, – если переменной x придать конкретное числовое значение. Можно сказать, что данное предложение является высказыванием с переменной x , или, как говорят, *высказывательной формой*.

Как и буквенное выражение, предложение может содержать и несколько переменных. Например, предложения:

$x > y$ – с двумя переменными x и y ;

$a + b = b + a$ – с двумя переменными a и b ;

$s = vt$ – с тремя переменными s , v и t ;

$V = abc$ – с четырьмя переменными V , a , b и c .

Чтобы предложение с несколькими переменными преобразовать в высказывание, нужно придать значения каждой из переменных. Например, положив в первом из приведённых предложений $x = 2$, $y = 3$, мы получим ложное высказывание $2 > 3$.

Если же придать значение только одной переменной, то опять получится предложение с переменной. Например, положив в том же предложении $y = 3$, мы получим новое предложение $x > 3$.

Предложение с переменными не обязательно при одних значениях переменных истинно, а при других – ложно. Может случиться, что при любых значениях переменных оно всегда истинно или, наоборот, всегда ложно.

Например, предложение $a + b = b + a$, как известно, для изученных нами чисел всегда истинно – это переместительное свойство сложения. Другие свойства арифметических действий также являются примерами всегда истинных предложений с переменными. Кроме того, всегда истинными являются предложения, которые представляют собой правила действий с 0 и 1:

$$x + 0 = 0 + x = x,$$

$$x - 0 = x,$$

$$x - x = 0,$$

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0,$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

Предложение $2x = 15$ с переменной x , напротив, всегда ложно, если $x \in \mathbb{N}$. В самом деле, при любом натуральном значении x в левой части равенства число получается чётное, а в правой – нечётное. Поэтому после подстановки вместо x любого натурального числа всегда будет получаться ложное высказывание.

Если же переменная x может принимать натуральные и дробные значения, то предложение становится истинным высказыванием после подстановки в него значения $x = 7,5$. Поэтому всегда важно указывать множество значений, которые принимает переменная.

Предложения с переменными в математическом языке не обязательно являются равенствами или неравенствами. Например:

Натуральное число k делится на 3 – предложение с одной переменной k .

Дробь $\frac{m}{n}$ правильная – предложение с двумя переменными m и n .

Точки A и B принадлежат прямой l – предложение с тремя переменными A , B и l .

В последнем примере мы видим, что переменные могут принимать не только числовые значения – их значениями могут быть, например, и точки, и прямые. Обратим внимание и на то, что во всех этих предложениях чётко определены множества, из которых «берутся» значения переменной. Так, в первом предложении прямо указано, что число k – натуральное. Во втором предложении подразумевается, что m и n – натуральные числа, так как это следует из определения дроби. А в третьем предложении сказано, что A и B – точки, а l – прямая.

В обычном языке, как это ни удивительно, также есть переменные, хотя они не обозначаются, как в математике, буквами. Скажем, предложение «*Коля учится в 6 «А» классе*» является именно предложением с переменной. В самом деле, оно по форме похоже на высказывание, однако высказыванием не является – мы не можем сказать, истинно оно или ложно, если не знаем, какой именно Коля имеется в виду.

Можно сказать поэтому, что слово «Коля» является здесь переменной, а значением переменной является любой мальчик с этим именем.

Высказывания – предложения *без переменных* – мы будем обозначать большими латинскими буквами. Для обозначения предложений с переменными также будем употреблять такие буквы, но дополнительно в скобках ставить имена входящих в них переменных.

Например, символом $P(n)$ может быть обозначено предложение «*Число n чётное*», символом $Q(x)$ – предложение « $x^2 = 2x + 3$ » и т. д. Процедуру присвоения имени предложениям с переменными будем проводить по образцу:

$$P(n) \Leftrightarrow \text{Число } n \text{ чётное,} \quad Q(x) \Leftrightarrow x^2 = 2x + 3.$$



Употребление знака равносильности \Leftrightarrow здесь совершенно естественно: он, как и требуется при обозначении, показывает, что два предложения означают одно и то же, то есть *равносильны*. В 5 классе мы уже использовали эту символику, например, для записи решения уравнений, а именно:

$$3(2x + 1) = 12 \Leftrightarrow 2x + 1 = 12 : 3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 4 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \frac{1}{2}.$$

К

98 Среди различных записей найди предложения с переменными, прочитай их и присвой им имена:

- | | |
|----------------------------------|---------------------------|
| 1) Москва – столица России. | 5) $a - 9 > 12$. |
| 2) В слове x пять букв. | 6) $4c^2 + d - 7$. |
| 3) Число n – составное. | 7) $2x + 5y = 25z$. |
| 4) Прямые a и b параллельны. | 8) $(a - b)c = ac - bc$. |

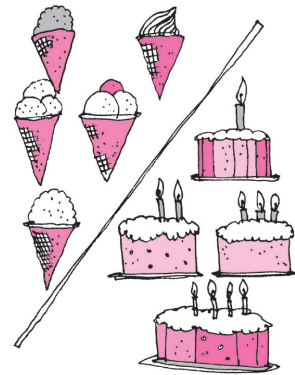
Образец записи:

$$A(x; y) \Leftrightarrow x + y = 5$$

99

Подставь в предложения данные значения переменных. Определи истинность или ложность полученных высказываний. Какие предложения при всех натуральных значениях переменных истинны, а какие – ложны?

- 1) $a^2 + 1 = 0$ ($a = 6$);
- 2) $5b + c^2 = 56$ ($b = 8; c = 4$);
- 3) $2d^3 - 16 > 20$ ($d = 3$);
- 4) $8,2 \leq x + y < 9,4$ ($x = 2,5; y = 5,7$);
- 5) число $3m$ делится на 3 ($m = 28$);
- 6) число $7n + 2$ кратно семи ($n = 5$);
- 7) дробь $\frac{k}{k+1}$ несократима ($k = 14$);
- 8) дробь $\frac{9}{5p}$ – правильная ($p = 2$);
- 9) $a - (b + c) = a - b - c$ ($a = 9; b = 3,8; c = 1,6$);
- 10) $a - (b + c) = a - b + c$ ($a = 9; b = 3,8; c = 1,6$).



100

Придумай предложение: а) с одной переменной; б) с двумя переменными; в) с тремя переменными. Подставь значения переменных так, чтобы получилось высказывание. Определи его истинность или ложность.

101

Найди все значения переменных, обращающие данные предложения в истинные равенства:

- | | |
|------------------------------|---|
| 1) $3,3 - 0,3a = 0,33$; | 5) $7,77 \cdot (0,7 : x + 7) + 7,07 = 77$; |
| 2) $b : 8 - 0,88 = 8,8$; | 6) $9,99 - 0,99 : (99y - 9,9) = 9,09$; |
| 3) $55 : c + 0,5 = 55,5$; | 7) $(0,2z - 22) : 2,2 + 2 = 20,2$; |
| 4) $6,666 : (6 - d) = 6,6$; | 8) $4,44 - (t : 4,04 - 40,4) : 4 = 0,04$. |

Как иначе можно сформулировать это задание? Что называется уравнением? Корнем уравнения?

102 Прочитай предложения. Запиши множество натуральных значений переменных, при которых данные предложения становятся истинными высказываниями.

- 1) $a < 3$; 3) $c \leq 5$; 5) $4 < x < 9$; 7) $1,8 < z \leq 6,4$;
 2) $b > 2,4$; 4) $7,2 \leq d$; 6) $3,5 \leq y < 5$; 8) $4,1 \leq t \leq 8,3$.

Как иначе можно сформулировать это задание? Что называется неравенством? Решением неравенства?

103 Прочитай предложения с переменными. При каких значениях переменных они становятся высказываниями? Как иначе называют данные предложения с переменными?

- 1) $a + b = b + a$; 3) $a \cdot b = b \cdot a$; 5) $(a + b) \cdot c = ac + bc$;
 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$; 4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; 6) $(a - b) \cdot c = ac - bc$.

π

104 Прочитай высказывания, докажи или опровергни их. Построй отрицания ложных высказываний.

- 1) $\exists c \in N: c^2 + 1 = 0$; 3) $\exists n \in N: 15n - \text{простое число}$;
 2) $\exists a, b \in N: a^2 + b^2 = 5$; 4) $\exists d \in R: 5d < 5$ (R – множество дробей).

105 1) Может ли при делении натурального числа на 8 получиться остаток 9? Почему?

2) При делении некоторого натурального числа на 7 получилось частное 4 и остаток 3. Какое число делили?

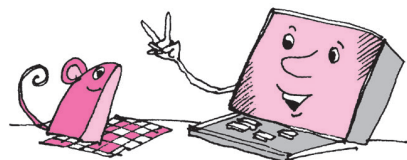
3) Запиши в виде выражения с переменной n ($n \in N$) общий вид числа, которое при делении на 4 даёт остаток 3. Найди значение этого выражения при $n = 0, 2, 5, 9, 16$. Проверь с помощью вычислений.

4) Вычисли и сделай проверку. Что ты замечаешь?

- | | | | | |
|--------|--------|----------|-----------|---------------|
| 24 : 5 | 45 : 8 | 140 : 40 | 1900 : 30 | 58 000 : 700 |
| 15 : 6 | 64 : 9 | 560 : 60 | 2800 : 90 | 26 000 : 5000 |

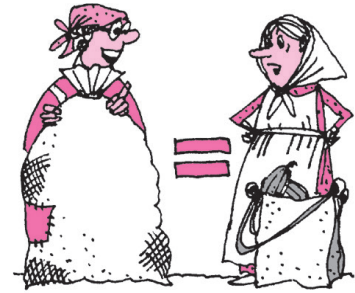
106 Вычисли, найди закономерность в последовательности ответов и запиши следующие 2 числа:

- | | |
|--|---|
| 1) $36 : 4 + 20 : 1$;
$80 - 28 : 4 \cdot 7$;
$5 \cdot (81 : 9 - 16 : 8)$;
$(4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 - 0 \cdot 6) \cdot 1$. | 2) $(0,5 \cdot 0,8 - 0,25) : 0,3$;
$(0,34 - 0,09 \cdot 3) : 0,1$;
$(4,5 : 0,09 + 14 : 0,2) \cdot 0,01$;
$4 - 1,8 : (2,4 : 4) \cdot 0,7$. |
| 3) $0,6 : 0,01 - 0 : (7,58 - 4,09)$;
$(0,08 \cdot 4 - 0,04) : 0,2 + 0,7 \cdot 6$;
$(0,3 - 0,3) : 0,3 + 0,1 \cdot (10 - 0,6 \cdot 8)$;
$(0,64 : 0,8 \cdot 9 - 8 \cdot 0,3) \cdot 0,1^2$. | |



107 БЛИЦтурнир

Переведи условия задач на математический язык. Что общего и что различного в полученных выражениях? Запиши их в обобщённом виде, используя переменные x и y .



- 1) Одна хозяйка купила на рынке 2 кг моркови по цене a р. за килограмм и 3 кг картошки по цене b р. за килограмм. Вторая хозяйка заплатила за 4 кг огурцов столько же денег, сколько первая за всю покупку. Чему равна цена одного килограмма огурцов?
- 2) Первый рабочий в течение первых 2 ч делал по s деталей в час, а в следующие 3 ч – по d деталей в час. Второй рабочий выполнил эту же работу за 4 ч, делая в каждый час одинаковое количество деталей. Чему равна производительность второго рабочего?
- 3) Велосипедист ехал первые 2 ч со скоростью r км/ч, а следующие 3 ч – со скоростью v км/ч. Мотоциклист, двигаясь равномерно, проехал это же расстояние за 4 ч. Чему равна скорость мотоциклиста?
- 4) На каждом этаже 2-этажного дома m квартир, а 3-этажного дома – n квартир. Рядом стоит 4-этажный дом, в котором столько же квартир, сколько в 2-этажном и 3-этажном домах вместе. Сколько квартир на одном этаже 4-этажного дома, если количество квартир на всех его этажах одинаковое?
- 5) Бассейн наполнялся через две трубы. Первая труба работала 2 ч с производительностью k м³/ч, а вторая – 3 ч с производительностью p м³/ч. Всю налитую воду спустили через третью трубу за 4 ч. Чему равна производительность третьей трубы, если она работала равномерно?
- 6) В первых двух вагонах поезда по q человек, в следующих трёх – по t человек, а в последних четырёх – столько пассажиров, сколько в первых пяти вагонах вместе. По сколько пассажиров в каждом из последних четырёх вагонов, если пассажиров в них поровну?

108 Переведи условие задачи на математический язык и найди ответ.

- 1) К числу прибавили $2\frac{1}{3}$ и получили $5\frac{2}{5}$. Какое это число?
- 2) Число разделили на $1\frac{7}{9}$ и получили $2\frac{1}{4}$. Какое это число?
- 3) Число вычли из $3\frac{3}{8}$ и получили $1\frac{1}{2}$. Какое число вычли?
- 4) $2\frac{13}{18}$ умножили на число и получили $3\frac{8}{9}$. На какое число умножили?
- 5) Из некоторого числа вычли $\frac{3}{8}$ и получили $4\frac{5}{6}$. Найди это число.
- 6) $5\frac{4}{7}$ разделили на неизвестное число и получили $\frac{3}{14}$. На какое число делили?

109 Найди множество натуральных решений уравнения *методом проб и ошибок*.

1) $a(a - 4) = 21$; 3) $c^2 + 5 = 14$; 5) $x^2 + 2x + 10 = 45$;
 2) $(b + 2)(b - 8) = 0$; 4) $18 - d^3 = 10$; 6) $y^3 + y^2 + 2 = 82$.

110 1) Прочитай определение и назови определяемое понятие.

Пара чисел a и b , где a – первое число, а b – второе число, называется упорядоченной парой чисел и обозначается $(a; b)$. При этом $(a, b) = (c, d)$, если $a = c$, а $b = d$.

2) Найди *методом перебора* все пары $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению или неравенству:

а) $x + 2y = 9$; г) $0 < x(10 - y^3) \leq 2$;
 б) $x + y^2 = 9$; д) $15 < 2x + 3y \leq 16$;
 в) $0 < x(10 - 3y) \leq 2$; е) $15 < x^2 + y^3 \leq 16$.

Д

111 Прочитай предложения и подставь в них данные значения переменных. Найди предложения, которые при этой подстановке превращаются в высказывания, и из соответствующих им букв составь название месяца. Из букв, соответствующих истинным высказываниям, составь название животного.

Е Квадрат числа a больше 16 ($a = 3\frac{3}{4}$);

Ф Квадрат числа b меньше числа c ($b = 7,5$);

К Дробь $\frac{p}{q}$ является правильной ($p = 6$; $q = 11$);

Н Произведение чисел m и n делится на число k ($m = 5$; $n = 8$);

Д Сумма числа x и утроенного числа y равна 1 ($x = 0,4$; $y = 0,02$);

А Разность кубов чисел c и d равна 26 ($c = 3$; $d = 1$);

Л $a - b = 3,5$ ($a = 3\frac{1}{2}$);

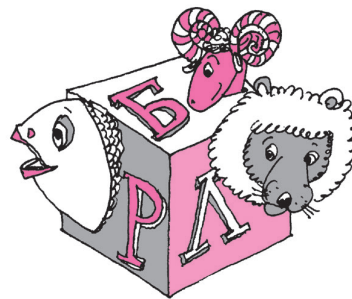
В $c + 2d > n^2$ ($c = 15$; $d = 3$);

Б $5,4 \leq x - 2y < 7,2$ ($x = 6$; $y = 0,8$);

Я $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ($a = 5$; $b = 2$);

Р $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ($a = 5$; $b = 2$);

Б $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ($a = 5$; $b = 2$).



112 Реши уравнения:

1) $(0,8x + 3,2) : 0,4 - 7,2 = 1,8$; 2) $2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} : (3\frac{2}{5} - 1\frac{1}{2} : y) = 4\frac{1}{6}$.

113 Найди значения выражений при $a = 0,9$, $b = 0,6$, $c = 0,1$ и сравни их. Используя полученный результат, составь предложение с переменными a , b и c , истинное при данных значениях переменных. При каких ещё значениях переменных a , b и c оно будет истинным? Как это доказать?

1) $(a + b) : c$; 2) $a + b : c$; 3) $a : c + b$; 4) $a : c + b : c$.

114 Вычисли, найди закономерность в последовательности ответов и запиши следующие 2 числа:

1) $0,07 \cdot 30 + 2,8 : 0,56 - 6,08$;
 $0,4 \cdot (10 - 6,3 : 0,9 \cdot 0,7)$;
 $9,1 - (32 : 0,8 + 606 \cdot 0,1) \cdot 0,05$;
 $(2,4 - 2,4) : (48602,7 : 54,003) + 811 : 100$;
 $[(48,69 \cdot 39,57 - 1925,6633) \cdot 53,0048] : 3,28$.

2) $5 : 1\frac{1}{5} - (1 : 6 + 1\frac{5}{9} \cdot 2)$;
 $(10\frac{1}{5} - 0 : 4\frac{6}{7} \cdot 3\frac{1}{2}) : (2\frac{2}{5} + 3\frac{3}{5})$;
 $3\frac{1}{2} : [1\frac{3}{8} : 1\frac{3}{8} \cdot 1\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot (5\frac{2}{9} - 5\frac{2}{9})]$;
 $(7 - 3\frac{1}{9}) : \frac{5}{6} - [2\frac{3}{16} : 1 - (\frac{11}{12} + 2\frac{5}{6}) \cdot \frac{1}{4}]$.



115 Придумай 3 задачи, решением которых является выражение $(a - a : 4) : 2$.

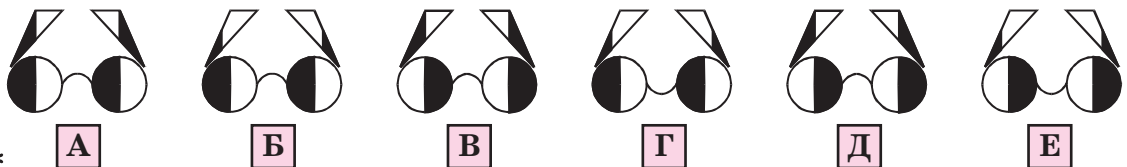
116 Переведи условие задачи на математический язык и найди решение методом проб и ошибок.

В одной коробке на 5 шаров больше, чем в другой, а произведение числа шаров в обеих коробках равно 24. Сколько шаров в каждой коробке?

117 Переведи условие задачи на математический язык и найди решение методом перебора.

Произведение двух однозначных натуральных чисел на 7 больше их суммы. Найди эти числа.

118* Найди два одинаковых рисунка. Сколько отличий от них ты сможешь найти у каждого из оставшихся рисунков?



119* При делении натурального числа на 8 получился остаток 5. Число увеличили в 2 раза. Каким станет остаток при делении удвоенного числа на 8?

3. Переменная и кванторы

Математический язык позволяет записывать высказывания в компактной, легко обозримой форме. Например, утверждение «Для того чтобы найти пройденный путь, можно скорость движения умножить на время движения» на математическом языке записывается просто « $s = vt$ », а высказывание «Элемент a не принадлежит множеству A » записывается « $a \notin A$ ».

Для общих высказываний и высказываний о существовании также имеется способ их сокращенной записи. Высказывания о существовании, как мы уже знаем, сокращенно записывают с применением символа \exists («существует такой, что...»), который называют *квантором существования*. Для записи общих высказываний употребляется символ \forall («для любого», «для каждого», «для всякого» и т. д.), который называется *квантором общности*.

Обозначения кванторов напоминают перевёрнутые буквы A и E , с которых в английском и некоторых других языках начинаются слова «все» (all) и «существует» (exist).

Чтобы записать утверждения с помощью кванторов, сначала нужно ввести переменную и определить множество, в котором эта переменная принимает значения. Например, высказывание «Существует натуральное число, квадрат которого больше 8, но меньше 12» записывается так:

$$\exists n \in N: 8 < n^2 < 12.$$

Аналогично с помощью квантора \forall записываются и общие высказывания. Приведем несколько примеров.

№	Русский язык	Логический язык
1	Все деревья имеют корни.	$\forall x \in L: x$ имеет корни (L – множество деревьев)
2	Садовые цветы требуют полива.	$\forall y \in C: y$ требует полива (C – множество садовых цветов)
3	Любая правильная дробь меньше 1.	$\forall p \in P: p < 1$ (P – множество правильных дробей)
4	Всякое натуральное число больше 2.	$\forall n \in N: n > 2$
5	От перемены мест слагаемых сумма не меняется.	$\forall a \in R, \forall b \in R: a + b = b + a$ (R – множество дробей)



При наличии нескольких переменных высказывания можно записывать короче. Именно, не указывать квантор для каждой переменной, а указать один квантор сразу для нескольких переменных (если, конечно, значения переменных принадлежат одному и тому же множеству). Например, последнее предложение можно записать так:

$$\forall a, b \in R: a + b = b + a.$$

Символическая запись высказываний позволяет подметить очень важную их особенность: *и общие высказывания, и высказывания о существовании содержат в себе предложения с переменными.*

В предыдущем пункте мы говорили, что *предложение с переменными высказыванием не является*, но превращается в высказывание после замены всех переменных конкретными значениями. Использование кванторов представляет собой ещё один способ превращения предложения с переменными в высказывание. Так, из предложения с переменной «*Квадрат натурального числа n равен 16*» можно получить общее высказывание: «*Квадрат любого натурального числа n равен 16*» и высказывание о существовании: «*Существует натуральное число n , квадрат которого равен 16*», то есть:

$$\langle \forall n \in N: n^2 = 16 \rangle \quad \text{и} \quad \langle \exists n \in N: n^2 = 16 \rangle.$$

При этом первое высказывание является ложным (контрпример – число 1), а второе – истинным, так как при $n = 4$ имеем: $4^2 = 16$ – истинно.

Обратим внимание на то, что изученные нами свойства арифметических действий являются, по сути, истинными высказываниями общего вида, как это было показано выше для переместительного свойства сложения.

К

120

Переведи высказывания на русский язык. Рассмотрите различные варианты перевода.

- 1) $\forall a \in A: a$ – имеет дневник (A – множество учеников);
- 2) $\exists b \in A: b$ – пишет стихи (A – множество учеников);
- 3) $\exists x \in B: x$ – имеет синоним (B – множество слов русского языка);
- 4) $\forall y \in B: y$ – является глаголом (B – множество слов русского языка);
- 5) $\exists m, n \in P: m \parallel n$ (P – множество прямых на плоскости; знак \parallel обозначает параллельность прямых);
- 6) $\forall A, B \in C: AO = OB$ (C – множество точек окружности с центром O);
- 7) $\forall a, b \in N: a > b$, или $a < b$, или $a = b$;
- 8) $\exists x, y, z \in N: x + y + z = xyz$.

121

Запиши утверждения с помощью кванторов существования и общности.

- 1) У каждой реки есть исток.
- 2) Есть реки, которые длиннее Нила.
- 3) Все дельфины живут в воде.
- 4) Некоторые дети умеют кататься на велосипеде.
- 5) Диаметры одной окружности равны.
- 6) Прямые при пересечении могут образовывать прямой угол.
- 7) Квадрат правильной дроби всегда меньше самой дроби.
- 8) Куб натурального числа может быть равен самому числу.

122 1) Придумай высказывание о существовании и запиши его с помощью квантора \exists .

2) Придумай общее высказывание и запиши его с помощью квантора \forall .

123 Преобразуй данные предложения с переменными в истинные высказывания, используя кванторы \exists и \forall . Как ещё можно превратить предложения с переменными в высказывания?

1) Число $n(n+1)$ – простое.

3) Число $6k$ – составное.

2) Дробь $\frac{n}{n+4}$ – правильная.

4) Дробь $\frac{2p}{q+1}$ – сократимая.

124 Запиши, используя квантор общности:

1) переместительное и сочетательное свойства сложения;

2) переместительное и сочетательное свойства умножения;

3) распределительное свойство умножения;

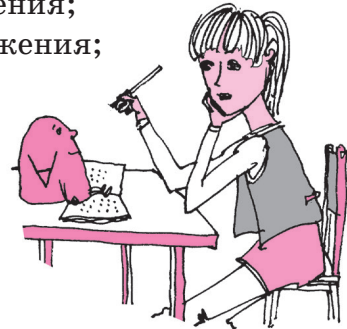
4) правило вычитания числа из суммы;

5) правило вычитания суммы из числа;

6) правило деления числа на произведение;

7) правило деления произведения на число;

8) правила деления суммы и разности на число.



125 Прочитай утверждения и докажи их истинность:

1) $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 > 30$;

5) $\forall n \in \mathbb{N}: n + (n + 1)$ – число нечётное;

2) $\exists a, b \in \mathbb{N}: a = b^2$;

6) $\forall n \in \mathbb{N}: n(n + 1)$ – число чётное;

3) $\exists x, y, z \in \mathbb{N}: x^2 + y^2 = z^2$;

7) $\forall n \in \mathbb{N}: n(n + 1)(n + 2)$ – кратно шести;

4) $\exists x, y, z \in \mathbb{N}: \frac{x}{y} = \frac{y}{z}$;

8) $\forall m, n \in \mathbb{N}: \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$.

126 Прочитай утверждения и опровергни их. Построй их отрицания.

1) $\forall a \in \mathbb{R}: a^2 > a$ (\mathbb{R} – множество дробей);

5) $\exists a, b \in \mathbb{N}: (a + b)^2 = 5$;

2) $\forall b \in \mathbb{N}: b^2 + b + 1$ – простое число;

6) $\exists c, d \in \mathbb{N}: c^2 + d^2 = 6$;

3) $\forall x, y \in \mathbb{N}: (x + y)^2 = x^2 + y^2$;

7) $\exists x, y \in \mathbb{N}: x + y = 7$ и $xy = 7$;

4) $\forall m, n \in \mathbb{N}: \frac{m}{n} = \frac{n}{m}$;

8) $\exists m, n, k \in \mathbb{N}: \frac{m}{n} \neq \frac{mk}{nk}$.

π

127 Из букв, соответствующих истинным высказываниям, составь слово. Что оно означает?

Р 19 999 кратно 9.

Т Сумма $1400 + 56$ кратна 5.

А 1275 делится на 3 и на 5.

Я Разность $3737 - 36$ не делится на 37.

С 1275 кратно 15.

В Произведение $9 \cdot 36 \cdot 151$ – число нечётное.

И 6 – делитель числа 360 106.

Б Произведение $11 \cdot 25 \cdot 508$ кратно 10.

Н 12 345 678 делится на 18.

Е Сумма $452 \cdot 49 + 702$ делится на 7.

128 Счёт-тест. (В тестах 1 и 2 записываются только ответы.)

Тест 1 (2 мин)

$$3,2 + 7,5; \quad 8 - 1,7; \quad 0,06 + 2,9; \quad 2,78 - 1,28; \quad 3,14 - 1,9;$$

$$9,2 - 2; \quad 2,8 + 0,7; \quad 12,5 - 0,05; \quad 5,6 + 3,4; \quad 4,5 + 0,63.$$

Тест 2 (2 мин)

$$3,7 : 0,01; \quad 5,8 \cdot 0,1; \quad 0,4 \cdot 0,7; \quad 30 \cdot 0,05; \quad 5,4 : 0,054;$$

$$2,4 \cdot 10; \quad 9,2 : 100; \quad 1,8 : 0,02; \quad 6 : 20; \quad (0,09)^2.$$

Тест 3 (3 мин)

$$530 - 52,9; \quad 12,92 + 7,315; \quad 117,171 + 7,129; \quad 4,07 - 1,976.$$

Тест 4 (5 мин)

$$9,78 \cdot 30,6; \quad 0,805 \cdot 70\,600; \quad 19,212 : 2,4; \quad 0,0228 : 0,075.$$

129 В число $7*2*$ подставь вместо звёздочек цифры так, чтобы полученное число делилось: а) на 18; б) на 30; в) на 45; г) на 36. Укажи все возможные решения.

130 Построй математическую модель задачи:

1) В детском хоре «Весна» занимаются 148 детей. В младшей группе хора в 2 раза больше детей, чем в средней, и на 32 человека больше, чем в старшей. Сколько детей занимается в каждой группе хора?

2) Из пункта *A* в пункт *B* едет мотоциклист. Если он увеличит скорость на 4 км/ч, то проедет весь путь за 4,5 ч, а если уменьшит скорость на 6 км/ч, то проедет весь путь за 6 ч. С какой скоростью едет мотоциклист?

3) Оператор должен набрать на компьютере 240 страниц рукописи. За каждый час он набирал на 3 страницы больше, чем предполагал, и поэтому закончил работу на 4 часа раньше намеченного срока. За сколько времени оператор сделал свою работу, если он работал равномерно?

4) На пароходе 240 пассажиров расселили в одноместные, двухместные и трёхместные каюты так, что в каютах не осталось свободных мест. Всего было занято 108 кают, причём одноместных кают было в 2 раза меньше, чем трёхместных. Сколько кают каждого вида было на пароходе?



131 Что общего в уравнениях каждой строки, каждого столбца? Упрости запись уравнения, используя свойства арифметических действий, а затем реши его:

1) $x + 2x + 3x + 4x = 48;$

4) $2x + 5 + x + 14 + 6x = 64;$

2) $3,2y - 1,4y + y - 0,6y = 5,5;$

5) $1,8 + 3,5y + 0,9 + y = 16,2;$

3) $1\frac{3}{5}z + z - \frac{4}{15}z + \frac{7}{6}z = 2\frac{1}{3};$

6) $4\frac{1}{2}z + \frac{7}{9}z + 2\frac{1}{3} + \frac{1}{6}z = 5\frac{1}{18}.$

132 Вычисли наиболее удобным способом. Какие свойства арифметических действий при этом использовались?

