



Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон

МАТЕМАТИКА

5

КЛАСС

Часть 1



УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

Д69



Образовательная система Л. Г. Петерсон

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Непрерывный курс математики

для дошкольников, учащихся начальной и основной
школы 1–9 (от 3 до 15 лет)

Дорофеев, Георгий Владимирович.

Д69 Математика : 5-й класс : учебник : в 2 частях : издание в pdf-формате / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. — 4-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022.

ISBN 978-5-09-102059-5 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-088332-0 (печ. изд.).

Ч. 1. — 176 с. : ил. + Вкл. к учебнику (4 с.)

ISBN 978-5-09-101212-5 (электр. изд.).

ISBN 978-5-09-088331-3 (печ. изд.).

Учебник ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, развитие личностных качеств, познавательного интереса и ценностного отношения к образованию.

Является частью непрерывного УМК по математике «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной школы (от 3 до 15 лет). Учебник разработан в соответствии со всеми требованиями ФГОС ООО, утверждённого Приказом Министерства просвещения № 287 от 31.05.2021 г.

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Курсовую и методическую поддержку по реализации УМК «Учусь учиться» осуществляет НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики». Подробную информацию можно получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-101212-5 (ч. 1, электр. изд.)

ISBN 978-5-09-102059-5 (электр. изд.)

ISBN 978-5-09-088331-3 (ч. 1, печ. изд.)

ISBN 978-5-09-088332-0 (печ. изд.)

© Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон, 1996, 2010, 2018, с изменениями

© АО «Издательство «Просвещение», 2021

© Художественное оформление.

АО «Издательство «Просвещение», 2021

Все права защищены

Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон

МАТЕМАТИКА

5 класс

Учебник

В двух частях

Часть 1

Допущено Министерством просвещения
Российской Федерации

4-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2022

Математика – это стройное, красивое и прочное здание. По первым этажам этого здания ты прошёл в начальной школе.

5 класс – это новый этап твоего пути вверх, к вершинам знаний, к настоящему жизненному успеху.

Твой путь пройдёт по страницам этого учебника, а надёжным проводником на этом пути будет учитель математики.

Чтобы удобнее было пользоваться учебником, введены следующие обозначения:



К

– это лучше делать в классе,



Д

– а это дома,



П

– хорошо бы это повторить,



С

– а здесь главное –
твоя смекалка,



– базовые задания,



– более сложные задания по новым темам и темам повторения,



– задания, требующие умения находить нестандартные способы решения.



Учебник – это не рабочая тетрадь, к которой ты привык в начальной школе. Постарайся ничего не писать на его страницах ручкой. Необходимые пометки можно делать простым карандашом, а после завершения работы – стереть.

Удачи тебе!

АВТОРЫ

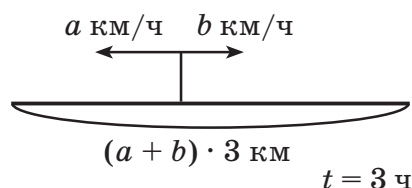
Глава 1

Математический язык

§ 1. Математические выражения

1. Запись, чтение и составление выражений

В начальной школе мы уже использовали различные математические знаки и буквы для обозначения чисел. Например, мы говорили, что скорость удаления поездов, одновременно выехавших с одной станции в противоположных направлениях со скоростями a км/ч и b км/ч, равна $(a + b)$ км/ч, а расстояние между ними через 3 часа составит $(a + b) \cdot 3$ км.



Цифры, буквы, скобки и знаки арифметических действий входят в **математический алфавит**. Из них составляются «слова» математического языка – **математические выражения**, например:

$$267, (38 + 422) \cdot 26, a - 5, b - (c - a), a \cdot b, (a + b) \cdot c, a \cdot 2.$$

В трёх последних выражениях стоит знак умножения, но принято писать проще: ab , $(a + b)c$, $2a$. При этом в последнем случае переставлены сомножители: числовой множитель пишут перед буквой, а не после неё.

В первых двух выражениях букв нет. Такие выражения называют **числовыми**. Выражения, в которых некоторые числа обозначены буквами, называют **буквенными**.

Нам уже известны названия простейших математических выражений – сумма, разность, произведение, частное. Более сложные выражения обычно называются *по последнему выполняемому действию*, например:

$(a - b) + c$ – *сумма разности чисел a и b и числа c ,*

$(c + a)(b - d)$ – *произведение суммы чисел c и a и разности чисел b и d .*

Важно научиться не только читать готовые математические выражения, но и составлять их, то есть «переводить» с русского языка на математический, например:

На русском языке	На математическом языке
Произведение первых пяти натуральных чисел	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
Сумма всех однозначных чисел	$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$
Сумма всех двузначных чисел	$10 + 11 + 12 + 13 + \dots + 99$

К

1 В каких из следующих выражений можно «сэкономить» на знаках умножения? Упрости запись этих выражений.

- 1) $5 \cdot 6$; 3) $12 \cdot x$; 5) $4 \cdot b \cdot (10 - y)$; 7) $9 \cdot 5 + k$;
 2) $(3 + 5) \cdot 9$; 4) $a \cdot c \cdot 7$; 6) $m \cdot (n + 8) \cdot 2$; 8) $c - 3 \cdot 6$.

2 Даны два числа – 80 и 2. Запиши их сумму, разность, произведение и частное.

3 Даны два числа – 57 и 19. Запиши:

- 1) произведение суммы данных чисел и большего из них;
 2) произведение разности данных чисел и меньшего из них;
 3) разность большего из данных чисел и их частного;
 4) сумму меньшего из данных чисел и их произведения.

4 Запиши в виде числового выражения:

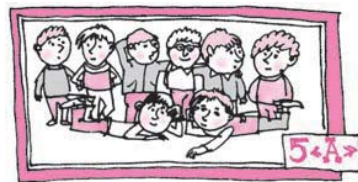
- 1) частное от деления числа 143 на разность чисел 67 и 54;
 2) произведение числа 13 и суммы чисел 27 и 91;
 3) разность числа 135 и частного чисел 105 и 7;
 4) частное от деления суммы чисел 43 и 3 на разность чисел 140 и 117.

5 Прочитай буквенное выражение:

- 1) $6 - a$; 3) $d : 2$; 5) $a(b + c)$; 7) $x - 3y$;
 2) $m + n$; 4) $3bc$; 6) $(x - y) : 5$; 8) $(a - b)(a + b)$.

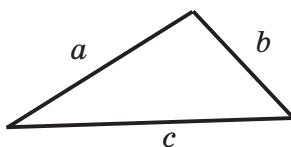
6 Переведи и запиши на математическом языке:

- 1) разность наименьшего трёхзначного и наибольшего двузначного чисел;
 2) частное наибольшего четырёхзначного числа и наименьшего натурального числа;
 3) произведение всех нечётных однозначных чисел;
 4) сумма всех двузначных чисел, кратных 10;
 5) сумма числа мальчиков и числа девочек твоего класса;
 6) разность числа всех предметов, которые ты изучаешь, и числа твоих любимых предметов.

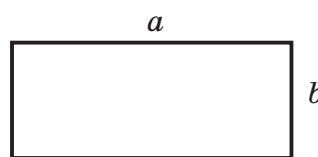


7 Запиши выражения для периметра фигур, изображённых на рисунке:

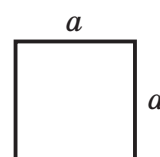
1)



2)



3)



8 Придумай и запиши два числовых и два буквенных выражения. Прочитай их.

9 Запиши число:

- 1) на 3 больше, чем разность чисел a и b ;
- 2) на 7 меньше, чем произведение чисел a и b ;
- 3) в 5 раз больше, чем частное чисел a и b ;
- 4) в 4 раза меньше, чем сумма чисел a и b .



10 По берегу реки со скоростью v км/ч идёт турист. Найди скорость плывущей по реке лодки, зная, что по сравнению со скоростью туриста она:

- а) на 2 км/ч меньше;
- б) на 1 км/ч больше;
- в) в 2 раза меньше;
- г) в 2 раза больше.

11 Запиши выражение для ответа на вопрос задачи:

- 1) В 5 «А» классе a учеников, а в 5 «Б» классе – на 3 ученика меньше. Сколько всего учеников в этих двух классах?
- 2) В шахматном кружке занимается b учеников, а в волейбольной секции – в 3 раза больше. На сколько учеников меньше в шахматном кружке, чем в волейбольной секции?
- 3) У Тани было m цветков. Из них n цветков она подарила родителям, k цветков – бабушке, а остальные цветы поставила в вазу. Сколько цветков Таня поставила в вазу?
- 4) Ира на свой день рождения пригласила пятерых гостей. Для каждого из них она испекла c пирожков и d булочек. Сколько всего пирожков и булочек испекла Ира для гостей?
- 5) У Маши было a конфет, у Кати b конфет, у Димы c конфет, а у Алеши d конфет. Они захотели их поделить поровну. Сколько конфет достанется каждому?
- 6) В вазе лежало x груш, яблок в 3 раза больше, чем груш, а апельсинов на y меньше, чем яблок. Сколько всего груш, яблок и апельсинов лежало в вазе?



12 Яблоко стоит x р., а груша y р. Объясни, что может означать выражение:

- 1) $x + y$;
- 2) $y - x$;
- 3) $3x$;
- 4) $8y$;
- 5) $3x + 8y$;
- 6) $8y - 3x$;
- 7) $y : x$;
- 8) $120 : y$.

13 Запиши в виде выражения:

- 1) количество сантиметров в a метрах;
- 2) количество метров в b километрах;
- 3) количество миллиметров в c дециметрах;
- 4) количество дециметров в d километрах.



14 По шоссе автомобиль двигался 2 часа со скоростью 90 км/ч, а по проселочной дороге – 5 часов со скоростью v км/ч.

- 1) Сколько всего километров проехал автомобиль?
- 2) На сколько километров больше проехал автомобиль по проселочной дороге, чем по шоссе?

- 15** Придумай задачу, приводящую к выражению вида $3 \cdot \square + 5 \cdot \square$, о величинах:
- 1) путь, скорость, время ($s = vt$);
 - 2) стоимость, цена, количество товара ($C = an$);
 - 3) работа, производительность, время ($A = vt$);
 - 4) площадь прямоугольника, его длина и ширина ($S = ab$).

- 16** Реши задачи, составляя выражения. Есть ли в условиях этих задач лишние данные?
- 1) Площадь баскетбольной площадки, имеющей прямоугольную форму, a м², а длина 20 м. Чему равна её ширина?
 - 2) Спортсмен пробежал b метров за 8 минут. С какой скоростью он бежал?
 - 3) Самолёту надо пролететь c км. В час он пролетает d км. Сколько километров ему останется лететь после двух часов полёта?
 - 4) Серёжа дал в кассу магазина n р. в уплату за 4 мороженых по цене t р. Сколько сдачи он должен получить?
 - 5) Четыре яблока можно купить за x р., а четыре груши – за y р. На сколько рублей груша дороже яблока?
 - 6) Два прямоугольника имеют одинаковую площадь, равную b дм². Длина первого прямоугольника 5 дм, а длина второго прямоугольника – 7 дм. Ширина какого прямоугольника меньше и на сколько?
 - 7) За 3 часа Вадим прополот a грядок, а Денис – только c грядок. Во сколько раз производительность труда у Вадима больше, чем у Дениса?
 - 8) Два друга взяли в библиотеке одинаковые книги. Первый читает x страниц в день, а второй – y страниц в день. Кто из них прочитает свою книгу быстрее и во сколько раз, если в книге 360 страниц и $x > y$?

π

- 17** Какими числами можно заменить фигуры, чтобы получились верные равенства?

1) $\bigcirc + 12 = \triangle$

$\square : \triangle = 7$

$\triangle - 5 = \text{шестиугольник}$

$4 \cdot \text{шестиугольник} = 100$

2) $\square : 9 = \square$

$\triangle + \square = 84$

$3 \cdot \square = 162$

$90 - \bigcirc = \triangle$



- 18** Расположи ответы примеров в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам, и расшифруй слово. Что оно означает?

У $7 + 9$

Ц $72 - 9$

Р $7 \cdot 8$

Я $46 + 25$

А $96 - 38$

Е $16 \cdot 3$

И $52 + 18$

М $50 - 14$

Н $52 : 4$

Что общего и что различного у примеров каждого столбика?

19 Запиши три раза подряд число 7052 и прочитай получившееся число. Сколько классов в записи этого числа? Сколько разрядов? Назови разряды, в которых записана цифра 5.

20 Прочитай предложения:

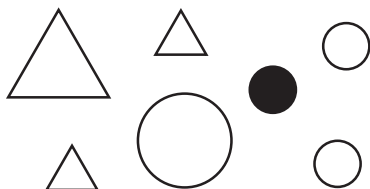
- а) Расстояние от Земли до Луны равно примерно 384 400 км.
- б) В одной неделе 604 800 секунд.
- в) Площадь России составляет 17 075 400 км².
- г) В високосном году 31 622 400 секунд.
- д) Площадь поверхности Земли 510 072 000 км².
- е) Большая полуось Венеры равна 108 208 930 км.
- ж) Среднее расстояние от Урана до Солнца составляет 2 869 100 000 км.



21 Вспомни правила сравнения натуральных чисел и найди ошибки:

- а) $389 > 2000$;
- б) $7096 < 7900$;
- в) $28\ 542 < 28\ 524$;
- г) $632\ 510 \geq 632\ 007$;
- д) $4\ 702\ 329 \leq 4\ 702\ 329$;
- е) $5\ 999\ 999 < 699\ 999$.

22 На какие непересекающиеся подмножества (части) можно разбить множество фигур на рисунке? Приведи три примера. Какому признаку разбиения соответствуют записанные рядом с рисунком равенства? Какие свойства сложения и вычитания выражают данные равенства?



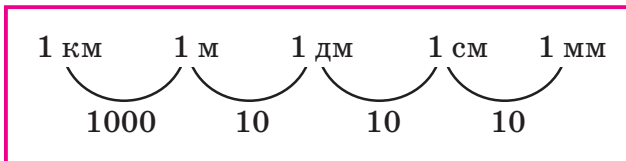
$$\begin{aligned} 3 + 4 &= 7 \\ 4 + 3 &= 7 \\ 7 - 3 &= 4 \\ 7 - 4 &= 3 \end{aligned}$$



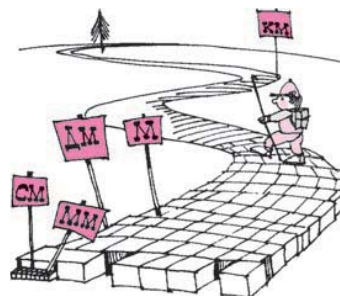
23 Выполни действия:

- 1) $50\ 724\ 096 + 4\ 293\ 512$;
- 2) $98\ 017\ 894 + 523\ 495\ 270$;
- 3) $16\ 280\ 409 - 572\ 182$;
- 4) $341\ 562\ 004 - 87\ 316\ 945$.

24 Пользуясь таблицей, расскажи о соотношениях между единицами длины:



Сколько миллиметров в 1 дм?
 Сколько сантиметров в 1 м?
 Сколько дециметров в 1 км?



25 Выполни действия:

а) $4\text{ м } 9\text{ см} + 32\text{ дм } 1\text{ см};$

в) $2\text{ км } 85\text{ м} - 926\text{ м};$

б) $8\text{ дм } 4\text{ см} - 49\text{ см } 3\text{ мм};$

г) $14\text{ км } 68\text{ м} + 9\text{ км } 950\text{ м}.$

26 1) Одна сторона треугольника равна 16 см, вторая – на 2 дм больше первой, а третья – в 2 раза меньше суммы первой и второй сторон. Найди периметр треугольника.

2) Одна сторона четырёхугольника равна 7 м, вторая – на 5 дм больше первой, а третья – в 3 раза меньше второй. Найди четвертую сторону этого четырёхугольника, если его периметр равен 23 м.

Д

27 Запиши в виде выражения:

1) сумма числа 18 и частного чисел a и 5;

2) разность произведения чисел 9 и b и числа 23;

3) произведение числа c и суммы чисел d и 4;

4) частное разности чисел 10 и n и числа m .

28 Составь выражения:

а) Барону Мюнхгаузену a лет, а его лошадь на 25 лет моложе. Во сколько раз барон старше своей лошади?

б) Доктор Айболит шёл к больным сначала 5 часов со скоростью b км/ч, а потом ещё 3 часа со скоростью c км/ч. Какой путь прошёл доктор Айболит за всё это время?

в) У лисы Алисы было d сольдо. Она купила себе 3 заколки по цене n сольдо за штуку и бантик за 6 сольдо. Сколько денег у нее осталось?

г) Почтальон в первый день разнес за 4 часа x писем, а во второй день за это же время – на 12 писем больше. На сколько производительность почтальона во второй день была больше, чем в первый? (Считать дневную производительность постоянной.)

29 Запиши на математическом языке:

а) сумма цифр числа 287;

б) разность числа 92 и двузначного числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке;

в) произведение всех различных делителей числа 8;

г) частное двух натуральных чисел (введи произвольные обозначения).

30 Запиши числа в десятичной системе счисления:

а) три миллиона двести девяносто тысяч семьсот пять;

б) двадцать четыре миллиона восемьдесят;

в) четыреста один миллион семьдесят две тысячи;

г) восемь миллиардов пятьдесят миллионов две тысячи девятьсот шестнадцать.



31 1) Длина прямоугольника равна 12 м, а его ширина на 3 м меньше. Найди периметр и площадь прямоугольника.

2) Площадь прямоугольника равна 80 дм^2 , а его ширина равна 5 дм. На сколько надо уменьшить длину прямоугольника, чтобы его площадь уменьшилась на 35 дм^2 ? Есть ли лишнее данное в условии этой задачи?

32 Верны ли неравенства:

а) $20\ 003\ 611 - 846\ 249 \leq 12\ 307\ 579 + 6\ 849\ 604$;

б) $9\ 352\ 796 + 20\ 647\ 204 > 7\ 000\ 000 - 1\ 949\ 495$?

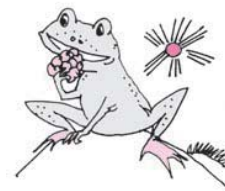
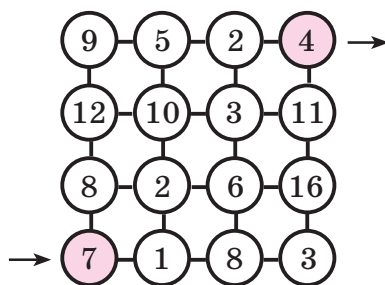


с

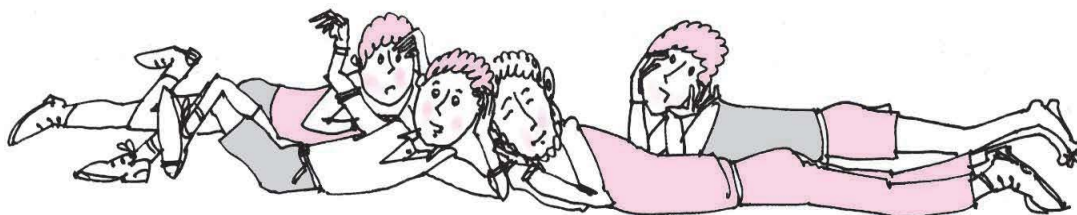
33* В некотором царстве, в некотором государстве, за синими морями, за высокими горами жил-поживал смыслённый парнишка Басик. Закончил Басик начальную школу и перешёл в 5 класс. Пришлось в пути ему много преград преодолеть, много трудностей испытать.

1) Нужно было Басику перебраться через топкое болото. Перейти его можно только по кочкам, двигаясь по схеме вправо \rightarrow и вверх \uparrow (влево и вниз идти нельзя). Сколькими способами можно пройти через это болото?

Каким маршрутом двигался Басик, если, прыгая по кочкам, он между делом собирал морошку и набрал 40 ягодок? (Цифрами обозначено количество ягод на каждой кочке.)



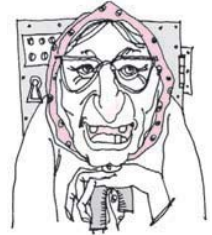
2) Повстречал Басик на пути четверых братьев-бездельников, тех, что, лежа на солнышке, любят прохожим путникам советы давать. Второй брат дал Басику вдвое больше советов, чем первый, третий – втрое больше, чем второй, четвёртый – вчетверо больше, чем третий, а все вместе братья-бездельники дали Басику 132 бесполезных совета. Сколько советов дал первый брат?



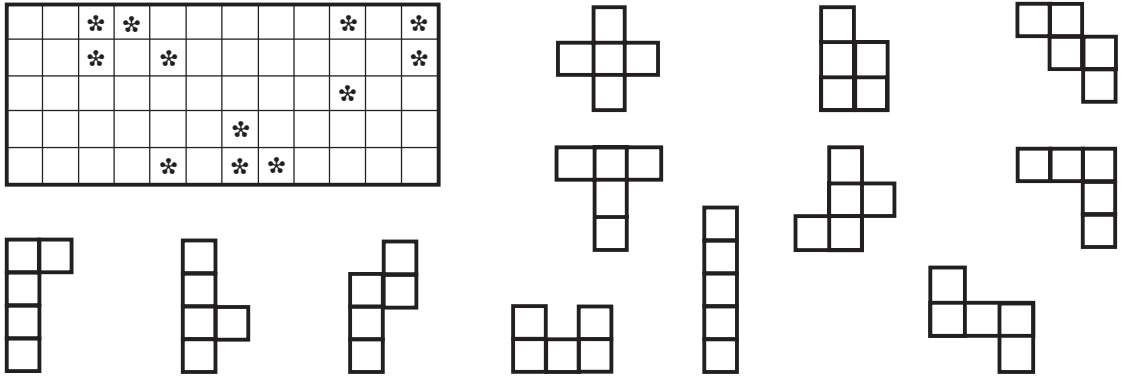
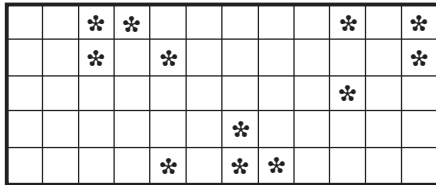
3) Побывал Басик у Бабы Яги. Говорила Яга, что не выберется Басик из её избушки, потому что поставила она на дверь замок кодовый. Нужно набрать на замке девять разных цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) так, чтобы были верны получившиеся равенства:

$$\square\square : \square = \square - \square = \boxed{3} + \square = \boxed{1} \cdot \square$$

Знал Басик, только где стоят цифры 1 и 3, но сумел-таки открыть замок! Как он расставил остальные цифры?



4) Взял Басик с собой в путь-дорогу свою любимую игру «Пентамино». Двенадцать пентамино лежали у Басика в прямоугольной коробке. Но однажды в дороге коробка упала, фигурки высыпались. Хорошо, что Басик на дне коробки нарисовал звёздочки. Каким способом можно уложить в коробку все 12 фигурок, если каждую звёздочку закрывает ровно одно пентамино?



2. Значение выражения.

Если в числовом выражении провести указанные в нём действия, то получится некоторое число. Это число называется **значением выражения**. Например, значение выражения $(43 + 57) \cdot 32$ равно 3200.

Буквенное выражение можно превратить в числовое. Для этого надо заменить буквы числами. Например, разность $a - b$ при $a = 8$ и $b = 3$ превратится в числовое выражение $8 - 3$. Его значение, равное 5, называют **значением буквенного выражения $a - b$ при $a = 8$ и $b = 3$** .



К

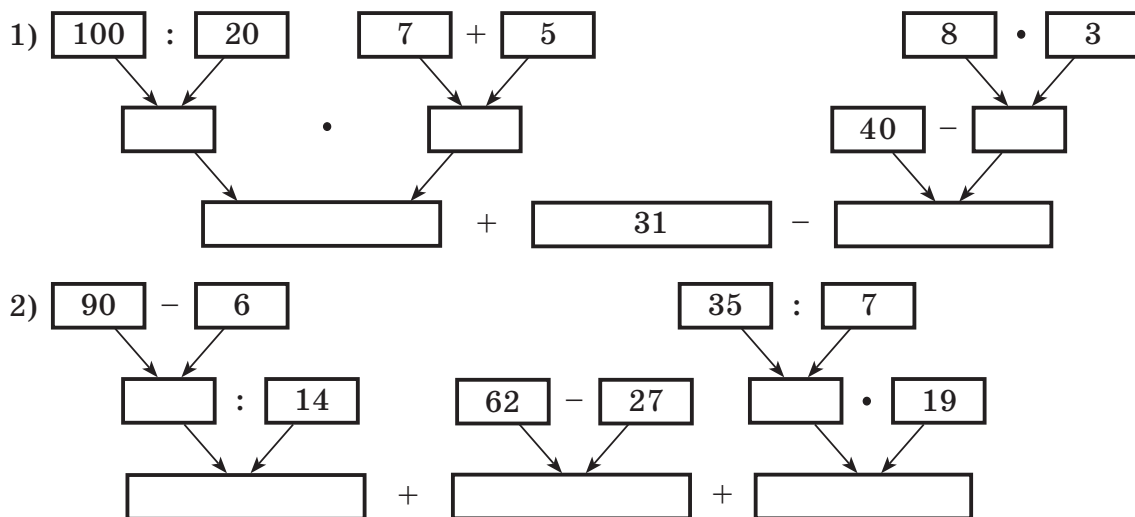
34 Составь программу действий и найди значение выражения:

- 1) $(8 + 9) \cdot 2 - 5 \cdot 5 + 360 : 6 : 10$;
- 2) $100 - 12 - 27 : (63 : 7) + (7 + 33) : 8$.

35 Прочитай выражения и найди их значения. Что общего в примерах каждого столбика? Покажи, что любой пример каждого столбика может быть определён как «лишний».

$25 + 3 \cdot 4$	$72 - 16 \cdot 2$	$(18 + 12) \cdot 7$	$(40 - 12) : 4$
$18 : 3 + 24$	$90 - 45 : 5$	$(21 - 6) \cdot 3$	$(9 \cdot 8) : 6$
$8 \cdot 6 + 19$	$6 \cdot 9 - 38$	$5 \cdot (25 + 47)$	$48 : (3 \cdot 8)$

36 Составь по схеме выражение и найди его значение:



37 Запиши какое-нибудь числовое выражение, для вычисления значения которого нужно последовательно выполнить:

- 1) сложение, умножение и вычитание;
- 2) умножение, вычитание и деление;
- 3) деление, сложение и умножение;
- 4) вычитание, деление и вычитание.



38 Составь выражение и найди его значение:

- 1) Оля с Дашей пошли в лес за грибами. Оля нашла 28 грибов, а Даша – на 15 грибов больше. Сколько всего грибов нашли обе девочки?
- 2) Стасу понравилась книжка за 104 р., а денег у него оказалось в 4 раза меньше. Сколько рублей ещё нужно Стасу, чтобы купить эту книжку?
- 3) В мешке было 50 кг картофеля. Из него брали 9 дней по 2 кг в день. Сколько картофеля ещё осталось в мешке?
- 4) В классе 25 учеников. Из них после уроков домой ушли 7 человек, а остальные разбились на 3 команды для игры. Сколько учеников в каждой команде?

39 Найди значение выражения:

- 1) $a + 52$, если $a = 0, 18, 49$;
- 2) $90 - b : 9$, если $b = 0, 9, 810$;
- 3) $c(25 - c)$, если $c = 16, 24, 25$;
- 4) $240 : d - 4(m + n)$, если $d = 1, m = 15, n = 5$.



40 Запиши выражение для ответа на вопрос задачи и найди его значение при данных значениях букв:

- 1) Олег живёт на расстоянии a м от школы. Сколько времени он потратит на дорогу от дома до школы, если будет идти со скоростью b м/мин? ($a = 800, b = 50$.)
- 2) Костя шёл лесом c км, а полем d км. Весь путь занял t часов. С какой скоростью он шёл, если скорость в пути не изменялась? ($c = 5, d = 1, t = 2$.)
- 3) За 10 тетрадей заплатили x р., а за 15 блокнотов – на y р. больше. На сколько рублей блокнот дешевле тетради? ($x = 250, y = 20$.)
- 4) Два прямоугольных земельных участка имеют одинаковую площадь a м². Длина первого участка b м, а длина второго участка на 5 м больше. Ширина какого участка меньше и на сколько? ($a = 1800, b = 45$.)
- 5) Саше m лет, а Игорь на n лет старше. Во сколько раз Саша будет младше Игоря через 3 года? ($m = 2, n = 10$.)
- 6) В трамвае ехало c человек. На остановке вышло b человек, а вошло d человек. На следующей остановке никто не вошёл, а вышло в 4 раза меньше, чем было первоначально. Сколько человек осталось в трамвае после второй остановки? ($c = 24, b = 5, d = 8$.)

41 Заполни таблицу:

a	0	1	2	3	4	5	6	7
$20 - a$								
$4a$								

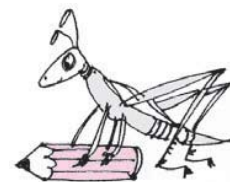


Для каких значений a из таблицы выполняются условия:

- 1) $20 - a > 4a$;
- 2) $20 - a < 4a$;
- 3) $20 - a = 4a$?

42 Заполни таблицу:

a	1	3	4	6	7	8	9	15
b	0	4	5	6	9	10	11	29
$2a + 2b$								
$2(a + b)$								



Что ты замечаешь? Как объяснить полученный результат?

43 У Вити было 20 марок. Он подарил сестре a марок. Сколько марок у него осталось?

При любых ли значениях a задача имеет смысл? Имеет ли она смысл при $a = 25$, при $a = \frac{1}{5}$? Почему?

44 Найди значения выражения $(18 - x) : x$ для всех x , принадлежащих множеству $\{1, 2, 3, 6, 9\}$. Можешь ли ты найти его значение при $x = 5$, $x = 20$, $x = 0$?

π

45 Объясни, как найти неизвестное слагаемое, уменьшаемое, вычитаемое. Реши уравнение и проиллюстрируй решение на схеме.

1) $x - 56\,924 = 7409$;

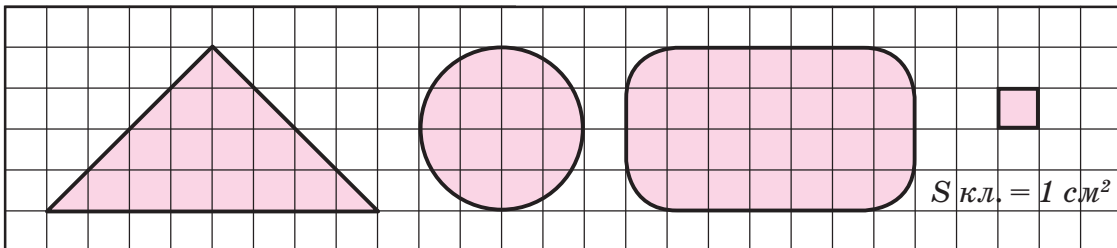
2) $x + 72\,315 = 140\,053$;

3) $610\,408 - x = 5914$;

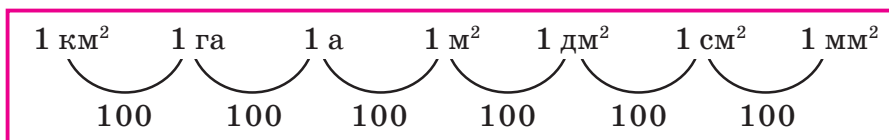
4) $93\,204 - (x + 7958) = 18\,376$.



46 Вычисли приближённо площади этих фигур, используя известную тебе формулу $S \approx a + b : 2$, где a – число клеток, которые входят в фигуру целиком, а b – число клеток, которые входят в фигуру частично. Если число b нечётно, то увеличь его на 1. Подумай, площади каких фигур ты можешь вычислить точно. Сравни точные значения их площадей с приближенными.