- | | |
|--|--|
| 1) $(8,46 + 2,008) + (17,992 + 1,54)$; | 6) $(9,09 + 999,9 + 900,09) : 9$; |
| 2) $0,02 + 0,04 + 0,06 + \dots + 0,98$; | 7) $(1,5 \cdot 4,28 \cdot 0,04) : 4,28$; |
| 3) $2,5 \cdot 7,89 \cdot 0,04 \cdot 100$; | 8) $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) : (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11)$; |
| 4) $\frac{7}{18} \cdot (20 \cdot 16,2) \cdot (\frac{18}{7} \cdot 0,5)$; | 9) $(1 \frac{3}{11} + 5 \frac{2}{79} + 7 \frac{8}{11}) - 4 \frac{2}{79}$; |
| 5) $(\frac{1}{8} + 1 \frac{1}{16} - \frac{13}{24} + \frac{1}{3}) \cdot 48$; | 10) $7 \frac{3}{25} - (4 \frac{3}{25} + 1 \frac{5}{18})$. |

133 Построй математическую модель задачи и найди ответ:

- 1) Возраст младшей сестры на 5 лет меньше возраста средней и в 5 раз меньше возраста старшей. Сколько лет каждой сестре, если всем вместе им 19 лет?
- 2) Сестра на 4 года младше брата и вчетверо младше матери, а брат вчетверо младше отца. Сколько лет каждому, если всем четверым вместе 100 лет?

Д

134 Запиши утверждения, используя кванторы \forall и \exists :

- 1) У всех птиц есть крылья.
- 2) Рост жирафа может достигать 6 метров.
- 3) Любой квадрат является прямоугольником.
- 4) Некоторые прямоугольники являются квадратами.
- 5) Среди составных чисел есть взаимно простые числа.
- 6) Все простые числа взаимно просты.



135 Переведи утверждения с математического языка на русский и определи их истинность или ложность. Построй отрицания ложных утверждений.

- | | |
|--|---|
| 1) $\exists a \in \mathbb{N}: 5a + 3 = 18$; | 3) $\forall m, n \in \mathbb{N}: mn \geq m$ и $mn \geq n$; |
| 2) $\exists b \in \mathbb{N}: b < 1$; | 4) $\forall x, y \in \mathbb{N}: x = 5y$. |

136 1) В число $1*25*$ подставь вместо звёздочек цифры так, чтобы полученное число делилось на 15. Укажи все возможные решения.

2) При каких натуральных значениях a и b значение выражения $5a + 3b$: а) кратно 3; б) кратно 5; в) кратно 15; г) не кратно 3; д) не кратно 5?

137 Реши уравнения:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1) $2,5x - x + 3,8x + 0,7x = 0,54$; | 2) $3 \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y + 1 \frac{1}{3} + \frac{5}{6}y = 5 \frac{11}{12}$. |
|--------------------------------------|--|

138 Построй математическую модель задачи и найди ответ:

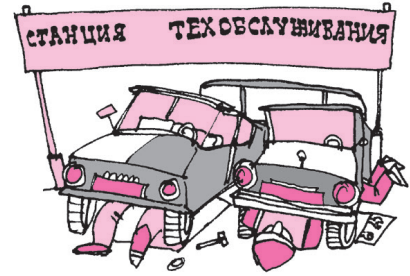
Сумма трёх чисел равна 18. Первое число в 3,5 раза больше второго, а третье — на 4,8 больше второго. Найти эти числа.

139 1) $(2,073 \cdot 5,82 + 4,18 \cdot 2,073 + 2,073 \cdot 90) : 2,073 \cdot 0,55$.

2) $(1,25 \cdot 2,04 \cdot 7,7) : (0,25 \cdot 1,02 \cdot 11)$.

140 Построй математическую модель задачи:

1) На станции технического обслуживания три механика отремонтировали за месяц 78 автомобилей. Первый механик отремонтировал в 1,5 раза больше автомобилей, чем второй, а третий – на 6 автомобилей больше, чем первый. Сколько автомобилей отремонтировал каждый механик?



2) Грузчикам надо за определённое время разгрузить 192 ящика. Однако они выполнили работу на 2 ч раньше срока, так как разгружали в час на 8 ящиков больше, чем предполагали. Сколько ящиков в час они разгружали, если работали равномерно?

с **141*** Произведение возрастов Таниных братьев равно 1664. Младший из братьев вдвое моложе старшего. Сколько у Тани братьев?

142* В двух пачках всего 30 тетрадей. Если бы из первой пачки переложили во вторую 2 тетради, то в первой пачке стало бы вдвое больше тетрадей, чем во второй. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

4. Отрицание утверждений с кванторами

Использование кванторов позволяет короче записывать отрицание общих высказываний и высказываний о существовании.

Пусть дано предложение $P(x)$ с переменной x , где $x \in M$. Тогда соответствующее ему общее высказывание имеет вид $\forall x \in M: P(x)$. Как мы уже знаем, отрицание общего высказывания $\neg [\forall x \in M: P(x)]$ означает, что «Не все $x \in M$ обладают свойством $P(x)$ ». Другими словами, существует хотя бы один элемент множества M , который указанным свойством не обладает. Значит, отрицание общего высказывания можно записать ещё и так: $\exists x \in M: [\neg P(x)]$. Таким образом,

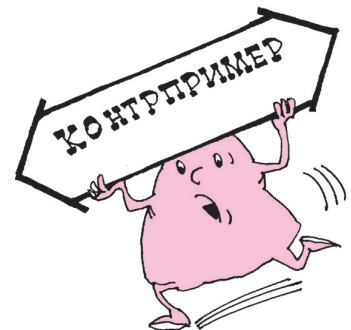
$$\neg [\forall x \in M: P(x)] \Leftrightarrow \exists x \in M: [\neg P(x)].$$

Можно сказать, что знак отрицания меняет квантор общности на квантор существования и записывается перед исходным предложением с переменной. Например,

$$\neg [\forall x \in N: x > 2] \Leftrightarrow \exists x \in N: x \leq 2,$$

где N – множество натуральных чисел.

Эта запись наглядно отражает ранее проведённые нами рассуждения об опровержении общих высказываний. В самом деле, опровергнуть общее высказывание $\forall x \in M: P(x)$ – это всё равно что доказать истинность высказывания о существовании $\exists x \in M: [\neg P(x)]$. А для этого достаточно привести хотя бы один пример, для которого $P(x)$ не выполняется. Этот пример мы и называли *контрпримером* к высказыванию $\forall x \in M: P(x)$.



Аналогичным образом можно записать отрицание высказывания о существовании:

$$\neg[\exists x \in M: P(x)] \Leftrightarrow \forall x \in M: [\neg P(x)].$$

Мы видим, что и здесь знак отрицания ведёт себя так же: он меняет квантор существования на квантор общности. Например,

$$\neg[\exists x \in N: x < x - 1] \Leftrightarrow \forall x \in N: x \geq x - 1,$$

где N – множество натуральных чисел.

Значит, чтобы опровергнуть высказывание о существовании $\exists x \in M: P(x)$, достаточно доказать общее высказывание о том, что ни одно из чисел $x \in M$ свойством $P(x)$ не обладает. Так, ложность высказывания $\exists x \in N: x < x - 1$ следует из общего свойства натуральных чисел, а именно: $x > x - 1$, так как число x расположено на числовом луче правее, чем число $x - 1$.

К

143 Прочитай высказывания и построй их отрицания:

- | | |
|---|---|
| 1) $\forall m \in N: m^2 = 2m;$ | 5) $\exists m \in N: m^3 \neq m \cdot m \cdot m;$ |
| 2) $\forall n \in N: n^2 \neq 1;$ | 6) $\exists n \in N: 5 - n = 6;$ |
| 3) $\forall x, y \in N: xy \geq x + y;$ | 7) $\exists x, y \in N: x + y < 2;$ |
| 4) $\forall k \in N: 5 < k \leq 10;$ | 8) $\exists k \in N: 2 < k < 3.$ |



144 Опровергни утверждения и запиши их отрицания на математическом языке (R – множество дробей):

- | | |
|--|--|
| 1) $\forall n \in N: n$ – простое; | 5) $\exists n \in N: n^3 = 3;$ |
| 2) $\forall k \in N: k < k^2;$ | 6) $\exists k \in N: k^2 > k^3;$ |
| 3) $\forall a, b \in N: \text{НОД}(a, b) = 1;$ | 7) $\exists a, b \in N: \text{НОК}(a, b) = a - b;$ |
| 4) $\forall x, y \in R: (x - y)^2 \neq x^2 - y^2;$ | 8) $\exists x, y \in R: (x + y)^2 \neq x^2 + 2xy + y^2.$ |

145 Придумай и запиши с помощью кванторов: а) общее высказывание; б) высказывание о существовании. Построй отрицание каждого из этих высказываний.

146 Докажи или опровергни высказывания. Построй отрицания ложных высказываний.

- 1) Существуют числа, квадрат которых больше их куба.
- 2) Все трёхзначные числа делятся на 3.
- 3) Элементы множества $A = \{8, 15, 31, 49\}$, взятые попарно, являются взаимно простыми числами.
- 4) В множестве $B = \{345, 505\ 050, 222\ 555, 15\ 150\}$ есть числа, не кратные 15.
- 5) Сумма двух нечётных чисел является чётным числом.
- 6) Сумма двух чётных чисел может быть числом нечётным.
- 7) Натуральные решения неравенства $7 < x \leq 12$ – составные числа.
- 8) Среди решений неравенства $20 - 3x > 4$ есть числа, большие 5.

147 Пусть $A(x)$ – некоторое предложение. Преобразуй его с помощью кванторов общности и существования в высказывание. Построй отрицание получившихся высказываний, используя вместо символа $\neg A(x)$ символ $\bar{A}(x)$.

π

148 Счет-тест

Тест 1 (3 мин)

$$3\frac{5}{6} - 2\frac{8}{15};$$

$$3\frac{7}{15} + \frac{2}{3};$$

$$7 - 3\frac{4}{9};$$

$$5\frac{1}{8} - 4\frac{3}{5}.$$

Тест 2 (4 мин)

$$\frac{3}{14} \cdot 21;$$

$$\frac{12}{7} : 4;$$

$$\frac{10}{27} \cdot \frac{9}{25};$$

$$5\frac{1}{4} : \frac{7}{18};$$

$$2\frac{5}{6} \cdot 12;$$

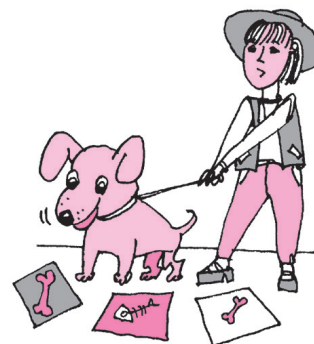
$$6\frac{2}{5} : 2;$$

$$1\frac{7}{9} \cdot 3\frac{3}{4};$$

$$\frac{3}{8} \cdot 2\frac{2}{3} : \frac{11}{15} \cdot 2\frac{1}{5}.$$

149 Реши задачу методом *перебора*. Укажи все возможные решения.

- 1) Сумма цифр двузначного числа равна 12, а произведение 35. Чему равно число?
- 2) Сумма цифр двузначного числа равна 11, а произведение 24. Чему равно число?
- 3) Найти трёхзначное число, сумма цифр и произведение цифр которого равны 6.
- 4) Найти четырёхзначное число, сумма цифр которого равна 2, а произведение 0.



150 Переведи условие задачи на математический язык и реши её методом *перебора*. Укажи все возможные решения.

- 1) Найти натуральное число, которое в 7 раз больше цифры его единиц.
- 2) Найти все двузначные числа, которые от перестановки их цифр увеличатся на 36.
- 3) Найти все двузначные числа, которые от перестановки их цифр увеличатся в 4,5 раза.
- 4) Найти все трёхзначные числа, цифры десятков которых равны 5 и которые при перестановке цифры сотен с цифрой единиц уменьшаются на 594.

151 Реши уравнения, используя правило «весов»:

$$1) 4a - 12 = a;$$

$$5) 7x = 5(3x - 4);$$

$$2) 5b - 6 = 2b + 21;$$

$$6) 2(4y - 5) = y + 2;$$

$$3) 3c + 42 = 8c + 17;$$

$$7) 5(z + 3,4) = 3(2z + 5,2);$$

$$4) 0,9d - 3,4 = 0,5d + 1,6;$$

$$8) 0,2(4k + 3) + 0,8(5k + 4) = 1,4(4k - 3).$$

152 1) Сын спросил отца, сколько ему лет. Отец ответил: «Если к половине моих лет прибавить 4, то узнаешь мой возраст 14 лет назад». Сколько лет отцу?

2) Таня купила альбом, заплатив за него 2-рублевыми монетами. Если бы она заплатила за него 5-рублевыми монетами, то монет было бы на 12 меньше. Сколько стоил альбом?

153 Начерти координатный угол и построй в нём прямоугольник $ABCD$ по координатам его вершин: $A(2; 3)$, $B(2; 7)$, $C(8; 7)$, $D(8; 3)$. Задай с помощью двойных неравенств: а) множество абсцисс всех точек прямоугольника; б) множество ординат всех точек прямоугольника.

154 Точки $A(a; 0)$ и $B(0; b)$ принадлежат координатному углу xOy . Докажи, что треугольник AOB является прямоугольным.

155 Мама передавала в компанию по энергосбыту показания электросчётчика: в мае 10089 кВт·ч, в июне 10264 кВт·ч, а в июле 10314 кВт·ч. Сколько рублей заплатили а) за июнь, б) за июль, если 1 кВт·ч стоит 5,8 р.?

156 Запиши данную программу действий в виде числового выражения и найди его значение:

1) Возвести $1\frac{1}{2}$ в куб.

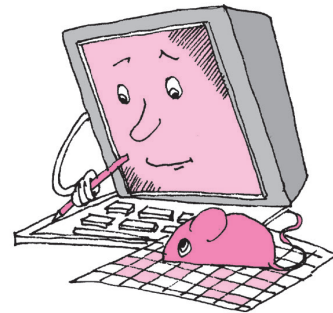
2) Из полученного числа вычтись $1\frac{3}{4}$.

3) Разность разделить на $4\frac{7}{8}$.

4) $2\frac{2}{3}$ разделить на $10\frac{1}{2}$.

5) Результат 4-го действия умножить на $1\frac{5}{16}$.

6) Из результата 3-го действия вычтись результат 5-го действия.



D

157 Прочитай высказывания и построй их отрицания:

1) $\forall a \in \mathbb{N}: 4a - 9 = 15;$

3) $\forall x \in \mathbb{N}: 2x > 2;$

2) $\exists b \in \mathbb{N}: b(b + 1) \leq b^2;$

4) $\exists m, n \in \mathbb{N}: \text{НОД}(m; n) = m + n.$

158 Переведи высказывания на математический язык и построй их отрицания:

1) Наименьшее общее кратное любых двух натуральных чисел равно их произведению.

2) Квадрат числа не может быть равен 0,01.

3) Произведение двух правильных дробей может быть неправильной дробью.

4) Частное двух натуральных чисел всегда меньше делимого.

159 Реши уравнения:

1) $2x + 7 = 5x - 26$;

2) $0,4(y - 5) = 0,3(y + 1) + 1,2$.

160 В первой коробке в 2 раза больше карандашей, чем во второй. После того как из первой коробки взяли 5 карандашей, а во вторую положили 3, то карандашей в обеих коробках стало поровну. Сколько карандашей было в каждой коробке?

161 Реши задачи *методом перебора*. Укажи все возможные решения.

1) Сумма цифр двузначного числа равна 13, а произведение – 36. Чему равно число?

2) Двузначное число при перестановке его цифр увеличилось на 18. Какое это число?

3) Найти двузначное число, которое при перестановке его цифр уменьшается в 1,2 раза.

162 1) Построй четырёхугольник $ABCD$, если $A(0; 2)$, $B(2; 6)$, $C(8; 8)$, $D(6; 4)$. Найди координаты точки пересечения его диагоналей.

2) Измерь стороны и углы четырёхугольника $ABCD$. Что ты замечаешь? Найди ещё как можно больше свойств этого четырёхугольника.

163 Составь программу действий и вычисли:

$$7\frac{1}{5} : 2\frac{4}{7} - 8\frac{3}{4} : \left[10 - \left(5\frac{1}{2} \right)^2 : 4\frac{2}{5} \right] + \left(3\frac{1}{8} \cdot 2 \right) : \left(8\frac{1}{12} - 1\frac{5}{6} \right).$$

164 Выполни действия и проверь правильность вычислений, используя числовой квадрат (каждая из цифр квадрата принадлежит ответу только одного примера):

1) $394,42 : 16,4$;

2) $72,54 - 3,568$;

3) $139,7 + 80,324$;

4) $425,736 : 60,75$;

5) $5,036 \cdot 9,05$.

6	2	0,	0	2
8,	2	2	4,	4
9	7	2	0	5
8	0	5	7	5
7,	0	8	4	5,



С **165*** Задача «Эпидемия гриппа»

Вчера число учеников, присутствующих в классе, было в 8 раз больше числа отсутствующих. Сегодня не пришли ещё 2 ученика, и оказалось, что отсутствуют 20% от числа учеников, присутствующих в классе. Сколько всего учеников в классе?

166* При сложении двух натуральных чисел ученик по ошибке поставил во втором слагаемом лишний ноль на конце и получил в сумме 6641 вместо 2411. Какие числа он складывал?

Задачи для самопроверки

167 Построй отрицания высказываний:

- 1) Число 1 – простое.
- 2) Сумма $38 \cdot 15 + 27$ кратна 9.
- 3) Квадрат натурального числа может быть меньше 1.
- 4) Все простые числа – нечетные.
- 5) Любое число отлично от своего квадрата.
- 6) Существуют натуральные числа, сумма которых не превышает их разности.

168 Прочитай высказывания и определи их истинность или ложность. Построй отрицания ложных высказываний.

- 1) $\exists n \in \mathbb{N}: 2n - 5 = 12;$ 3) $\forall x, y \in \mathbb{R}: xy = yx$ (\mathbb{R} – множество дробей);
- 2) $\forall a, b \in \mathbb{N}: a - 1 < b + 1;$ 4) $\exists c, d \in \mathbb{N}: c^2 = d^2 - 1.$

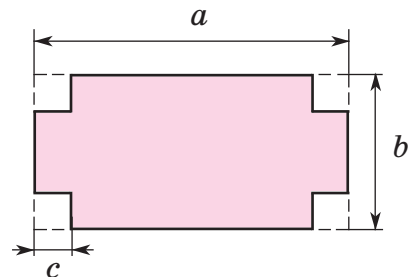
169 Запиши предложения с переменными на математическом языке. Установи их истинность или ложность для данных значений переменных.

- 1) Квадрат суммы чисел a и b равен 34 ($a = 5, b = 3$).
- 2) Разность кубов чисел c и d равна 7 ($c = 2, d = 1$).

170 1) $(3\frac{2}{5} \cdot 2 - 5\frac{3}{4} : 1\frac{11}{12}) : 3\frac{1}{6} - 4\frac{4}{5} : 9 + 2\frac{2}{3};$

2) $[40 - (4,25 \cdot 7,08 + 6,768 : 0,75)] \cdot 2050.$

171 Из прямоугольника со сторонами a и b вырезали 4 равных квадрата со стороной c , как показано на рисунке. Составь выражения для вычисления площади и периметра получившейся фигуры. Найди их значения при $a = 10$ м, $b = 6$ м и $c = 1,5$ м.



172 Длина прямоугольного параллелепипеда равна 3,6 дм, ширина составляет 0,5 длины и 0,9 высоты параллелепипеда. Какую часть объёма этого параллелепипеда составляет от объёма куба с ребром 3 дм?

173 Реши уравнения:

- 1) $15,8 - (2a + 3,6) : 0,4 = 4,8;$ 3) $1,5x + 1,2 + 2x + 0,8 = 2,7;$
- 2) $2,3b + 6b - 3,8b + b = 11;$ 4) $4y - 11 = y + 2,5.$

174 1) Сумма цифр трёхзначного числа равна 9, а произведение равно 15. Чему равно это число?

2) После того как цифры двузначного числа поменяли местами, оно увеличилось на 54. Какое это число?

175 Переведи условие задачи на математический язык:

Путь от A до B велосипедист проехал за 5 ч, а мотоциклист – за 2 ч. Скорость мотоциклиста на 23,4 км/ч больше скорости велосипедиста. Чему равно расстояние от A до B ?

Глава 2

Арифметика

§ 1. Числа и действия с ними

1. Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями

Мы уже научились выполнять действия с обыкновенными и десятичными дробями по отдельности. Сейчас мы рассмотрим примеры, где оба вида дробей встречаются одновременно. Например:

$$2\frac{3}{4} - 0,6; \quad 121,2 : \frac{6}{25}; \quad 5,18 \cdot \frac{5}{7}.$$

Чтобы получить ответ, обе дроби надо записать в каком-либо одном виде: либо в виде обыкновенных дробей, либо в виде конечных десятичных дробей (если, конечно, перевод в десятичную дробь возможен). Тактика вычислений выбирается в зависимости от конкретных обстоятельств, но так, чтобы решение было по возможности более простым и удобным.

В первом примере $2\frac{3}{4} - 0,6$ вычисления проще в десятичных дробях, так как после перевода дроби $0,6$ в обыкновенную получаются дроби с разными знаменателями. Удобнее считать так:

$$2\frac{3}{4} - 0,6 = 2,75 - 0,6 = 2,15.$$

Во втором примере $121,2 : \frac{6}{25}$, перейдя к десятичным дробям, нам придется выполнять деление углом на двузначное число, что требует довольно громоздких вычислений. Учитывая, что 1212 легко делится на 6 , здесь удобнее десятичную дробь заменить обыкновенной:

$$121,2 : \frac{6}{25} = \frac{1212 \cdot \overset{101}{\cancel{202}} \cdot \overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{1}{\cancel{10}} \cdot \underset{1}{\cancel{6}}} = 505.$$

А вот в последнем примере $5,18 \cdot \frac{5}{7}$ переход к десятичным дробям невозможен, так как знаменатель обыкновенной дроби содержит простой делитель 7 , отличный от 2 и 5 . Поэтому вычисления здесь ведутся так же, как и во втором примере:

$$5,18 \cdot \frac{5}{7} = \frac{\overset{37}{\cancel{518}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{10}{\cancel{100}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{37}{10} = 3,7.$$



При выборе способа вычисления надо учитывать и то, какое следующее действие и с какими числами надо будет выполнять. Например, если разность $2\frac{3}{4} - 0,6$, которую мы находили в первом примере, надо разделить затем на $0,1$, то выбранный нами способ вычисления наиболее удобный. А если мы решаем пример $(2\frac{3}{4} - 0,6) \cdot 1\frac{37}{43}$, то лучше считать так:

$$\left(2\frac{3}{4} - 0,6\right) \cdot 1\frac{37}{43} = \left(2\frac{3}{4} - \frac{3}{5}\right) \cdot 1\frac{37}{43} = 2\frac{3}{20} \cdot 1\frac{37}{43} = \frac{\overset{1}{43} \cdot \overset{4}{80}}{\underset{1}{20} \cdot \underset{1}{43}} = 4.$$

Как и раньше, эти примеры можно решать «по действиям» или «цепочкой». Перед решением примера полезно бывает проанализировать его, чтобы поискать возможности упрощения вычислений. Например, прежде чем искать значение дроби

$$\frac{3,2 \cdot 0,46 \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 0,18}{1\frac{7}{9} \cdot 0,021 \cdot 7,2 \cdot 2,3},$$

можно заметить, что в числителе и знаменателе по 5 десятичных знаков после запятой, а в множителях $2\frac{1}{3}$ и $1\frac{7}{9}$ знаменатели 3 и 9. Поэтому, умножив числитель и знаменатель дроби на произведение $9 \cdot 100\,000$, мы сможем заменить все числа в её записи целыми:

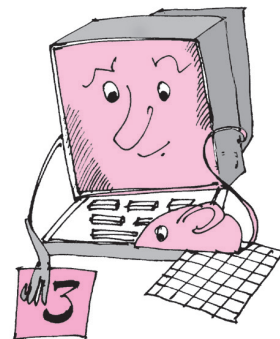
$$\frac{3,2 \cdot 0,46 \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 0,18 \cdot (9 \cdot 100\,000)}{1\frac{7}{9} \cdot 0,021 \cdot 7,2 \cdot 2,3 \cdot (9 \cdot 100\,000)} = \frac{\overset{2}{32} \cdot \overset{2}{46} \cdot \overset{1}{21} \cdot \overset{1}{18}}{\underset{1}{16} \cdot \underset{1}{21} \cdot \underset{4}{72} \cdot \underset{1}{23}} = 1.$$

А вот в примере

$$\frac{\left[(2,375 + \frac{15}{46} \cdot \frac{23}{30} + 0,625) : 4\frac{7}{8} + 2,5 : 1,25 : 3 \right] \cdot 0,75}{9,56 \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot 5,6 + \frac{1}{25} \cdot 0,75}$$

подсчёт существенно упростится, если использовать свойства сложения и умножения. На основании переместительного и сочетательного свойств сложения во внутренних скобках числителя сумму $2,375 + 0,625$ можно заменить числом 3.

Легко заметить также, что в знаменателе есть общий множитель $\frac{3}{4}$, или, что то же самое, $0,75$, который можно вынести за скобку, а затем сократить на него дробь.



Выполним данные преобразования:

$$\frac{\left[\left(3 + \frac{15}{46} \cdot \frac{23}{30} \right) : 4 \frac{7}{8} + 2,5 : 1,25 : 3 \right] \cdot 0,75}{\left(9,56 - 5,6 + \frac{1}{25} \right) \cdot 0,75} = \frac{\left(3 + \frac{15}{46} \cdot \frac{23}{30} \right) : 4 \frac{7}{8} + 2,5 : 1,25 : 3}{9,56 - 5,6 + 0,04}.$$

В результате таких преобразований мы «сэкономим» 5 действий, а оставшиеся вычисления станут проще:

$$1) \frac{15}{46} \cdot \frac{23}{30} = \frac{\overset{1}{15} \cdot \overset{1}{23}}{\underset{2}{46} \cdot \underset{2}{30}} = \frac{1}{4};$$

$$2) 3 + \frac{1}{4} = 3 \frac{1}{4};$$

$$3) 3 \frac{1}{4} : 4 \frac{7}{8} = \frac{13}{4} : \frac{39}{8} = \frac{\overset{1}{13} \cdot \overset{2}{8}}{\underset{1}{4} \cdot \underset{3}{39}} = \frac{2}{3};$$

$$4) 2,5 : 1,25 = 250 : 125 = 2;$$

$$5) 2 : 3 = \frac{2}{3};$$

$$6) \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3};$$

$$7-8) 9,56 - 5,6 + 0,04 = 9,6 - 5,6 = 4;$$

$$9) \frac{4}{3} : 4 = \frac{\overset{1}{4}}{\underset{1}{3} \cdot \underset{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$



Решая примеры и задачи на уроках математики, мы не только осваиваем счёт и математический метод исследования реального мира, но и учимся логически рассуждать, планировать свои действия, учимся настойчиво и целенаправленно добиваться успеха. С этой точки зрения «многоступенчатые» примеры на порядок действий с обыкновенными и десятичными дробями становятся своеобразными тестами на умение мыслить, на аккуратность, находчивость, трудолюбие, способность человека достигать поставленной цели. И тот, кто научится решать такие примеры, сделает важный шаг по пути к своему жизненному успеху.

К

176 1) При каком условии обыкновенную дробь можно перевести в конечную десятичную? А конечную десятичную в обыкновенную?

2) Выбери дроби, которые можно перевести в конечные десятичные, и расшифруй слово:

$$\frac{7}{12}, \frac{3}{8}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{9}{18}, \frac{5}{46}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{4}{11}, \frac{15}{16}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{14}{25}, \frac{5}{6}, \frac{10}{7}, \frac{31}{50}.$$

М А Л К Г Е О Р З И Н У Т В Я М

177) Выполни действия, переходя к десятичным дробям:

а) $0,36 + \frac{1}{2}$;

б) $5,8 - \frac{3}{4}$;

в) $\frac{2}{5} : 0,001$;

г) $7,2 \cdot \frac{1}{100}$.

178) Выполни действия, переходя к обыкновенным дробям:

а) $\frac{2}{3} + 0,6$;

б) $1\frac{1}{6} - 0,5$;

в) $0,3 \cdot \frac{5}{9}$;

г) $\frac{8}{11} : 0,4$.

179) Выполни действия, представляя числа в наиболее удобном для вычисления виде:

а) $3\frac{4}{5} - 1,8$;

в) $2,2 : \frac{11}{15}$;

д) $4,2 : 3\frac{1}{2}$;

ж) $5,384 - 4\frac{3}{20}$;

б) $0,84 \cdot \frac{3}{4}$;

г) $3\frac{9}{10} + 1,68$;

е) $\frac{1}{5} \cdot 20,08$;

з) $1\frac{2}{3} + 2,5$.

180) Найди значения дробей:

а) $\frac{2,7}{3,6}$;

в) $\frac{7,2 \cdot 2,8}{3,5 \cdot 0,64}$;

д) $\frac{5,6 \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 0,63}{4,9 \cdot 0,018 \cdot 5\frac{1}{3}}$;

ж) $\frac{0,27 \cdot 1\frac{5}{7} \cdot 4,8 \cdot 0,3}{0,032 \cdot 0,54 \cdot 3\frac{4}{7} \cdot 1,8}$;

б) $\frac{5\frac{1}{7}}{3\frac{3}{14}}$;

г) $\frac{1\frac{1}{3} \cdot 2\frac{3}{11} \cdot 3\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{6} \cdot 3\frac{9}{11}}$;

е) $\frac{1\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{3} \cdot 0,36}{0,6 \cdot 2 \cdot 1\frac{1}{3}}$;

з) $\frac{0,38 \cdot 0,17 \cdot 2\frac{2}{15} \cdot 2,7}{5,1 \cdot 3\frac{4}{5} \cdot 0,064}$.

181) Выполни действия:

1) $(1,5 : \frac{1}{3} - \frac{3}{8} : 0,25) \cdot 3,2 - 3,2 \cdot \frac{5}{8}$;

2) $\frac{7}{40} : 2\frac{11}{12} - 0,1 \cdot (1,45 : 2\frac{1}{3} - \frac{1}{20} : 2\frac{1}{3})$;

3) $(3,6 \cdot 2\frac{7}{9} + 1,125 + 5\frac{2}{5} \cdot 2\frac{7}{9} - 1\frac{1}{8}) : 2,5$;

4) $20 : 33\frac{1}{3} - (4\frac{7}{25} - 1,28) : (0,75 + 3\frac{1}{4}) \cdot 0,2$.



182) 1) $4,5 + 0,5 \cdot (2,4 \cdot 1,375 - 1,64 : 0,8) : 2\frac{1}{12} - 1\frac{2}{7} \cdot 1,4$;

2) $(2,5 - 0,75) \cdot \frac{4}{7} + [(3\frac{3}{8} - 2\frac{11}{12}) \cdot 1\frac{7}{9} + 2\frac{11}{12} \cdot 1\frac{7}{9}] : (3,5 : 2\frac{1}{3})$;

3) $0,198 \cdot 9\frac{1}{11} - [(2,56 + \frac{3}{4} - 2,56 - 0,125) \cdot 2\frac{2}{3} - \frac{1}{15}] : 16 \cdot (5\frac{3}{4} + 2,25)$;

4) $(8,96 : 0,8 + 1\frac{1}{8} \cdot 0,8) : 1,1 - [(5\frac{7}{12} - 2\frac{17}{36}) \cdot 0,9 - 4\frac{1}{3} : 2,6 \cdot 0,6] : \frac{1}{5}$.

183

$$1) \frac{7,8 : 1,1 \cdot 5,5}{0,39};$$

$$3) \frac{0,19 : 0,03 \cdot 0,75 \cdot 10,8}{1,2 \cdot 2,5 \cdot 5,7 : 0,4};$$

$$5) \frac{1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 : 0,6 \cdot 0,71}{0,71 \cdot 1 \frac{1}{6} : 3,6 \cdot 0,5};$$

$$2) \frac{0,16}{0,02 : 0,007 \cdot 0,8};$$

$$4) \frac{8,1 : 0,4 : 2,7 \cdot 3,06}{10,2 : 2,4 \cdot 12,5 \cdot 0,8};$$

$$6) \frac{2 \frac{1}{7} \cdot 2,8 : 1 \frac{5}{11} \cdot 6 \frac{2}{11}}{0,68 : 0,016 \cdot 4 \frac{2}{7} \cdot 1,4}.$$

184

$$1) \frac{16 \frac{2}{3} - 15 \frac{1}{6} + 1,3}{2,5 \cdot 0,56 \cdot 0,4};$$

$$3) \frac{(2 \frac{5}{6} + 1,75) \cdot 0,14}{2 \frac{1}{3} \cdot 1,1 : 1,6};$$

$$5) \frac{0,3 \cdot 7,8 : 0,39 - \frac{5}{12} \cdot 3,6}{1 \frac{5}{13} \cdot 0,26 : 0,1 + 0,4};$$

$$2) \frac{21,75 - 18 \frac{3}{8}}{1,8 : 0,4 \cdot 0,3};$$

$$4) \frac{(\frac{2,1}{0,4} + \frac{3,3}{1,8}) : 0,51 \cdot 0,36}{2 \frac{2}{3} \cdot (\frac{4,5}{4,2} - \frac{1,6}{2,8})};$$

$$6) \frac{(2,4 \cdot 3 \frac{1}{4} + 7,1 \cdot 3 \frac{1}{4}) \cdot \frac{4}{13}}{(\frac{11}{40} - 0,125) \cdot 6 \frac{1}{3} + 17,1 \cdot 0,5}.$$

185

Найди 40 % от числа:

$$1) \frac{0,16 \cdot (3,2 - \frac{3}{40}) + 2 \frac{3}{11} \cdot 4,125 : 3 \frac{3}{4}}{5 \frac{1}{6} \cdot 0,3 - 0,3 \cdot 4,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,3};$$

$$3) \frac{[7,88 + (4 \frac{3}{5} \cdot 2,5 - 1,6 \cdot 2 \frac{1}{2}) : 7,5 \cdot 2,12] : 6,25}{(10 - 8 \frac{5}{8}) \cdot 0,32 + (9,6 : 9 \frac{3}{5}) \cdot (0,2)^2};$$

$$2) \frac{0,6 + 2,4 \cdot (3 - 0,7 \cdot \frac{5}{7}) - 7 : 3 \frac{1}{2}}{[5 \frac{1}{4} \cdot 4 - (5,9 - 2,7 : \frac{9}{11})] \cdot 2 \frac{1}{2}};$$

$$4) \frac{1,7 : [8 \frac{1}{3} - (\frac{1}{2} + 0,5 + \frac{1}{4}) : (4,3 - 3 \frac{3}{60}) \cdot 7,2]}{\frac{2}{3} \cdot 0,375 + 4 \frac{7}{18} + (2 \frac{2}{3} - \frac{7}{15}) : 0,8 - 4 \frac{7}{18}}.$$

186

Найди число, 25 % которого составляют:

$$1) \frac{3 \frac{1}{3} + 2,5}{2,5 - 1 \frac{1}{3}} + \frac{(2,96 + 1 \frac{1}{25}) \cdot \frac{3}{16}}{0,625 - \frac{7}{22} : 1 \frac{3}{11}} - \frac{(0,36 + 0,55) : 0,3}{2,2 : 2 \frac{14}{15}} \cdot \frac{9}{20};$$

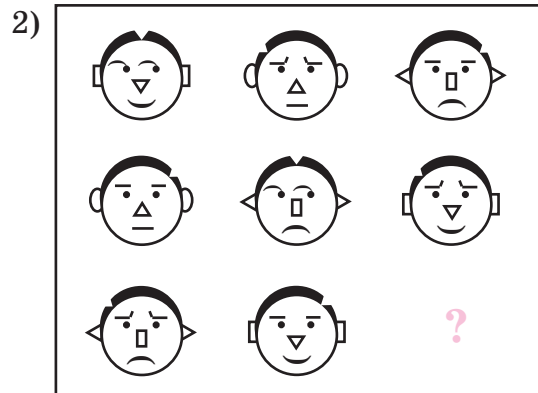
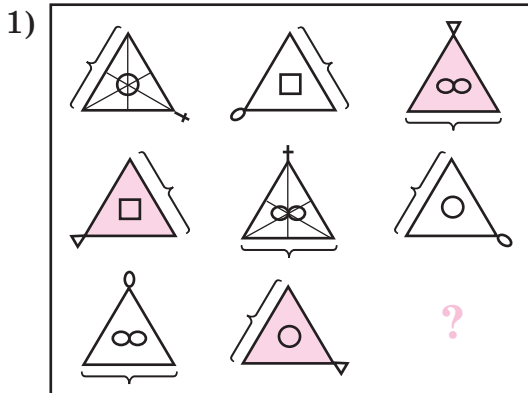
$$2) 6,4 : \left[\frac{6 : (0,3 - 0,1)}{0,5 \cdot (1,6 + 0,4)} + \frac{3,6 : (4,3 - 2,5)}{(8,2 - 7,8) \cdot 2,5} \right] + \frac{1 \frac{3}{20} : 2,3}{2 - 0,8 \cdot \frac{5}{6} : \frac{2}{3}};$$

$$3) 90,9 : \left[\left(\frac{0,05}{0,125 - \frac{1}{9}} + \frac{0,03 : 0,1}{0,5 + \frac{1}{4}} \right) : \left(1 \frac{8}{15} : 1 \frac{8}{15} - \frac{1,5 : 3 \frac{3}{4}}{0,25 + 3 \frac{1}{4} : 13} \right) - 18 \frac{1}{5} \right].$$



π

187 Найди правило, по которому расположены фигуры, и нарисуй недостающую фигуру:



188 1) Запиши в виде десятичных дробей данные обыкновенные дроби:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{1}{25}, \frac{4}{25}, \frac{9}{16}, \frac{11}{40}, \frac{7}{50}$$

2) Представь в виде обыкновенной несократимой дроби: 0,5; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,25; 0,75; 0,125; 0,375; 0,625; 0,875; 0,45; 0,02; 0,24; 0,025; 0,008.

189 1) Мальчик, наблюдая грозу, увидел, как блеснула молния, и через 15 с услышал удар грома. На каком расстоянии от него происходила гроза, если скорость звука в воздухе равна 0,33 км/с?

2) Автобус выходит из Москвы в 9 ч 45 мин и приезжает в пункт назначения в 12 ч 5 мин. Скорость автобуса 54 км/ч. Чему равна длина маршрута автобуса? На каком расстоянии от пункта назначения по расписанию находится автобус в 11 ч 20 мин?

190 1) Поезд из 10 вагонов прошёл мимо наблюдателя за 8 с. Чему равна скорость поезда, если длина вагона 16 м?

2) Кондуктор пассажирского поезда заметил, что встречный товарный поезд прошёл мимо него за 9 с. Чему равна длина товарного поезда, если он следует со скоростью 56 км/ч, а скорость пассажирского поезда равна 84 км/ч?

191 1) Расстояние между деревней и станцией девочка проходит за $\frac{5}{12}$ ч, а её отец – за 0,25 ч. Скорость девочки меньше скорости отца на 2,4 км/ч. На каком расстоянии от деревни находится станция?

2) Расстояние от дома до дачи Иван Иванович обычно проезжает за 1 ч 20 мин. Но из-за погодных условий он уменьшил свою скорость на 10 км/ч и поэтому доехал до дачи за полтора часа. На каком расстоянии от дома Ивана Ивановича находится его дача?



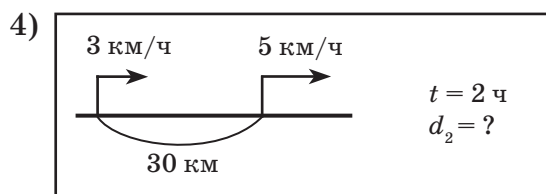
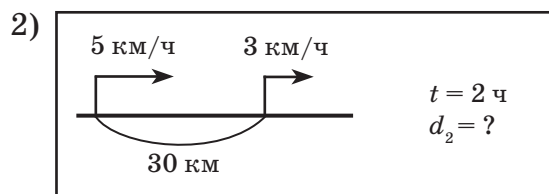
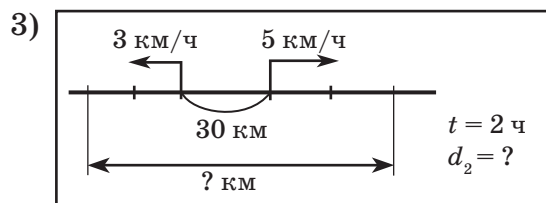
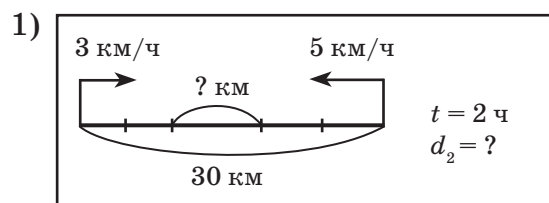
192 1) Туристы прошли путь от турбазы до озера за 4 дня. В первый день они прошли $\frac{1}{4}$ всего пути, во второй – $\frac{3}{7}$ оставшегося пути, а в третий и четвёртый дни проходили по 12 км. Чему равна длина всего пути от турбазы до озера?

2) Лыжник прошел маршрут длиной 103 км за 4 дня. Во второй день он прошёл 120% пути, пройденного в первый день, в третий день – $\frac{2}{3}$ пути, который он прошёл во второй день, а в четвёртый день – оставшиеся 28 км. Сколько километров проходил лыжник в каждый из первых трёх дней?

193 1) Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В. При встрече оказалось, что первый пешеход прошёл $\frac{1}{4}$ всего пути и ещё 3,2 км, а второй – в 2 раза больше первого. Чему равно расстояние от А до В?

2) Мастер и ученик должны были сделать некоторое количество деталей. По окончании работы оказалось, что мастер выполнил $\frac{2}{3}$ всего задания и ещё 8 деталей, а ученик – 0,25 того, что выполнил мастер. Сколько всего деталей сделали ученик и мастер?

194 Найди по рисункам скорости сближения и скорости удаления пешеходов. Как и на сколько изменится расстояние между ними через 2 ч? Чему оно станет равно? В каком случае и через сколько времени после начала движения произойдет встреча? (d_2 – расстояние между пешеходами через 2 ч после выхода.)



195 1) Из двух городов, расстояние между которыми 400,4 км, одновременно навстречу друг другу выехали автомобиль и автобус. Скорость автомобиля равна 82,5 км/ч, а скорость автобуса составляет $\frac{11}{15}$ скорости автомобиля. Какое расстояние проедет автобус до его встречи с автомобилем?

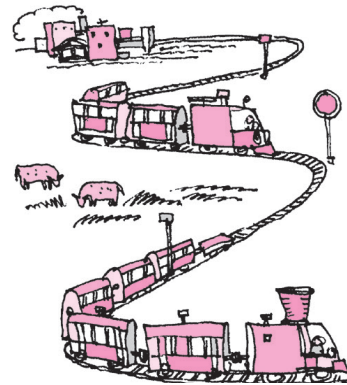
2) Два лыжника, находясь друг от друга на расстоянии 6 км, вышли одновременно навстречу друг другу и через 15 мин встретились. Когда же они вышли из одного пункта в одном направлении, через 50 мин один отстал от другого на 5 км. Чему равна скорость каждого лыжника?

196 Чем похожи и чем отличаются задачи? Реши их и сопоставь решения.

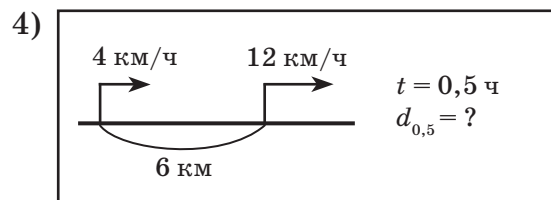
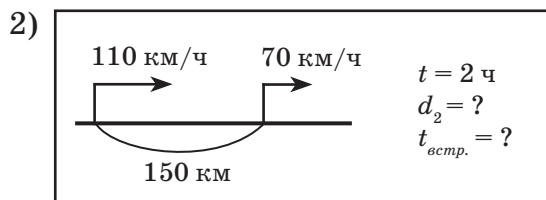
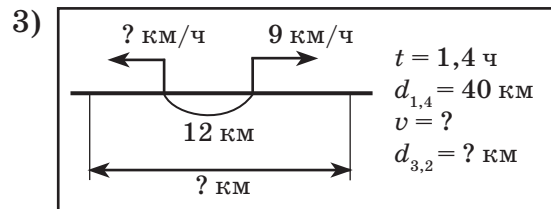
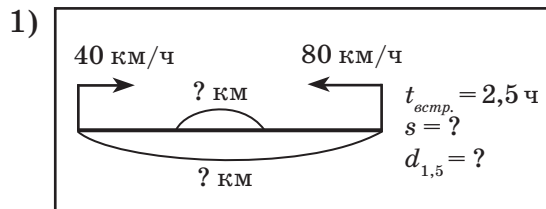
1) Из двух городов, расстояние между которыми равно 490 км, выехали одновременно навстречу друг другу два поезда и встретились через 3,5 ч. Скорость первого поезда была на 12 км/ч больше скорости второго. С какой скоростью шли поезда?

2) Из двух городов, расстояние между которыми равно 490 км, выехали навстречу друг другу два поезда и встретились через 3,5 ч после выхода второго поезда. С какой скоростью они шли, если первый поезд, скорость которого была на 12 км/ч меньше скорости второго, вышел на час раньше второго?

3) Из двух городов, расстояние между которыми равно 490 км, выехали одновременно в одном направлении два поезда. Первый поезд догнал второй через 10 ч после выхода. С какой скоростью они шли, если скорость первого в 1,7 раза больше скорости второго?



197 Составь по схемам задачи и найди неизвестные величины (d_t – расстояние между объектами через t ч после выхода):



198 1) Из двух сел одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость одного из них 19,5 км/ч, а скорость второго составляет $\frac{2}{3}$ скорости первого. Чему равно расстояние между селами, если велосипедисты встретились через 48 мин? На каком расстоянии друг от друга они были через 0,5 ч после выезда? Через полтора часа?

2) Города A и B расположены на одном шоссе. Из этих городов одновременно в одном направлении выехали два автобуса. Первый автобус двигался со скоростью 54 км/ч, что составляет 60% скорости второго автобуса. Вторым автобус догнал первый через 1 ч 30 мин после выезда. Чему равно расстояние между городами A и B ? На каком расстоянии друг от друга были автобусы через 24 мин после выезда? Через 2 ч после выезда?

199 1) Из двух сел одновременно в противоположных направлениях отплыли два катера. Скорость одного из них на $5\frac{1}{3}$ км/ч больше скорости второго. С какой скоростью плыл каждый катер, если через 2 ч 15 мин расстояние между ними увеличилось на 138 км?

2) Из двух городов, расстояние между которыми 480 км, одновременно в одном направлении выехал поезд и вылетел самолет. Самолет пролетел над поездом через 40 мин после вылета. С какой скоростью двигались поезд и самолет, если скорость поезда была в 9 раз меньше скорости самолета?

200 Два поезда выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов, удаленных друг от друга на s км. Скорость поездов равна соответственно v_1 км/ч и v_2 км/ч. Пусть d км – расстояние между ними через t ч после выезда. Запиши формулу, выражающую зависимость расстояния d от величин s , v_1 , v_2 и t .

201 Чем похожи и чем отличаются задачи? Реши их и сопоставь решения.

1) Из двух городов, расстояние между которыми 294 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Через 1 ч 40 мин расстояние между ними стало равно 24 км. Скорость первого мотоциклиста составляет 80% скорости второго. С какой скоростью они ехали?

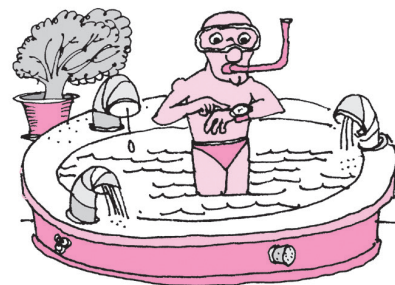
2) Из двух городов, расстояние между которыми 294 км, одновременно в одном направлении выехали два мотоциклиста. Через 1 ч 40 мин расстояние между ними стало равно 264 км. Скорость первого мотоциклиста составляет 80% скорости второго. С какой скоростью они ехали?

3) Из двух городов, расстояние между которыми 294 км, одновременно в противоположных направлениях выехали два мотоциклиста. Через $1\frac{2}{3}$ ч расстояние между ними стало равно 564 км. Скорость первого мотоциклиста составляет 80% скорости второго. С какой скоростью они ехали?

4) Из двух городов, расстояние между которыми 294 км, одновременно в одном направлении выехали два мотоциклиста. Через 1 ч 40 мин расстояние между ними стало равно 324 км. Скорость первого мотоциклиста составляет 80% скорости второго. С какой скоростью они ехали?

202 1) Мастер и ученик, работая вместе, могут выполнить всю работу за 3 ч, а один мастер сделает её за 4 ч. За сколько времени может сделать всю работу один ученик?

2) К бассейну подведены 3 трубы. Первая труба одна может наполнить весь бассейн за 2 ч, вторая труба – за 4 ч, а третья – за 12 ч. За сколько времени смогут наполнить пустой бассейн все три трубы, если их включить одновременно?



203 1) Первый насос может выкачать воду из котлована за 36 ч, а второй – за 48 ч. Сначала в течение 12 ч работал один первый насос, после чего работу закончил второй. За сколько времени была выкачана вся вода?

2) Двум операторам было поручено набрать на компьютере рукопись. Работая вместе, они могут выполнить весь заказ за 2,4 ч. Однако вместе операторы проработали лишь 2 ч, после чего работу заканчивал один из них. За сколько времени был выполнен заказ, если оператор, ушедший раньше, работая один, может выполнить его полностью за 4 ч?



204 Выполни действия и расшифруй фамилию известного исторического деятеля. Что ты о нем знаешь?

Н $7\frac{3}{8} - 2,35$; **А** $5,7 : 6\frac{1}{3}$; **Р** $42,14 \cdot 1\frac{3}{7}$; **Б** $1\frac{4}{5} + 3,755$;

И $\frac{0,56 \cdot 0,9 \cdot 3,6}{1,8 \cdot 0,42}$; **Т** $\frac{4\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{7}}{3\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot 5\frac{4}{7}}$; **О** $\frac{3,6 \cdot 1\frac{13}{15} \cdot 0,3}{4\frac{1}{5} \cdot 0,16}$; **Г** $\frac{9,8 \cdot 2\frac{2}{3} \cdot 0,11 \cdot 12,5}{5\frac{5}{6} \cdot 0,77}$.



5,555	0,9	8	60,2	0,9	1	2,4	3	5,025

205 1) $(1\frac{2}{13} \cdot 0,42 + 0,78 \cdot 1\frac{2}{13}) \cdot 1\frac{4}{9} : 0,6 - 0,5 \cdot 5\frac{2}{3}$;

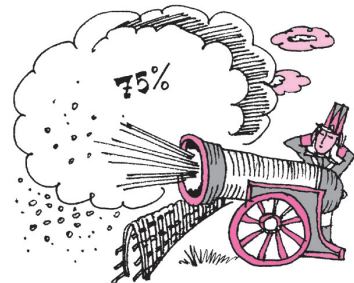
2) $(1\frac{1}{4} + 2,25 - 1\frac{12}{24}) : 4\frac{2}{3} \cdot (2\frac{9}{25} - 0,36 + 0,625) \cdot (10,6 + 1\frac{2}{5})$.

206 1) $\frac{0,25 : 2,4 \cdot 0,9 \cdot 2,1}{3,5 \cdot 0,04 : 3,2}$; 2) $\frac{0,28 : 0,03 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1,4}{3\frac{2}{3} \cdot 0,36 \cdot 4,9 : 3,3}$; 3) $\frac{1\frac{3}{7} - \frac{1}{3} : 2,8 \cdot 3\frac{3}{5}}{(2,375 - \frac{1}{3} + 1\frac{1}{12}) \cdot 0,8}$.

207 Найди 75% от числа:

1) $\frac{(1,75 \cdot 3\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1,75) : 0,1 \cdot \frac{4}{7} - 21\frac{1}{3}}{0,4 \cdot 4\frac{5}{6} \cdot 2,5 - 9 : (5\frac{4}{5} \cdot 0,1 + 1,42)}$;

2) $\frac{[(4,2 : 0,14 - \frac{2}{3} \cdot 121,2 \cdot 0,1) \cdot 0,5 + 0,04] : 1\frac{3}{8}}{(3,74 + 4,5 \cdot 1\frac{1}{3} + 0,26) \cdot (9,6 : 9\frac{3}{5})}$.



208 Найди число, 20% которого составляют:

$$1) \left[\frac{0,8 : \left(\frac{4}{5} \cdot 1,25\right)}{0,84 - \frac{1}{25}} \right]^2 + \left[\frac{\left(1,08 - \frac{1}{25}\right) : 2\frac{3}{5} : 0,6}{\left(2\frac{1}{25} - 1\frac{4}{5}\right) : 1\frac{4}{5} + (2,6 - 2,6) \cdot 5\frac{1}{25}} \right]^2;$$

$$2) \frac{7,2 \cdot 0,48 \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 0,9}{21\frac{1}{3} \cdot 6,3 \cdot 0,54} \cdot \left[2,5 : \frac{\left(0,3 + 1\frac{7}{11} + 2,7 + 3\frac{4}{11}\right) : 0,8}{9\frac{3}{5} + 6,4} + \frac{18,3 - 18,3}{19\frac{1}{6} \cdot 0,24} \right].$$

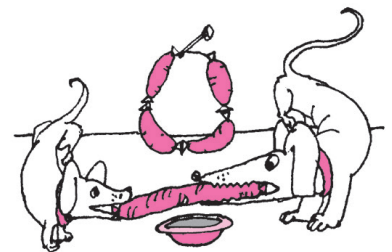
209 При испытании авиамodelей одна из них развила скорость 4,5 м/с и продержалась в воздухе 1,8 мин. Скорость второй была на 1 м/с больше скорости первой, но время её полета составило $\frac{7}{9}$ времени полета первой. Сравни дальности полета этих авиамodelей.

210 Велосипедист проехал путь от поселка до районного центра за 1 ч 30 мин. На обратном пути он увеличил скорость и поэтому весь путь проехал за 1 ч 15 мин. Во сколько раз скорость велосипедиста на обратном пути была больше первоначальной?

211 Учебный автомобиль, в котором находились преподаватель и трое учеников, выехал в тренировочную поездку. Преподаватель проехал $\frac{2}{15}$ всего маршрута и ещё 5 км, два ученика – по $\frac{1}{4}$ маршрута, а третий ученик – остальные 105 км. Чему равна длина всего маршрута?

212 Задача-шутка

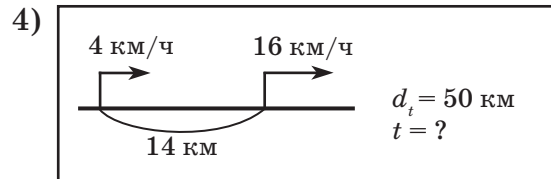
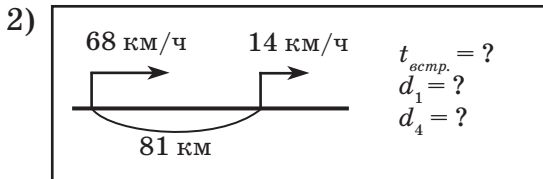
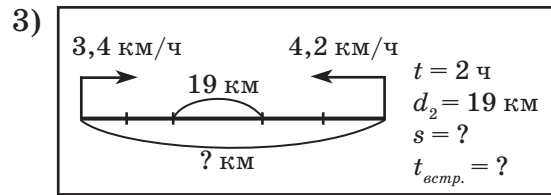
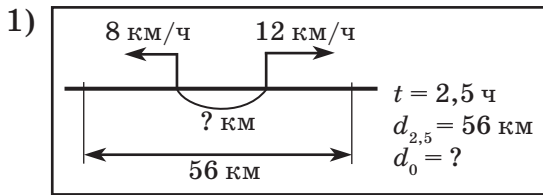
На День города изготовили гигантскую сосиску длиной 12 м. Две таксы начали есть её одновременно с обоих концов. Первая такса съедает 9 см сосиски в секунду, а вторая – 6 см в секунду. Сколько метров сосиски останется через минуту? Через сколько времени таксы съедят всю сосиску? Сколько метров сосиски съест при этом каждая такса?



213 Велосипедист отъехал от станции в тот момент, когда пешеход отошёл от неё в том же направлении на 1,6 км, и через 15 мин велосипедист догнал пешехода. С какой скоростью шёл пешеход, если велосипедист ехал в $2\frac{1}{3}$ раза быстрее?

214 Из двух городов, расстояние между которыми 18 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста. Один из них проходил в час на $\frac{2}{3}$ км больше другого. С какой скоростью шел каждый из них, если через 1,2 ч после выхода им оставалось пройти до встречи 6 км?

215 Придумай задачи по схемам и реши их:



216 1) Бассейн при одновременном включении трёх труб может наполниться за 4 ч, через одну первую трубу – за 10 ч, а через одну вторую – за 15 ч. За сколько времени может наполниться пустой бассейн через одну третью трубу?

2) Двум экскаваторам дано задание вырыть котлован. Работая вместе, они могут выполнить это задание за 20 дней. Но сначала 24 дня проработал один экскаватор, а затем работу закончил второй. За сколько времени было выполнено задание, если экскаватор, работавший первым, может один вырыть весь котлован за 36 дней?

217* **с** Найди лишнее слово и объясни, почему оно лишнее. Если возможно, укажи несколько вариантов решения.

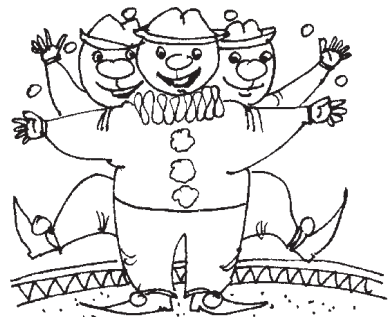
- 1) КАПИТАН, ФЕНОМЕН, ОГОРОД, РАБОТА, ОПЕРАТОР;
- 2) ОДОКРИЛК, КРОЧЕВС, ШАРКААДН, ААЛИНТПО, УУНГРЕК.

218* 1) Докажи, что квадрат любого натурального числа больше произведения предыдущего и следующего за ним чисел.

2) Найди все натуральные числа, равные утроенной сумме своих цифр.

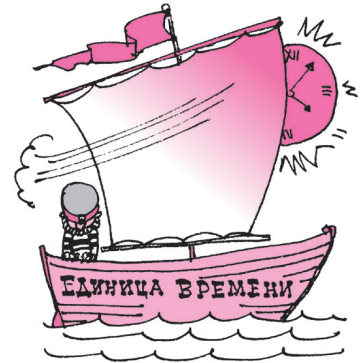
219* Два путника вышли одновременно – один из A в B , а другой из B в A . Шли они равномерно, но с разными скоростями. В момент встречи первому осталось идти ещё 16 ч, а второму – 9 ч. Через сколько часов после выхода они встретились?

220* Три клоуна, Бим, Бом и Бам, вышли на арену цирка соответственно в красной, зелёной и синей рубашках. Их туфли также были трёх цветов. У Бима цвета рубашки и туфель совпадали. У Бома ни туфли, ни рубашка не были красными. Бам был в зелёных туфлях и рубашке другого цвета. Как были одеты клоуны?



2. Задачи на движение по реке

Каждый знает, что плыть вверх по реке – *против течения* – гораздо труднее, чем вниз – *по течению*. Это и понятно, ведь течение реки или помогает плыть, добавляя скорости, или, наоборот, мешает – уменьшает ее.



Если скорость течения реки равна 2 км/ч, то при движении по течению объект за каждый час проходит на 2 км больше, чем в стоячей воде, а против течения – на 2 км меньше. Например, если собственная скорость лодки равна 5 км/ч, то её скорость по течению реки равна $5 + 2 = 7$ км/ч, а скорость против течения равна $5 - 2 = 3$ км/ч.

Скорость течения реки определяется по тому, как далеко река относит любой предмет – щепку, плот, лодку – за единицу времени.