47 Проследи по таблице цепочку единиц площади, расскажи о соотношениях между ними:

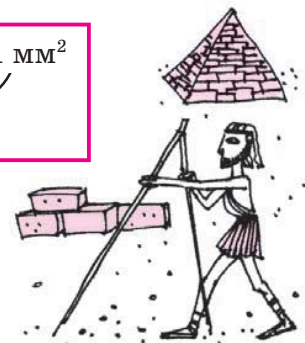


Сколько квадратных миллиметров в 1 см^2 ?

Сколько квадратных сантиметров в 1 м^2 ?

Сколько аров в 1 га ?

Сколько квадратных метров в 1 км^2 ?

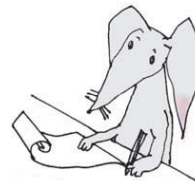


48 Запиши в виде выражения:

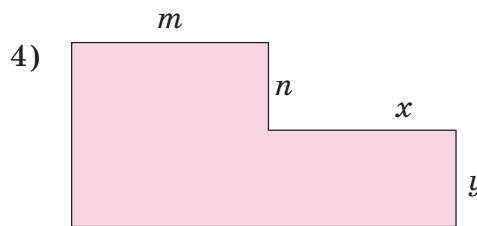
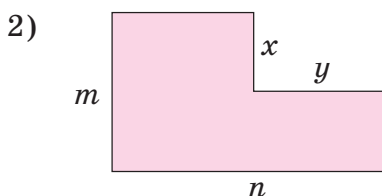
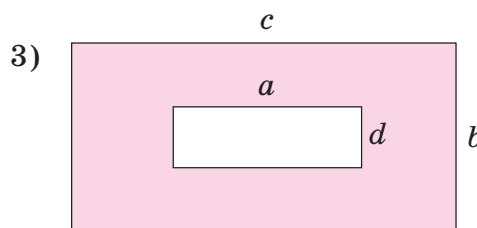
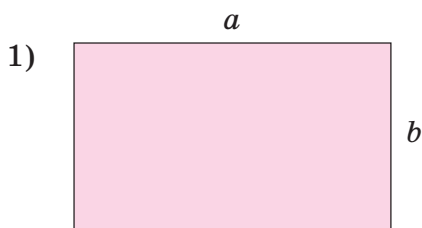
- 1) количество квадратных миллиметров в a квадратных сантиметрах;
- 2) количество квадратных дециметров в b арах;
- 3) количество квадратных сантиметров в c квадратных дециметрах;
- 4) количество квадратных метров в d гектарах.

49 Выполни действия:

- а) $5 \text{ м}^2 9 \text{ дм}^2 + 74 \text{ дм}^2$; в) $4 \text{ га } 8 \text{ а} + 19 \text{ га } 52 \text{ а}$;
- б) $48 \text{ га } 3 \text{ а} - 2 \text{ га } 17 \text{ а}$; г) $15 \text{ м}^2 6 \text{ см}^2 - 7 \text{ м}^2 45 \text{ см}^2$.



50 Запиши выражение для площади фигуры, закрашенной на рисунке:



51 1) Ширина прямоугольника 7 дм, а длина – на 2 см больше. Найди его периметр и площадь.

2) Для упаковки подарка Саша нашла коробку в форме цилиндра высотой 48 см. Она обклеила ее цветной бумагой (крышку и дно она не украшала). Для этого ей потребовалось вырезать прямоугольный лист бумаги площадью 12 дм^2 . Запиши размеры этого листа.

52 1) Ширина прямоугольника 36 см. На сколько увеличится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 7 см?

2) Длина прямоугольника 5 м 2 дм. На сколько уменьшится его площадь, если ширину уменьшить на 8 дм?

53 Реши задачу, составляя выражение:

1) У Кирилла было 84 р. На 20 р. он купил мороженое, а на остальные деньги приобрёл для своей коллекции 4 открытки, все по одной цене. Сколько рублей стоила каждая открытка?

2) Алёша с папой вышли из дома на озеро и шли к нему сначала 30 мин со скоростью 80 м/мин, а затем ещё 10 мин со скоростью на 20 м/мин меньшей. Чему равно расстояние от Алёшиного дома до озера?

Д **54** Найди значение числового выражения:

- 1) $(9 \cdot 20 + 60) : 4 - 16 - 4 \cdot (20 : 5)$;
- 2) $490 : 7 + (57 + 7) : 8 \cdot 2 - 3 \cdot (26 - 6)$.



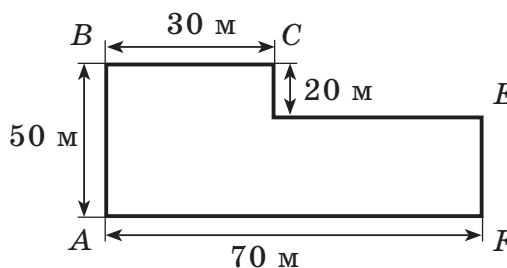
55 Найди значение буквенного выражения:

- 1) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$, если $x = 2$;
- 2) $(2a - 3b) : c$, если $a = 26$, $b = 9$, $c = 5$.

56 Составь выражение и найди его значение при данных значениях букв:

- 1) Один рыбак поймал a рыб, а второй – на b рыб больше первого. Во сколько раз первый рыбак поймал меньше рыб, чем второй? ($a = 2$, $b = 8$.)
- 2) Теплоход проплыл вниз по реке c км за 4 часа, а на обратный путь он затратил 5 часов. На сколько километров в час меньше была его скорость на обратном пути? ($c = 100$.)

57 На рисунке показан план земельного участка и указаны его размеры. Найди площадь этого участка и вырази её в арах. Чему равна длина прямоугольника, имеющего такую же площадь и ширину 45 м?



58 Реши уравнение:

- а) $x - 7958 = 16\ 064$;
- б) $315 + y = 430\ 212$;
- в) $50\ 000 - z = 2796$.

59 Выполни действия:

- 1) $5\text{ дм}^2\ 17\text{ см}^2 + 27\text{ дм}^2\ 8\text{ см}^2$;
- 2) $3\text{ га}\ 4\text{ а} - 34\text{ а}$;
- 3) $9\text{ см}^2 - 81\text{ мм}^2$.

60 В числах некоторые цифры заменены звёздочками. Можно ли установить, какое из этих чисел больше? Там, где это возможно, запиши ответ с помощью знаков $>$ или $<$.

- 1) 5*** и 8** ;
- 2) $*9$ и $****1$;
- 3) $47\text{***}0$ и $48\text{**}5$;
- 4) $*9\text{***}$ и $*7\text{***}$.

С **61*** В числе 92 574 063 зачеркни три цифры так, чтобы оставшиеся пять цифр в той же последовательности образовывали: 1) наибольшее число; 2) наименьшее число.

62* В стозначном числе 12345678901234567890 ... 1234567890 вычеркнули все цифры, стоящие на нечётных местах. В полученном пятидесятизначном числе вновь вычеркнули все цифры, стоящие на нечётных местах. Вычеркивание продолжалось до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была вычеркнута последней?

Задачи для самопроверки.

- 63** Запиши числовое выражение и найди его значение:
- 1) произведение числа 28 и разности чисел 12 и 7;
 - 2) частное суммы чисел 97 и 43 и произведения чисел 5 и 4.

- 64** Реши задачу, составляя числовое выражение:
- 1) Автомобиль едет со скоростью 80 км/ч. Какое расстояние ему останется проехать через 3 часа пути, если всего ему надо проехать 400 км?
 - 2) В киоск привезли 5 ящиков с виноградом и 7 ящиков с персиками. Винограда в каждом ящике было 12 кг, а персиков – на 4 кг меньше. Сколько всего килограммов винограда и персиков привезли в киоск?

- 65** Найди значение буквенного выражения при данных значениях букв:

- 1) $68 + a : 5$, если $a = 280$;
- 2) $4b - c$, если $b = 70$, $c = 42$.

- 66** Составь буквенное выражение и найди его значение. Есть ли в условиях этих задач лишние данные?

- 1) В классе n учеников. Каждый ученик принес для библиотеки по 4 книги. Сколько всего книг принесли ученики этого класса в библиотеку? ($n = 25$.)
- 2) Площадь одного прямоугольника a м², а площадь другого на 8 м² больше. Оба прямоугольника имеют одинаковую ширину, равную b м. На сколько метров длина первого прямоугольника меньше, чем второго? ($a = 10$, $b = 2$.)

- 67** Найди значение выражения:

$$56 \cdot 3 - (50 - 2 \cdot 7) : 12 - 68 : (40 : 10).$$

- 68** Запиши число в десятичной системе счисления:

- 1) сорок пять тысяч девяносто один;
- 2) восемь миллионов двадцать семь тысяч четыреста;
- 3) двадцать миллионов восемьсот тридцать шесть тысяч девять;
- 4) четыре миллиарда пятьсот шестьдесят миллионов две тысячи триста;
- 5) восемьсот девять миллиардов девяносто пять тысяч семьсот пятнадцать.

- 69** Расположи числа в порядке возрастания:

3045, 30 000 045, 543, 400 503, 30 045, 5340, 405 003, 5403, 435 000.

- 70** Реши уравнение и сделай проверку:

а) $x - 528 = 2095$; б) $832 + y = 60\,308$; в) $14\,010 - z = 3815$.

- 71** Вычисли:

- 1) 8 м 36 см – 5 дм 8 см;
- 2) 12 км 24 м + 3 км 690 м;
- 3) 2 дм² 46 см² + 18 дм² 4 см²;
- 4) 6 га 17 а – 2 га 8 а.



§ 2. Математические модели

1. Перевод условия задачи на математический язык.

В совершенно различных на первый взгляд задачах можно обнаружить, что их решение одинаково. Например, если на столе лежат 2 яблока, 2 апельсина и груша, то как найти общее число фруктов, лежащих на столе? Конечно, $2 + 2 + 1 = 5$. Но ведь точно так же мы можем определить и число уроков во вторник, зная, что по расписанию будут два урока русского языка, две математики и география.

В этих двух непохожих ситуациях мы использовали одну и ту же **математическую модель**, складывая не фрукты и не уроки, а натуральные числа.



Для того чтобы построить математическую модель, надо перевести условие задачи с привычного родного языка на специальный, математический язык. Такой перевод является первым *этапом решения любой задачи*. На следующем этапе с математической моделью нужно поработать: произвести вычисления, чтобы получить ответ к задаче. На последнем этапе осуществляется проверка соответствия полученного ответа реальности.

В этом пункте мы займёмся первым этапом: будем учиться переводить условие задач на математический язык.

Рассмотрим пять различных задач с примерами такого перевода.

Задача 1.

Роман выбрал в магазине карандаш за 27 рублей и ручку, которая стоила в 2 раза дороже. Какую сдачу получит мальчик, если расплатится за эту покупку купюрой в 100 рублей?

100		
к.	р.	с.
27	$27 \cdot 2$?

Сдача, которую дадут Роману, составляет часть от денег, которыми он расплатился. Поэтому для ответа на вопрос задачи надо из денежной суммы, уплаченной Романом, вычесть общую стоимость карандаша и ручки. Из условия известно, что Роман дал продавцу 100 рублей, карандаш стоит 27 рублей, а ручка – $(27 \cdot 2)$ рублей. Значит, сдача составит $(100 - 27 - 27 \cdot 2)$ рублей.

Выражение $(100 - 27 - 27 \cdot 2)$ является математической моделью данной задачи. Для ответа на поставленный вопрос достаточно найти значение этого выражения.

Заметим, что для одной и той же задачи могут быть получены разные математические модели. Например, для нашей задачи можно записать также выражение $100 - (27 + 27 \cdot 2)$.

К

72 Составь выражения для ответа на вопросы задач:

- 1) Автомобиль проходит расстояние x км за 2 часа, а автобус – за 3 часа. На сколько скорость автобуса меньше скорости автомобиля?
- 2) За x р. можно купить 3 м ситца или 2 м полотна. На сколько рублей 1 м полотна дороже 1 м ситца?
- 3) Бассейн, вмещающий x м³ воды, наполняется через большую трубу за 2 часа, а через маленькую – за 3 часа. На сколько скорость заполнения бассейна через маленькую трубу меньше, чем через большую?
- 4) Мастер может сделать x одинаковых деталей за 2 часа, а его ученик – за 3 часа. На сколько производительность мастера больше производительности ученика?

Что ты замечаешь? Составь задачу с другими величинами, имеющую такую же математическую модель.

73

Придумай задачи, математической моделью которых является выражение:

- | | | |
|-------------------|--------------------|----------------------|
| 1) $a - b$; | 4) $15n$; | 7) $x - 3y$; |
| 2) $c + 3c$; | 5) $k : 9$; | 8) $2m + 2n$; |
| 3) $d - m - 5m$; | 6) $b : (b - 8)$; | 9) $a : 4 - a : 9$. |

74

Среди данных четырёх задач найди такие задачи, математические модели которых совпадают.

- 1) Расстояние от села Михайловка до деревни Зайцево a км, а от деревни Зайцево до города – в 2 раза больше. Грузовик проехал от села Михайловка до города через Зайцево со скоростью b км/ч. Сколько времени он был в пути?
- 2) Ширина прямоугольника a м, а длина – в 2 раза больше. Длину уменьшили на b м. Чему стала равна площадь прямоугольника?
- 3) За b часов работы один автомат закрывает a банок, а другой – в 2 раза больше. Сколько банок закроют они вместе за 1 час, если будут работать с той же производительностью?
- 4) Во дворе гуляют a мальчиков, а девочек – в 2 раза больше. Для игры все дети разбились на команды по b человек в каждой. Сколько получилось команд?

**75**

Найди выражение, которое является правильным переводом задачи на математический язык. Придумай задачу с другими величинами, имеющую такое же решение.

а) Из c метров шёлка сшили 7 одинаковых платьев. Сколько метров шёлка потребуется на 12 таких платьев?

- | | | | |
|---------------------|-------------------------|---------------------|-----------------------------|
| 1) $(c : 7) : 12$; | 2) $(c : 7) \cdot 12$; | 3) $12 : (c : 7)$; | 4) $(c \cdot 7) \cdot 12$. |
|---------------------|-------------------------|---------------------|-----------------------------|

б) Вертолёт пролетел за 3 часа d км. За сколько часов он пролетит с той же скоростью n км?

- 1) $n : (d : 3)$; 2) $(d : 3) \cdot n$; 3) $(d : 3) : n$; 4) $n : (d \cdot 3)$.

в) В одном альбоме x марок наклеено на 10 страниц поровну. В другом альбоме наклеено y марок и на каждой странице на 4 марки меньше, чем в первом альбоме. Сколько страниц занято марками во втором альбоме?

- 1) $(x : 10 - 4) : y$; 2) $x : 10 + y : 4$; 3) $(x - y - 4) : 10$; 4) $y : (x : 10 - 4)$.

π

76 Вычисли и расшифруй название профессии. Что ты о ней знаешь?

$$\begin{array}{r} 8 \\ + 9 \\ \cdot 3 \\ - 2 \\ : 7 \\ \hline \end{array}$$

К

$$\begin{array}{r} 21 \\ - 15 \\ \cdot 6 \\ : 4 \\ + 25 \\ \hline \end{array}$$

Р

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 18 \\ : 8 \\ \cdot 15 \\ - 37 \\ \hline \end{array}$$

Д

$$\begin{array}{r} 35 \\ : 7 \\ \cdot 9 \\ + 15 \\ : 10 \\ \hline \end{array}$$

И

$$\begin{array}{r} 9 \\ \cdot 12 \\ - 9 \\ : 11 \\ + 6 \\ \hline \end{array}$$

О

$$\begin{array}{r} 72 \\ - 48 \\ : 3 \\ \cdot 7 \\ + 14 \\ \hline \end{array}$$

Ч

$$\begin{array}{r} 18 \\ \cdot 8 \\ + 6 \\ : 3 \\ - 26 \\ \hline \end{array}$$

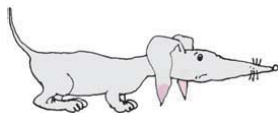
Е

$$\begin{array}{r} 54 \\ : 9 \\ \cdot 14 \\ : 21 \\ \cdot 7 \\ \hline \end{array}$$

В

$$\begin{array}{r} 7 \\ + 8 \\ \cdot 10 \\ - 110 \\ : 5 \\ \hline \end{array}$$

П



8	24	34	24	28	15	23	70	6	7

77

Цепочку вычислений, соответствующую букве «К» предыдущего номера, можно задать выражением $[(8 + 9) \cdot 3 - 2] : 7$. Составь выражения для остальных цепочек и проверь правильность записи с помощью вычислений.