Обозначим $v_{\text{соб.}}$ – собственную скорость объекта (то есть его скорость в стоячей воде), $v_{\text{теч.}}$ – скорость течения реки, $v_{\text{по теч.}}$ – скорость объекта по течению, а $v_{\text{пр. теч.}}$ – его скорость против течения. Тогда

$$\begin{aligned} v_{\text{по теч.}} &= v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}} \\ v_{\text{пр. теч.}} &= v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}} \end{aligned}$$

Таким образом, зная скорость течения и собственную скорость объекта, мы можем найти скорости этого объекта по течению и против течения.

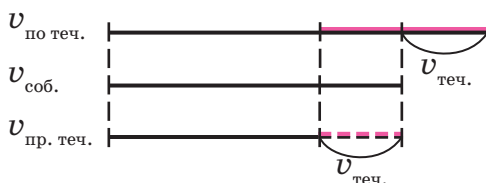
Чтобы решить обратную задачу – найти собственную скорость объекта, если известны его скорости по течению и против течения, – достаточно их сложить. Тогда замечаем, что сумма скоростей по течению и против течения равна удвоенной собственной скорости:

$$v_{\text{по теч.}} + v_{\text{пр. теч.}} = (v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}}) + (v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}}) = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}} + v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}} = 2v_{\text{соб.}}$$

Значит, **собственная скорость объекта равна полусумме его скоростей по течению и против течения:**

$$v_{\text{соб.}} = (v_{\text{по теч.}} + v_{\text{пр. теч.}}) : 2$$

Аналогично **скорость течения реки равна полуразности скоростей объекта по течению и против течения.** Это хорошо видно из приведённой ниже схемы:



$$v_{\text{теч.}} = (v_{\text{по теч.}} - v_{\text{пр. теч.}}) : 2$$

Задача 1. Катер по течению реки прошел 87,5 км за 5 ч, а против течения это же расстояние он прошел за 7 ч. Чему равна собственная скорость катера и скорость течения реки?



Решение:

- 1) $87,5 : 5 = 17,5$ (км/ч) – скорость по течению;
- 2) $87,5 : 7 = 12,5$ (км/ч) – скорость против течения;
- 3) $(17,5 + 12,5) : 2 = 15$ (км/ч) – собственная скорость;
- 4) $(17,5 - 12,5) : 2 = 2,5$ (км/ч) – скорость течения.

О т в е т: собственная скорость катера 15 км/ч, а скорость течения 2,5 км/ч.

Заметим, что при решении более сложных задач на движение по реке приходится вспоминать весь арсенал приёмов решения задач, изученный ранее. Приведём несколько примеров.

Задача 2. Плот проплывает путь от А до В за 40 ч, а катер – за 4 ч. За сколько часов проплывет катер путь от В до А?

Решение:

- 1) $1 : 40 = \frac{1}{40}$ (пути) – проплывает плот за 1 ч.
- 2) $1 : 4 = \frac{1}{4}$ (пути) – проплывает катер по течению за 1 ч.
- 3) $\frac{1}{4} - \frac{1}{40} - \frac{1}{40} = \frac{1}{5}$ (пути) – проплывает катер за 1 ч против течения.
- 4) $1 : \frac{1}{5} = 5$ (ч).

О т в е т: катер проплывет путь от В до А за 5 ч.

Задача 3. Собственная скорость лодки в 4 раза больше скорости течения реки. Найти собственную скорость лодки и скорость лодки по течению, если, двигаясь против течения, она прошла 10,8 км за 1,5 ч.

Решение:

- 1) $10,8 : 1,5 = 7,2$ (км/ч) – скорость против течения.
- 2) Пусть x км/ч – скорость течения, $4x$ км/ч – собственная скорость лодки.
 $4x - x = 7,2;$
 $3x = 7,2;$
 $x = 2,4.$

Значит, $v_{\text{теч.}} = 2,4$ км/ч, $v_{\text{соб.}} = 9,6$ км/ч.

- 3) $9,6 + 2,4 = 12$ (км/ч)

О т в е т: собственная скорость лодки 9 км/ч, а её скорость по течению – 12 км/ч.

К

221 1) Мальчик сделал игрушечный парусник и пустил его по ручью. Парусник проплыл за 15 мин расстояние, равное 300 м. Найди скорость, с которой течёт ручей, и вырази её в километрах в час.



2) Скорость течения реки 2,4 км/ч. За сколько времени по этой реке проплывёт плот расстояние, равное 10,2 км?

222 Скорость движения парохода по озеру a км/ч, а скорость течения реки b км/ч. С какой скоростью будет двигаться пароход: 1) по течению; 2) против течения? Составь выражение и найди его значение при $a = 36,4$ км/ч, $b = 1,6$ км/ч.

223 1) Катер плывёт вниз по течению реки. С какой скоростью он плывёт, если его собственная скорость 14,8 км/ч, а скорость течения реки 40 м/мин? Ответ вырази в километрах в час.

2) Скорость катера против течения реки равна 280 м/мин, а скорость течения 2,7 км/ч. Чему равна собственная скорость катера и его скорость по течению? Ответ вырази в километрах в час.

224 Лодка отплыла от пристани по реке, которая течёт со скоростью 3,2 км/ч. Будет ли перемещаться лодка относительно берега, в какую сторону и с какой скоростью, если она поплывет:



- 1) по течению со скоростью 4,5 км/ч;
- 2) против течения со скоростью 4,5 км/ч;
- 3) против течения со скоростью 3,2 км/ч;
- 4) против течения со скоростью 2,5 км/ч?

225 1) Собственная скорость теплохода равна 32,5 км/ч, а его скорость по течению реки – 35 км/ч. С какой скоростью течёт река? Чему равна скорость теплохода против течения реки? Какое расстояние проплывёт теплоход, если будет двигаться 2,6 ч по течению реки и 0,8 ч против течения?

2) Собственная скорость катера равна 14,7 км/ч, а его скорость против течения реки – 10,2 км/ч. Какое расстояние преодолит катер, плывя 2 ч по течению реки и 4,5 ч против течения?

226 Расстояние между двумя причалами равно 16,8 км. За сколько времени моторная лодка проплывет путь от одного причала до другого и обратно, если собственная скорость лодки 11,2 км/ч, а скорость течения реки составляет 25% скорости лодки?

227 Используя обозначения, приведенные в тексте учебника, определи, какая скорость получится, если выполнить следующие действия:

- 1) $v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}}$; 3) $v_{\text{пр. теч.}} + v_{\text{теч.}}$; 5) $v_{\text{по теч.}} - v_{\text{теч.}}$; 7) $(v_{\text{по теч.}} + v_{\text{пр. теч.}}) : 2$;
- 2) $v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}}$; 4) $v_{\text{пр. теч.}} + 2v_{\text{теч.}}$; 6) $v_{\text{по теч.}} - 2v_{\text{теч.}}$; 8) $(v_{\text{по теч.}} - v_{\text{пр. теч.}}) : 2$.

228 Пароход плывёт по течению реки со скоростью x км/ч, а против течения – со скоростью y км/ч. Какова собственная скорость парохода и скорость течения реки? Составь выражение и найди его значение, если: 1) $x = 42,6$ км/ч, $y = 34,2$ км/ч; 2) $x = 35,6$ км/ч, $y = 28$ км/ч.

229 1) Лодка шла по течению реки со скоростью 10,5 км/ч, а против течения – 6,7 км/ч. Найти скорость течения и собственную скорость лодки.
2) Катер прошёл 48,6 км по течению реки за 3 ч и 52,2 км против течения реки за 4,5 ч. За сколько времени он проплывёт по озеру 55,6 км, если собственная скорость катера не изменится?

230 Реши задачи и определи, какие данные в их условии лишние:

1) Лодка плывёт по течению реки. Её догоняет катер. Собственная скорость лодки 8,2 км/ч, а собственная скорость катера 15,8 км/ч. Сейчас между катером и лодкой расстояние 5,7 км. Через сколько времени катер догонит лодку, если скорость течения реки 3,5 км/ч?

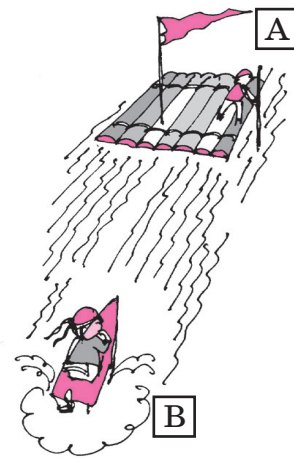
2) Два теплохода движутся по реке навстречу друг другу. Первый теплоход имеет собственную скорость 25,6 км/ч и плывёт по течению реки, а второй – собственную скорость 32 км/ч и плывёт против течения реки. Сейчас между теплоходами 144 км. Какое расстояние будет между ними через 0,5 ч? Через сколько времени произойдёт встреча?

231 1) Катер проплывает одно и то же расстояние по озеру за 7 ч, а по течению реки за 6 ч. Сколько времени потребуется плоту, чтобы проплыть такое же расстояние?

2) Лодка проплыла некоторое расстояние по озеру за 4 ч. Такое же расстояние плот проплывает по реке за 12 ч. Сколько времени затратит лодка на тот же путь: а) по течению реки; б) против течения реки?

232 1) Из пункта A в пункт B по реке отплыл плот. Одновременно с ним из пункта B в пункт A вышел катер. Через сколько часов после выхода катер встретил плот, если катер прошёл все расстояние между A и B за 6 ч, а плот – за 30 ч?

2) Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу вышли плот и катер. Катер встретил плот через 4 ч после выхода, а ещё через 20 мин прибыл в пункт A . Сколько времени плыл плот из A в B ?



233 Реши задачи и определи, есть ли в них лишние данные:

1) Собственная скорость теплохода в 7 раз больше скорости течения реки. Найти скорость теплохода против течения, если, двигаясь по течению, он прошёл 42 км за 1 ч 15 мин.

2) Скорость моторной лодки против течения в 4 раза больше скорости течения реки. Какое расстояние пройдёт лодка за 2 ч 48 мин, двигаясь по течению, если по озеру она проплывает за то же время 49 км?

π

234 Попробуй решить примеры каждого блока не более чем за 2 мин. (Пиши только ответы.) Если не уложишься в отведённое время, попробуй повторить ещё раз дома.

А

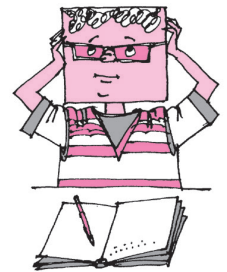
$$\begin{array}{ll} 0,36 : 0,9; & 3,4 + 0,16; \\ 0,8 + 0,02; & 4,2 - 0,02; \\ 4 - 1,75; & 2,5 \cdot 0,08; \\ 21,6 \cdot 0,1; & 6,4 : 0,04. \end{array}$$

Б

$$\begin{array}{ll} 1,48 - 0,9; & 0,05 \cdot 1,8; \\ 400 \cdot 0,17; & 22,2 - 3,2; \\ 6 : 0,0001; & 0,6 + 7,5; \\ 2,35 + 0,25; & 25,5 : 2,5. \end{array}$$

235 Составь выражение и найди его значение:

- 1) Утроенное произведение числа 4,8 и квадрата числа $\frac{1}{3}$.
- 2) Частное куба числа 0,2 и разности чисел 0,64 и $\frac{3}{5}$.
- 3) Квадрат суммы чисел $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и 0,3.
- 4) Сумма квадратов чисел $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и 0,3.



236 Известно, что $\frac{1}{10} = 0,1$; $\frac{1}{8} = 0,125$; $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{1}{2} = 0,5$. Поэтому для того, чтобы умножить число, например, на 0,125, можно разделить его на 8. Используя этот приём, найди произведения:

64 · 0,125	1,8 · 0,5	35 · 0,2	71,5 · 0,01
28 · 0,25	3600 · 0,01	320 · 0,125	680 · 0,5
505 · 0,2	0,48 · 0,125	7 · 0,001	3,6 · 0,25
82,4 · 0,1	1024 · 0,25	282,8 · 0,5	0,75 · 0,2
32 · 0,5	4,5 · 0,2	4,44 · 0,25	5,6 · 0,125

237 Преобразуй выражение в дробь и, если возможно, сократи её (значения всех переменных отличны от нуля):

1) $\frac{3}{a} - \frac{b}{2a}$;	3) $\frac{4}{x^2} + \frac{y}{2x}$;	5) $\frac{a}{4b^2} \cdot \frac{2b}{a}$;	7) $\frac{m}{3n} : (mn)$;
2) $\frac{c}{2d} + \frac{1}{cd}$;	4) $\frac{2b}{n} - 3$;	6) $\frac{3xy}{k} : \frac{6x^2}{7k}$;	8) $\frac{m}{3n} \cdot (mn)$.

238 Найди *методом перебора* множество всех пар натуральных чисел x и y , удовлетворяющих уравнению:

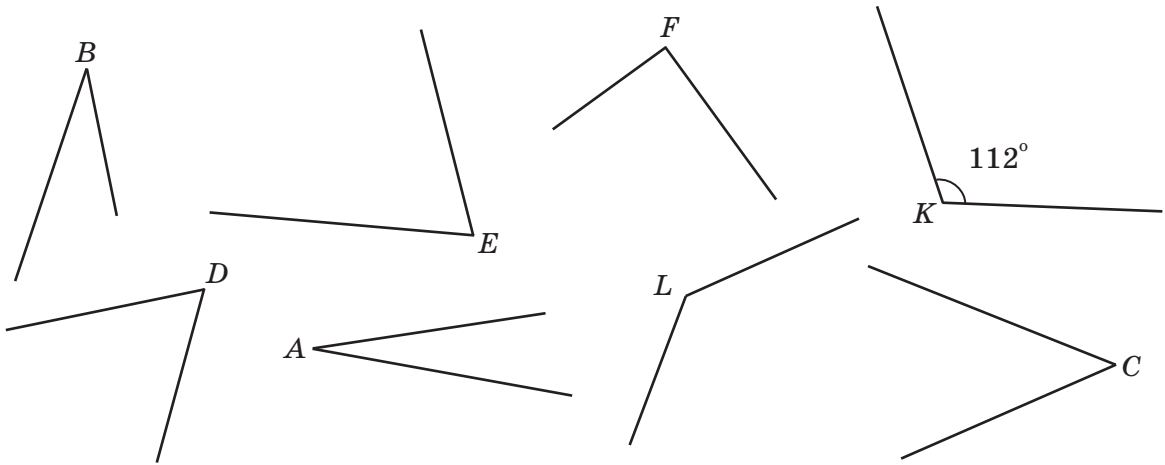
1) $3x + y^2 = 19$;	2) $x^2 = 20 - y^2$;	3) $(x - 2y)(y + 2x) = 12$.
----------------------	-----------------------	------------------------------

239 Вырази из данного равенства переменную x , если значения всех переменных не равны нулю:

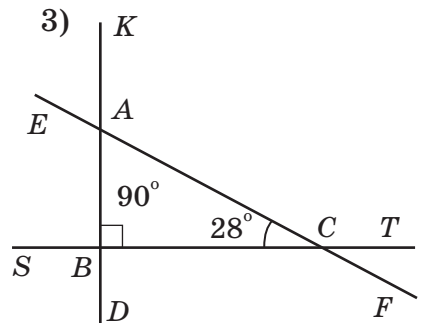
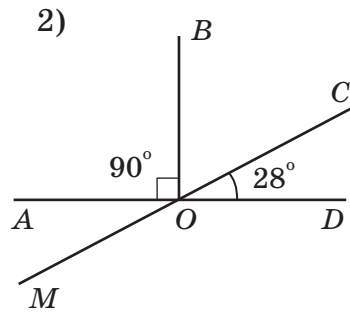
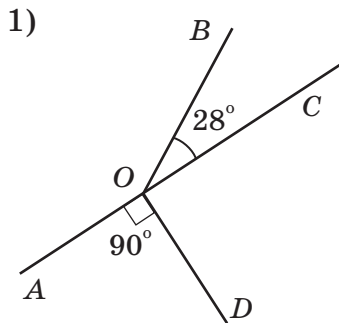
$$\begin{array}{llll}
 1) 2xn = yn^2; & 3) 7x + 5 = y; & 5) 2n = \frac{1}{3}(x - n); & 7) \frac{4}{x} = \frac{2a}{b}; \\
 2) 5a = 15xa^2; & 4) 2b = a - 3x; & 6) x + \frac{x}{6} = 14y; & 8) \frac{cd}{3} = \frac{d^2}{12x}.
 \end{array}$$

Образец: $\frac{a}{c} = \frac{5 + 3x}{8} \Leftrightarrow 8a = 5c + 3xc \Leftrightarrow 3xc = 8a - 5c \Leftrightarrow x = \frac{8a - 5c}{3c}$

240 Измерь углы с помощью транспортира и расположи их меры в возрастающем порядке. Установи закономерность в полученном ряде чисел. Построй угол, равный половине угла, продолжающего эту закономерность.



241 Найди на рисунке смежные и вертикальные углы. Пусть известны величины двух углов, отмеченных на чертеже, 28° и 90° . Можно ли найти величины остальных углов, не выполняя измерений?



242 1) Построй два смежных угла так, чтобы один из них: а) был на 70° больше второго; б) был в 4 раза меньше второго; в) был равен второму.
 2) Построй треугольник ABC так, чтобы $\angle A = 34^\circ$, а $\angle B = 42^\circ$. Сколько ещё можно построить треугольников, удовлетворяющих этому условию? Как надо дополнить условие, чтобы решение стало единственным?

252 Построй треугольник ABC так, чтобы $\angle A = 56^\circ$ и $AB = 4$ см. Сколько ещё можно построить треугольников, удовлетворяющих этому условию? Как надо дополнить условие, чтобы решение стало единственным?

253 Вычисли и определи, какую часть полученное число составляет от 4. Вырази эту часть в процентах.

$$\left(\frac{2,8 + 1\frac{1}{3}}{2,8 - 1\frac{1}{3}} \cdot \frac{5\frac{1}{4} - 2,5}{5\frac{1}{4} + 2,5} \right) : \left(\frac{7,5 : 1\frac{2}{3} - 2,5}{0,2 - \frac{3}{40}} \cdot 0,45 + 5,3 \right).$$



с **254*** **Старинная задача**

Два почтальона A и B , которых разделяет расстояние в 59 миль, выезжают утром навстречу друг другу. Почтальон A проезжает за 2 часа 7 миль, а почтальон B – за 3 часа 8 миль, при этом B отправляется в путь часом позже A . Сколько миль проедет почтальон B до встречи с почтальоном A ?

255* Мимо моего дома проходят три автобусных маршрута. Их номера – трёхзначные числа, причем все они – точные квадраты. Более того, они записываются одними и теми же цифрами. Какие номера у автобусов?

256* Таня в 6 раз моложе своего прадедушки. Кроме того, она заметила, что если между цифрами её возраста поставить ноль, то как раз получится возраст прадедушки. Сколько ей лет?

3. Среднее арифметическое

В жизни можно часто услышать слово «средний». Понятие *среднего* возникает самым естественным образом. Например, в разные месяцы человек часто получает разный доход, и для того, чтобы оценить, много или мало он зарабатывает, он обычно берёт всю сумму, заработанную им за год, и делит её на 12 – получается так называемый *среднемесячный доход*. В России именно эта цифра используется для расчёта пенсий, для предоставления различных пособий и льгот.

Точно так же используются средние значения и во многих других областях деятельности. Скажем, уровень жизни населения страны определяют *средним доходом* её жителей, а для его вычисления складывают доходы всех жителей страны и делят на общее число жителей.



А общий уровень знаний класса по математике оценивают *средним баллом* – складывают все годовые оценки, полученные учениками этого класса, и делят на число учеников. Так же определяют среднюю высоту и толщину деревьев на делянке, средний рост учащихся в классе и т. д.

Таким образом, мы видим, что в практической жизни часто совершают одну и ту же операцию: *по нескольким значениям величины определяют её среднее значение*.

О п р е д е л е н и е. *Средним арифметическим нескольких чисел называется результат деления суммы этих чисел на число слагаемых.*

Другими словами, среднее арифметическое чисел a_1, a_2, \dots, a_n равно

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}.$$

Задача 1. *Найти среднее арифметическое чисел 2,7; 8,215 и 4,109.*

Р е ш е н и е:

$$(8,215 + 2,7 + 4,109) : 3 = 5,008.$$

О т в е т: 5,008.

Задача 2. *Учащиеся 6 «А» класса за контрольную работу по математике получили 4 пятёрки, 18 четвёрок и 3 тройки, а учащиеся 6 «Б» класса за эту же контрольную работу получили 8 пятёрок, 12 четвёрок, 3 тройки и 1 двойку. Какой класс написал контрольную работу лучше?*

Р е ш е н и е:

Средний балл учащихся 6 «А» класса есть среднее арифметическое всех полученных ими баллов, то есть

$$\frac{5 + 5 + 5 + 5 + \overbrace{4 + 4 + \dots + 4}^{18 \text{ раз}} + 3 + 3 + 3}{25}$$

Ясно, что для сложения всех этих чисел одинаковые слагаемые надо сгруппировать. Аналогично подсчитывается средний балл учащихся 6 «Б» класса.

Записать решение можно следующим образом:

- 1) $5 \cdot 4 + 4 \cdot 18 + 3 \cdot 3 = 101$ (балл) – заработали все учащиеся 6 «А».
- 2) $4 + 18 + 3 = 25$ (чел.) – число учащихся 6 «А».
- 3) $101 : 25 = 4,04$ (балла) – средний балл 6 «А».
- 4) $5 \cdot 8 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 99$ (баллов) – заработали все учащиеся 6 «Б».
- 5) $8 + 12 + 3 + 1 = 24$ (чел.) – число учащихся 6 «Б».
- 6) $99 : 24 = 4,125$ (балла) – средний балл 6 «Б».
- 7) $4,04 < 4,125$.

О т в е т: с контрольной работой лучше справился 6 «Б».

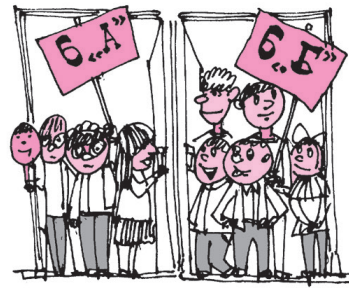
Из проведённого исследования можно сделать и другие выводы, например:

– Оба класса с контрольной работой справились достаточно хорошо.

– Уровень подготовки этих классов отличается незначительно.

– Класс 6 «А» более ровный – результат большинства учащихся практически совпадает со средним баллом.

– Класс 6 «Б» выигрывает за счёт более значительной группы «сильных» учащихся.



Именно ради такого рода выводов и рассматриваются средние значения величин – идёт ли речь о среднем урожае на различных полях, уровне доходов населения страны, уровне производства электроэнергии или о состоянии загрязнённости города выхлопными газами автомобилей.

Со средним арифметическим связано важнейшее понятие *средней скорости движения*. До сих пор мы решали задачи на движение, в которых предполагалось, что объект движется с постоянной скоростью, как говорят, *равномерно*, то есть в равные промежутки времени проходит равные расстояния. В действительности такое движение встречается достаточно редко.

Например, рейсовый автобус то ускоряет движение, то тормозит или вообще останавливается. А его средней скоростью на маршруте считается частное от деления длины маршрута на затраченное время. Другими словами, если бы автобус двигался *равномерно со средней скоростью*, то на свой маршрут он затратил бы как раз столько времени, сколько он затрачивает фактически.

Задача 3. Автобус первые 2 часа ехал со скоростью 56,6 км/ч, а следующие 3 ч – со скоростью 48,1 км/ч. С какой средней скоростью он ехал?

Фактически:	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>I</td> <td>II</td> <td>III</td> <td>IV</td> <td>V</td> </tr> <tr> <td>56,6</td> <td>56,6</td> <td>48,1</td> <td>48,1</td> <td>48,1</td> </tr> </table>					I	II	III	IV	V	56,6	56,6	48,1	48,1	48,1
I	II	III	IV	V											
56,6	56,6	48,1	48,1	48,1											
В среднем:	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>51,5</td> <td>51,5</td> <td>51,5</td> <td>51,5</td> <td>51,5</td> </tr> </table>					51,5	51,5	51,5	51,5	51,5					
51,5	51,5	51,5	51,5	51,5											



Решение:

1) $56,6 \cdot 2 + 48,1 \cdot 3 = 257,5$ (км) – весь пройденный автобусом путь.

2) $2 + 3 = 5$ (ч) – все время пути.

3) $257,5 : 5 = 51,5$ (км/ч).

О т в е т: средняя скорость автобуса 51,5 км/ч.

В этом решении речь в действительности также идет о среднем арифметическом. В самом деле, время, затраченное автобусом, разбивается на отдельные часы, и записывается расстояние в километрах, пройденное за каждый час:

56,6; 56,6; 48,1; 48,1; 48,1.

К **257** 1) Найди среднее арифметическое чисел 2 и 8. Изобрази эти числа и их среднее арифметическое на числовой прямой. Что ты замечаешь?

2) Изобрази на числовой прямой два произвольных числа и их среднее арифметическое. Сравни полученный результат с результатом предыдущего задания. Сформулируй *гипотезу*.

258 Найди среднее арифметическое чисел:

1) a и b ; 2) a, b и c ; 3) a, b, c и d ; 4) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$.

259 Отметь на координатном луче произвольные числа x и y . Затем выполни необходимые измерения и изобрази на этой прямой среднее арифметическое чисел x и y .

260 Найди среднее арифметическое чисел:

1) 1,5 и $2\frac{1}{4}$; 3) $5\frac{1}{6}$; 1,25 и 3,5; 5) 2,108; $4\frac{9}{25}$; 8,1 и 1,44;
2) $7\frac{1}{2}$ и 4,1; 4) 0,54; $1\frac{4}{5}$ и 2,46; 6) 0,01; 0,03; 0,05; 0,07; 0,09.

261 Найди сумму:

а) двух чисел, если их среднее арифметическое равно 4,5;
б) трёх чисел, если их среднее арифметическое равно $1\frac{5}{6}$;
в) пяти чисел, если их среднее арифметическое равно 0,28;
г) восьми чисел, если их среднее арифметическое равно $10\frac{3}{5}$.

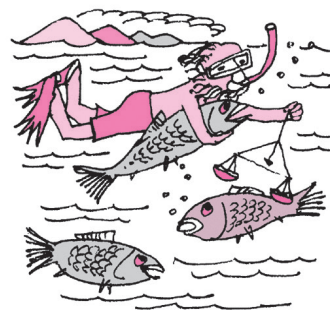
262 1) В волейбольной секции школы занимается 24 человека. Их средний возраст 15,5 лет. После того как в секцию записался новый игрок, средний возраст её участников стал 15,4 лет. Сколько лет новому игроку?

2) В 5 «А» классе 30 учащихся. Их средний возраст $10\frac{1}{3}$ лет, а вместе с учителем математики их средний возраст 11 лет. Сколько лет учителю математики?

263 1) Чему равна средняя температура воздуха в полдень в первую неделю мая, если термометр показывал в эти дни $4^\circ, 6^\circ, 10^\circ, 12^\circ, 16^\circ, 18^\circ, 10^\circ$? Ответ округли с точностью до целых.

2) На городских соревнованиях по фигурному катанию одной из участниц, чтобы попасть в десятку сильнейших, требовалось набрать в произвольных упражнениях не менее 5,4 балла. Судьи ей выставили оценки: 5,2; 5,6; 5,4; 5,5; 5,3; 5,4; 5,6; 5,6. Справилась ли фигуристка со своей задачей?





- 264** 1) Ихтиолог проводит измерение веса рыбы горбуша в реке Камчатка. Пробный улов показал, что среди выловленных рыб 4 горбуши весят по 1,2 кг, 5 горбуш – по 1,4 кг, ещё 5 горбуш – по 1,6 кг и остальные 6 горбуш – по 1,7 кг. Чему равен средний вес пойманных рыб?
- 2) Смешали 2 кг конфет по цене 142,6 р. за килограмм и 3 кг конфет по цене 189,6 р. за килограмм. Сколько стоит 1 кг ассорти?
- 265** Для проверки всхожести семян нового сорта цветов посадили 5 сотен семян. Из первой сотни всошло 95 семян, из второй – 84, из третьей – 72, из четвертой – 78, а из пятой – 86. Сколько в среднем всошло семян на одну сотню?
- 266** 1) Лыжная трасса 2,4 км идёт на подъём, 3,2 км – на спуск, а остальные 5,2 км – по равнине. Лыжник прошёл эту трассу за 40 мин. С какой средней скоростью он шёл?
- 2) Расстояние от дома до дачи 75,6 км. По пути от дома до дачи отец с сыном ехали на автомобиле сначала по шоссе в течение 0,8 ч, затем по грунтовой дороге 0,4 ч и, наконец, по просёлочной дороге 0,2 ч. С какой средней скоростью они ехали?
- 267** 1) Велосипедист за первый час проехал 12,6 км, а в следующие 2 часа он ехал со скоростью 13,5 км/ч. Определи среднюю скорость велосипедиста.
- 2) Геологи шли 1,5 ч со скоростью 5,8 км/ч, следующие 3,2 ч – со скоростью 4,5 км/ч и последние 0,3 ч – со скоростью 3 км/ч. С какой средней скоростью прошли геологи весь маршрут?
- 268** 1) Фермер имеет 3 делянки с картофелем площадью соответственно 10 а, 20 а и 30 а. С первой делянки он собрал урожай 17,4 ц, со второй – 30 ц, а с третьей – 46,8 ц. Определи урожайность картофеля на каждой из делянок и среднюю урожайность всего картофельного поля.
- 2) Колхоз засеял пшеницей два поля. Площадь первого поля 75 га, а площадь второго поля на 50 га меньше. С первого поля собрали урожай 2580 ц, а со второго – 720 ц. На сколько урожайность первого поля была выше, чем второго? Чему равна средняя урожайность пшеницы в этом колхозе?
- 269** 1) Среднее арифметическое двух чисел равно 8,2, а одно из них равно 4,5. Найди второе число.
- 2) Среднее арифметическое двух чисел равно 21,8, причем одно из них на 6,8 больше другого. Найди эти числа.
- 3) Первое число в 5 раз меньше второго, а их среднее арифметическое равно 12,6. На сколько второе число больше первого?
- 4) Среднее арифметическое трёх чисел равно 10,4. Первое число равно 9,6, а второе в 2 раза больше третьего. Найди эти числа. Какую часть меньшее число составляет от 9,6? Вырази эту часть в процентах.

275 Докажи высказывания:

- Сумма числа 219 и любого числа, которое при делении на 14 даёт остаток 3, является четным числом.
- Сумма числа 49 и любого числа, которое при делении на 6 даёт остаток 5, кратна шести.

276 Вставь вместо звёздочек пропущенные числа и сделай проверку:

$$\begin{array}{r} 7,3 * 8 * \\ + 1 *, * 4 * 2 \\ \hline 2 5,9 5 7 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 * 9 * 0 * \\ \times \quad * , * 4 \\ \hline 5 5 8 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 *, 1 * * \quad | \quad 7 5 \\ - * * 5 \quad \quad * , * * * \\ \hline * * * \\ - * * * \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 4 *, * 3 * \\ - * * 3, 4 * 0 \\ \hline 1 4, 5 7 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * * 1 6 * \\ * * * * * * * , * * \end{array}$$

277 Построй отрицание высказываний:

- Существует треугольник с двумя тупыми углами.
- Все окружности имеют равные радиусы.
- Хорда окружности может быть больше её диаметра.
- Каждый параллелограмм является прямоугольником.
- Некоторые параллельные плоскости перпендикулярны.



278 Прочитай высказывания и определи их истинность или ложность. Построй отрицания ложных высказываний.

- $\exists a \in \mathbb{N}: \frac{a}{7}$ – несократимая дробь;
- $\forall a \in \mathbb{N}: \text{НОД}(a, 7) = 1$;
- $\forall b, n \in \mathbb{N}: b^n = bn$;
- $\exists b, n \in \mathbb{N}: b^n = bn$.

279 Реши уравнения:

$$1) 4 \frac{3}{14} - (0,5x + 2 \frac{1}{6}) : 6 \frac{1}{3} = 3 \frac{5}{7};$$

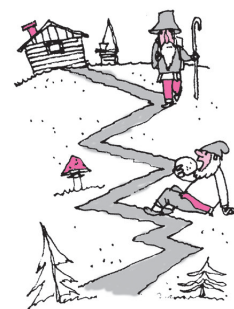
$$3) 2,3z + 4 \frac{1}{2}z - 1 \frac{4}{5}z + z = 25;$$

$$2) (2,6 - 2,2 : y) : 0,19 - 1 \frac{7}{12} = 8 \frac{5}{12};$$

$$4) 5(2k - 1 \frac{1}{3}) = 2,4k + \frac{14}{15}.$$

280 Пешеход вышел в 8 ч утра из села на станцию, удаленную от села на расстояние 15 км, со скоростью 3 км/ч. Через 1,5 ч из того же села по тому же маршруту вышел второй пешеход со скоростью 6 км/ч. Через 1 ч после своего выхода второй пешеход сделал получасовую остановку, а затем продолжил путь с прежней скоростью. Построй график движения пешеходов и определи по графику:

- В котором часу второй пешеход догнал первого?
- Какое расстояние было между пешеходами в момент выхода второго пешехода? В 11 ч 30 мин?
- В какие моменты времени расстояние между ними было равно 3 км?



281 В таблице представлены значения переменной y при указанных значениях переменной x . Запиши зависимость y от x с помощью формулы. Построй график этой зависимости, если $0 \leq x \leq 6$.

1)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	4	6	8	10	12

2)

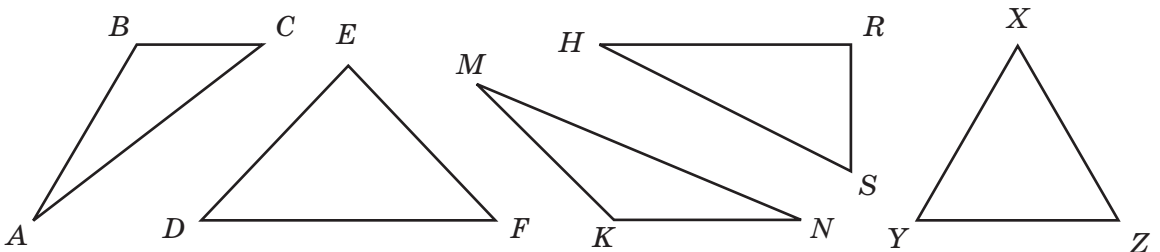
x	0	1	2	3	4	5	6
y	3	4	5	6	7	8	9

282 1) Прочитай определения и назови определяемые понятия:

Треугольник, две стороны которого равны, называется равнобедренным.

Две равные стороны равнобедренного треугольника называются боковыми сторонами, а третья сторона – основанием.

2) Какие из треугольников на рисунке являются равнобедренными? Назови их основания и боковые стороны.



3) Построй в координатном углу треугольник ABC , если $A(9; 0)$, $B(0; 6)$, $C(15; 9)$. Докажи, что треугольник ABC – равнобедренный. Какие стороны этого треугольника являются боковыми сторонами, а какая сторона – основанием?

4) Построй произвольный равнобедренный треугольник. Соедини середину основания с противоположной вершиной. Измерь углы получившихся треугольников. Повтори эксперимент ещё 2 раза и сформулируй гипотезу. Можно ли считать доказательством твоей гипотезы выполненные построения и измерения?

283 Найди среднее арифметическое чисел:

- 1) m и n ; 3) 5 и $\frac{1}{5}$; 5) $0,48$; $3,4$ и $5,816$;
 2) x , y и z ; 4) $8,25$ и $1,15$; 6) $2,3$; $2,4$; $2,5$; $2,6$; $2,7$; $2,8$; $2,9$; 3 ; $3,1$; $3,2$.

284 В одной из игр КВН команда «Верные друзья» получила за домашнее задание оценки 5; 6; 4; 5; 6, а их соперники, команда «Гусары», за это же задание получила оценки 4; 5; 7; 5; 4. Какая из команд лучше справилась с домашним заданием? Какая команда победила в этой игре, если конкурс «Домашнее задание» был последним, а перед его проведением у команды «Верные друзья» было 26,7 балла, а у команды «Гусары» – 26,8 балла?

- 285** 1) Найди сумму четырёх чисел, если их среднее арифметическое равно 29.
2) Средняя температура воздуха за неделю равна $18,6^\circ$, а за шесть дней без воскресенья – $18,4^\circ$. Какой была температура воздуха в воскресенье?

- 286** В классе самостоятельную работу по математике 8 учеников написали на пять, 12 учеников – на четыре, 4 ученика – на три и 1 ученик – на два. Вычисли средний балл класса за эту самостоятельную работу.

- 287** Самолёт летел 1,2 ч со скоростью 840 км/ч, а в следующие 0,6 ч из-за встречного ветра его скорость снизилась до 780 км/ч. С какой средней скоростью он пролетел этот путь?

- 288** 1) Пасечник собрал со своих 24 ульев в период цветения липы a кг мёда, в период цветения гречихи – b кг мёда, а в период цветения клевера – c кг мёда. Сколько килограммов мёда с одного улья в среднем собрал пасечник за этот период?

- 2) Колхоз засеял овсом два поля. Площадь одного поля 32 га, а площадь второго поля 48 га. С первого поля собрали x ц овса, а со второго – y ц. Чему равна урожайность каждого из полей? Чему равна средняя урожайность овса в этом колхозе?



- 289** 1) Среднее арифметическое трёх чисел равно 25,6. Одно из этих чисел равно 32,8, а второе – 21,4. Найти третье число.

- 2) Среднее арифметическое четырёх чисел равно 2,5. Второе из этих чисел в 2 раза больше первого, третье – в 3 раза больше первого, а четвёртое – в 4 раза больше первого. Найти эти числа.

- 290** На координатном луче отмечены числа 1 и x . Перерисуй чертёж в тетрадь и отметь с помощью циркуля на этом луче числа $x + 1$, $x - 1$, $x + 2$, $2x$.



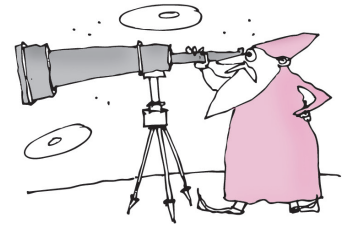
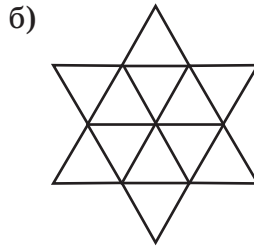
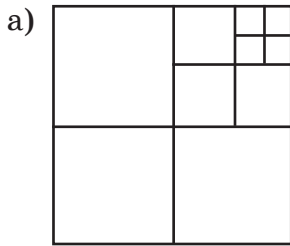
- 291** При делении некоторого числа на 12 в остатке получилось 11. Каким будет остаток при делении этого числа: а) на 6; б) на 3; в) на 4; г) на 2?

- 292** 1) $(28,3 + 9,118) : 5,3 + \left(50 \frac{1}{20} - 10,85\right) \cdot \frac{3}{40}$;

$$2) \left[\frac{1,5 + 3 \frac{1}{6}}{3 \frac{1}{6} - 2 \frac{7}{18}} : \frac{43,6 - \left(120 \frac{3}{10} + 33,7\right) \cdot 0,27}{2,4 + 4 \frac{1}{3}} \right] \cdot 0,28 - \frac{1,3 \cdot \frac{9}{13} + 0,816 : 0,8}{1 \frac{5}{11} \cdot 2,2}.$$



293* Сколько изображено на рисунке: а) квадратов; б) треугольников?



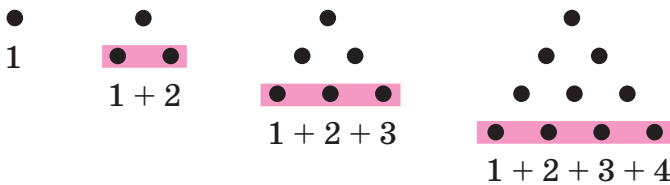
294*

Может ли число $a^2 + b^2 + c^2$ делиться на 5, если ни одно из натуральных чисел a , b и c не делится на 5?

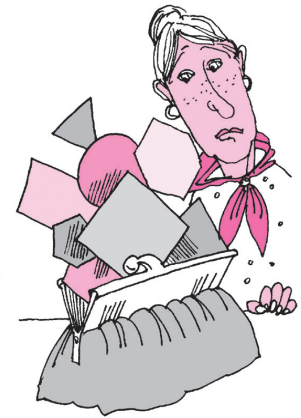
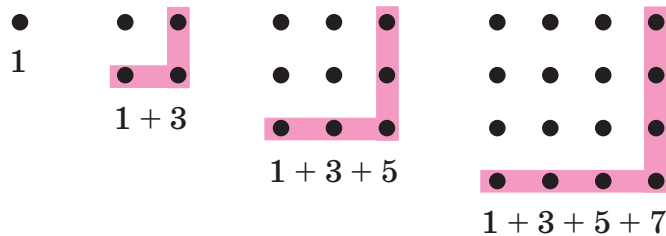
295*

Некоторые числа можно связать с геометрическими фигурами. Рассмотрим рисунки и продолжи последовательности треугольных и квадратных чисел. Найди сотые члены последовательностей этих чисел.

а) Треугольные числа: 1, 3, 6, 10, ...



б) Квадратные числа: 1, 4, 9, 16, ...



296*

1) Из Иванова в Москву за учебниками математики отправился микроавтобус, который прошёл весь путь со средней скоростью 50 км/ч. На обратном пути его средняя скорость составила только 40 км/ч. Чему равна средняя скорость микроавтобуса на полном маршруте Иваново – Москва – Иваново? Сравни её со средним арифметическим скоростей по дороге «туда» и «обратно». (У к а з а н и е: расстояние между Москвой и Ивановом обозначь s .)

2) Реши эту же задачу для «буквенных» скоростей v_1 и v_2 . Полученное выражение называют *средним гармоническим* чисел v_1 и v_2 . Придумай определение среднего гармонического трёх, четырёх и вообще любого количества чисел.

3) В этой задаче среднее гармоническое чисел 50 и 40 оказалось меньше их среднего арифметического. Будет ли такое неравенство верно и для других чисел? Проведи несколько экспериментов. Можно ли на их основании сделать общий вывод? Почему?

Задачи для самопроверки.

297 1) $3,6 \cdot \frac{2}{9}$; 2) $7\frac{1}{5} - 3,059$; 3) $\frac{1}{8} : 12,5$; 4) $2\frac{3}{11} \cdot 0,22$.

298 1) $\frac{3,9 \cdot 0,7 \cdot 4,8 \cdot 0,03}{0,91 \cdot 5,4 \cdot 0,032}$; 2) $\frac{4\frac{1}{8} \cdot 2,5 \cdot 1,6}{0,5 \cdot 2\frac{1}{4} \cdot 8,8}$; 3) $\frac{(3\frac{1}{3} : 10 + 2\frac{1}{6} : 3,25) : 0,125}{\frac{2}{13} \cdot 5,2 + 3 \cdot \frac{2}{13} + 4,8 \cdot \frac{2}{13}}$.

299 $(1,6 : \frac{2}{3} + 1\frac{1}{7} \cdot 1,4) : 0,08 - (9 - 9 : 4\frac{2}{7}) : 0,23 \cdot (2,25 - 1\frac{1}{4})$.

300 Катер прошёл против течения реки 21,6 км за 1,2 ч, а по течению реки за то же время – расстояние на 4,8 км большее. Чему равна собственная скорость катера и скорость течения реки?

301 Слесарь получил в январе зарплату 18 350 р., в феврале – 18 470 р., а в марте – 18 500 р. Он узнал, что на соседнем предприятии средний заработок слесаря за этот же период составил 18 460 р. На каком предприятии зарплата слесаря выше?

302 Пароход плыл 1,5 ч по реке со скоростью 36,4 км/ч, а затем ещё 0,5 ч по озеру со скоростью 33,6 км/ч. С какой средней скоростью он плыл?

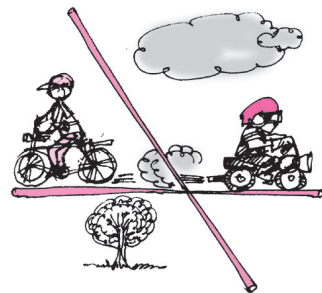
303 Два поезда выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми равно 385 км. Скорость первого поезда в 1,2 раза больше скорости второго поезда. Какое расстояние прошёл первый поезд до его встречи со вторым?

304 По лыжной трассе в одном направлении идут два лыжника. Сейчас расстояние между ними 2,4 км. Скорость лыжника, идущего впереди, равна 9,6 км/ч, а скорость лыжника, идущего сзади, – 13,2 км/ч. Через сколько времени второй лыжник догонит первого?

305 Из одного и того же города одновременно в противоположных направлениях выехали велосипедист и мотоциклист. Скорость велосипедиста в 3 раза меньше скорости мотоциклиста. С какими скоростями они едут, если через 1 ч 20 мин после выезда расстояние между ними стало 96 км?

306 К бассейну подведены 2 трубы. Через первую трубу бассейн может наполниться за 9 ч, а через две трубы, открытые одновременно, – за 3 ч 36 мин. За сколько времени наполнится пустой бассейн через одну вторую трубу?

307 При пересечении двух прямых один из образовавшихся углов в 2 раза больше другого. Найди величины всех образовавшихся углов и построй их.



§ 2. Проценты

1. Понятие о проценте

Проценты – одно из понятий прикладной математики, которые часто встречаются в повседневной жизни. Так, часто можно прочитать или услышать, что, например, в выборах приняли участие **56,3%** избирателей, рейтинг победителя конкурса равен **74%**, промышленное производство увеличилось на **3,2%**, банк начисляет **8%** годовых, молоко содержит **1,5%** жира, ткань содержит **100%** хлопка и т. д. Ясно, что понимание такой информации необходимо в современном обществе.



Ещё с младших классов нам известно, что **одним процентом от любой величины** – денежной суммы, числа учащихся школы и т. д. – **называется одна сотая её часть**. Обозначается процент знаком **%**. Таким образом,

1% – это $0,01$, или $\frac{1}{100}$ часть величины.

Приведём примеры:

- 1% от минимальной заработной платы 2300 р. (сентябрь 2007 г.) – это $2300 : 100 = 23$ рубля;
- 1% от населения России, равного примерно 145 млн человек (2007 г.), – это $1,45$ млн человек;
- 3% -я концентрация раствора соли – это 3 г соли в 100 г раствора (напомним, что концентрация раствора – это часть, которую составляет масса растворенного вещества от массы всего раствора).

Понятно, что вся рассматриваемая величина составляет **100 сотых**, или **100%** от самой себя. Поэтому, например, надпись на этикетке «хлопок **100%**» означает, что ткань состоит из чистого хлопка, а стопроцентная успеваемость означает, что в классе нет неуспевающих учеников.

Слово «процент» происходит от латинского *pro centum*, означающего «от сотни» или «на 100». Это словосочетание можно встретить и в современной речи. Например, говорят: «Из **каждых 100 участников лотереи 7 участников получили призы**». Если понимать это выражение буквально, то это утверждение, разумеется, неверно: ясно, что можно выбрать **100** человек, участвующих в лотерее и не получивших призы. В действительности точный смысл этого выражения состоит в том, что призы получили **7%** участников лотереи, и именно такое понимание соответствует происхождению слова «процент»: 7% – это 7 из 100 , 7 человек из 100 человек.

Знак «%» получил распространение в конце XVII века. В 1685 году в Париже была издана книга «Руководство по коммерческой арифметике» Маттье де ла Порта. В одном месте речь шла о процентах, которые тогда обозначали «cto» (сокращенно от *cento*). Однако наборщик принял это «cto» за дробь и напечатал «%». Так из-за опечатки этот знак вошел в обиход.

Любое число процентов можно записать в виде десятичной дроби, выражающей часть величины.

Чтобы выразить проценты числом, нужно количество процентов разделить на 100. Например:

$$58\% = \frac{58}{100} = 0,58; \quad 4,5\% = \frac{4,5}{100} = 0,045; \quad 200\% = \frac{200}{100} = 2.$$

Для обратного перехода выполняется обратное действие. Таким образом, **чтобы выразить число в процентах, надо его умножить на 100:**

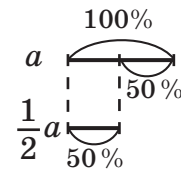
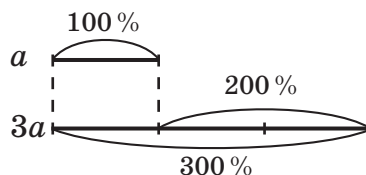
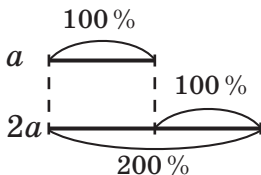
$$0,58 = \frac{0,58 \cdot 100}{100} = (0,58 \cdot 100)\% = 58\%;$$

$$0,045 = \frac{0,045 \cdot 100}{100} = (0,045 \cdot 100)\% = 4,5\% \text{ и т. д.}$$

В практической жизни полезно понимать связь между простейшими значениями процентов и соответствующими дробями: половина – 50%, четверть – 25%, три четверти – 75%, пятая часть – 20%, три пятых – 60% и т. д.

Полезно также понимать разные формы выражения одного и того же изменения величины, сформулированные без процентов и с помощью процентов. Например, в сообщениях «Минимальная заработная плата повышена с февраля на 50%» и «Минимальная заработная плата повышена с февраля в 1,5 раза» говорится об одном и том же.

Точно так же увеличить в 2 раза – это значит увеличить на 100%, увеличить в 3 раза – это значит увеличить на 200%, уменьшить в 2 раза – это значит уменьшить на 50%:

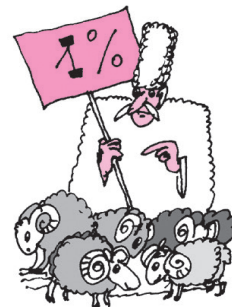


Аналогично

- увеличить на 300% – это значит увеличить в 4 раза,
- уменьшить на 80% – это значит уменьшить в 5 раз.

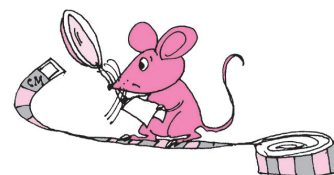
К 308 Найди 1% от: а) 340 р.; б) 1 км; в) 0,3 л; г) 6 га; д) 200 г; е) 6 тыс. жителей; ж) 0,12 р.; з) 700 овец.

309 Найди величину, если её 1% составляет: а) 1 см; б) 7 м²; в) 5,6 р.; г) 12 с; д) 45 г; е) 1800 книг; ж) 0,9 л; з) 2,4 кг.



310 Верно ли, что:

- а) 1 см составляет 1 % от 1 м;
- б) 1 г составляет 1 % от 1 кг;
- в) 1 а составляет 1 % от 1 га;
- г) 1 л составляет 1 % от 1 м³;
- д) 245 человек составляют больше 1 % от 10 тыс. человек;
- е) 245 человек составляют больше 1 % от 40 тыс. человек;
- ж) 3,3 млн р. больше 3 млн р. менее чем на 1 %;
- з) масса 990 г меньше 1 кг не более чем на 1 %?



311 Объясни смысл предложений и построй их графическую модель:

- а) В воздухе содержится 21 % кислорода.
- б) Цена на компьютеры снизилась на 10 %.
- в) Премия рабочего составила 30 % его зарплаты.
- г) Бригада выполнила план на 150 %.
- д) Бригада перевыполнила план на 150 %.
- е) Себестоимость товара равна 75 % его продажной цены.

312 Построй графическую модель высказываний, изобразив в обоих случаях продажную цену товара отрезком в 20 клеток.

- 1) «Доход составляет 25 % продажной цены товара».
- 2) «Доход составляет 25 % себестоимости товара».

В каком случае доход составляет большую величину?

313 Какую часть числа составляют 5 %, 10 %, 20 %, 25 %, 40 %, 50 %, 60 %, 75 %, 80 %? Перерисуй в тетрадь и заполни таблицу:

Проценты	5%	10%	20%	25%	40%	50%	60%	75%	80%
Запись в виде десятичной дроби									
Запись в виде обыкновенной дроби									

314 Замени проценты числами, выражающими части величин:

- а) 2 %; 6 %; 56 %; 90 %;
- б) 1,7 %; 0,8 %; 0,03 %; 104,5 %;
- в) $\frac{4}{7}$ %; $1\frac{2}{3}$ %; $33\frac{1}{3}$ %; $66\frac{2}{3}$ %;
- г) 150 %; 200 %; 450 %; 800 %.

315 Вырази в процентах части величин:

- а) 0,04; 0,32; 0,1; 0,7;
- б) 0,005; 0,063; 1,058; 2,004;
- в) $\frac{1}{25}$; $\frac{9}{20}$; $\frac{3}{40}$; $1\frac{11}{200}$;
- г) 1,8; 2,5; 3,75; 6.

316 Округли десятичную дробь до сотых, а затем вырази в процентах соответствующую ей часть величины:

- а) 0,715;
- б) 0,3961;
- в) 1,004;
- г) 0,0959595.

317 Укажи примерно с точностью до десятых, сколько процентов составляет:
а) треть всех жителей города; б) шестая часть учеников класса; в) девятая часть денежного вклада; г) двенадцатая часть семейного бюджета?

318 1) Один ученик сказал: «Одна треть всех учащихся школы – это 30 % всех учащихся школы». Прав ли он?

2) На совете акционеров говорилось: «Две трети планируемых инвестиций направлены в производство, значит, на социальную сферу остается 30 %». Согласен ли ты с этим утверждением?

319 Расшифруй название европейского государства, подобрав указанные доли величины. Вырази в процентах, какую примерно часть площади Москвы оно составляет и какую часть населения Москвы составляет его население. (Необходимые числовые данные узнай в энциклопедии.)

1 четверть	80 %	Р
2 примерно треть	20 %	О
3 половина	25 %	А
4 пятая часть	50 %	Д
5 примерно две трети	75 %	А
6 четыре пятых	66 %	Р
7 три четверти	33 %	Н



320 На сколько процентов изменилась величина, если она:

- | | |
|----------------------------|--------------------------|
| а) увеличилась в 1,5 раза; | г) уменьшилась в 5 раз; |
| б) уменьшилась в 1,5 раза; | д) увеличилась в 10 раз; |
| в) увеличилась в 5 раз; | е) уменьшилась в 10 раз? |

321 Найди группы равносильных утверждений и составь для каждой группы буквенный код:

А расходы уменьшились наполовину;	К расходы уменьшились вдвое;
В расходы уменьшились в 1,5 раза;	Л расходы уменьшились на 50 %;
С расходы уменьшились на треть;	М расходы уменьшились на $33\frac{1}{3}\%$;
Д расходы увеличились наполовину;	Н расходы увеличились вдвое;
Е расходы увеличились на 100 %;	О расходы увеличились на 50 %;
Ф расходы увеличились в 1,5 раза;	Р расходы удвоились.

322 1) К одной части сахара прибавили 4 части воды. Чему равна концентрация полученного раствора?

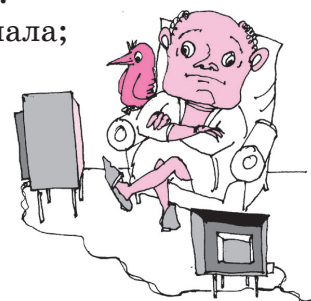
2) Килограмм соли растворили в 9 л воды. Чему равна концентрация полученного раствора? (Масса 1 л воды составляет 1 кг.)

- 323** Три человека организовали предприятие и договорились, что первый из них будет получать третью часть прибыли, двое других – по 20% прибыли, а оставшиеся деньги они будут вкладывать в развитие своего предприятия. Сколько процентов от прибыли они будут вкладывать в развитие предприятия? Запиши ответ, используя обыкновенные и десятичные дроби (с точностью до десятых).
- 324** Выплачена ли вся сумма, если:
 а) в первый раз выплачено 75% всей суммы, а во второй – 20% всей суммы;
 б) в первый раз выплачено 75% всей суммы, а во второй – 25% остатка?
 Сделай чертёж. В каком случае выплачено больше?
- 325** В автобусном парке 50% составляют городские автобусы, 80% остальных – автобусы междугородного класса. Каких автобусов больше – городских или междугородного класса?
- 326** 1) В классе мальчиков на 25% больше, чем девочек. На сколько процентов девочек в этом классе меньше, чем мальчиков?
 2) В первом квартале доля продажи товаров отечественных производителей увеличилась с 20% до 25%, а во втором – с 25% до 30%. В каком квартале процент увеличения был больше? (Процент увеличения – это отношение прироста в процентах к первоначальной доле в процентах.)
- 327** Согласно статистике, в городе N ежедневно 60% жителей пользуются метрополитеном, 30% – наземным общественным транспортом и 10% каждый день ездят на личных автомобилях. Можно ли утверждать, что все жители города ежедневно пользуются каким-либо видом транспорта?
- 328** Фонд общественного мнения города N опубликовал следующие данные о зрителях популярных телесериалов:

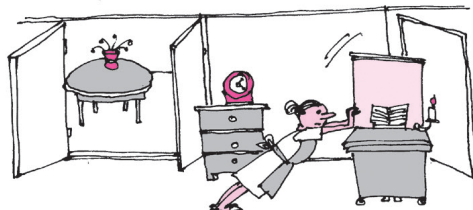
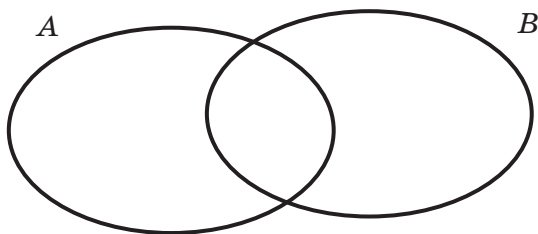
	«Петербургские тайны»		«Возвращение Мухтара»	
Время эфира	11.30	21.30	10.05	20.45
Зрители телесериала (в процентах к общему числу зрителей)	45%	67%	48%	35,6%

Можно ли на основании этих данных утверждать, что:

- 1) хотя бы один житель города N смотрит оба телесериала;
- 2) хотя бы один житель города N смотрит дважды в день телесериал «Петербургские тайны»;
- 3) хотя бы один житель города N смотрит дважды в день телесериал «Возвращение Мухтара»;
- 4) телесериал «Возвращение Мухтара» смотрит меньшее число жителей города N , чем телесериал «Петербургские тайны»?

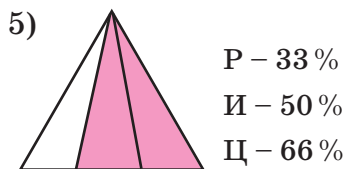
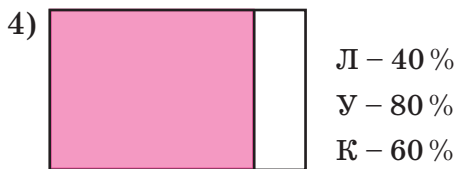
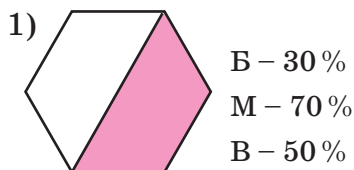


337 Расположи 5 точек в множествах A и B , изображенных на рисунке, так, чтобы: а) в одном из них было 2 точки, а в другом 4; б) в каждом из них было по 3 точки; в) в одном из них было 3 точки, а в другом 5; г) в каждом из них было по 4 точки; д) в одном из них было 2 точки, а в другом 5.



Д

338 Определи по каждому рисунку, какой примерно процент фигуры закрашен, и выбери наиболее подходящий ответ из трёх данных. Прочитай название столицы европейского государства. Какое это государство?



339 В таблице приведены *приближённые* значения площади и численности населения некоторых европейских государств и города Москвы. Пользуясь данными таблицы, найди процент, который составляют площадь и население этих государств соответственно от площади и населения Москвы. Проанализируй полученные результаты.