78

Число записано в виде суммы разрядных слагаемых. Сколько единиц каждого разряда содержит это число? Запиши его.

- 1) $70\,000 + 2\,000 + 300 + 50$; 3) $9\,000\,000 + 40\,000 + 300 + 50$;
 2) $400\,000 + 8\,000 + 10 + 7$; 4) $80\,000\,000 + 200 + 3$.

79

Запиши число в виде суммы разрядных слагаемых по образцу:

$$56\,074 = 5 \cdot 10\,000 + 6 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 10 + 4$$

- 1) 32; 3) 621; 5) 8534; 7) 29 454; 9) 709 015;
 2) 74; 4) 255; 6) 9067; 8) 33 303; 10) 5 240 800.

80 1) $35\,714 + 506 + 378\,493$;

3) $7\,000\,000 - 38\,412$;

2) $24\,203\,622 - 9\,680\,750$;

4) $1\,010\,100 - (104\,717 + 6394)$.

Д

81 а) Расположи ответы примеров в порядке возрастания, сопоставь их соответствующим буквам, и ты узнаешь, как в России в старину называли рифму.

С	$12 \cdot 3$
---	--------------

Г	$216 : 4$
---	-----------

Е	$750 : 25$
---	------------

С	$27 \cdot 4$
---	--------------

А	$480 : 40$
---	------------

О	$520 : 13$
---	------------

Е	$38 \cdot 70$
---	---------------

А	$204 : 3$
---	-----------

К	$600 : 150$
---	-------------

И	$490 \cdot 3$
---	---------------

Л	$280 : 5$
---	-----------

Р	$840 : 140$
---	-------------

б) Расшифруй слово, расположив ответы примеров в порядке убывания и сопоставив их соответствующим буквам. Подбери для него несколько рифм.

А	$3\,681\,139 + 5\,327\,870$
---	-----------------------------

Ь	$809 \cdot 45$
---	----------------

К	$8\,924\,059 + 3648 + 1\,072\,257$
---	------------------------------------

Е	$796 \cdot 609$
---	-----------------

Р	$10\,000\,000 - 2\,570\,801$
---	------------------------------

У	$8002 \cdot 906$
---	------------------

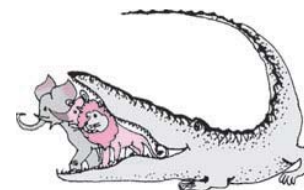
Л	$302\,152\,018 - 301\,667\,308$
---	---------------------------------

С	$7200 \cdot 750$
---	------------------

82 Построй математическую модель задачи:

В зоопарке было 35 львов, носорогов, обезьян и крокодилов. Львов было 6, носорогов на 2 меньше, чем львов, а обезьян в 5 раз больше, чем носорогов.

Сколько крокодилов было в этом зоопарке?



83 Запиши выражение, являющееся переводом задачи на математический язык. Придумай задачу с другими величинами, имеющую такое же решение.

1) Три одинаковых пакета молока стоят d р. Сколько стоят 5 таких пакетов?

2) За 8 метров плёнки для парника заплатили x р. Сколько метров такой плёнки можно купить на y р.?

3) Мама купила a кг абрикосов. Из них b кг съели за обедом, а оставшиеся абрикосы разделили пополам и сварили из одной половины ягод компот, а из другой – варенье. Сколько понадобилось для этого сахара, если известно, что на 1 кг абрикосов для компота требуется n кг сахара, а на 1 кг абрикосов для варенья – m кг сахара?

Е

84* Продолжи каждый из рядов на четыре числа, сохраняя закономерность:

а) 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, ...

в) 1, 9, 3, 11, 5, 13, ...

б) 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, ...

г) 5, 6, 15, 12, 25, 18, ...

85*

Сколько различных чисел можно составить из цифр 5, 4, 7, 0, если цифры в записи числа не повторяются?

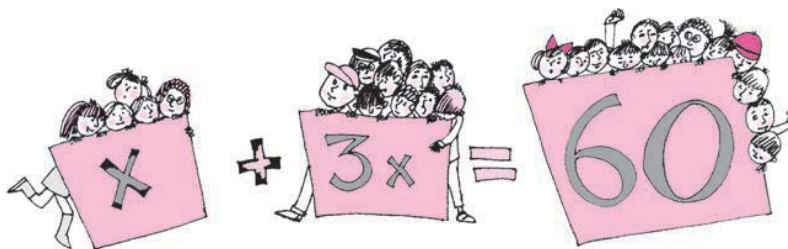
Задача 2.

В соревнованиях по плаванию приняло участие 60 детей, причём мальчиков было в 3 раза больше, чем девочек. Сколько мальчиков и сколько девочек участвовало в соревнованиях?

Всех участников соревнований можно разбить на 2 группы – мальчики и девочки. Однако для этой задачи мы не можем составить числовое выражение, так как не известно ни число мальчиков, ни число девочек.



Обозначим число девочек через x . Тогда число мальчиков равно $3x$, а всего участников соревнований $x + 3x$. По условию всего участников 60, и, значит, равенство $x + 3x = 60$ является математической моделью данной задачи.



Для ответа на вопрос задачи надо найти неизвестное число x из равенства $x + 3x = 60$.

К

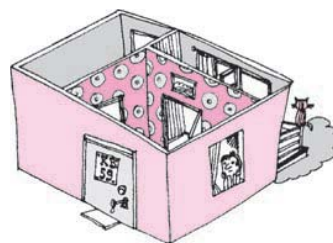
86 Составь схему и построй математическую модель задачи:

1) Квартира состоит из 3 комнат общей площадью 42 м^2 . Первая комната по площади в 2 раза меньше второй, а вторая – на 3 м^2 больше третьей. Чему равна площадь каждой комнаты в этой квартире?

2) За книгу, ручку и тетрадь Саша заплатил 270 р. Ручка в 3 раза дороже тетради и на 25 р. дешевле книги. Сколько стоит тетрадь?

3) Мотоциклист проехал расстояние между двумя городами, равное 980 км, за 4 дня. В первый день он проехал на 80 км меньше, чем во второй день, в третий день – половину расстояния, пройденного за первые два дня, а в четвёртый день – оставшиеся 140 км. Какое расстояние проехал мотоциклист в третий день?

4) Периметр четырёхугольника равен 46 дм. Первая его сторона в 2 раза меньше второй и в 3 раза меньше третьей стороны, а четвёртая сторона на 4 см больше первой стороны. Чему равны длины сторон этого четырёхугольника?



87 Построй математическую модель задачи, обозначая буквой x задуманное число:

- 1) Одно из чисел на 17 меньше второго, а их сумма равна 75. Найти большее из этих чисел.
- 2) Первое число в три раза больше второго, а разность этих чисел равна 48. Найти меньшее число.
- 3) К задуманному числу прибавили 4, сумму увеличили в 5 раз, из результата вычли 16 и получили на 2 меньше, чем получили бы, сложив учетверенное задуманное число с 9. Какое число было задумано?
- 4) Из задуманного числа вычли 3, полученную разность уменьшили в 2 раза и получили на 5 больше, чем треть задуманного числа. Какое число задумано?



88 Зная, что буквой y обозначено задуманное число, переведи с математического языка на русский:

- 1) $4y - 10 = y + 2$;
- 2) $3y + 57 = 5y - 23$;
- 3) $(7y - 46) \cdot 5 = 2y + 1$;
- 4) $(2y + 6) : 3 - 4 = y : 2 + 1$;
- 5) $(y : 7 - 3) \cdot 6 + 64 = 2y - 18$;
- 6) $(98 - 4y) : 15 \cdot 8 = 24y$.

π 89 Назови наименьшее натуральное число. А имеется ли наибольшее?

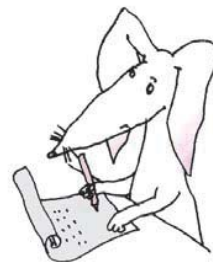
90 Известно, что $ab = c$, причем $a, b, c \neq 0$. Составь ещё три равенства, выражающие взаимосвязь между числами a, b и c .

91 Реши примеры, пользуясь равенством $78 \cdot 52 = 4056$:

- 1) $4056 : 78$;
- 2) $4056 : 52$;
- 3) $52 \cdot 78$;
- 4) $52 \cdot 77$;
- 5) $780 \cdot 52$;
- 6) $78 \cdot 5200$.

92 Зная, что $14\ 580 : 243 = 60$, вычисли устно:

- 1) $243 \cdot 60$;
- 2) $14\ 580 : 60$;
- 3) $60 \cdot 243$;
- 4) $60 \cdot 242$;
- 5) $1458 : 243$;
- 6) $14\ 580 : 2430$.



93 Реши уравнение с комментированием и сделай проверку. Проиллюстрируй решение с помощью прямоугольника.

- 1) $8x = 640$;
- 2) $90x = 810$;
- 3) $x : 30 = 50$;
- 4) $560 : x = 7$;
- 5) $72 : x = 3$;
- 6) $x : 32 = 8$.

Объясни, как найти неизвестный множитель, делимое, делитель.

94 Выполни действия. По какому правилу выполняются действия в каждом столбике?

$26 \cdot 8$	$96 : 3$	$52 : 13$	$29 : 3$
$72 \cdot 9$	$75 : 5$	$60 : 12$	$35 : 6$
$86 \cdot 4$	$42 : 2$	$48 : 24$	$47 : 9$
$43 \cdot 7$	$84 : 4$	$76 : 19$	$27 : 5$

95 Найди примеры, которые записаны и решены правильно. Какие ошибки допущены в записи и решении остальных примеров?

$$\begin{array}{r} 1) \quad \times 36 \\ \quad \times 17 \\ \hline \quad 252 \\ + \quad 36 \\ \hline \quad 288 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ \times 17 \\ \hline 252 \\ + 36 \\ \hline 612 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ \times 17 \\ \hline 252 \\ + 36 \\ \hline 3852 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ \times 17 \\ \hline 212 \\ + 36 \\ \hline 572 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad \times 1110 \\ \quad \times 309 \\ \hline \quad 999 \\ + \quad 333 \\ \hline \quad 34299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1110 \\ \times 309 \\ \hline 999 \\ + 333 \\ \hline 43290 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1110 \\ \times 309 \\ \hline 999 \\ + 333 \\ \hline 342990 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1110 \\ \times 309 \\ \hline 999 \\ + 333 \\ \hline 34299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad 78000 \\ \times \quad 90 \\ \hline 70200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 78000 \\ \times \quad 90 \\ \hline 70200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 78000 \\ \times \quad 90 \\ \hline 7020000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 78000 \\ \times \quad 90 \\ \hline 702000 \end{array}$$

96 Выполни действия и прочитай получившиеся числа:

1) $524 \cdot 61$;

3) $9204 \cdot 58$;

5) $597 \cdot 603$;

7) $580 \cdot 80\,090$;

2) $807 \cdot 43$;

4) $796 \cdot 382$;

6) $8005 \cdot 902$;

8) $30\,640 \cdot 7200$.

D

97 Расшифруй названия различных способов образования новых значений слов в языке, сопоставив ответы соответствующим буквам и расположив их:

а) в порядке возрастания:

М $7 \cdot 31$

А $15 \cdot 42$

Ф $15 \cdot 47$

О $18 \cdot 47$

Р $21 \cdot 49$

А $25 \cdot 54$

Е $9 \cdot 31$

Т $9 \cdot 42$

б) в порядке убывания:

Т $139 \cdot 53$

И $129 \cdot 44$

Я $98 \cdot 21$

О $53 \cdot 134$

Е $148 \cdot 53$

И $102 \cdot 36$

М $162 \cdot 53$

М $40 \cdot 129$

Н $45 \cdot 134$



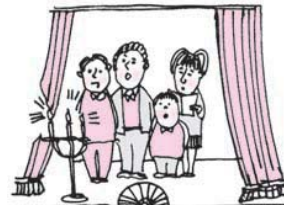
Прочитай в энциклопедии или словаре, как образуются новые значения слов этими способами. Приведи примеры.

98 Переведи условие задачи на математический язык:

Задуманное число увеличили в 2 раза, из результата вычли 25 и получили число, в 3 раза меньше задуманного. Какое число задумали?

99 Составь схему к задаче и построй её математическую модель:

В трёх отделениях концерта выступило 20 участников. Во втором отделении выступило в 3 раза меньше участников, чем в первом, а в третьем отделении – на 5 участников больше, чем во втором. Сколько участников концерта выступило в каждом отделении?



100 Реши уравнение и сделай проверку:

1) $x : 72 = 5$;

2) $18 \cdot x = 540$;

3) $64\,000 : x = 800$.

с

101* Какой цифрой оканчивается произведение 21 множителя, каждый из которых равен n , если $n = 5, 6, 4, 2, 3$? А если множителей 1221?

Задача 3.

Одна сторона прямоугольного участка земли на 3 м больше другой его стороны. Площадь участка равна 70 м^2 . Найти размеры этого участка.

Обозначим ширину прямоугольника, выраженную в метрах, через x , тогда его длина равна $(x + 3)$ м, а площадь равна $x(x + 3) \text{ м}^2$. Но по условию площадь равна 70 м^2 . Таким образом, решением задачи является значение x , удовлетворяющее равенству:

$$x(x + 3) = 70.$$

Это равенство и является математической моделью данной задачи.

Напомним, что для построения моделей задач, величины в которых связаны отношением $a = b \cdot c$, удобно использовать таблицу:

Длина	Ширина	Площадь
$(x + 3)$ м	x м	$x(x + 3) \text{ м}^2$, или 70 м^2

к

102 Переведи условие задачи на математический язык:

1) Площадь прямоугольника равна 240 дм^2 , а ширина на 8 дм меньше длины. Найти длину и ширину этого прямоугольника.

2) Одну из сторон квадрата увеличили на 9 см, а другую уменьшили в 5 раз. В результате получили прямоугольник, периметр которого равен 66 см. Найти длину стороны квадрата.

3) Длина прямоугольного участка земли в 4 раза больше ширины. Если длину этого участка увеличить на 2 м, а ширину уменьшить на 5 м, то площадь его уменьшится на 190 м^2 . Каковы размеры данного участка?

4) Одна из сторон прямоугольника на 10 см меньше другой. Если меньшую сторону увеличить на 15 см, а большую увеличить на 20 см, то площадь прямоугольника увеличится в 5 раз. Чему равна ширина данного прямоугольника?

103 Построй математическую модель задачи, обозначая одну из неизвестных величин буквой x :

1) Турист предполагал пройти маршрут длиной 60 км с некоторой скоростью. Однако из-за погодных условий его скорость на маршруте оказалась на 1 км/ч меньше, и турист прибыл в конечный пункт на 2 ч позже, чем рассчитывал. С какой скоростью прошёл турист свой маршрут?

2) Увеличив скорость прохождения дистанции с 250 м/мин до 300 м/мин, спортсмен стал пробегать дистанцию на 1 минуту быстрее. Чему равна длина дистанции?

3) Машинистке надо перепечатать рукопись. Она рассчитала, что, печатая в час 8 страниц, она закончит работу на 4 часа раньше, чем если будет печатать в час по 6 страниц. Сколько страниц в рукописи?

4) Спортсменов сначала построили в ряды по 6 человек, а затем переставили в ряды по 4 человека. При этом число рядов увеличилось на 2. Сколько было спортсменов?

5) Отцу 29 лет, а дочери 5 лет. Через сколько лет отец будет втрое старше дочери?

6) Бабушке 61 год, а внуку 17 лет. Сколько лет назад бабушка была старше внука в 5 раз?

7) На одном складе было 120 т угля, а на другом 96 т. С первого склада ежедневно вывозили по 6 т угля, а со второго – по 3 т. Через сколько дней на обоих складах угля оказалось поровну?

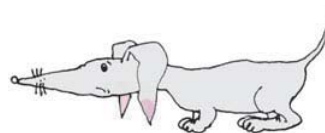
8) В одном баке 46 л машинного масла, а в другом 72 л. Из первого бака ежедневно берут по 3 л масла, а из второго – по 1 л. Через сколько дней во втором баке останется в 6 раз больше масла, чем в первом?