Название	Площадь (в км ²)	Население (в тыс. человек)
Ватикан	0,44	0,8
Монако	2	36
Сан-Марино	61	28
Лихтенштейн	160	35
Андорра	468	71
Люксембург	2586	440
Москва	1000	10 000



340 1) Замени проценты числами, выражающими части величин: 3%; 18%; 7,5%; $11\frac{13}{17}\%$; 150%; 528%.

2) Замени числа, выражающие части величин, процентами: 0,05; 0,28; 0,9; 0,045; $\frac{3}{25}$; 1,8; 4.

341 Найди равносильные утверждения:

- A** каждое восьмое издание выходит на английском языке;
- B** на английском языке выходит 12,5% всех изданий;
- C** на каждые 8 изданий одно приходится на английском языке;
- D** на английском языке печатается 8% всех изданий;
- E** на каждые 7 изданий только одно приходится на английском языке;
- F** из каждых 25 изданий 2 публикуются на английском языке;
- K** издания на английском языке составляют восьмую часть всех изданий;
- L** издания на английском языке составляют седьмую часть всех изданий.

342 Построй графическую модель и реши задачу:

1) Биржевые цены на акции предприятия A уменьшились на 75%. Во сколько раз уменьшились цены?

2) За последний год в городе N цены на услуги пассажирского транспорта увеличились в 2,5 раза. На сколько процентов увеличились цены?



343 Сократи дроби с натуральными числителями и знаменателями:

1) $\frac{324}{576}$; 2) $\frac{72 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 13}{39 \cdot 75 \cdot 40 \cdot 28}$; 3) $\frac{34 \cdot 85 - 34 \cdot 15}{15 \cdot 34 + 34 \cdot 85}$; 4) $\frac{9a^2}{30ab}$; 5) $\frac{x-2}{5x-10}$.

344 1) Вычисли значения дробей A и B :

A
$$\frac{(2,448 : \frac{4}{5} - 1,56) \cdot 0,73 : 0,1 - 3\frac{1}{4}}{[0,3567 : (2,9 \cdot \frac{3}{50}) + 3,45] \cdot 0,01}$$

B
$$\frac{[3\frac{1}{3} + 1\frac{2}{7} : (2\frac{3}{7} - 1\frac{11}{14}) \cdot (3,5 - 0,5 \cdot \frac{1}{3})] \cdot 17,5}{1\frac{8}{9} \cdot 1,8 : 3\frac{2}{5} - (8\frac{2}{11} - 8\frac{2}{11}) \cdot (4,01 + 1\frac{6}{13} \cdot 3,9)}$$



2) Определи, на сколько процентов A меньше, чем B .
На сколько процентов B больше, чем A ?

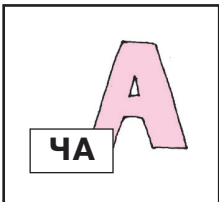
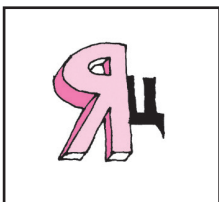
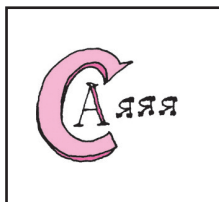
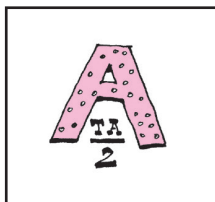
345 Найди ответ задачи, а затем составь и реши две обратные задачи.
 На предприятии 60 сотрудников. В конце месяца премию получили 15% всех сотрудников. Сколько человек получили премию?

346 Из всех предприятий, зарегистрированных городской регистрационной палатой в течение месяца, 50% составили муниципальные предприятия, 10% – индивидуальные предприниматели, остальные – акционерные общества (АО), причем 75% всех АО – закрытые акционерные общества. Сколько процентов составили закрытые акционерные общества:

- а) от всех предприятий;
- б) от муниципальных предприятий?

с **347*** Расшифруй ребусы:

- 1) $\frac{\text{К}}{2}$
- 2) $\frac{\text{ЯК}}{3}$
- 3) $\frac{\text{А}}{\text{РОК}}$
- 4) $\frac{\text{КА}}{\text{ХОД}}$
- 5) $\frac{\text{МО}}{\text{КО}}$

- 6) 
- 7) 
- 8) 
- 9) 

- 10) 
- 11) 
- 12) 

348* Весёлый турист отправился на слёт, предполагая каждый день проходить треть всего пути, чтобы через 3 дня прибыть на место. В первый день он прошёл треть пути. Но во второй день, устав, он прошёл не треть пути, а треть остатка. И в третий день он прошёл треть нового остатка. В результате ему осталось пройти ещё 32 км. Сколько километров от дома до места слёта?

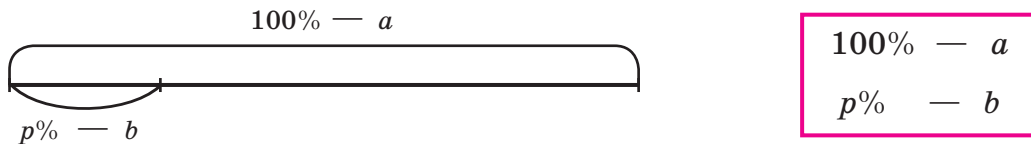
349* Антоше подарили весы, и он начал взвешивать игрушки. Машину уравновесили мяч и 2 кубика, а машину с кубиком – 2 мяча. Сколько кубиков уравновесят машину?

350* В математической олимпиаде для 6-х классов 30 участников решили хотя бы по одной задаче. Арифметическую задачу решили 18 человек, геометрическую – 12, а логическую – 8. При этом все 3 задачи решили двое, только геометрическую и логическую – трое, а только арифметическую и логическую – один. Сколько участников решили только по одной задаче каждого вида? Сколько справились с двумя задачами – арифметической и геометрической?

2. Задачи на проценты

Поскольку проценты можно выразить дробями, задачи на проценты являются, по существу, теми же задачами на дроби.

В простейших задачах на проценты некоторая величина a принимается за 100% («целое»), а её часть b выражается числом $p\%$:



В зависимости от того, что неизвестно — a , b или p , выделяются три типа задач на проценты. Эти задачи решаются так же, как и соответствующие задачи на дроби, но перед их решением число $p\%$ выражается дробью.

I. Нахождение процента от числа.

Чтобы найти $\frac{p}{100}$ от a , надо a умножить на $\frac{p}{100}$:

$$b = a \cdot \frac{p}{100}.$$

Итак, *чтобы найти $p\%$ от числа, надо это число умножить на дробь $\frac{p}{100}$* . Например, 20% от 45 кг равны $45 \cdot 0,2 = 9$ кг, а 118% от x равны $1,18x$.

II. Нахождение числа по его проценту.

Чтобы найти число по его части b , выраженной дробью $\frac{p}{100}$ ($p \neq 0$), надо b разделить на $\frac{p}{100}$:

$$a = b : \frac{p}{100}.$$

Таким образом, *чтобы найти число по его части, составляющей $p\%$ этого числа, надо эту часть разделить на $\frac{p}{100}$* . Например, если 8% длины отрезка составляют 2,4 см, то длина всего отрезка равна $2,4 : 0,08 = 240 : 8 = 30$ см.

III. Нахождение процентного отношения двух чисел.

Чтобы найти, сколько процентов число b составляет от a ($a \neq 0$), надо сначала узнать, какую часть b составляет от a , а затем эту часть выразить в процентах:

$$p = \frac{b}{a} \cdot 100 (\%).$$

Значит, *чтобы узнать, сколько процентов первое число составляет от второго, надо первое число разделить на второе и результат умножить на 100*.

Например, 9 г соли в растворе массой 180 г составляют $\frac{9 \cdot 100}{180} = 5\%$ раствора.

Частное двух чисел, выраженное в процентах, называется **процентным отношением** этих чисел. Поэтому последнее правило называют *правилом нахождения процентного отношения двух чисел*.

Нетрудно заметить, что формулы

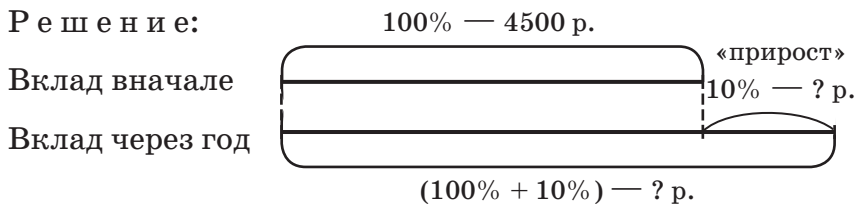
$$b = a \cdot \frac{p}{100}, \quad a = b : \frac{p}{100} \quad \text{и} \quad p = \frac{b}{a} \cdot 100 \quad (a, b, p \neq 0)$$

взаимосвязаны, а именно, две последние формулы получаются из первой, если выразить из неё значения a и p . Поэтому первую формулу считают основной и называют *формулой процентов*. Формула процентов объединяет все три типа задач на дроби, и, при желании, можно ею пользоваться, чтобы найти любую из неизвестных величин a , b и p .

Составные задачи на проценты решаются аналогично задачам на дроби. Для наглядности, как и раньше, можно использовать схему. Рассмотрим примеры.

Задача 1. Банк обещает своим клиентам годовой рост вклада на 10%. Какую сумму денег может получить через год человек, вложивший в этот банк 4500 р.?

Решение:



1) $4500 \cdot 0,1 = 450$ (р.) — «прирост» за год.

2) $4500 + 450 = 4950$ (р.)

О т в е т: в конце года на счёте будет находиться 4950 р.

Задачу можно было бы решить и иначе: найти сначала, сколько процентов составит сумма на счёте в конце года от первоначальной — $100\% + 10\% = 110\%$, а затем вычислить 110% от 4500 рублей.

Задача 2. Какая сумма была положена в банк, выплачивающий доход в размере 7% годовых, если величина вклада по истечении года составила 13 375 р.?

Решение:

1) $100\% + 7\% = 107\%$ — составляет 13 375 р. от первоначального вклада.

2) $107\% = 1,07$.

$13\,375 : 1,07 = 12\,500$ (р.) — сумма вклада.

О т в е т: сумма первоначального вклада 12 500 р.

Задача 3. В 200 г воды растворили 50 г соли. Какова концентрация полученного раствора?

Решение:

Концентрация раствора — это процент, который составляет масса растворённого вещества от массы раствора. Поэтому требуется вычислить процент, который составляет 50 г соли от всей массы раствора:

1) $50 + 200 = 250$ (г) — масса полученного раствора.

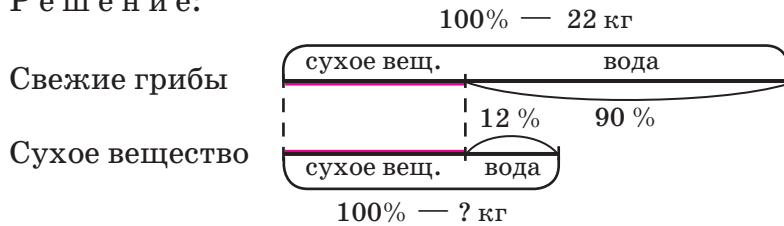
2) $(50 : 250) \cdot 100 = \frac{50 \cdot 100}{250} = 20$ (%).

О т в е т: концентрация раствора равна 20%.



Задача 4. Свежие грибы содержат 90% воды, а сушёные – 12%. Сколько сушёных грибов получится из 22 кг свежих?

Решение:



При сушке грибов испаряется вода, а масса сухого вещества не изменяется. Она составляет 10% от 22 кг, или 2,2 кг. В сушёных грибах на те же 2,2 кг приходится 88%. Значит, масса сушёных грибов равна частному 2,2 кг и 0,88.

Запишем это решение «по шагам»:

- 1) $100\% - 90\% = 10\%$ – составляет сухое вещество в свежих грибах;
- 2) $10\% = 0,1$;
 $22 \cdot 0,1 = 2,2$ (кг) – масса сухого вещества в свежих грибах;
- 3) $100\% - 12\% = 88\%$ – составляет сухое вещество в сушёных грибах;
- 4) $88\% = 0,88$,
 $2,2 : 0,88 = 2,5$ (кг).

О т в е т: масса сушёных грибов равна 2,5 кг.

Задача 5. В течение января цена на яблоки выросла на 30%, а в течение февраля – на 20%. На сколько процентов поднялась цена за 2 месяца?

Решение:

Утверждать, что цена выросла на 50%, нельзя, поскольку «первые» 30% подсчитываются от цены в конце декабря, а «вторые» 20% – от другой величины, цены на конец января.

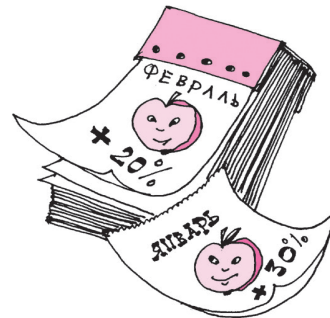
Поэтому будем рассуждать последовательно, обозначив для удобства первоначальную цену S . В конце января она стала равна $1,3S$, а в конце февраля – $1,2 \cdot (1,3S) = 1,56S$. Следовательно, она выросла на 56%.

Решение можно записать следующим образом:

Пусть S – первоначальная цена.

- 1) $1,3S$ – цена в конце января (130% от S);
- 2) $1,2 \cdot (1,3S) = 1,56S$ – цена в конце февраля (120% от $1,3S$);
- 3) $1,56S$ составляет 156% от S ;
 $156\% - 100\% = 56\%$.

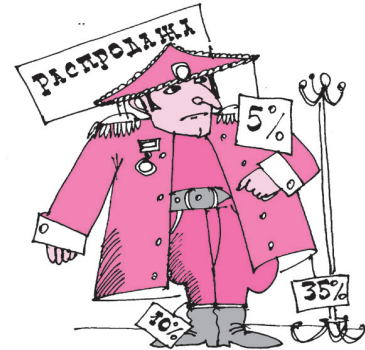
О т в е т: за 2 месяца цена выросла на 56%.



- К** **351** Сколько составляют:
- а) 8% от 6 кг; г) 0,4% от 0,25 с; ж) 20% от 15,25; к) 12% от a ;
 б) 30% от 15 м; д) 1,25% от 800 т; з) 75% от 80%; л) 35,6% от b ;
 в) 200% от 72 л; е) $33\frac{1}{3}\%$ от 27 см^3 ; и) 0,1% от 0,1%; м) $66\frac{2}{3}\%$ от c ?
- 352** Что больше: а) 15% от 17 или 17% от 15; б) 1,2% от 48 или 12% от 480; в) 147% от 621 или 125% от 549; г) 72% от 150 или 70% от 152; д) 80% от a или 40% от $2a$; е) 36% от $2,5b$ или 1,5% от $80b$?
- 353** 1) За поиск покупателей фирма предлагает своему агенту-дилеру вознаграждение в размере 6% от суммы заказа. На какое вознаграждение может рассчитывать дилер, если он нашел подходящий заказ на сумму 20 000 р.?
 2) Сколько соли получится при выпаривании: а) 375 граммов 12%-го раствора соли; б) 450 граммов 9%-го раствора соли; в) 20 граммов 17%-го раствора соли; г) 80 граммов 3%-го раствора соли?
- 354** Сколько будет, если: а) 100 р. увеличить на 300%; б) 500 р. уменьшить на 10%; в) a р. увеличить на 25%; г) b р. уменьшить на 20%?
- 355** Сравни результаты:
 а) 150 р. увеличили на 50% и 100 р. увеличили на 100%;
 б) 100 р. уменьшили на 50% и 150 р. уменьшили на 60%;
 в) a р. уменьшили на 25% и $1,2a$ р. уменьшили на 40%;
 г) b р. увеличили на 250% и $2b$ р. увеличили на 50%.
- 356** 1) В городе постоянно живут 10 тысяч граждан. Из них 85% ещё не достигли пенсионного возраста. Сколько граждан в этом городе достигли пенсионного возраста?
 2) Вкладчик внёс в банк 1200 р. В какую сумму вклад превратится через год, если банк начисляет доход в размере 4% годовых?
- 357** 1) Подоходный налог установлен в размере 13% от начисленной зарплаты. Какую зарплату получит работник в кассе предприятия, если ему начислено 5000 р.?
 2) В референдуме приняли участие 60% всех жителей города, имеющих право голоса. Сколько человек приняли участие в референдуме, если в городе 150 тыс. жителей, а право голоса имеют 83%?
- 358** При выдаче наличных рублей по дорожным чекам *American Express*, выписываемых в долларах, банк удерживает 2% в качестве комиссионных. Какую сумму получит клиент в рублях, если он предъявит чеки на 400 долларов и курс обмена составит 33,5 р. за доллар?



- 359** Найти, от какой величины:
- а) 7% составляют 7 р.; г) 12% составляют 36 экземпляров;
 б) 25% составляют 10 г; д) 20% составляют a см²;
 в) 50% составляют 15 тыс.км; е) 300% составляют b ч.
- 360** Сравнить величины, если:
- а) 40% первой составляют 300 р., а 30% второй составляют 400 р.;
 б) 150% первой составляют 120 р., а 120% второй составляют 90 р.;
 в) 50% первой составляют 0,5 a р., а 20% второй составляют 0,2 a р.;
 г) 12,5% первой составляют b р., а 30% второй составляют $3b$ р.
- 361** 1) Фирма платит рекламным агентам 5% от стоимости полученного заказа. На какую сумму агенту надо найти заказ, чтобы заработать 2000 р.?
 2) Сколько получится: а) 10% -го сахарного сиропа из 80 г сахара; б) 5% -го сиропа из 6 г сахара; в) 35% -го сиропа из 70 г сахара; г) 30% -го сиропа из 75 г сахара?
- 362** Сколько было, если:
- а) после увеличения на 30% стало 520 р.;
 б) после уменьшения на 10% стало 450 р.;
 в) после увеличения на 60% стало 8 a р.;
 г) после уменьшения на 70% стало $3b$ р.?
- 363** В каком случае первоначальная цена больше:
- 1) если при скидке 5% заплачено 190 р.;
 2) если при скидке 10% заплачено 180 р.;
 3) если при скидке 20% заплачено 170 р.;
 4) если при скидке 30% заплачено 140 р.?
- 364** 1) Какой должна быть заработная плата, чтобы после уплаты налогов и процентов по кредитам, составляющим в сумме 25% от начисленной зарплаты, работник получил 12 000 р.?
 2) Работник получает зарплату от нормы выработки. В конце месяца он получил 16 800 р., перевыполнив норму на 20%. Сколько дополнительно начислено ему в этот месяц?
- 365** 1) Цена на фотоаппараты в течение месяца упала сначала на 18%, а затем на 20% и составила 3280 р. Какой была цена на эти фотоаппараты в начале месяца?
 2) В овощехранилище при первой сортировке овощей потери составили 5% от всей массы овощей, а при повторной – 4% от оставшейся массы, после чего в хранилище оказалось 54,72 т овощей. Сколько тонн овощей было в хранилище до сортировки?
- 366** По данным N -ского горкомстата, товарооборот организаций, осуществляющих торговую деятельность, по сравнению с прошлым годом увеличился на 53% и составил 902 млн р. На какую сумму увеличился их товарооборот? Ответ округли с точностью до целого числа миллионов.



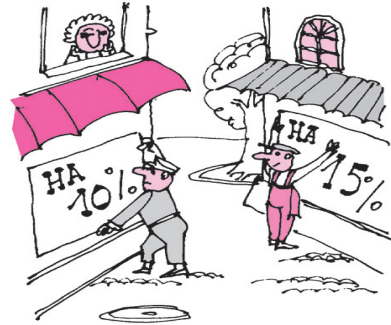
- 367** Сколько процентов составляют:
- а) 16 с от 50 с; г) 15 г от 1 кг; ж) 1,2 от 0,15; к) a от b ;
 б) 37 р. от 10 р.; д) 3 мм от 6 дм; з) 4 от 3; л) $2a$ от $8a$;
 в) 2,5 м от 20 м; е) 30 мин от 2 ч; и) 0,32 от $2\frac{2}{3}$; м) $0,12b$ от $3b$?
- 368** В каком случае процентное отношение больше:
- а) 8 отличников из 40 учащихся или 9 отличников из 50 учащихся;
 б) 6 разбитых лампочек из 20 или 7 разбитых лампочек из 30?
- 369** 1) В 5 тыс. из выпущенных 20 тыс. коробочек с жевательной резинкой находится сюрприз. Сколько процентов составили коробочки с сюрпризами?
 2) При наблюдении в течение некоторого времени за дорожным движением было подсчитано, что из проехавших 250 машин 180 были легковыми, а остальные – грузовыми. Сколько процентов от числа проехавших машин составили грузовые машины?
- 370** На сколько процентов изменилась цена, если она:
- а) была 100 р., а стала 250 р.; в) была 60 р., а стала 40 р.;
 б) была 250 р., а стала 100 р.; г) была 40 р., а стала 60 р.?
- 371** Какое изменение больше в процентном отношении:
- а) подорожание с 400 р. до 500 р. или с 500 р. до 600 р.;
 б) похудение со 100 кг до 90 кг или с 50 кг до 40 кг?
- 372** 1) Тарифы на проезд в наземном транспорте города N возросли с 8 р. до 10 р., а в городском метрополитене – с 15 р. до 18 р. Какие тарифы возросли больше в процентном отношении?
 2) В одном банке вклад 12 000 р. через год превратился в 12 840 р., а в другом – вклад в 15 000 р. превратился в 15 900 р. В каком банке выгоднее хранить деньги?
- 373** В городе N единый проездной билет стоит 600 р. Сколько процентов от начисленной зарплаты составляет цена проездного билета, если после вычета 13% -го налога работником получено: а) 10 440 р.; б) 13 050 р.?
- 374** В 10-х классах учится 100 человек. Успеваемость составляет 85% от количества учеников. Сколько процентов составит успеваемость в случае, если: а) придут ещё 10 двоечников; б) придут 10 отличников? Ответ округли с точностью до десятых.
- 375** Цена одной пластинки жевательной резинки составляет 4,5 р. Цена упаковки (10 пластинок) 36 р. На сколько процентов цена пластинки в упаковке меньше, чем цена отдельной пластинки? На сколько процентов цена отдельной пластинки больше, чем цена пластинки в упаковке?



- 376** 1) Сколько процентов от числа a составляют: $0,04a$; $0,2a$; $0,56a$; $1,8a$; $2,5a$; $3a$? На сколько процентов они, соответственно, меньше или больше, чем a ?
 2) Сколько процентов от $2b$ составляют: $0,04b$; $0,2b$; $0,56b$; $1,8b$; $2,5b$; $3b$? На сколько процентов они меньше или больше, чем $2b$?

- 377** Как изменилась величина, если она:
 а) сначала увеличилась на 20%, а потом увеличилась на 25%;
 б) сначала увеличилась на 20%, а потом уменьшилась на 25%;
 в) сначала уменьшилась на 20%, а потом уменьшилась на 25%;
 г) сначала уменьшилась на 20%, а потом увеличилась на 25%?

- 378** 1) В двух магазинах были одинаковые цены. В одном магазине их сначала понизили на 15%, а потом повысили на 10%, а в другом – сначала повысили на 10%, а потом понизили на 15%. Как изменились цены в этих магазинах по сравнению с первоначальными? В каком из них выгоднее купить одинаковый товар?



- 2) В двух магазинах цены были одинаковые. В одном магазине их сначала понизили на 40%, а потом повысили на 40%, а в другом – сначала повысили на 50%, но зато потом понизили на 50%. Как изменились цены в этих магазинах по сравнению с первоначальными?

- 379** В магазинах A и B цены в январе были одинаковые. Изменение цен в течение следующих четырёх месяцев показано в таблице:

	Февраль	Март	Апрель	Май
Магазин A	ув. на 50%	ум. на 10%	ув. в 2 раза	ум. в 3 раза
Магазин B	ум. в 2 раза	ув. в 1,5 раза	ув. на 100%	ум. на 20%

Как изменились цены в этих магазинах в мае по сравнению с январем? В каком из них цены стали ниже и на сколько процентов? В каком выше и на сколько процентов?

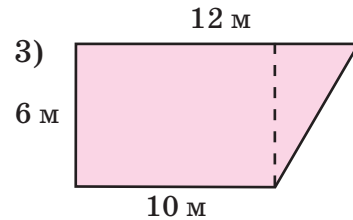
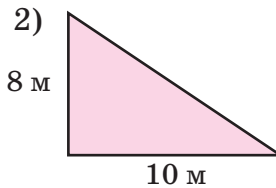
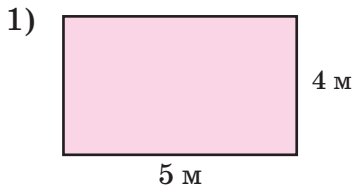
- 380** 1) Длину прямоугольника увеличили на 20%, а ширину – на 25%. На сколько процентов увеличилась площадь прямоугольника?
 2) Длину прямоугольника увеличили на 60%, а ширину уменьшили на 60%. Как изменилась площадь прямоугольника и на сколько процентов?
 3) Длина прямоугольника в 3 раза больше ширины. Длину уменьшили на 20%, а ширину уменьшили на 40%. На сколько процентов уменьшился периметр прямоугольника?
 4) Ширина прямоугольника в 4 раза меньше длины. Длину увеличили на 10%, а ширину уменьшили на 20%. Как и на сколько процентов изменился периметр прямоугольника?

- 381** 1) Имеются два раствора соли массой 80 г и 120 г. В первом растворе содержится 12 г соли, а во втором – 15 г соли. Чему равна концентрация этих растворов? Какой будет концентрация, если оба эти раствора смешать?
2) Смешали 200 г 10% -го сахарного сиропа и 300 г 20% -го сахарного сиропа. Чему равна концентрация полученной смеси?
- 382** 1) Какое количество сухого вещества содержится в 150 граммах 3% -го водного раствора этого вещества? В каком количестве 8% -го раствора содержится такое же количество этого вещества?
2) Какое количество 8% -го водного раствора сухого вещества надо взять, чтобы его можно было развести водой до получения 100 граммов 3% -го раствора этого же вещества?
- 383** 1) Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов воды надо выпарить из 80 кг морской воды, чтобы концентрация соли в ней увеличилась до 20%?
2) Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 20 кг морской, чтобы концентрация соли в ней уменьшилась с 3% до 2%?
- 384** 1) При выполнении работы по математике 15% учеников класса вовсе не справились с задачей, 25% учеников допустили ошибки, а остальные 24 человека решили её верно. Сколько учеников класса выполняли работу?
2) Сочинение по русскому языку писали 90 выпускников школы. Им было предложено три темы: по произведениям Пушкина, по произведениям Маяковского и свободная тема. Первую тему выбрали на 40% учеников больше, чем вторую, а третью – на 50% больше, чем первую. Сколько учеников писали сочинение по каждой теме?
- 385** В традиционном лыжном марафоне жителей города N участвовало в 1,5 раза больше любителей лыжного спорта, чем профессиональных спортсменов. Среди любителей призерами стали 20% от числа участников-любителей, а среди профессионалов – 90% от числа участников-профессионалов. Сколько процентов от всех участников соревнований стали призерами лыжного марафона?
- 386** Все 16 тысяч жителей на острове положительно относятся к спорту. 75% из них занимаются спортом активно. Из пассивных любителей спорта 20% от их числа являются заядлыми болельщиками, но только 10% этих болельщиков не пропускают ни одного выступления любимого спортсмена или команды. Сколько жителей на острове являются пассивными любителями спорта, притом заядлыми болельщиками, но считающими возможным пропустить некоторые из любимых соревнований?



387 Хозяйка купила 3 кг яблок по цене 40 р. за килограмм. На следующий день в этом магазине на эти яблоки была скидка 20%, и хозяйка купила еще 5 кг яблок. Чему равна средняя цена купленных хозяйкой яблок?

388 В городе N ежегодный налог на землю под индивидуальными гаражами в пределах нормы (15 м^2) установлен в размере 10% от ставки земельного налога, равного 20 р. за квадратный метр. Налог на часть площади сверх нормы, но не более двойной нормы, составляет 20% от ставки земельного налога, а налог на часть площади свыше двойной нормы – по полной ставке земельного налога. Вычисли величину ежегодного налога на изображенные участки земли под индивидуальными гаражами:

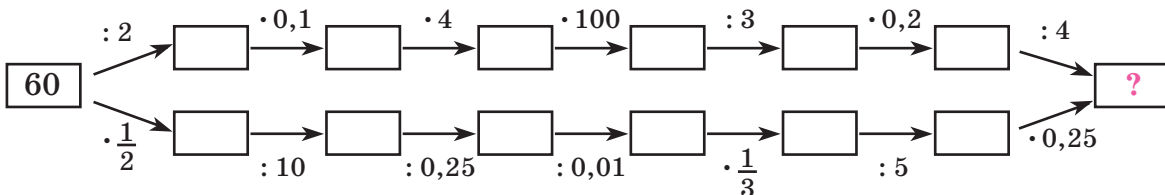


π **389** Верно ли, что: а) 30% равны одной трети; б) 25% равны одной пятой; в) 49% составляют меньше половины; г) 78% составляют больше трёх четвертей; д) увеличить на 200% – это увеличить в 2 раза; е) уменьшить на 50% – это уменьшить в 2 раза?