π

104 Как изменится произведение, если:

- один множитель увеличить в 9 раз;
- один множитель уменьшить в 7 раз;
- один множитель уменьшить в 2 раза, а другой уменьшить в 8 раз;
- один множитель увеличить в 4 раза, а другой увеличить в 5 раз;
- один множитель увеличить в 12 раз, а другой уменьшить в 4 раза;
- один множитель увеличить в 3 раза, а другой уменьшить в 6 раз;
- один множитель увеличить в n раз, а другой увеличить в 2 раза;
- один множитель уменьшить в m раз, а другой уменьшить в 3 раза?



105 Не вычисляя, сравни произведения и запиши ответ с помощью знаков $>$ или $<$:

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $29 \cdot 17$ и $35 \cdot 17$; | 3) $46 \cdot 85$ и $34 \cdot 76$; | 5) $14 \cdot 56$ и $16 \cdot 84$; |
| 2) $62 \cdot 36$ и $18 \cdot 62$; | 4) $23 \cdot 51$ и $97 \cdot 40$; | 6) $73 \cdot 48$ и $41 \cdot 70$. |

4) У Толи было 50 тетрадей в клетку и 40 тетрадей в линейку. В месяц он расходовал по 6 тетрадей в клетку и по 4 в линейку. Через сколько месяцев количество тетрадей обоих видов стало одинаковым?

112 Найди значения выражений и сравни их:

1) $(3015 - 947) \cdot 206 - 704 \cdot 217$ и $203\,740 + 9030 \cdot 210$;

2) $52 \cdot (48 \cdot 109 + 2716 \cdot 35)$ и $2500 \cdot 36\,090$.

113 Реши уравнения:

1) $x \cdot 354 = 2\,480\,124$;

2) $y : 910 = 602$;

3) $720\,360 : z = 348$.

114 а) Запиши множество семизначных чисел, которые можно составить из двух цифр «7» и пяти цифр «0». Прочитай полученные числа.

б) Запиши множество трёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 9, если цифры в записи числа не повторяются.

с **115*** Четверо ребят – Игорь, Серёжа, Миша и Юра – играли во дворе в футбол и разбили окно.

– Кто разбил окно? – спросила тетя Даша.

– Окно разбил или Юра, или Миша, – сказал Серёжа.

– Я окно не разбивал, – возразил Юра.

– Это сделал Миша, – сказал Игорь.

– Нет, Игорь, ты ошибся, – заметил Миша.

– Ну что, задали они тебе задачу? – подытожил дядя Вася, наблюдавший эту беседу. – Могу ещё добавить, что трое из этих футболистов всегда говорят только правду. А вот четвёртого я плохо знаю.

Кто разбил окно? С кем из ребят дядя Вася был мало знаком?



Задача 4.

На экскурсию едут 252 ученика школы. Для них заказаны несколько одинаковых автобусов. Однако выяснилось, что если заказать автобусы, вмещающие на 6 человек больше, то автобусов потребуется на один меньше. Сколько больших автобусов надо заказать, если в обоих случаях предполагается заполнить все автобусы без свободных мест?

Обозначим число больших автобусов буквой x , тогда число маленьких автобусов $x + 1$, а число детей в каждом автобусе соответственно $252 : x$ и $252 : (x + 1)$.

	Количество детей в одном автобусе	Количество автобусов	Общее количество детей
Большие автобусы	$252 : x$	x	252
Маленькие автобусы	$252 : (x + 1)$	$x + 1$	252

Так как по условию в большой автобус вмещается на 6 детей больше, чем в маленький, то разность $252 : x - 252 : (x + 1)$ равна 6. Значит, решением задачи является число x , удовлетворяющее равенству:

$$252 : x - 252 : (x + 1) = 6.$$

Можно получить более простую математическую модель этой задачи, обозначив дополнительно буквой y число детей, которых можно разместить в большом автобусе:

	Количество детей в одном автобусе	Количество автобусов	Общее количество детей
Большие автобусы	y	x	252
Маленькие автобусы	$y - 6$	$x + 1$	252

Очевидно, что в этом случае математической моделью задачи являются два равенства:

- 1) $xy = 252$;
- 2) $(x + 1)(y - 6) = 252$.



Искомые числа x и y должны удовлетворять как первому, так и второму равенству.

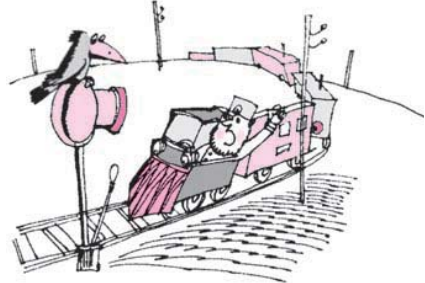
К

116 Переведи условие задачи с русского языка на математический двумя различными способами:

- 1) Два прямоугольника имеют одинаковую площадь, равную 70 м^2 . Известно, что у первого прямоугольника длина на 4 м больше, а ширина на 2 м меньше, чем у второго прямоугольника. Найти стороны этих прямоугольников.
- 2) Длина одного прямоугольника равна 32 см, а другого – 15 см. Ширина второго прямоугольника на 6 см больше ширины первого. Найти их площади, если известно, что площадь первого прямоугольника на 46 см^2 больше площади второго прямоугольника.
- 3) Тетради в клетку дороже тетрадей в линейку на 5 р. За 25 тетрадей в клетку надо заплатить на 50 р. больше, чем за 30 тетрадей в линейку. Какова цена тетрадей в клетку и тетрадей в линейку?
- 4) За 4 м шерстяной ткани надо заплатить на 20 р. больше, чем за 6 м шелковой ткани. Сколько стоит 1 м шелка, если он дешевле 1 м шерсти на 120 р.?
- 5) Токарь придумал новый способ обработки деталей и за 1 час стал обтачивать на 2 детали больше, чем полагалось по плану. Поэтому дневную норму он выполнил не за 8 ч, а за 7 ч. Сколько деталей по норме должен обработать токарь за день, если на обработку каждой детали он тратит одинаковое время?
- 6) Если варенье, заготовленное на зиму, разложить в 2-литровые банки, то их потребуется на 9 больше, чем 3-литровых. Сколько литров варенья заготовлено?

7) Проехав с некоторой скоростью половину пути, автобус час стоял на месте из-за случившейся на трассе аварии. Чтобы на оставшихся до пункта назначения 200 км наверстать потерянное время, водитель автобуса повёл его со скоростью на 10 км/ч большей, чем в начале пути. В конечный пункт автобус прибыл без опоздания. С какой скоростью проехал автобус первую половину пути?

8) Скорый поезд был задержан у семафора на $\frac{4}{15}$ часа и нагнал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью на 10 км/ч большей, чем полагалось по расписанию. Чему равна скорость поезда по расписанию?



π

117 Переведи с математического языка на русский записанные ниже равенства. При каких значениях a они верны?

1) $a + 0 = 0 + a = a$

3) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
 $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

2) $a - 0 = a$
 $a - a = 0$

4) $a : a = 1$ $0 : a = 0$
 $a : 1 = a$

Перепиши эти равенства по памяти в тетрадь.

118 Составь программу действий и найди значения выражений:

1) $1000 - (561 - 279 \cdot 0) : 561 + (639 - 639) \cdot 9614;$

2) $(28 \cdot 1 - 28 : 1) : 1240 + (1 \cdot 97 - 90) : 1 - 382 : 382.$

Что интересного в полученных числах?



119 Поставь вместо звездочек пропущенные цифры:

1)
$$\begin{array}{r} 3 * 9 5 * \\ + \quad 7 * 6 2 \\ \hline * 1 4 * 0 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} * 2 4 * 3 * \\ - \quad * 9 1 * 7 \\ \hline 3 6 * 9 0 8 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 4 * 8 \\ \times \quad 8 * \\ \hline * * 8 \\ + * 6 * * \\ \hline * * * * * \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} 5 * 6 \\ \times \quad * * * \\ \hline * * 3 0 \\ + * 0 * \\ \hline * * * * * \end{array}$$

120 Переведи на математический язык высказывание тремя разными способами:

1) m на 5 больше, чем n ;3) a на 9 меньше, чем b ;2) c в 7 раз меньше, чем d ;4) x в 3 раза больше, чем y .

121 Сравни в каждом равенстве натуральные числа, обозначенные буквами:

1) $a : b = 8;$

3) $x + 5 = y;$

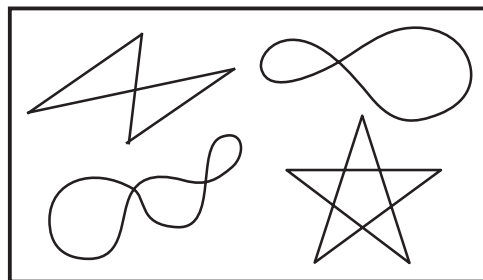
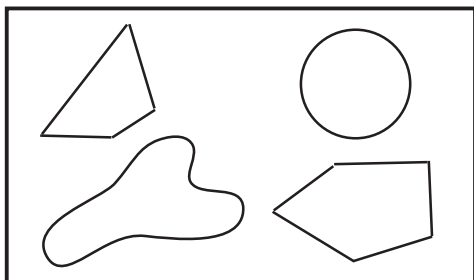
5) $p - 6 = q;$

2) $k = t - 2;$

4) $m = 3n;$

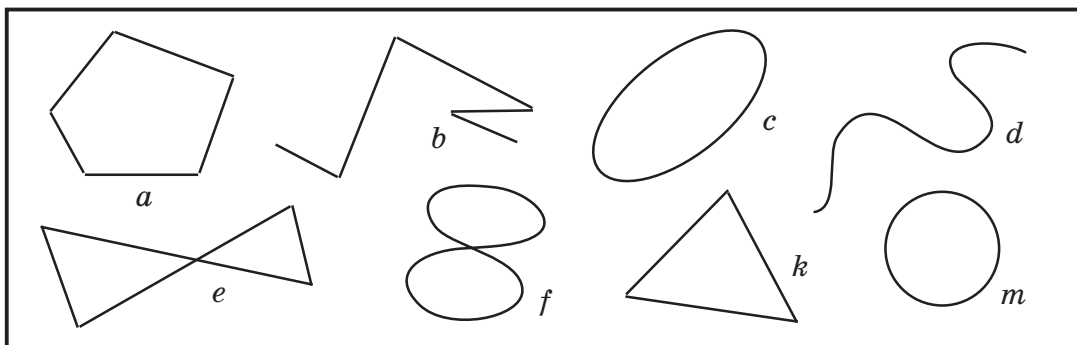
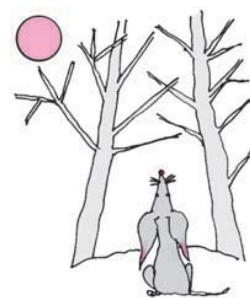
6) $c : 4 = d.$

122 На рисунке изображены два множества линий. Что общего у линий обоих множеств? Чем отличаются линии одного множества от линий другого?



123 Найди на рисунке и запиши с помощью фигурных скобок следующие множества:

- A** – множество замкнутых линий;
- B** – множество незамкнутых линий;
- C** – множество ломаных линий;
- D** – множество многоугольников;
- E** – множество треугольников;
- F** – множество самопересекающихся линий;
- K** – множество замкнутых линий без самопересечений.



Найди среди записанных множеств примеры таких двух множеств, одно из которых является подмножеством другого.

124 Составь таблицу и переведи условие задачи с русского языка на математический:

В зрительном зале 1200 стульев, расположенных рядами с одинаковым числом стульев в каждом ряду. Если в каждом ряду добавить по 5 стульев, то число рядов уменьшится на 8. Сколько было рядов и сколько стульев в каждом ряду?

125 Составь программу действий и вычисли:

а) $(30\,000 - 408 \cdot 25) \cdot (609 \cdot 700 - 417\,295)$;

б) $6304 \cdot 5080 - (5\,000\,000 + 14\,903 \cdot 412) + 42\,447$.

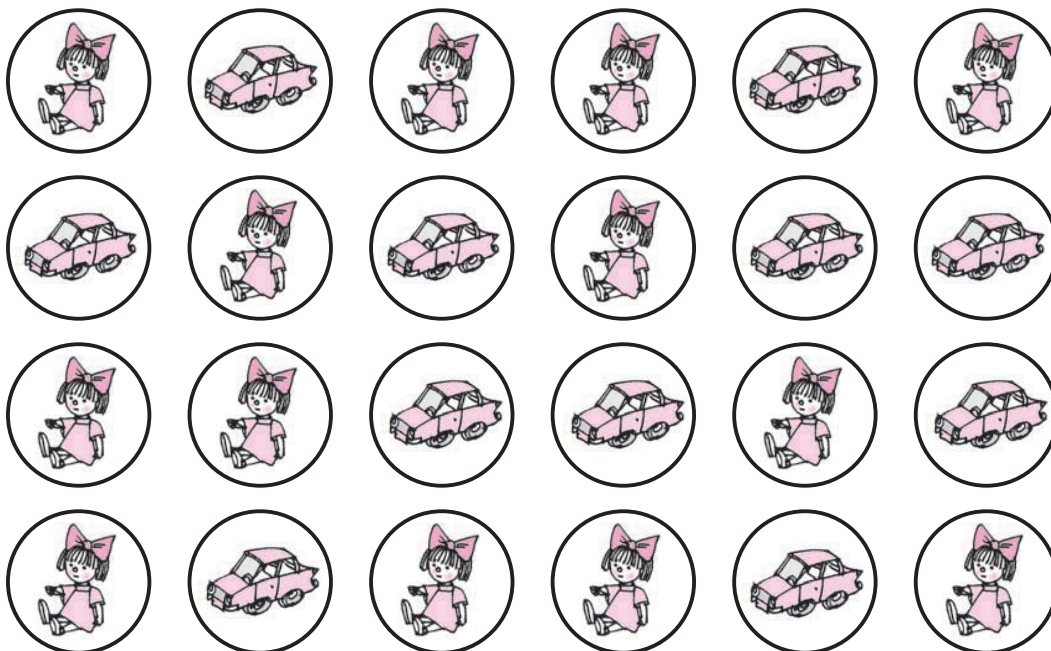
126 Нарисуй в тетради замкнутую ломаную линию без самопересечений. Раскрась ограниченную ею внутреннюю область. Как называется полученная фигура? Отметь точку A во внутренней области фигуры, точку B – во внешней области, а точку C – на её границе.

127^{*} На некотором острове отдельными селениями живут два племени, «правдолюбцы» и «лжецы». «Правдолюбцы» всегда говорят только правду, а «лжецы» – всегда только неправду. Жители одного племени бывают в селении другого племени, и наоборот. В одно из селений попал путешественник, но не знает, в какое. Он задал один вопрос первому встречному и сразу установил, где он находится. Что он спросил?



128^{*} Игра «Счёт с препятствиями»

На витрине магазина – куклы и машинки. Ребята решили сосчитать их, но по особому правилу. Считать нужно подряд и куклы, и машинки, например: «Первая кукла, первая машинка, вторая кукла, третья кукла, вторая машинка» и т. д. Попробуй сосчитать таким способом, сколько на витрине кукол, а сколько машинок. Если сразу не получится, вернись к этому заданию ещё и ещё раз.



Задача 5.

Задумано двузначное число, которое на 52 больше произведения своих цифр. Какое число задумано?

В этой задаче естественно обозначить буквами x и y цифры двузначного числа. Пусть x – цифра десятков, а y – цифра единиц. Тогда их произведение равно xy .

Само число тоже можно выразить через его цифры x и y . Действительно, в x десятках $10x$ единиц, да ещё y единиц – всего в числе содержится $10x + y$ единиц.

По условию число $10x + y$ на 52 больше произведения своих цифр xy . Значит, должно выполняться равенство

$$10x + y = xy + 52,$$

которое является математической моделью данной задачи.

Итак, мы видим, что построение математических моделей можно сравнить с переводческой работой. После перевода на математический язык содержание задачи записывается намного короче и наглядней. А самое главное – математическая символика упрощает поиск её решения. Но... об исследовании математических моделей речь пойдёт в следующем пункте.



К

129

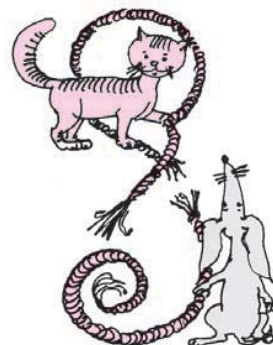
Обозначая цифру десятков двузначного числа буквой x , а цифру единиц – буквой y , запиши на математическом языке условие задачи:

- 1) Найти двузначное число, которое в два раза больше суммы своих цифр.
- 2) Найти двузначное число, которое на 26 больше произведения своих цифр.
- 3) Если цифры задуманного двузначного числа поменять местами, то получится число на 18 большее, чем исходное. Какое число задумано?
- 4) Если цифры задуманного двузначного числа поменять местами, то получится число на 27 меньшее, чем исходное. Какое число задумано?

130

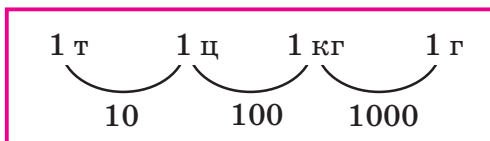
Используя для обозначения неизвестных величин буквы x и y , запиши на математическом языке условие задачи:

- 1) Сумма двух чисел равна 13, а разность 2. Найти эти числа.
- 2) Периметр прямоугольника равен 70 м, его длина больше ширины на 1 м. Чему равны стороны этого прямоугольника?
- 3) Мать старше дочери на 26 лет, а вместе им 60 лет. Сколько лет каждой из них?
- 4) Верёвку длиной 58 м разрезали на 2 части, причём одна часть длиннее другой на 12 м. Какую длину имеет каждый кусок верёвки?



π

131 Проследи по цепочке таблицу мер массы:



Сколько килограммов в 1 т? Сколько граммов в 1 ц?

132

Запиши в виде выражения:

- 1) количество килограммов в a центнерах; 4) количество центнеров в k тоннах;
- 2) количество граммов в n килограммах; 5) количество граммов в x центнерах;
- 3) количество килограммов в d тоннах; 6) количество граммов в m тоннах.

133

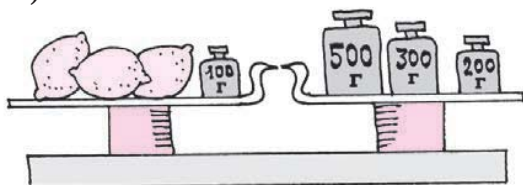
Выполни действия:

- 1) $5 \text{ т } 63 \text{ кг} + 937 \text{ кг} - 2 \text{ т } 9 \text{ ц};$
- 2) $3 \text{ кг } 12 \text{ г} - 185 \text{ г} + 12 \text{ кг } 720 \text{ г};$
- 3) $7 \text{ кг } 300 \text{ г} \cdot 8;$
- 4) $4 \text{ ц } 25 \text{ кг} : 5.$

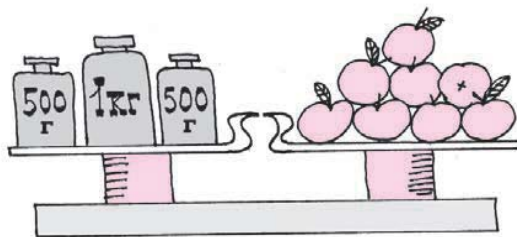
134

Используя рисунок, найди массу каждого фрукта, считая фрукты одного вида равными по массе:

1)



2)



135

Реши задачу и запиши решение по действиям с вопросами:

- 1) Семья Липовых использует двухфазный счётчик, который учитывает расход электроэнергии днём и ночью по отдельности. В марте за дневное время они потратили 60 кВт·ч, а за ночное – в 3 раза больше. Сколько заплатит эта семья за электроэнергию в марте, если по тарифу 1 кВт·ч дневной зоны стоит 5 рублей, а ночной – 2 рубля?
- 2) Печенье, изготовленное в пекарне за день, упаковали в пачки по 300 г. Пачки сложили в коробки в 5 слоёв. Каждый слой имеет 4 ряда по 6 пачек в ряду. Чему равна масса печенья, изготовленного пекарней в этот день, если получилось всего 280 коробок? (Ответ выразить в тоннах и килограммах.)

д

136

Обозначая цифру десятков двузначного числа буквой x , а цифру единиц – буквой y , запиши на математическом языке условие задачи:

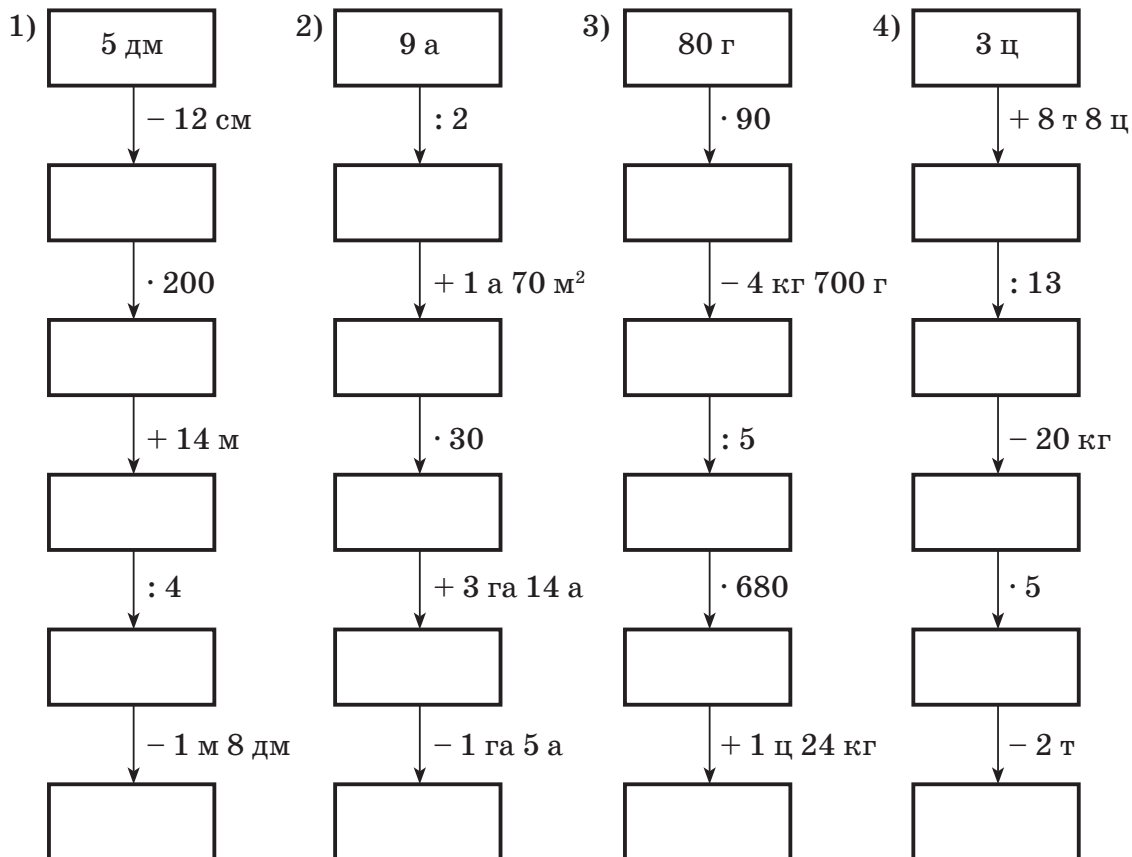
- 1) Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно 3.
- 2) Если цифры задуманного двузначного числа поменять местами, то получится число, на 72 меньше исходного. Какое число задумано?

137 Построй математическую модель задачи, используя для обозначения неизвестных величин буквы x и y .

1) Сумма двух чисел равна 105, а их частное равно 6. Какие это числа?

2) Площадь прямоугольника равна 288 см^2 , а его периметр – 72 см. Чему равны стороны этого прямоугольника?

138 Восстанови цепочки вычислений:



139 Партию из 720 телевизоров должны перевезти на 9 машинах. Однако грузчики сказали, что они смогут разместить коробки с телевизорами так, что на каждой машине поместится на 10 коробок больше. На сколько меньше машин, чем запланировано, потребуется в этом случае для перевозки? (Считать, что на каждой машине перевозится одинаковое количество телевизоров.)

140 Выполни оценку указанных величин, соотнеся массы с их возможными значениями.

- | | |
|---|---|
| <p>А) масса 25-рублёвой монеты, выпущенной к Олимпийским играм в Сочи</p> <p>Б) масса дождевой капли</p> <p>В) масса морского слона</p> | <p>1) 3,5 т</p> <p>2) 10 г</p> <p>3) 1 мг</p> |
|---|---|

с

141* Задача, которую в юности решил знаменитый французский физик и математик Симеон-Дени Пуассон (1781–1840 гг.)

Некто имеет 12 пинт меда и хочет отлить из этого количества половину, но у него нет сосуда вместимостью в 6 пинт. У него имеется 2 сосуда: один вместимостью в 8 пинт, а другой вместимостью в 5 пинт. Каким образом налить 6 пинт меда в сосуд на 8 пинт?



2. Работа с математическими моделями.

В предыдущем пункте мы перевели условия пяти задач на математический язык, но не решили их – не ответили на поставленные вопросы. Как же найти неизвестные числа?

После перевода мы получили новые тексты этих задач. В этом пункте мы рассмотрим только первые две задачи (с. 17, 21).

Задача 1.

Найти значение выражения $100 - 27 - 27 \cdot 2$.

Значение этого выражения мы без труда можем найти:

$$100 - 27 - 27 \cdot 2 = 19.$$

Таким образом, ответ к задаче 1 предыдущего пункта следующий: «Роман получит сдачу 19 рублей».

Задача 2.

Найти неизвестные числа x и $3x$, если выполняется равенство $x + 3x = 60$.

Равенства такого вида нам ещё не встречались. Но найти нужные нам числа можно, если это равенство записать по-другому, *преобразовать*. Здесь нам помогут известные свойства чисел – свойство единицы и распределительный закон. В самом деле:

$$x + 3x = 1 \cdot x + 3 \cdot x = (1 + 3) \cdot x = 4x.$$

Поэтому равенство можно записать в виде:

$$4x = 60,$$

$$x = 60 : 4,$$

$$x = 15.$$

Значит, в соревнованиях участвовало 15 девочек. А число мальчиков, участвовавших в соревнованиях, равно $3x$, или 45.

Из рассмотренных примеров видно, что после перевода текста задачи на математический язык поиск решения сводится к **работе с математическими моделями** – к вычислениям, преобразованиям, рассуждениям. В первой задаче для получения ответа оказалось достаточным использовать известные

нам алгоритмы действий с числами. Вторая задача свелась к решению уравнения нового для нас вида, но изученное ранее распределительное свойство умножения помогло быстро найти ответ. Отсюда следует, что чем больше математических понятий и их свойств мы знаем, тем больше имеем возможностей для отыскания короткого и простого решения.

Однако преобразовать математическую модель к изученному виду не всегда удаётся. Как искать ответ в этом случае? Методы исследования новых, не встречавшихся ранее математических моделей мы рассмотрим в следующих пунктах.

К

142 Построй математическую модель задачи и найди ответ при данных значениях букв:

1) Купили 3 батона хлеба и 2 кг яблок. Один батон хлеба стоит a р., а 1 кг яблок стоит b р. Сколько рублей стоит вся покупка? ($a = 25$, $b = 60$.)

2) Через одну трубу в бассейн вливается m л воды в минуту, а через другую – n л воды в минуту. Сколько литров воды поступит в бассейн за 15 минут работы обеих труб? ($m = 75$, $n = 45$.)

3) За 3 м шерстяной ткани и s м шелка заплатили 1360 р. Сколько стоит 1 м шелка, если 1 м шерстяной ткани стоит d рублей? ($c = 2$, $d = 240$.)

4) За 4 альбома для рисования и 7 шариковых ручек заплатили x рублей. Сколько стоит один альбом для рисования, если одна шариковая ручка стоит y рублей? ($x = 400$, $y = 24$.)

5) Площадь садового участка, имеющего форму прямоугольника, равна 600 м^2 , а его длина равна a м. Чему равна длина изгороди, построенной вдоль границы этого участка? ($a = 30$.)

6) Периметр прямоугольника равен b м, а длина одной из его сторон – c м. Какую площадь имеет этот прямоугольник? ($b = 360$, $c = 80$.)



143 Реши уравнение:

1) $55 - 8x = 7$;

5) $(60a - 30) : 5 = 18$;

2) $27 : y + 29 = 38$;

6) $92 + 56 : (14 - b) = 100$;

3) $(t - 25) : 20 = 9$;

7) $(c : 9) \cdot 15 - 47 = 28$;

4) $6 \cdot (18 - k) = 54$;

8) $(410 - d) : 7 + 70 = 120$.

144 а) Некоторое число уменьшили в 7 раз, к результату прибавили 25 и получили 34. Какое это число?

б) Задумали число, увеличили его на 9, результат умножили на 6 и получили 282. Какое число задумали?

в) Число 80 разделили на задуманное число, к частному прибавили 13, результат увеличили в 4 раза и получили 72. Найди задуманное число.

г) К числу 3 прибавили задуманное число, сумму увеличили в 5 раз и полученное произведение вычли из 70. В результате получился ответ 15. Какое число задумано?

145 Упрости выражение, пользуясь свойствами арифметических действий:

1) $4 + 19 + a$;

5) $4 \cdot x \cdot 3$;

9) $6b + 2b$;

2) $75 + (b + 32)$;

6) $y \cdot 8 \cdot 7$;

10) $12x - x$;

3) $8 + c + (c + 2)$;

7) $6 \cdot t \cdot 3 \cdot k \cdot 10$;

11) $4a + a + 2a$;

4) $d + 3 + (d + 12)$;

8) $p \cdot 2 \cdot 9 \cdot l \cdot 5 \cdot m$;

12) $9n - 3n - n$.

146 Обозначь наименьшую из неизвестных величин x и построь математическую модель задачи. Найди x и ответь на поставленные вопросы.

1) Веревку разрезали на 3 куска. В первом куске было 8 дм, а во втором – на 5 дм больше, чем в третьем. В первых двух кусках вместе 1 м 7 дм. Чему равна длина третьего куска? Чему равна длина всей веревки?

2) Для компота взяли 400 г яблок, а слив – на 200 г меньше, чем вишен. Масса всех фруктов составила 1 кг 600 г. Сколько слив и сколько вишен взяли для компота?

3) Галстук в 2 раза дешевле рубашки, а рубашка в 8 раз дешевле костюма. Сколько стоит галстук, если костюм стоит 4800 р.?

4) Площадь огорода в 4 раза меньше площади сада, а площадь сада в 5 раз меньше площади поля. Чему равна площадь огорода, если площадь поля составляет 1 га 20 а?

5) Для смеси требуется смешать 3 части песка и 2 части цемента. Сколько песка и цемента надо взять, чтобы получить 60 кг смеси?

6) При помоле на каждые 4 части муки получается 1 часть отходов. Сколько смолотли пшеницы, если муки получилось на 72 ц больше, чем отходов?

7) Отец старше сына в три раза, или на 34 года. Сколько лет отцу? А сколько лет сыну?

8) Максимальная скорость, с которой может передвигаться заяц-русак, на 25 км/ч, или в 2 раза, больше скорости землеройки. С какой максимальной скоростью могут передвигаться заяц-русак и землеройка?

9) В трёх вазах 27 цветков, причем во второй вазе цветков в 5 раз больше, а в третьей вазе – в 3 раза больше, чем в первой. Сколько цветков в каждой вазе?

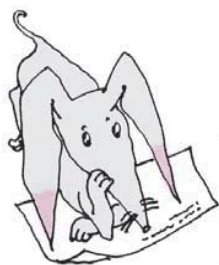
10) Путешественник проплыл на лодке расстояние в 2 раза большее, чем прошёл пешком, а проехал на лошади расстояние в 6 раз большее, чем проплыл на лодке. Сколько километров проехал путешественник на лошади, если всего он преодолел 105 км?





147 (Устно.) Реши примеры и расшифруй названия некоторых понятий математической логики.