390 Найди равносильные утверждения и, располагая соответствующие им цифры в порядке возрастания, составь цифровой код:

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| 0 А составляет 40% от В; | 5 А больше, чем В, в 2,5 раза; |
| 1 А в 4 раза меньше, чем В; | 6 В больше, чем А, на 100%; |
| 2 А составляет 25% от В; | 7 А меньше, чем В, на 75%; |
| 3 А в 2 раза меньше, чем В; | 8 А составляет 50% от В; |
| 4 В больше, чем А, на 300%; | 9 А на 150% больше, чем В. |

391 Вычисли и объясни, почему разные цепочки вычислений приводят к одному и тому же результату:



392 Сравни и объясни, как изменяются результаты арифметических действий при изменении их компонентов, если все переменные – натуральные числа:

$$a + 2,3 \square a + 3\frac{4}{5}; \quad 5\frac{1}{7} - c \square 5\frac{1}{9} - c; \quad 2,125x \square x \cdot 2\frac{1}{8};$$

$$b - 0,5 \square b - 0,3; \quad 3,12 : d \square 3,2 : d; \quad y : 0,56 \square y : 0,6.$$

393 В сумме, разности, произведении и частном чисел x и y изменены компоненты действий. Например, запись $(x : 11) : (y + 3)$ означает, что делимое уменьшено в 11 раз, а делитель увеличен на 3. Объясни, что изменилось в выражениях: 1) $x + y$; 2) $x - y$; 3) xy ; 4) $x : y$. Запиши результаты этих изменений по образцу:



Образец: $(x + 1) - (y - 4) = (x - y) + 5$

$$(x : 2) : (y \cdot 3) = (x : y) : 6$$

1) а) $(x + 7,6) + (y + \frac{2}{5})$;

3) ж) $(x \cdot 3) \cdot (y : 3)$;

б) $(x + 1,5) + (y - 6)$;

з) $(x : 2) \cdot (y : 4)$;

в) $(x - 3\frac{3}{4}) + (y - 0,25)$;

и) $(x : 10) \cdot (y \cdot 5)$;

2) г) $(x - 5) - (y + 1\frac{1}{3})$;

4) к) $(x \cdot 4) : (y \cdot 2)$;

д) $(x + 4) - (y + 0,4)$;

л) $(x : 3) : (y \cdot 3)$;

е) $(x - 2\frac{1}{2}) - (y - 0,5)$;

м) $(x \cdot 2) : (y : 2)$.



394 Найди корень уравнения (устно):

а) $0,12 + x = 0,4$;

д) $3x = 11$;

и) $x + 4x = 2$;

н) $\frac{x}{3} = \frac{4}{5}$;

б) $x - 5,4 = \frac{1}{5}$;

е) $5 : x = 30$;

к) $2(0,5x - 3) = 0$;

о) $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$;

в) $3 - x = 0,003$;

ж) $x : 0,6 = 1\frac{2}{3}$;

л) $7x(x - 1,8) = 0$;

п) $\frac{0,1}{0,5} = \frac{x}{10}$;

г) $x + \frac{1}{8} = 1,375$;

з) $0,01x = 5$;

м) $2x + 9 = 3x - 1$;

р) $\frac{0,2}{0,3} = \frac{0,4}{x}$.

395 Упрости выражение и найди его значение:

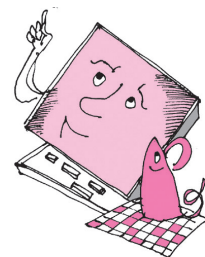
а) $7,2 \cdot (0,05a) \cdot 20$, если $a = \frac{1}{9}$;

б) $0,05 \cdot (0,125b) \cdot (8c)$, если $b = 1,8$, $c = 2$;

в) $0,1a + 2,5a + 0,5 + 1,8a + 3,5$, если $a = \frac{5}{11}$;

г) $1,6x + y + 0,4y + 0,9x$, если $x = 1,2$, $y = 5$;

д) $4(0,5n + 0,125) + 0,2(n + 2\frac{1}{2})$, если $n = 1,7$.



396 Запиши выражение в виде дроби и, если возможно, сократи его:

1) $\frac{a}{2} + \frac{b}{2a}$ ($a \neq 0$);

3) $\frac{3x}{y^2} \cdot (5y) \cdot \frac{2}{15x}$ ($x, y \neq 0$);

2) $\frac{1}{5d} - \frac{c}{d^2}$ ($d \neq 0$);

4) $\frac{12mn^2}{k} : \frac{4mn}{7k^2}$ ($k, m, n \neq 0$).

397 Реши уравнение:

$$1) 3,18x + 2,6 + 0,9x + x = 28; \quad 3) 7\frac{1}{3} \cdot x = 1,6 : \frac{6}{11}; \quad 5) \frac{x}{1,8} = \frac{2,4}{3,6};$$

$$2) 2,4(3x + 2) + 0,3(x + 4) = 6,6; \quad 4) x : 0,4 = 2\frac{1}{9} : 3\frac{1}{6}; \quad 6) \frac{2,1}{x + 1\frac{4}{5}} = \frac{3}{10x}.$$

398 Объясни, почему доказательство проведено неверно. Для ложных утверждений приведи контрпример, а верные – докажи правильно.

- Сумма двух простых чисел – простое число: например, 2 – простое, 3 – простое, и их сумма $2 + 3 = 5$ – тоже простое.
- Произведение трёх последовательных натуральных чисел кратно 6: например, при перемножении чисел 8, 9 и 10 получается число 720, кратное 6.
- Если при делении на 5 одно число даёт в остатке 2, а другое – 3, то их сумма кратна 5: например, числа 12 и 13 дают при делении на 5 остатки, соответственно, 2 и 3, а их сумма $12 + 13 = 25$ делится на 5.
- Сумма двух взаимно простых чисел – число простое: например, числа 9 и 14 взаимно простые, и их сумма $9 + 14 = 23$ – число простое.

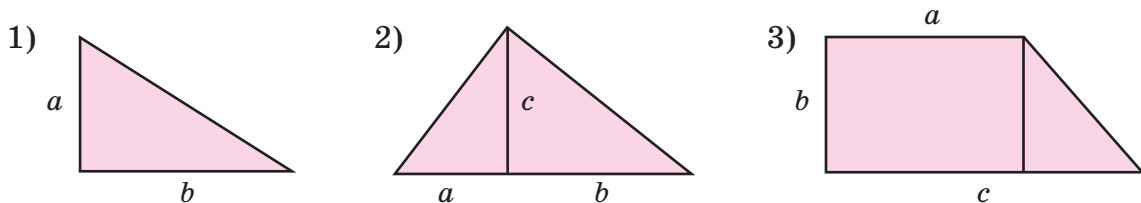
399 Переведи высказывание с математического языка на русский и докажи его:

- $\exists a, b \in N: a^2 - 3b = 6;$
- $\exists x, y \in N: x \neq y$ и $x^y = y^x;$
- $\forall a, b, n \in N: (an) : (bn) = a : b;$
- $\forall n \in N: [(2n + 1) + (2n + 3)]$ – кратно 4.

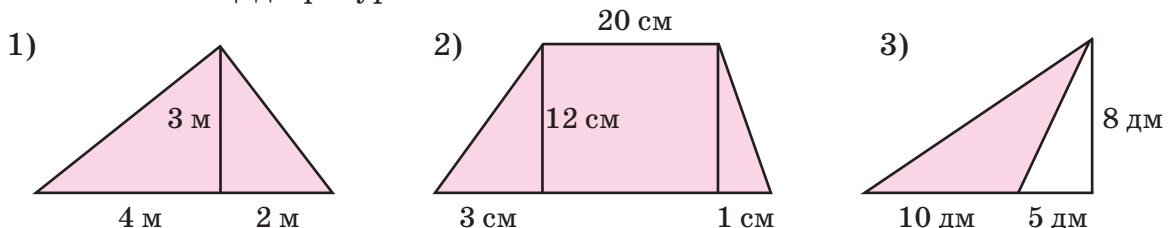
400 1) Какая из дробей ближе к единице: правильная или обратная ей неправильная?

2) Существует ли квадрат, у которого длина стороны – натуральное число, а площадь равна 201 201 201 201?

401 Построй формулу, выражающую зависимость площади S фигуры от длин отрезков, указанных на чертеже. Вырази из этой формулы длину b .



402 Вычисли площадь фигуры:

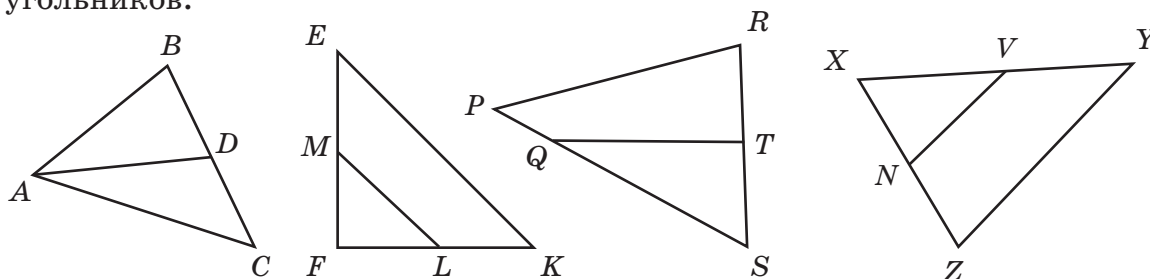


- 403** 1) Туристы в первый день своего путешествия прошли 15,6 км, во второй день – 18,2 км, в третий день – 14,8 км, а в четвёртый – 21,4 км. Сколько километров прошли туристы в последний пятый день, если в среднем они проходили в день 17,6 км?
 2) Смешали 0,2 литра сиропа по цене 280 р. за литр с 2 литрами газированной воды по цене 16 р. за литр. Чему равна стоимость 0,25 л получившегося напитка?

- 404** 1) Прочитай определение и назови определяемое понятие.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

- 2) Найди на чертеже отрезки, которые являются средними линиями треугольников:



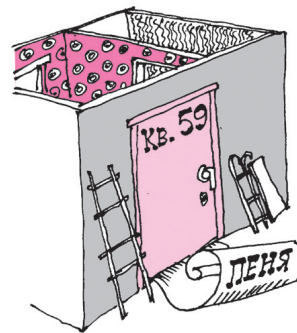
- 3) Сколько средних линий можно провести в треугольнике?
 4) Построй треугольник ABC и проведи его среднюю линию, соединяющую середины сторон AB и BC . Найди отношение длины стороны AC к длине средней линии. Повтори эксперимент ещё 2 раза. Сформулируй гипотезу.
 5) Рассмотрите расположение средней линии треугольника и стороны AC на чертежах к предыдущему заданию. Сформулируй гипотезу.
 6) Построй треугольник ABC и проведи все его средние линии. Измерь углы треугольника ABC и углы треугольника, образованного средними линиями. Сформулируй гипотезу.

Д

- 405** Сколько составляют:

- а) 25% от 0,36 кг; б) 56% от 7,5; в) 0,2% от 90%; г) 30% от a ?

- 406** 1) Во всех магазинах торговой фирмы по субботам предоставляется скидка 5%. Во вторник в одном из таких магазинов был куплен набор кухонной мебели на сумму 24 000 р. Сколько бы стоил этот набор в субботу?
 2) В городе N при внесении квартирной платы за каждый день просрочки платежа начисляется пеня в размере 0,1% от суммы платежа. Какую сумму надо будет внести в кассу, если квартплата составляет 1600 р., а платеж просрочен на: а) 20 дней; б) 30 дней; в) 174 дня?



415 Пусть A – значение некоторой величины, а $p\%$ от A составляют B . Построй формулу, выражающую зависимость между величинами A , B и p . Вычисли по этой формуле: а) 28% от 45 кг; б) число, 16% которого составляют 80 ; в) сколько процентов составляет 72 л от 2400 л.

416 Упрости выражение и найди его значение:

- а) $4,8 \cdot (5a) \cdot 0,2$, если $a = 0,125$;
 б) $b + 1,2b + 3b + 0,3b$, если $b = 4,04$;
 в) $2,5c + 5 + 0,2c + 2,8$, если $c = 1\frac{5}{9}$;
 г) $1,8(x + 5) + 6,2(x + 2) + 3,6$, если $x = 0,25$.



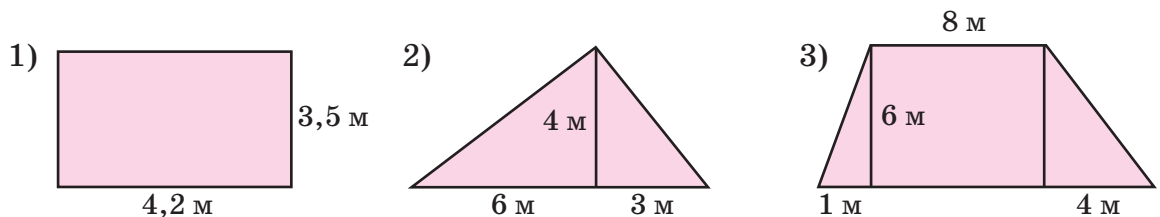
417 Реши уравнение:

1) $0,5(x + 1,6) + 1,4(3x + 2,4) = 9,8$; 2) $8\frac{1}{3} : x = 2\frac{1}{4} : 8,1$; 3) $\frac{4x + 9}{2\frac{1}{3}} = \frac{3x}{0,5}$.

418 Докажи, что сумма трёх последовательных четных чисел делится на 6 .

419 На сколько треугольников разбивают данный треугольник все его средние линии? Что можно сказать об образовавшихся треугольниках? Сформулируй гипотезу и проверь её, разрезав модель треугольника по средним линиям. Можно ли на основании проведенного исследования считать твою гипотезу доказанной?

420 По условию задачи № 388 вычисли сумму ежегодного налога на участки земли под индивидуальными гаражами, изображенные на рисунках:



421 Вычисли значения дробей A и B и определи: 1) на сколько процентов A меньше, чем B ; 2) на сколько процентов B больше, чем A ?

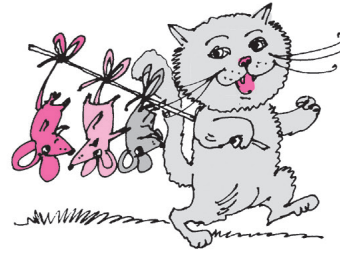
A
$$\frac{(1,75 + 2\frac{1}{3}) \cdot 1\frac{5}{7}}{\frac{3}{250} : (1,23 - \frac{3}{5} \cdot 1,05) + 0,12}$$

B
$$\frac{[(1\frac{1}{3})^2 + (0,5)^2] \cdot (0,6 : 0,1)^2 - (\frac{2}{5} \cdot 0,375 : 0,03)^2}{0,06 \cdot 1\frac{11}{48} + 0,06 \cdot \frac{3}{16} + 2\frac{7}{12} \cdot 0,06}$$

422* Число 222 122 111 121 получается, если в некотором слове заменить буквы на их номера в алфавите (33 буквы). Какое это слово?

423* Найди все такие двузначные числа, которые делятся на каждую из цифр в их записи.

424* Четыре кота, Васька, Пушок, Базилио и Леопольд, охотились на мышей. Пушок с Леопольдом поймали столько же мышей, сколько Базилио с Васькой; Васька поймал мышей больше, чем Базилио, но Васька с Леопольдом поймали мышей меньше, чем Пушок и Базилио. Сколько мышей поймал каждый кот, если Пушок поймал 3 мыши?

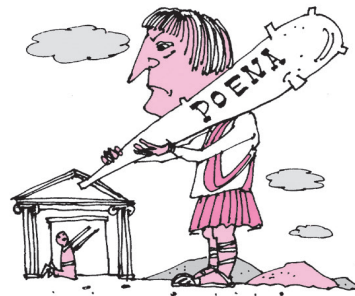


425* Собаки Отгадай и Угадай соревновались в прыжках. Прыжок Угадай на 30% короче, чем прыжок Отгадай, но зато он успевает за то же время делать на 30% прыжков больше, чем Отгадай. Кто из них победит в соревновании?

426* На заводе в каждом из двух месяцев, в январе и феврале, более $\frac{1}{3}$ от выпуска продукции составила продукция высшего качества. Какая часть продукции высшего качества выпущена за январь и февраль отдельно, если известно, что каждая из этих дробей несократима, не изменяется при одновременном прибавлении к числителю 2 и умножении знаменателя на 2, и если за январь выпущено больше, чем за февраль?

3. Простой процентный рост

Когда человек не вносит своевременную плату за квартиру, на него налагается штраф, который называется «пеня» (от латинского *pena* – наказание). Так, если пеня составляет 0,1% от суммы квартплаты за каждый день просрочки, то, например, за 19 дней просрочки сумма составит 1,9% от суммы квартплаты. Поэтому вместе, скажем, с 1000 р. квартплаты человек должен будет внести пеню $1000 \cdot 0,019 = 19$ р., а всего 1019 р.



Ясно, что в разных городах и у разных людей квартплата, размер пени и время просрочки разные. Поэтому имеет смысл составить общую формулу квартплаты для неаккуратных плательщиков, применимую при любых обстоятельствах.

Пусть S – ежемесячная квартплата, пеня составляет $p\%$ квартплаты за каждый день просрочки, а n – число просроченных дней. Сумму, которую должен заплатить человек после n дней просрочки, обозначим S_n .

Тогда за n дней просрочки пеня составит $pn\%$ от S , или $\frac{pn}{100}S$, а всего придется заплатить $S + \frac{pn}{100}S$, или, что то же самое, $(1 + \frac{pn}{100})S$. Таким образом,

$$S_n = \left(1 + \frac{pn}{100}\right)S.$$

Задача 1. Сколько надо заплатить за квартиру, если квартплата составляет 1400 р., пеня – 0,1% от суммы квартплаты за день просрочки и квартплата просрочена: а) на 5 дней; б) на 30 дней; в) на 120 дней?

Решение:

Подставляя в формулу значение $p = 0,1$ и значения $n = 5, 30, 120$, получим:

$$а) \left(1 + \frac{0,1 \cdot 5}{100}\right) \cdot 1400 = 1,005 \cdot 1400 = 1407 \text{ (р.);}$$

$$б) \left(1 + \frac{0,1 \cdot 30}{100}\right) \cdot 1400 = 1,03 \cdot 1400 = 1442 \text{ (р.);}$$

$$в) \left(1 + \frac{0,1 \cdot 120}{100}\right) \cdot 1400 = 1,12 \cdot 1400 = 1568 \text{ (р.).}$$



О т в е т : через 5 дней – 1407 р., через 30 дней – 1442 р., через 120 дней – 1568 р.

Таким образом, установленная формула позволяет быстро рассчитывать необходимые значения выплат за квартиру.

Рассмотрим ещё одну ситуацию. Банк выплачивает вкладчикам каждый месяц доход в размере $p\%$ от внесенной суммы. Поэтому, если клиент внес сумму S , то через n месяцев на его счёте будет $\left(1 + \frac{pn}{100}\right)S$, и мы вновь получаем, что

$$S_n = \left(1 + \frac{pn}{100}\right)S.$$

Мы получили *в точности ту же самую формулу*, что и в примере с квартплатой, хотя буквы в этих двух примерах имеют разный смысл: в первом примере n – число дней, а во втором n – число месяцев, в первом примере S – величина квартплаты, а во втором S – сумма вклада, внесенная в банк. Такая же формула будет получаться и во всех иных случаях, когда некоторая величина увеличивается на постоянное число процентов за каждый одинаковый фиксированный период времени. Эта формула описывает многие конкретные ситуации и имеет специальное название: **формула простого процентного роста**.

Задача 2. Банк выплачивает вкладчикам каждый день 0,008% от внесенной суммы. Клиент сделал вклад в размере 5000 р. Какая сумма будет на его счете через год (365 дней)?

Решение:

Для решения задачи достаточно подставить в формулу величину процентной ставки $p = 0,008$, числа дней $n = 365$ и первоначального вклада $S = 5000$:

$$\left(1 + \frac{0,008 \cdot 365}{100}\right) \cdot 5000 = 1,0292 \cdot 5000 = 5146 \text{ (р.).}$$

О т в е т : через год на счете будет 5146 р.



Задача 3. При какой месячной процентной ставке вклад на сумму 1000 р. увеличится за год до 1060 р.?

Решение:

Подставим в формулу простого процентного роста величину начального вклада $S = 1000$, конечной суммы $S_n = 1060$ и числа месяцев $n = 12$:

$$1060 = \left(1 + \frac{12p}{100}\right) \cdot 1000.$$

Решим полученное уравнение и найдём неизвестное значение p :

$$1 + \frac{12p}{100} = 1,06 \Leftrightarrow \frac{12p}{100} = 0,06 \Leftrightarrow 12p = 6 \Leftrightarrow p = 0,5.$$

О т в е т: процентная ставка должна быть равна 0,5% в месяц.

Задача 4. Каким должен быть начальный вклад, чтобы при ставке 4% годовых он увеличился за 9 месяцев до 5356 р.?

Решение:

Подставим в формулу простого процентного роста величину годовой процентной ставки $p = 4$, количество лет $n = \frac{9}{12} = 0,75$ и конечной суммы $S_n = 5356$:

$$5356 = \left(1 + \frac{4 \cdot 0,75}{100}\right) \cdot S.$$

Мы получили уравнение с неизвестным S . Решим это уравнение:

$$(1 + 0,03) \cdot S = 5356 \Leftrightarrow 1,03S = 5356 \Leftrightarrow S = 5356 : 1,03 \Leftrightarrow S = 5200.$$

О т в е т: начальный вклад должен быть равен 5200 р.

Аналогичная формула получится, если некоторая величина уменьшается за данный период времени на определенное число процентов. Как и выше, нетрудно убедиться, что в этом случае

$$S_n = \left(1 - \frac{pn}{100}\right)S.$$

Эта формула также называется **формулой простого процентного роста**, хотя заданная величина в действительности убывает. Рост в этом случае «отрицательный».

Задача 5. Новый компьютер был куплен за 12 000 р. Каждый год его амортизация составляет 20%. Сколько будет стоить компьютер через 2 года?

Решение:

Выражение «амортизация составляет $p\%$ в год» означает, что каждый год первоначальная стоимость компьютера уменьшается на $p\%$.

Для решения задачи подставим в формулу простого процентного роста годовой процент амортизации компьютера $p = 20\%$, количество лет его использования $n = 2$ и первоначальную стоимость $S = 12\,000$:

$$\left(1 - \frac{20 \cdot 2}{100}\right) \cdot 12\,000 = 0,6 \cdot 12\,000 = 7200 \text{ (р.)}$$

О т в е т: через 2 года компьютер будет стоить 7200 р.

К 427 Начальная сумма составляет 800 р. и увеличивается ежегодно на 10% от начальной суммы. Какой будет эта сумма через: а) 4 года; б) 9 лет; в) 12 лет; г) 25 лет?

428 Начальная сумма составляет 500 р. и уменьшается ежемесячно на 4% от первоначальной суммы. Какой будет эта сумма через: а) 2 месяца; б) 5 месяцев; в) 7 месяцев; г) 1 год?

429 Сумма в 1 тыс. р. уменьшается ежегодно на 5% от первоначальной суммы. Через сколько лет эта сумма сократится до: а) 750 р.; б) 500 р.; в) 250 р.; г) 50 р.?

430 Какой была начальная сумма, если при ежемесячном увеличении на 20% от первоначальной суммы она за 3 месяца возросла до: а) 1600 р.; б) 480 р.; в) 8000 р.; г) 640 р.?

431 На сколько процентов в год увеличивается банковский вклад (простой процентный рост), если за 10 лет он возрос: а) вдвое; б) в 1,5 раза; в) в 10 раз?

432 «Начальная сумма составляет 50 тыс. р. и ежегодно увеличивается на 20%, считая от начальной суммы». Какая из перечисленных ниже формул соответствует данному условию?

а) $S_n = \left(1 - \frac{20n}{100}\right) \cdot 50;$

в) $S_n = \left(1 + \frac{50n}{100}\right) \cdot 20;$

б) $S_n = \left(1 - \frac{50n}{100}\right) \cdot 20;$

г) $S_n = \left(1 + \frac{20n}{100}\right) \cdot 50.$

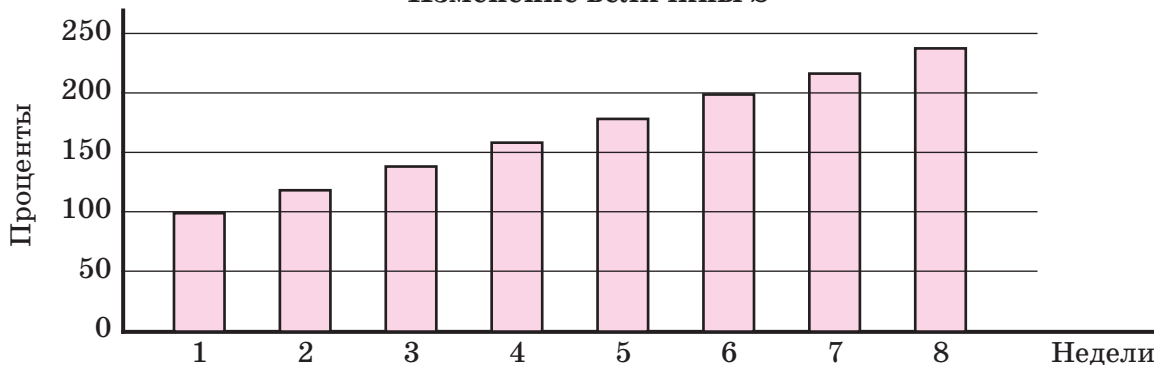
433 Для нормальной работы пансионата требуется 600 электролампочек. Каждый месяц требуют замены 10% лампочек. Сколько лампочек надо купить, чтобы обеспечить нормальное освещение в пансионате в течение года?



434 В автохозяйстве для каждой модели автомобилей установлена норма износа. По «Волгам» она составляет 11,1% в год от первоначальной стоимости. Определи с точностью до целых срок службы этого автомобиля.

435 На диаграмме показано изменение величины S . На сколько процентов в месяц изменяется S ? (Считать, что в месяце 4 недели.)

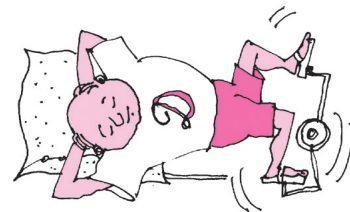
Изменение величины S



- 436** С помощью диаграммы изменения остаточной стоимости медиапроектора, купленного в 2002 г., определи: а) срок его службы; б) стоимость при покупке; в) накопленный износ (т. е. общую сумму уменьшения стоимости) на начало 2009 года; г) остаточную стоимость в 2009 году (*остаточная стоимость* равна разности первоначальной стоимости и накопленного износа); д) процент износа на начало 2009 года (т. е. отношение накопленного износа к первоначальной стоимости).



- 437** По закону о защите прав потребителя продавец несёт ответственность за каждый день задержки выполнения требований потребителя о замене некачественного товара в размере 1% цены вещи. Чему была равна стоимость товара, если продавец вынужден был заплатить (включая стоимость товара):
 1) с учетом задержки на 15 дней – 1840 р.;
 2) с учетом задержки на 45 дней – 1203,5 р.;
 3) с учетом задержки на 3 дня – 10,3 тыс. р.?
- 438** Стоимость нереализованного товара в конце каждого 5-го дня уменьшается на 3% от первоначальной стоимости. Считая первоначальную стоимость равной 200 р., вычисли стоимость этого товара: а) на 6-й день; б) на 15-й день; в) на 20-й день; г) на 26-й день.
- 439** Под какой процент годовых, считая от первоначальной суммы, надо положить в банк сумму 1 тыс. р., чтобы по истечении восьми лет получить: а) 2 тыс. р.; б) 1,4 тыс. р.; в) 5 тыс. р.; г) 9 тыс. р.?
- 440** Сколько процентов составляет пеня за несвоевременную квартирную плату, если за 20 дней просрочки сумма квартплаты увеличилась: а) с 1500 до 1530 р.; б) с 900 до 954 р.; в) с 1200 до 1236 р.; г) с 1400 до 1419,6 р.?
- 441** Господин *N* решил похудеть, и для этого он стал заниматься на велотренажёре. В первый день он «проехал» 5 км. Каждый следующий день он решил проезжать больше предыдущего дня на 10% от расстояния первого дня. На какой день занятий он должен будет проехать 15 км? Сколько всего километров он проедет за всё это время?



442 В первый день после болезни спортсмен мог выполнить 40% своей обычной нормы тренировок. Через какое минимальное количество дней после болезни он сможет вернуться к полноценным нагрузкам, если врачи не рекомендовали ему за один день увеличивать нагрузки более чем на 3% от его обычной нормы?

443 Стоимость еженедельного журнала в день выпуска составляет S_0 рублей. Каждый следующий день в течение недели его стоимость уменьшается на $p\%$ от первоначальной стоимости. Чему будет равна стоимость S_k журнала через k дней?

- 1) Составь формулу для решения задачи.
- 2) Реши задачу при $S_0 = 200$; $p = 2,5$; $k = 3$; 5; 6.
- 3) Заполни таблицу:

S_0 рублей	S_k рублей	$p\%$	k дней
250	220	4	?
250	220	?	6
?	80	5	4
300	?	6	5

π **444** Игра «Отгадай слова»

Обозначим следующие буквы цифрами:

Д	А	Н	К	О	Л	В	Е	Т	Р
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Требуется отгадать, какие слова кроются под номерами:

- 1) 019 5784 6401 3510 54031 273819 9137831
- 2) 401 9731 3709 8453 87249 815128 3728169
- 3) 3948 24931 64315 673849 1289138 0786491 61584921

Выигрывает тот, кто сделает это быстрее.

445 Вычисли, найди закономерность в ряду чисел, образованных ответами примеров, и продолжи ряд на два числа:

- 1) $1,5 \cdot \frac{1}{3}$; 2) $2\frac{7}{30} - 0,9$; 3) $0,25 \cdot 18,4$; 4) $125,4 : 60$;
- 0,14 : 0,25; $1\frac{1}{15} + 1\frac{1}{3}$; 10,3 : 2; $11,396 : 2\frac{4}{5}$;
- 56,7 · 0,01. 6 : 1,75. $\frac{1}{8} \cdot 45,6$. $48,622 : 6\frac{1}{25}$.

- 446** а) Сколько процентов от числа a составляют: $0,14a$; $0,06a$; $0,45a$; $0,003a$; $1,05a$; $2,8a$?
- б) На сколько процентов каждое из чисел: $0,02b$; $0,12b$; $0,34b$; $0,25b$; $0,56b$; $0,89b$ меньше, чем b ?
- в) На сколько процентов каждое из чисел: $1,2c$; $1,48c$; $1,5c$; $2c$; $3,85c$; $4,6c$ больше, чем c ?