- | | | | | | |
|-------------|--------------------------|----------|--------------|----------|-------------|
| 1) Н | $52 \cdot 0 + 600 : 60$ | Е | $53 \cdot 8$ | З | $360 : 6$ |
| Ы | $29 : (32 - 3) \cdot 2$ | П | $7 \cdot 34$ | И | $320 : 80$ |
| С | $(14 - 14) \cdot 45 : 9$ | Д | $84 : 4$ | Р | $500 : 25$ |
| А | $7 : 7 - 0 : 24$ | О | $93 : 31$ | К | $900 : 150$ |
| Л | $1 \cdot (58 - 47) : 1$ | Ь | $85 : 17$ | В | $800 : 16$ |



50	2	0	6	1	60	2	50	1	10	4	424

238	1	20	1	21	3	6	0

- | | | | | | |
|-------------|-------------|----------|--------------------------|----------|-----------------------------------|
| 2) П | $450 : 9$ | Т | $300 : 5 \cdot 4 : 2$ | К | $160 \cdot 4 : 8 - 34$ |
| А | $360 : 90$ | Е | $720 : 8 + 15 \cdot 6$ | Н | $19 + 7 \cdot 80 : 10$ |
| М | $700 : 35$ | О | $630 : 9 : 14 \cdot 5$ | И | $3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 10 : 60$ |
| Ц | $600 : 120$ | Б | $800 - 360 : 9 \cdot 15$ | Р | $700 \cdot 4 : 100 \cdot 3$ |

46	25	75	120	84	50	84	9	20	180	84

25	120	84	9	5	4	75	9	180



148 Переведи с математического языка на русский равенства, выражающие свойства сложения и умножения. Для каких значений букв они верны?

- 1) $a + b = b + a$ – переместительное; 3) $ab = ba$ – переместительное;
 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ – сочетательное; 4) $(ab)c = a(bc)$ – сочетательное;
 5) $(a + b)c = ac + bc$ – распределительное.

149 Выполни действия, пользуясь свойствами сложения и умножения:

- | | |
|---|--|
| 1) $(94 + 179) + 21$; | 9) $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5$; |
| 2) $287 + (13 + 598)$; | 10) $4 \cdot 19 \cdot 25$; |
| 3) $(356 + 849) + (51 + 644)$; | 11) $2 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 3$; |
| 4) $329 + 994 + 71 + 6$; | 12) $20 \cdot 9 \cdot 500$; |
| 5) $2005 + 768 + 32 + 995 + 19$; | 13) $7 \cdot 15 + 7 \cdot 85$; |
| 6) $51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 58 + 59$; | 14) $82 \cdot 4 + 18 \cdot 4$; |
| 7) $99 + 99 + 99 + 99 + 99 + 99 + 99 + 99 + 8$; | 15) $36 \cdot 97 + 36 \cdot 3$; |
| 8) $999 + 999 + 999 + 999 + 999 + 7$; | 16) $24 \cdot 128 + 76 \cdot 128$. |

150 Пользуясь распределительным свойством умножения, упрости выражение и найди его значение:

- 1) $4a + 36a - 8a + 3a$, если $a = 6$;
- 2) $52b - 7b - 6b + b$, если $b = 25$;
- 3) $14m + m + 17m - 9m$, если $m = 30$;
- 4) $31n + 5n - n + 19n$, если $n = 20$;
- 5) $2x + 6 + 9x + 8 + x$, если $x = 4$;
- 6) $15 + 3y + y + 4 + 5y$, если $y = 7$.

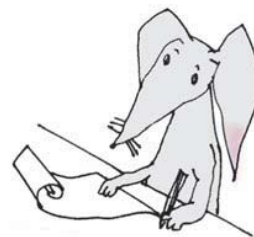


151 Переведи на математический язык следующие свойства арифметических действий (при условии их выполнимости на множестве натуральных чисел):

- 1) Чтобы вычесть число из суммы, можно вычесть это число из одного слагаемого и полученный результат прибавить к другому слагаемому.
- 2) Чтобы вычесть сумму из числа, можно вычесть из этого числа одно слагаемое и из полученного результата вычесть другое слагаемое.
- 3) Чтобы умножить разность на число, можно умножить на это число уменьшаемое и вычитаемое и из первого произведения вычесть второе.
- 4) Чтобы разделить разность на число, отличное от нуля, можно разделить на это число уменьшаемое и вычитаемое и из первого частного вычесть второе.

152 Вычисли наиболее удобным способом:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $(972 + 379) - 972$; | 2) $(538 + 245) - 245$; |
| 3) $(382 + 417) - 416$; | 4) $(725 + 158) - 625$; |
| 5) $851 - (831 + 7)$; | 6) $276 - (18 + 176)$; |
| 7) $134 - 98 - 2$; | 8) $580 - 79 - 21$; |
| 9) $83 \cdot 9 - 73 \cdot 9$; | 10) $7 \cdot 38 - 7 \cdot 28$; |
| 11) $24 \cdot 96 - 24 \cdot 86$; | 12) $716 \cdot 52 - 616 \cdot 52$. |



153 Представь число 24 в виде произведения двух множителей всеми возможными способами (порядок множителей во внимание не принимается). Запиши множество делителей числа 24, расположив их в возрастающем порядке.

154 Запиши с помощью фигурных скобок множество:

- делителей числа 14;
- кратных числа 9;
- натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $5 \leq x < 10$;
- трёхзначных чисел, больших 998;
- корней уравнения $x : 7 = 8$;
- правильных дробей со знаменателем 4.

155 A – множество делителей числа 12, а B – множество делителей числа 18.

- Запиши множества A и B с помощью фигурных скобок.
- Принадлежат ли множествам A и B числа 1, 4, 6, 15? Сделай записи, используя знаки \in и \notin .
- Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств A и B и найди их пересечение. Каким свойством обладают элементы множества $A \cap B$?
- Верны ли высказывания:

$$1 \in A \cap B, \quad 4 \in A \cap B, \quad 4 \notin A \cap B, \quad 15 \notin A \cap B?$$

156 E – множество делителей числа 15, а F – множество делителей числа 30.

- Запиши множества E и F с помощью фигурных скобок.
- Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств E и F . Что ты замечаешь? Сделай запись, используя знак \subset .
- Верны ли утверждения:
«Каждый делитель числа 15 является делителем числа 30»,
«Каждый делитель числа 30 является делителем числа 15»?
- Найди объединение и пересечение множеств E и F .



157 1) $1\ 897\ 754 - [(7400 \cdot 60 + 13\ 227) : 9 - 9754]$;

2) $[31\ 860 + (5630 \cdot 208 - 1805 \cdot 70) \cdot 6] : 35$.

Д

158 Построй математическую модель задачи и найди ответ при данных значениях букв:

- Велосипедист ехал 2 часа со скоростью a км/ч, а потом ещё 3 часа со скоростью b км/ч. Какое расстояние проехал велосипедист за все это время? ($a = 18, b = 25$.)
- Площадь прямоугольника равна c м², а его длина b м. Чему равен периметр прямоугольника? ($c = 84, b = 12$.)



- 159** 1) Игнат задумал число, вычел его из 46, результат разделил на 5 и получил 6. Какое число задумал Игнат?
2) Придумай свою задачу про «задуманное число».

160 Вычисли наиболее удобным способом:

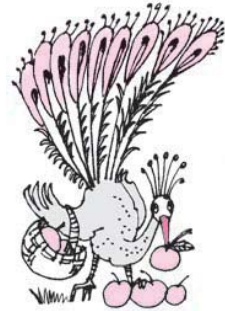
- 1) $594 + 847 + 6 + 153$; 3) $72 \cdot 34 + 72 \cdot 66$; 5) $832 - (732 + 15)$;
2) $2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 20$; 4) $(614 + 978) - 978$; 6) $341 \cdot 715 - 241 \cdot 715$.

161 Упрости выражения, пользуясь свойствами арифметических действий:

- 1) $9 + x + 5 + 11x$; 3) $k + 8k$;
2) $3 \cdot y \cdot 5 \cdot 2 \cdot z$; 4) $7d - 4d - d$.

162 Обозначь наименьшую из величин x и построй математическую модель задачи. Найди x и ответь на поставленный вопрос.

- 1) Жар-птица повадилась воровать в саду золотые яблоки. Во второй день она унесла в 4 раза больше яблок, чем в первый, а в третий день – в 2 раза больше,



чем во второй. Сколько яблок унесла жар-птица за все три дня, если в третий день она унесла 24 яблока?

- 2) Три девицы под окном пряли поздно вечерком. Вторая девица спряла в 2 раза больше пряжи, чем первая, а третья – в 3 раза больше, чем первая. Все вместе они спряли 4 кг 800 г пряжи. Сколько пряжи спряла в этот вечер каждая девица?



163 1) S – множество високосных лет. Принадлежат ли этому множеству следующие годы: 1925, 1936, 1950, 1971, 1984, 2008? Сделай записи с помощью знаков \in и \notin .

2) Какие годы последнего десятилетия XX века являются високосными?

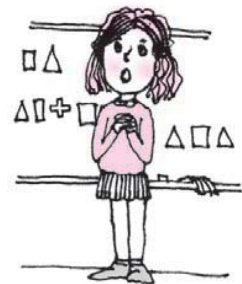
3) Являются ли високосными годы 1800, 1900, 2000, 2300, 2400?

- 164** 1) $56\ 856 : 552 - [(10\ 648 - 872) : 47 - 154]$;
2) $10\ 897 + 313\ 436 : [822 \cdot 106 - (3047 + 83\ 468)]$.

165* Рассудительная Оля записала некоторое трёхзначное число, затем нашла сумму его цифр и записала результат, дальше нашла сумму цифр последнего числа и записала результат. Все эти три числа можно записать так:

$$\triangle \square \triangle, \quad \square \bigcirc, \quad \square$$

(Одинаковые фигуры соответствуют одинаковым цифрам.)
Восстанови запись чисел, которую выполнила Оля.



166* Наблюдательный Юра заметил, что если в двузначное число, выражающее расстояние в километрах, которое он сегодня проехал, вставить нуль между цифрами десятков и единиц, то получится число, в 9 раз большее исходного. Какое расстояние сегодня проехал Юра?

167* В пяти ящиках лежит по одинаковому числу яблок. Если из каждого ящика вынуть 60 яблок, то во всех ящиках останется столько яблок, сколько их раньше было в двух ящиках. Сколько яблок было в каждом ящике?

3. Метод проб и ошибок.

При решении практических задач часто бывает так, что исследование полученной математической модели не сводится к известным случаям. Тогда на помощь приходит совет: *попробуй, а если не получится – попробуй ещё*.

Например, перевод на математический язык задачи 3 из пункта 1 (с. 24) имеет вид:

Задача 3.

Найти значение x , для которого выполняется равенство $x(x + 3) = 70$.

Никакие известные нам правила преобразований не помогают найти ответ. Попробуем тогда подобрать решение «экспериментально», так называемым **методом проб и ошибок**.

Нам надо найти такое значение x , при котором значение выражения $x(x + 3)$ было бы равно 70. Попробуем подставить в это выражение, например, $x = 4$:

$$4 \cdot (4 + 3) = 28.$$

Мы видим, что выбранное значение x слишком мало. Возьмём теперь $x = 6$:

$$6 \cdot (6 + 3) = 54,$$

и снова выбранное значение мало, хотя и ближе к искомому.

А следующая попытка оказывается удачной: при $x = 7$ имеем $7 \cdot (7 + 3) = 70$. Значит, при $x = 7$ данное в условии равенство верно.

Казалось бы, задача уже решена, но это не так: ведь может оказаться, что буквенное выражение равно 70 при разных значениях x . Например, произведение $x \cdot (17 - x)$ равно 70 и при $x = 7$, и при $x = 10$.

Поэтому для полного решения задачи нужно найти все её решения или показать, что других решений она не имеет. Так как x – это ширина прямоугольного участка, и, значит, $x > 0$, в данной задаче это сделать несложно. Действительно, если значение x больше 7, то $x + 3$ будет больше 10, и тогда произведение $x(x + 3)$ окажется больше 70. Аналогично можно показать, что если значение x меньше 7, то произведение $x(x + 3)$ окажется меньше 70.

Следовательно, равенство, данное в условии, верно только для одного числа $x = 7$, а тогда $x + 3 = 10$.

О т в е т: длины сторон участка равны 7 м и 10 м.



Итак, метод проб и ошибок позволяет найти ответ даже в случае, когда математическая модель представляет собой новый, ещё не изученный объект. Однако при использовании этого метода следует всегда помнить о том, что подбор одного решения не гарантирует полноты решения. Поэтому *требуется дополнительное обоснование того, что найдены все возможные решения и ни одно не пропущено.*



К

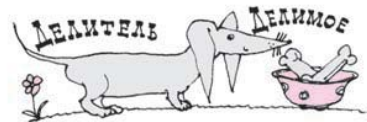
168 Переведи условие задачи на математический язык и найди решение методом проб и ошибок.

- 1) Площадь прямоугольника равна 68 дм^2 , а длина больше ширины на 13 дм. Чему равны стороны этого прямоугольника?
- 2) Ширина прямоугольника на 9 см меньше длины, а площадь равна 90 см^2 . Найти стороны прямоугольника.
- 3) Найти периметр прямоугольника, площадь которого составляет 18 м^2 , а ширина в 2 раза меньше длины.
- 4) Площадь прямоугольника равна 64 дм^2 , а его длина в 4 раза больше ширины. Чему равен периметр прямоугольника?
- 5) Длину прямоугольника уменьшили на 3 см, а ширину увеличили на 4 см и получили квадрат. Найти сторону квадрата, если площадь прямоугольника равна 30 см^2 .
- 6) После того как ширину прямоугольника увеличили на 1 м, а длину уменьшили на 5 м, получили квадрат. Чему равна площадь квадрата, если площадь прямоугольника 91 м^2 ?

П

169 Как изменится частное, если:

- а) делимое увеличить в 3 раза;
- б) делитель увеличить в 5 раз;
- в) делимое увеличить в 8 раз, а делитель увеличить в 2 раза;
- г) делимое уменьшить в 6 раз, а делитель уменьшить в 2 раза;
- д) делимое увеличить в 7 раз, а делитель уменьшить в 5 раз;
- е) делимое уменьшить в 9 раз, а делитель увеличить в 6 раз;
- ж) делимое увеличить в n раз, а делитель уменьшить в 3 раза;
- з) делимое уменьшить в m раз, а делитель увеличить в 8 раз?



170

Не вычисляя, сравни частные и запиши ответ с помощью знаков $>$ или $<$:

- 1) $1872 : 39$ и $1872 : 48$; 3) $2028 : 78$ и $2808 : 78$; 5) $692 : 4$ и $588 : 7$;
- 2) $3348 : 62$ и $3348 : 54$; 4) $3596 : 29$ и $3916 : 29$; 6) $2970 : 45$ и $3276 : 39$.

171

Верно ли высказывание:

- 1) $720 : 8 < 768 : 8 < 800 : 8$;
- 2) $1200 : 30 < 1200 : 32 < 1200 : 40$;
- 3) $20\,000 : 50 < 21\,068 : 46 < 24\,000 : 40$;
- 4) $15\,000 : 50 < 17\,056 : 52 < 18\,000 : 60$?



172 Сделай оценку частного и запиши её в виде двойного неравенства:

Образец: $28\ 000 : 40 < 29\ 792 : 38 < 30\ 000 : 30$
 $700 < 29\ 792 : 38 < 1000$

- 1) $3424 : 4$; 3) $50\ 592 : 8$; 5) $988 : 26$; 7) $20\ 418 : 83$;
 2) $4512 : 6$; 4) $46\ 872 : 9$; 6) $3901 : 47$; 8) $483\ 621 : 69$.

173 Выполни прикидку частного:

Образец: $57\ 596 : 68 \approx 56\ 000 : 70 = 800$

- 1) $224 : 7$; 3) $28\ 348 : 38$; 5) $172\ 872 : 42$; 7) $103\ 761 : 567$;
 2) $3210 : 5$; 4) $24\ 932 : 46$; 6) $159\ 183 : 69$; 8) $568\ 176 : 712$.