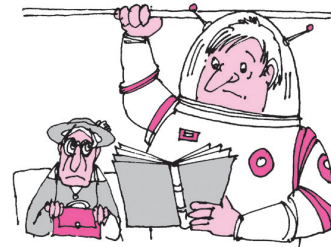
447) Какое число получится, если число n : а) уменьшить на 18%; б) уменьшить на 45%; в) увеличить на 36%; г) увеличить на 100%; д) уменьшить на 75%; е) увеличить на 150%; ж) увеличить на 400%; з) уменьшить на 40%?

448) Как изменится число, если его: а) сначала уменьшить на 50%, а потом увеличить на 80%; б) сначала увеличить на 10%, а потом увеличить на 40%; в) сначала уменьшить на 25%, а потом уменьшить на 60%?

449) 1) Число a на 150% больше, чем число b . На сколько процентов b меньше, чем a ?
2) Число x на 50% меньше, чем число y . На сколько процентов y больше, чем x ?

450) Пеня за несвоевременную квартирную плату в городе N начисляется в размере 0,1% от неуплаченной суммы за каждый день просрочки. На сколько дней была задержана квартирная плата, если на сумму 2000 р. была начислена пеня: а) 6 р.; б) 24 р.; в) 80 р.; г) 128 р.?

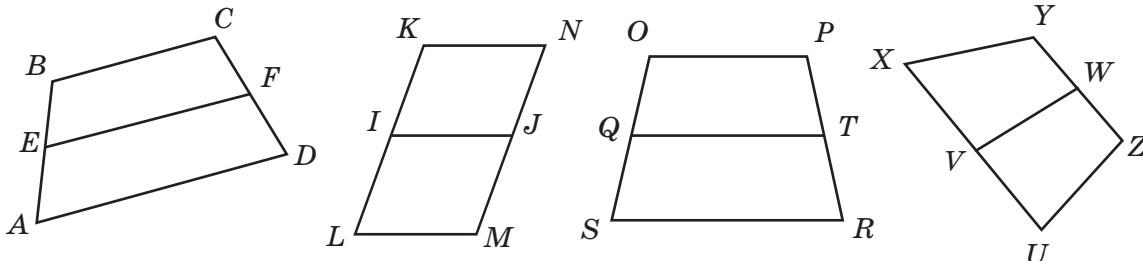
451) В общественном транспорте города N четырнадцать процентов пассажиров читают фантастику. Из них 73% – мужчины, из которых 70% в возрасте до 35 лет. Сколько процентов всех пассажиров составляют мужчины в возрасте до 35 лет, читающие фантастику? Ответ округли до десятых.



452) 1) Прочитай определение и назови определяемое понятие.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её непараллельных сторон.

2) Найди на чертеже отрезки, которые являются средними линиями трапеций:



3) Сколько средних линий можно провести в трапеции?

4) Построй трапецию $ABCD$ и проведи её среднюю линию. Сравни сумму длин оснований с длиной средней линии. Проведи эксперимент ещё 2 раза и сформулируй гипотезу.

5) Рассмотрите расположение средней линии и оснований трапеции. Сформулируй гипотезу. Можно ли доказать твои гипотезы, построив ещё 10 трапеций? А если построить миллион трапеций?

Д **453** Начальная сумма составляет 100 р. Ежемесячно она увеличивается на 2,5%. Через сколько месяцев эта сумма возрастет до: а) 115 р.; б) 140 р.; в) 180 р.; г) 200 р.?

454 Какой была начальная сумма, если при ежемесячном уменьшении на 20% она за 3 месяца сократилась до: а) 1600 р.; б) 480 р.; в) 8000 р.; г) 640 р.?

455 В городе N в случае неуплаты земельного налога в установленный срок (не позднее 15 сентября) начисляется пеня в размере 0,2% неперечисленных сумм за каждый день просрочки. Какую сумму нужно будет заплатить за земельный налог, равный 80 р., в случае уплаты его: а) 25 сентября текущего года; б) 15 ноября текущего года; в) 20 февраля следующего года?

456 Стоимость килограмма овощей в течение месяца после сбора составляет S_0 рублей. Каждый следующий месяц до нового урожая стоимость увеличивается на $p\%$ от первоначальной стоимости. Чему будет равна стоимость S_k килограмма овощей через k месяцев?

- 1) Составь формулу для решения задачи.
- 2) Реши задачу при $S_0 = 80$, $p = 10$, $k = 3; 5; 7$.
- 3) С помощью составленной формулы заполни таблицу:

S_0 рублей	S_k рублей	$p\%$	k месяцев
20	30	12,5	?
25	?	20	3
?	27	10	8
40	70	?	5

457 В городе A с населением 100 тысяч жителей граждане в возрасте до 18 лет составляют 40 тысяч, а в городе B с населением 200 тысяч жителей – соответственно 60 тысяч. В каком городе доля жителей в возрасте старше 18 лет меньше?

458 Фирма дала следующее объявление в газету:

Офисная мебель
более 40 модификаций

Цена за 1 предмет:

стулья – 1000 р. *шкафы* – 4600 р.
столы – 2400 р. *стеллажи* – 5000 р.

При покупке более 10 предметов скидка 10%



Вычисли сумму, в которую обойдётся покупка в этой фирме комплекта мебели из 6 стульев, 6 столов, 1 шкафа и 3 стеллажей.

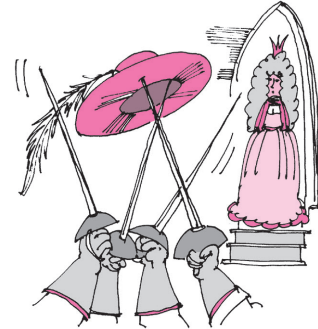
459 Вычисли значения выражений A и B и определи: 1) на сколько процентов A меньше, чем B ; 2) на сколько процентов B больше, чем A ?

$$\text{А} \quad \left[(4,5 - 2,75) \cdot \frac{4}{7} \right] : \left[\left(2,5 : 1\frac{1}{4} \right) : (3 : 12,5) + 0,5 : \left(11\frac{1}{9} \cdot 1,8 - 19,7 \right) \right]$$

$$\text{В} \quad 15 : \left[\frac{4 : (0,4 - 0,3)}{0,125 \cdot 2} - \frac{(7,083 - 6\frac{3}{4}) : (3,7 \cdot 0,3)}{(3,96 - 3\frac{3}{5}) : 120} \right] + \frac{31,25 : 4\frac{1}{6}}{6\frac{2}{3} \cdot 4,5}$$

С **460*** Чему равна величина угла между стрелками часов в 9 ч 20 мин?

461* На королевских соревнованиях Франции по фехтованию первые 4 места разделили Атос, Портос, Арамис и д'Артаньян. Сумма мест, занятых Атосом, Портосом и д'Артаньяном, равна 6. Сумма мест Портоса и Арамиса тоже равна 6. Какое место занял каждый из мушкетеров, если Портос занял более высокое место, чем Арамис, а д'Артаньян – более высокое, чем Атос?



4. Сложный процентный рост

В банках России для некоторых видов вкладов (так называемых *срочных* вкладов, которые нельзя взять раньше, чем через определённый договором срок, например, через год) принята следующая система выплаты доходов: за первый год нахождения внесённой суммы на счёте доход составляет, например, 10% от нее. В конце года вкладчик может забрать из банка вложенные деньги и заработанный доход – «проценты», как его обычно называют.

Если же вкладчик этого не сделал, то проценты присоединяются к начальному вкладу, и поэтому в конце следующего года 10% начисляются банком уже на новую, увеличенную сумму. Иначе говоря, при такой системе начисляются «проценты на проценты», или, как их обычно называют, *сложные* проценты.

Подсчитаем, сколько денег получит вкладчик через 3 года, если он положит на срочный счёт в банк 1000 р. и ни разу в течение трёх лет не будет брать деньги со счёта.

10% от 1000 р. составляют $0,1 \cdot 1000 = 100$ р., следовательно, через год на его счёте будет

$$1000 + 100 = 1100 \text{ (р.)}.$$

10% от новой суммы 1100 р. составляют $0,1 \cdot 1100 = 110$ р., следовательно, через 2 года на его счёте будет

$$1100 + 110 = 1210 \text{ (р.)}.$$

10% от новой суммы 1210 р. составляют $0,1 \cdot 1210 = 121$ р., следовательно, через 3 года на его счёте будет

$$1210 + 121 = 1331 \text{ (р.)}.$$

Нетрудно представить себе, сколько при таком непосредственном, «лобовом» подсчете понадобилось бы времени для нахождения суммы вклада через 20 лет. Между тем подсчёт можно вести значительно проще.

А именно через год начальная сумма увеличится на 10%, то есть составит 110% от начальной, или, другими словами, увеличится в 1,1 раза. В следующем году новая, уже увеличенная сумма тоже увеличится на те же 10%. Следовательно, через 2 года начальная сумма увеличится в $1,1 \cdot 1,1 = 1,1^2$ раз.

Ещё через один год и эта сумма увеличится в 1,1 раза, так что начальная сумма увеличится в $1,1 \cdot 1,1^2 = 1,1^3$ раз. При таком способе рассуждений получаем решение нашей задачи значительно более простое:

$$1,1^3 \cdot 1000 = 1,331 \cdot 1000 = 1331 \text{ (р.)}.$$

Решим теперь эту задачу в общем виде. Пусть банк начисляет доход в размере $p\%$ годовых, внесенная сумма равна S р., а сумма, которая будет на счёте через n лет, равна S_n р.

Величина $p\%$ от S составляет $\frac{p}{100}S$ р., и через год на счёте окажется сумма

$$S_1 = S + \frac{p}{100}S = \left(1 + \frac{p}{100}\right)S,$$

то есть начальная сумма увеличится в $1 + \frac{p}{100}$ раз.

За следующий год сумма S_1 увеличится во столько же раз, и поэтому через два года на счёте будет сумма

$$S_2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)S_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)S = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 S.$$

Аналогично $S_3 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 S$ и т. д. Другими словами, справедливо равенство

$$S_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n S.$$

Эту формулу называют *формулой сложного процентного роста*, или просто *формулой сложных процентов*.

Задача 1. *Какая сумма будет на срочном счёте вкладчика через 4 года, если банк начисляет доход в размере 10% годовых и внесённая сумма равна 2000 р.?*

Решение:

Подставим в формулу значение процентной ставки $p = 10$, количество лет $n = 4$ и величину первоначального вклада $S = 2000$, получим:

$$\left(1 + \frac{10}{100}\right)^4 \cdot 2000 = 1,1^4 \cdot 2000 = 1,4641 \cdot 2000 = 2928,2 \text{ (р.)}.$$

О т в е т : через 4 года на срочном счёте будет сумма 2928,2 р.

Разница законов простого и сложного роста состоит в том, что при простом росте процент каждый раз исчисляют исходя из *начального* значения величины, а при сложном росте – исходя из суммы последнего начисления.

Задача 2. Банк начисляет 8% годовых, а внесённая сумма равна 5000 р. Какая сумма будет на счёте клиента банка через 5 лет: а) при начислении банком простых процентов; б) при начислении банком сложных процентов?

Р е ш е н и е:

При простом процентном росте через 5 лет сумма составит

$$\left(1 + \frac{8 \cdot 5}{100}\right) \cdot 5000 = 7000 \text{ (р.)},$$

а при сложном

$$\left(1 + \frac{8}{100}\right)^5 \cdot 5000 \approx 7346,64 \text{ (р.)}.$$

О т в е т: при простом проценте будет сумма 7000 р., а при сложном – 7346,64 р.

Из последней задачи ясно видно, что при начислении процентов разными способами получается значительная разница. Поэтому, желая внести деньги в какой-нибудь банк, человек всегда должен внимательно ознакомиться с условиями: какие проценты выплачивает банк – простые или сложные, платит ли он «проценты на проценты». И судить об этом надо не только по рекламе, которая часто бывает расплывчатой, неточной, но и непосредственно по тексту договора, который перед подписанием надо внимательно изучить.

Полученная выше формула применима не только к задачам о росте вклада, но и к любой ситуации, когда рассматриваемая величина за каждый заданный промежуток времени увеличивается на определённое число процентов, считая от последнего ее значения. При уменьшении величины на определённое число процентов, считая от последнего значения, в формуле, как и для простого роста, вместо знака «плюс» появляется знак «минус».



К 462 Какая сумма будет на срочном вкладе через 3 года, если на него положены 2000 р. под 5% годовых?

463 Первый срочный вклад равен 8000 р. под 10% годовых, а второй – 7500 р. под 20% годовых. На каком из вкладов через 3 года сумма будет больше и на сколько?

464 Какой капитал надо вложить в паевой инвестиционный фонд под 20% годовых (срочный вклад), чтобы через 3 года получить вместе с процентами 100 000 р.? Ответ округли до тысяч.

465 Начальный вклад клиента банка составил 25 000 р. Годовая процентная ставка банка 8%. Каким станет вклад через 2 года, если: а) банк начисляет простые проценты; б) банк начисляет сложные проценты?

466 В 1993 году инфляция в России составляла 20 % в месяц (то есть цены каждый месяц увеличивались на 20 % от последнего значения). На сколько процентов возросли цены за 4 месяца? Во сколько раз увеличились цены за это время? Ответ округли до целых.

467 За последние 3 года товароборот фирмы снижается ежегодно на 20 % от товароборота предыдущего года. На сколько всего процентов снизился её товароборот за эти 3 года?



468 Коммерческий банк выплачивает доход вкладчикам, исходя из следующих годовых процентных ставок: 3 месяца – 4 %; 6 месяцев – 8,5 %; 12 месяцев – 18 %.

1) Какую сумму должен выплатить банк по вкладу, равному 2000 р., если договор заключен: а) на 3 месяца; б) на 6 месяцев; в) на 12 месяцев?

2) Сколько процентов годового дохода можно получить, если в течение года оформлять договор на 3 месяца и по окончании его действия каждый раз все полученные деньги вкладывать опять же на 3 месяца? Ответ округли до единиц.

π

469 1) Составь 5 двусложных слов из слогов, используя все эти слоги: ма, тон, дус, ко, тор, сум, нус, на, гра, кван.

2) Составь 4 трёхсложных слова из слогов, используя их все: ро, ли, цен, мо, на, ты, тель, сто, дец, де, ло, про.

470 Переведи высказывания с математического языка на русский и построй их отрицания:

1) $\forall a \in R: a^2 + a^3 = a^5$ (R – множество дробей).

2) $\exists d \in D: d^2$ – натуральное число (D – множество правильных дробей).

3) $\exists x \in P: x$ – имеет ось симметрии (P – множество параллелограммов).

4) $\forall y \in T:$ углы при основании y равны (T – множество трапеций).

471 Докажи или опровергни высказывания, если $a, b, c, d \neq 0$:

1) 18 % от числа a составляют $1,8a$;

3) $0,4c$ на 40 % меньше, чем c ;

2) $0,6b$ составляет 30 % от $2b$;

4) $2d$ на 200 % больше, чем d .

472 1) Температура воздуха снизилась за первый день на 15 %, а за второй – на 40 %. На сколько процентов снизилась температура за два дня?

2) Цена товара за первый месяц увеличилась на 20 %, а за второй уменьшилась на 10 %. Как и на сколько процентов изменилась цена за два месяца?

473 В промышленных месторождениях содержание меди в медных рудах составляет от 0,3 % до 6 %. а) Сколько надо взять медной руды, чтобы получить не менее 12 т меди? б) Сколько меди может получиться из 12 т руды?

474 Дом стоимостью 1500 тыс. р. принес в год 300 тыс. р. валового дохода. Из этих денег вычли расходы на содержание дома в размере 48 тыс. р. и получили чистый доход. Чему равен процент чистого дохода от стоимости дома?



- 475** Оля решила купить две книги: первая стоит 56 % всех её денег, а вторая – 64 %, и поэтому у нее не хватило на покупку этих книг 15 р. Сколько стоят обе книги вместе?
- 476** Кофе при обжарке теряет 12,5 % своего веса. Сколько килограммов зелёного кофе надо взять, чтобы получить 35 кг обжаренного?
- 477** Сколько воды надо выпарить из 350 г 12 % -го раствора соли, чтобы получить 20% -й раствор?
- 478** К 200 граммам 15 % -го раствора вещества добавили 300 граммов 30 % -го раствора этого же вещества. Чему равна концентрация полученной смеси?
- Д** **479** Начальный вклад клиента банка равен 10 000 р. Годовая процентная ставка банка 10%. На сколько рублей будут отличаться вклады через 4 года в случаях, когда банк начисляет простые проценты и сложные проценты?
- 480** В первый год фермер обработал 20 га земли. Затем, переходя к интенсивным способам земледелия, он в течение трёх лет сокращал посевные площади на 10 % по сравнению с предыдущим годом. Сколько гектаров составили посевные площади через 3 года?
- 481** Население города N ежегодно увеличивается в среднем на 2%. На сколько увеличится население через 3 года, если сейчас оно составляет 900 тыс. человек? Ответ округли до единиц тысяч.
- 482** Трава при высыхании становится сеном и теряет около 28% своего веса. Сколько было накошено травы, если из нее было получено 1,44 т сена?
- 483** Смешали 200 граммов 16% -го сахарного сиропа и 600 граммов – 28% -го. Чему равна концентрация сахара в полученном растворе?
- 484** Ученик прочитал в первый день 30% всей книги, во второй – 40% оставшейся части, а в третий – остальные 105 страниц. Сколько всего страниц было в книге?
- 485** Вычисли значения выражений A и B и определи: 1) на сколько процентов A меньше, чем B ; 2) на сколько процентов B больше, чем A ?

$$A \quad \frac{1 \frac{2}{9} \cdot 3 \frac{4}{7} \cdot 4 \frac{1}{2}}{5 \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{7} \cdot 2 \frac{7}{9}} \cdot \frac{12,1 \cdot \frac{2}{11} + 4,2 : 2 \frac{1}{3}}{1 \frac{5}{13} \cdot 0,16 - \frac{5}{13} \cdot 0,16}$$

$$B \quad \left[\frac{0,375 \cdot 0,8 + \frac{1}{3} : \frac{5}{6}}{1,05 : \left(2 \frac{1}{36} - 1 \frac{5}{18} \right)} + \frac{1,2 \cdot 0,8 \cdot 7,6}{0,24 \cdot 1,9 \cdot 6,4} \right]^2$$

- С** **486*** Какие два двузначных простых числа получаются друг из друга перестановкой цифр, а их разность образует точный квадрат?

- 487*** Квадрат натурального числа на 56 больше самого числа. Найди это число.

Ответы

Глава 1. §1. 23. а) 0,02; б) 46,47. **24.** 3,6 кг. **25.** б) $142857 \cdot 7 = 999999$. **37.** 3) 42,4 см; $\approx 85,9 \text{ см}^2$.
52. а) ≈ 510 ; ≈ 300 ; б) $\approx 100,70$; $\approx 3,00$. **54.** г) 15; 12 600. **56.** 1) $\approx 53 \text{ м}^3$; 2) 5 рулонов. **57.** Б; Г; В; А.
65. 1) $1\frac{5}{12} = 1,4166\dots$; 1,4; 1,42; 1,417; 2) $\frac{2}{21} = 0,0952\dots$; 0,1; 0,10; 0,095. **68.** 2) 16.

§2. 72. 4) 0. **75.** 1) 60,2 м; 3) 2,5 см; 4) 7,2 м³. **91.** 5) 1; 6) 0,28. **93.** 2) 12b; 24,6 дм. **94.** 1) 3,2 м; 2) На 5,76 м². **95.** 1) $\approx 0,53$; 2) $\approx 0,55$. **97.** 85 дней. **101.** 5) 0,35; 6) $\frac{1}{9}$; 7) 310,2; 8) 234,32. **110.** 2. в) (1; 3), (2; 3); г) (1; 2); д) (2; 4), (5; 2); е) \emptyset . **112.** 1) 0,5; 2) $1\frac{1}{7}$. **117.** 2 и 9; 3 и 5. **119.** 2. **131.** 3) $\frac{2}{3}$; 4) 5; 5) 3; 6) 0,5. **133.** 1) 2, 7 и 10 лет; 2) 8, 12, 32 и 48 лет. **137.** 1) 0,09; 2) 1. **138.** 8,4; 2,4; 7,2. **139.** 1) 55; 2) 7. **142.** 22 и 8 тетрадей.
150. 4) $100x + 50 + y = 100y + 50 + x + 594 \Leftrightarrow x = y + 6$; 650, 751, 852, 953. **151.** 5) 2,5; 6) $1\frac{5}{7}$; 7) 1,4; 8) 10.
152. 1) 36 лет; 2) 40 р. **159.** 1) 11; 2) 35. **160.** 16 и 8. **161.** 2) 13, 24, 35, 46, 57, 68, 79. **162.** 1) (4; 5). **163.** 1. **165.** 36 уч. **166.** 1941 и 470. **170.** 1) 3 $\frac{1}{3}$; 2) 1816,3. **171.** $S = ab - 4c^2 = 51 \text{ м}^2$; $P = 2(a + b) = 32 \text{ м}$. **172.** 0,48, или 48%. **173.** 1) 0,4; 2) 2; 3) 0,2; 4) 4,5. **174.** 2) 17, 28, 39.

Глава 2. §1. 180. д) 25; е) 0,8; ж) 6; з) 0,3. **185.** 1) 4; 2) 0,04; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 0,5. **186.** 1) 36; 2) 2,8; 3) 202.
190. 2) 350 м. **191.** 2) 120 км. **192.** 1) 56 км. **193.** 2) 60 дет. **194.** 2) Уменьшится на 4 км; 26 км; 15 ч.
195. 1) 169,4 км; 2) 9 и 15 км/ч. **198.** 1) 26 км; 9,75 км; 22,75 км; 2) 54 км; 39,6 км; 18 км. **199.** 1) $33\frac{1}{3}$ и 28 км/ч; 2) 90 и 810 км/ч. **202.** 1) 12 ч; 2) 1 ч 12 мин. **203.** 1) 44 ч; 2) 3 ч. **205.** 1) 0,5; 2) 13,5. **206.** 1) 4,5; 2) 5; 3) 0,4. **207.** 1) 42; 2) 0,6. **208.** 1) 130; 2) 2. **210.** В 1,2 раза. **211.** 300 км. **212.** 3 м; 1 мин 20 с; 7,2 м и 4,8 м.
213. 4,8 км/ч. **214.** $4\frac{2}{3}$ и $5\frac{1}{3}$ км/ч. **215.** 1) 6 км; 2) 1,5 ч; 27 км; 135 км; 3) 34,2 км; 4,5 ч; 4) 3 ч. **216.** 1) 12 ч; 2) 39 дней. **218.** 2) 27. **219.** 12 ч. **231.** 1) 42 ч; 2) а) 3 ч; б) 6 ч. **232.** 1) 5 ч; 2) 52 ч. **233.** 1) 25,2 км/ч; 2) 58,8 км. **238.** 1) (1; 4), (5; 2), (6; 1); 3) (5; 2). **239.** 6) $x = 12y$; 8) $x = \frac{d}{4c}$. **244.** $2 < x \leq 5$; $\{2,01; 3,56; 3\frac{4}{31}; 4,89; 5\}$.
245. 12,5 ч. **246.** а) 30 ч; б) 7,5 ч. **247.** 4,5 км/ч; 13 км. **249.** (1; 9), (4; 6), (6; 2). **253.** 0,02, или 2%. **254.** 24 мили.
268. 2) На 5,6 ц/га; 33 ц/га. **269.** 4) II – 14,4; III – 7,2; 0,75, или 75%. **274.** 3) 0; 4) 4. **279.** 2) $3\frac{1}{7}$; 3) $4\frac{1}{6}$; 4) 1.
283. 5) 3,232. **285.** 2) $19,8^\circ$. **286.** 4,08. **287.** 820 км/ч. **289.** 2) 1; 2; 3; 4. **291.** а) 5; в) 3. **292.** 1) 10; 2) 5. **293.** 6) 20.
295. а) $a_{100} = 5050$. **296.** 1) $44\frac{4}{9}$ км/ч < 45 км/ч. **298.** 1) 2,5; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) 4. **299.** 20. **300.** 20 км/ч; 2 км/ч.
302. 35,7 км/ч. **303.** 210 км. **304.** 40 мин. **305.** 18 км/ч; 54 км/ч. **306.** 6 ч.

§2. 320. а) Ув. на 50%; б) ум. на $33\frac{1}{3}\%$; в) ув. на 400%; г) ум. на 80%; д) ув. на 900%; е) ум. на 90%.
323. $\frac{4}{15}$, или $\approx 26,7\%$. **326.** 1) На 20%; 2) в первом ($\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$). **342.** 1) В 4 раза; 2) на 150%. **343.** 3) 0,7; 5) $\frac{1}{5}$.
344. 1) $A = 140$, $B = 175$; 2) A на 20% меньше, чем B ; B на 25% больше, чем A . **346.** а) 30%; б) 60%. **348.** 108 км.
349. 5 кубиков. **357.** 2) 74,7 тыс.ч. **358.** 13 132 р. **362.** а) 400 р.; в) $5a$; г) $10b$. **364.** 1) 16 000 р. 2) 2800 р.
365. 1) 5000 р.; 2) 60 т. **366.** ≈ 312 млн р. **367.** л) 25%; м) 4%. **370.** в) Ум. на $33\frac{1}{3}\%$; г) ув. на 50%. **371.** а) Пер-вое: $25\% > 20\%$. **373.** а) 5%. **374.** а) $\approx 77,3\%$; б) $\approx 86,4\%$. **375.** На 20% меньше; на 25% больше. **377.** а) Ув. на 50%; б) ум. на 10%; в) ум. на 40%; г) не изменилась. **378.** 2) В I ум. на 16%, во II ум. на 25%. **379.** A – ум. на 10%, B – ув. на 20%; в A на 25% ниже, чем в B ; в B на $33\frac{1}{3}\%$ выше, чем в A . **380.** 1) Ув. на 50%; 2) ум. на 36%; 3) ум. на 25%; 4) ув. на 4%. **381.** 1) 15%; 12,5%; 13,5%; 2) 16%. **383.** 1) 60 кг; 2) 10 кг. **384.** 1) 40 уч.; 2) 28, 20 и 42 уч. **385.** 48%. **386.** 720 чел. **387.** 35 р. **388.** 1) 50 р.; 2) 290 р.; 3) 810 р. **395.** г) 10; д) 4,74. **397.** 2) 0,08;

Ответы

3) 0,4; 4) $\frac{4}{15}$; 5) 1,2; 6) 0,3. **401.** 3) $b = \frac{2S}{a+c}$. **402.** 1) 9 м²; 2) 264 см²; 3) 40 дм². **403.** 2) 10 р. **405.** в) 0,18%; г) 0,3а. **406.** 1) 22 800 р.; 2) а) 1632 р.; в) 1878,4 р. **407.** в) 4а л; г) $\frac{b}{2}$ мин. **408.** 1) 40 тыс.; 2) 7,7 л на 100 км. **410.** 1) 58,3%; 2) на 75%. **411.** а) ум. на 25%; в) ув. на 26%. **412.** ум. на 1%. **413.** 2) 6,75 кг. **414.** 15 д.; 12,5%. **416.** а) 0,6; в) 12; г) 27. **417.** 1) 1,2; 2) 30; 3) 0,9. **420.** 1) 29,4 р.; 2) 42 р.; 3) 750 р. **421.** А = 50, В = 200; А меньше В на 75%; В больше А на 300%. **423.** 11, 22, 33, ... 99; 12, 24, 36, 48; 15. **424.** П = 3, В = 2, Б = 1, Л = 0. **426.** Янв. $-\frac{2}{3}$, Ф. $-\frac{2}{5}$. **427.** б) 1520 р.; г) 2800 р. **428.** б) 400 р.; г) 260 р. **429.** а) Через 5 лет; г) через 19 лет. **430.** а) 1000 р.; г) 400 р. **431.** а) 10%; б) 5%; в) 90%. **434.** ≈ 9 лет. **437.** а) 1600 р.; б) 830 р.; в) 10 тыс.р. **438.** а) 194 р.; б) 188 р.; в) 182 р.; г) 170 р. **439.** а) 12,5%; г) 100%. **440.** а) 0,1%; г) 0,07%. **441.** 21 д.; 210 км. **442.** 21 д. **448.** б) ув. на 54%; в) ум. на 70%. **449.** 1) 60%; 2) 100%. **450.** а) 3 д.; г) 64 д. **451.** $\approx 7,2\%$. **453.** а) 6 мес.; в) 32 мес. **454.** а) 4000 р.; г) 1600 р. **455.** а) 81,6 р.; б) 89,76 р.; в) 105,28 р. **458.** 36 000 р. **459.** А = 0,1; В = 0,5. 1) На 80%; 2) на 400%. **460.** 160°. **461.** Д'Арт. - 1, П. - 2, Ат. - 3, Ар. - 4. **462.** 2315,25 р. **463.** На втором; на 2312 р. **464.** $\approx 58\ 000$ р. **465.** а) 29 000 р.; б) 29 160 р. **466.** $\approx 107\%$; \approx в 2 раза. **467.** На 48,8%. **468.** 1) 2020 р., 2085 р., 2360 р. 2) $\approx 4\%$. **472.** 1) На 49%; 2) ув. на 8%. **473.** а) 4000 т; б) от 36 кг до 720 кг. **474.** 16,8%. **475.** 90 р. **476.** 40 кг. **477.** 140 г. **478.** 24%. **479.** На 641 р. **480.** 14,58 га. **481.** \approx на 55 тыс.чел. **482.** 2 т. **483.** 25%. **484.** 250 с. **485.** А = 5; В = 9. 1) на $44\frac{4}{9}\%$; 2) на 80%. **486.** 73 и 37. **487.** 8. **488.** 1) в) 0,4х; 2) б) 90; в) 4х; г) $\frac{y}{3}$; 3) на 75%; на 300%. **489.** в) 15%; г) 5%; д) 12,5%. **490.** 1) ув. на 11,3%; 2) ум. на 16%. **491.** 140 км. **492.** 1) На 3600 р.; 2) 25%. **493.** 8,4 л. **494.** 30, 25 и 15 тыс.чел. **495.** 9%. **496.** 1) Начислено на 8 р. больше; 2) 16 800 р. **497.** а) 6200 р.; б) 6298,56 р.