174 Найди примеры, которые решены правильно. Какие ошибки допущены в решении остальных примеров?

1)
$$\begin{array}{r} 228\ 114 \\ - 228 \\ \hline 114 \\ - 114 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 38 \\ \hline 63 \end{array} \quad \begin{array}{r} 228\ 114 \\ - 228 \\ \hline 114 \\ - 114 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 38 \\ \hline 603 \end{array} \quad \begin{array}{r} 228\ 114 \\ - 228 \\ \hline 114 \\ - 114 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 38 \\ \hline 6003 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 144\ 000 \\ - 135 \\ \hline 90 \\ - 90 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ \hline 32 \end{array} \quad \begin{array}{r} 144\ 000 \\ - 135 \\ \hline 90 \\ - 90 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ \hline 3200 \end{array} \quad \begin{array}{r} 144\ 000 \\ - 135 \\ \hline 90 \\ - 90 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ \hline 32\ 000 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 2\ 916\ 000 \\ - 288 \\ \hline 360 \\ - 360 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 72 \\ \hline 4500 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 916\ 000 \\ - 288 \\ \hline 360 \\ - 360 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 72 \\ \hline 40\ 050 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 916\ 000 \\ - 288 \\ \hline 360 \\ - 360 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 72 \\ \hline 40\ 500 \end{array}$$

175 Расшифруй слово, расположив ответы примеров в порядке убывания и сопоставив их соответствующим буквам. Что означает это слово?

А	$5635 : 7$	Д	$41\ 340 : 53$	О	$168\ 192 : 24$
А	$20\ 368 : 67$	Л	$371\ 480 : 74$	И	$402\ 500 : 175$
М	$146\ 520 : 36$	И	$245\ 294 : 49$	П	$2\ 198\ 560 : 728$

176 Слева от знака равенства поставь знаки деления так, чтобы получились верные высказывания:

$$2 \ 8 \ 7 \ 4 = 1$$

$$4 \ 3 \ 2 \ 8 = 54$$

$$1 \ 4 \ 4 \ 6 \ 1 = 24$$

D

177 Переведи условие задачи на математический язык и найди решение *методом проб и ошибок*.

1) Длина прямоугольника на 5 м больше ширины, а площадь составляет 24 м^2 . Каковы стороны этого прямоугольника?

2) Длину прямоугольника уменьшили в 2 раза, а ширину увеличили на 1 дм и получили квадрат. Найти сторону квадрата, если площадь прямоугольника 60 дм^2 .

178 Расшифруй названия литературных терминов, сопоставив частные соответствующим буквам и расположив их:

а) в порядке возрастания:

О	$56 : 7$
---	----------

И	$66 : 6$
---	----------

Г	$56 : 8$
---	----------

А	$36 : 18$
---	-----------

Л	$36 : 12$
---	-----------

Я	$80 : 4$
---	----------

Р	$63 : 7$
---	----------

Е	$48 : 8$
---	----------

Л	$48 : 12$
---	-----------

б) в порядке убывания:

Ю	$192 : 24$
---	------------

З	$144 : 24$
---	------------

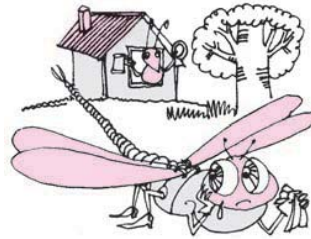
Л	$200 : 20$
---	------------

А	$240 : 8$
---	-----------

И	$144 : 36$
---	------------

Л	$240 : 12$
---	------------

Я	$108 : 36$
---	------------



Прочитай в энциклопедии или словаре, что означают эти термины. Приведи примеры.

179 Реши уравнение:

$$1) 98 : x + 9 = 23; \quad 2) 60 \cdot (y : 40 + 4) = 720; \quad 3) 39 - (15z + 48) : 27 = 35.$$

C

180* Жители города А говорят только правду, жители города В – только ложь, а жители города В – попеременно правду и ложь (то есть из каждых двух последовательных утверждений одно истинно, а другое ложно). Дежурному по пожарной части из одного из этих городов по телефону сообщили:

– У нас пожар, приезжайте скорее!

– Где? – спросил дежурный.

– В городе В, – ответили ему.

Куда должна ехать пожарная машина, если пожар в одном из этих городов действительно был?



4. Метод перебора.

При решении задач методом проб и ошибок мы видели, что простой подбор одного неизвестного числа не даёт уверенности в том, что найдены все искомые значения. Поэтому для обоснования полноты решения требуются дополнительные, иногда очень непростые рассуждения. В этом состоит существенный недостаток метода проб и ошибок.

Указанного недостатка лишен другой метод решения задач – **метод полного перебора**. При поиске неизвестного числа полным перебором рассматриваются *все мыслимые возможности*: если мы упустим хотя бы одну, то может оказаться, что именно она и даёт решение задачи.



Полный перебор требует, как правило, больших усилий и большого времени. Однако внимательный анализ условия часто позволяет найти систему перебора, охватывающую все возможные варианты, но более короткую, чем «лобовой» перебор.

Рассмотрим задачи 4 и 5 из пункта 1 (с. 27, 32).

Для решения задачи 4 удобнее использовать второй вариант перевода её условия на математический язык.

Задача 4.

Для натуральных чисел x и y выполняются два равенства:

$$xy = 252, \quad (x + 1)(y - 6) = 252.$$

Найти эти числа.

Из равенства $xy = 252$ можно заметить, что числа x и y не могут быть больше, чем 252. Однако и в этом случае «лобовой» перебор потребовал бы рассмотрения огромного числа вариантов.

Вместе с тем более внимательный анализ первого равенства показывает, что числа x и y – это *парные* делители 252: при делении 252 на x получается y , и наоборот. Следовательно, достаточно рассмотреть лишь парные делители числа 252, причем для случая, когда $y > 6$ (так как по условию $y - 6 \in N$).

Составим таблицу:

x	1	2	3	4	6	7	9	14	18	28	36
y	252	126	84	63	42	36	28	18	14	9	7

Анализ второго равенства позволяет ещё больше сократить число возможных вариантов. Действительно, оно означает, что числа $x + 1$ и $y - 6$ также являются парными делителями числа 252. Из таблицы видно, что такими свойствами обладает только пара $x = 6, y = 42$.

Поэтому задача 4 из пункта 1 имеет следующий ответ: «Для экскурсии надо заказать 6 больших автобусов».

Задача 5.

Для цифр x и y двузначного числа выполняется равенство $10x + y = xy + 52$.
Найти это число, если x – цифра десятков, а y – цифра единиц этого числа.

Полный перебор можно провести, рассматривая последовательно все значения x от 1 до 9 и подбирая в каждом случае соответствующее значение y от 0 до 9.

Однако этот перебор можно сократить, если заметить, что правая часть данного равенства не меньше 52. Значит, и левая его часть, то есть задуманное число, не меньше 52. Поэтому неизвестное число x не меньше 5, и можно рассматривать только пять значений x – от 5 до 9.

При $x = 5$ наше равенство имеет вид $50 + y = 5y + 52$, а этого быть не может, так как левая часть равенства всегда меньше правой части.

При $x = 6$ имеем $60 + y = 6y + 52$. По правилу «весов», известному из начальной школы, обе части уравнения можно поменять местами, увеличить, уменьшить, умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля. Поэтому если мы из каждой части этого равенства вычтем одно и то же число y , то получим $60 = 5y + 52$, откуда $5y = 8$, что для натурального числа y невозможно.

При $x = 7$ имеем равенство $70 + y = 7y + 52$. Снова вычитая из каждой части y , получим $70 = 6y + 52$, $6y = 18$, $y = 3$. Таким образом, для чисел $x = 7$ и $y = 3$ равенство выполняется и число 73 удовлетворяет условию задачи:

$$73 = 7 \cdot 3 + 52.$$

Означает ли это, что мы решили задачу? Нет, поскольку перебор ещё не закончен и среди не рассмотренных нами случаев могут найтись решения. Значит, перебор следует продолжить.

Выполняя аналогичные преобразования, имеем при $x = 8$:

$$80 + y = 8y + 52,$$

$$80 = 7y + 52,$$

$$7y = 28,$$

$$y = 4.$$

Наша осторожность помогла нам найти ещё одно число – 84, которое удовлетворяет условию задачи:

$$84 = 8 \cdot 4 + 52.$$

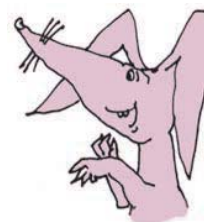
Осталось проверить $x = 9$:

$$90 + y = 9y + 52,$$

$$90 = 8y + 52,$$

$$8y = 38,$$

что невозможно.



Перебор удобнее проводить с помощью таблицы:

x	Уравнение	Упрощённое уравнение	y
5	$50 + y = 5y + 52$		невозможно
6	$60 + y = 6y + 52$	$8 = 5y$	невозможно
7	$70 + y = 7y + 52$	$18 = 6y$	$y = 3$
8	$80 + y = 8y + 52$	$28 = 7y$	$y = 4$
9	$90 + y = 9y + 52$	$38 = 8y$	невозможно

Таким образом, задумано либо число 73, либо 84, а какое именно из них – неизвестно: условие задачи не даёт возможности ответить на этот вопрос. В соответствии с этим и записывается ответ к задаче: «73 или 84».

Итак, мы видим, что осуществление полного перебора требует или большого количества труда и времени, или придумывания более остроумной системы перебора.

К

181

Переведи условие задачи на математический язык и реши её *методом перебора*.

1) В несколько коробок разложили поровну 36 карандашей. Если бы коробка было на 2 меньше, то в каждую пришлось бы положить на 3 карандаша больше. Сколько было коробок и сколько карандашей в каждой коробке?

2) В секции фигурного катания 60 человек. Для занятий их разделили поровну на несколько групп. Если бы групп было на одну больше, то в каждой было бы на 3 человека меньше. Сколько было групп и сколько человек в каждой группе?

3) Петя взял у друга интересную книгу и обещал её вернуть через несколько дней. Однако он успевал читать в день на 10 страниц больше, чем предполагал, и поэтому сумел вернуть книгу на день раньше срока.

За сколько дней Петя прочитал книгу, если в книге 120 страниц и скорость его чтения не менялась?

4) Мастерской надо было сшить 150 костюмов за определённый срок. Но она шила в день на один костюм больше и поэтому закончила работу на 5 дней раньше срока. Сколько костюмов в день шила эта мастерская, работая с постоянной производительностью?



182

Обозначь x цифру десятков, а y – цифру единиц двузначного числа. Построй математическую модель задачи и реши её *методом перебора*.

1) Задумано двузначное число, которое на 66 больше произведения своих цифр. Какое число задумано?

2) Двузначное число на 25 больше произведения своих цифр. Какое это число?

- 3) Сумма цифр двузначного числа на 19 меньше их произведения. Найди это число.
- 4) Задумано двузначное число, сумма цифр которого в 2 раза меньше самого числа. Какое число задумано?
- 5) Если двузначное число уменьшить на 45, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найди это число.
- 6) Если двузначное число увеличить на 27, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое это число?

π

183 (Устно.) Расшифруй названия терминов математической логики.

а) **Р** $42 - 7 \cdot 5$

С $14 \cdot 4 - 28$

А $36 : 2 + 5$

Е $50 : 2 + 8$

Н $(75 + 6) : 9$

Л $60 - 13 \cdot 4 + 2$

Ж $8 \cdot (31 - 25)$

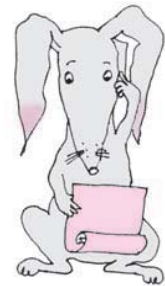
О $42 : 6 + 15 : 3$

В $2 \cdot 9 + 3 \cdot 6$

К $56 : (16 - 8) \cdot 7$

Т $39 : 13 + 17$

И $(12 - 4) \cdot (45 : 9)$



40	28	20	40	9	9	12

10	12	48	9	12

49	36	23	9	20	12	7

б) **Ю** $9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$

О $192 - (162 + 7)$

З $7 \cdot 4 \cdot 25$

К $256 - 99 - 1$

Ъ $78 + 1 + 69 + 2$

Я $(373 + 148) - 373$

И $19 + 29 + 39 + 3$

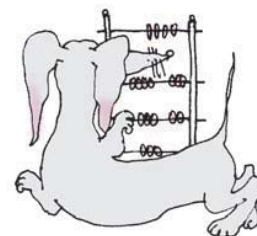
Д $(48 + 459) - 449$

Ц $43 + 44 + 45 + 46 + 47$

Н $914 - (814 + 37)$

156	23	63	150	270	63	156	225	90	148

58	90	700	150	270	63	156	225	90	148



в) Л $8 + 127$

С $297 + 5$

А $23 + 161$

М $158 + 12$

Ц $329 + 72$

К $143 - 9$

О $200 - 6$

В $328 - 27$

Ь $203 - 8$

Я $363 - 70$

Т $69 \cdot 4$

Е $160 \cdot 3$

Н $29 \cdot 20$

П $840 : 2$

Э $700 : 5$

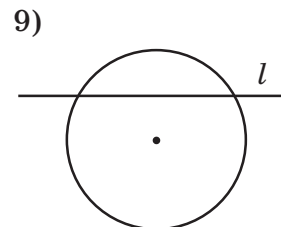
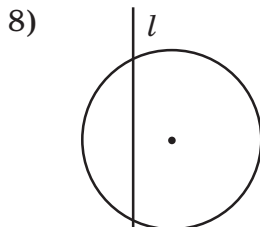
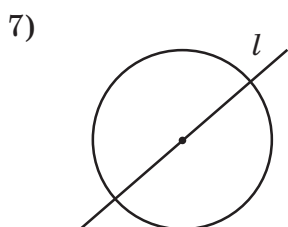
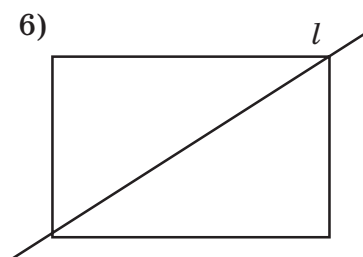
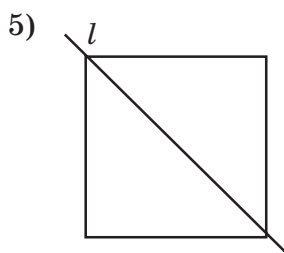
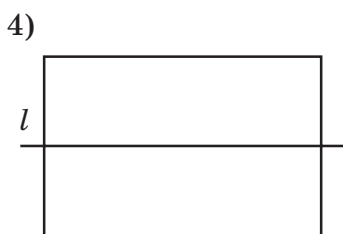
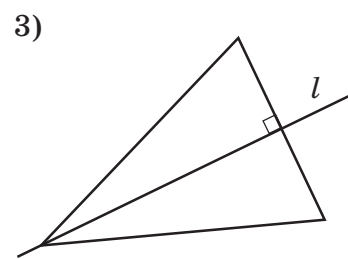
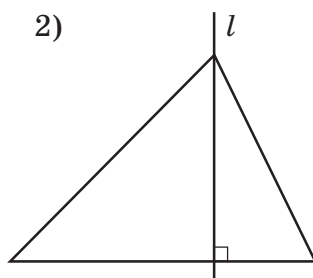
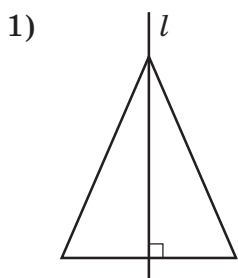
И $810 : 30$

27	170	420	135	27	134	184	401	27	293



140	134	301	27	301	184	135	480	580	276	580	194	302	276	195

184 Найди фигуры, для которых прямая l является осью симметрии. Проверь с помощью кальки.



185 Реши уравнения, используя правило «весов»:

1) $2x - 5 = x$; 2) $y = 8 - y$; 3) $5z = z + 24$; 4) $7m - 60 = m$.

Правило «весов»: обе части уравнения можно поменять местами, увеличить, уменьшить, умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

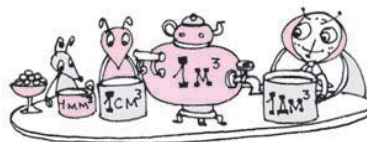
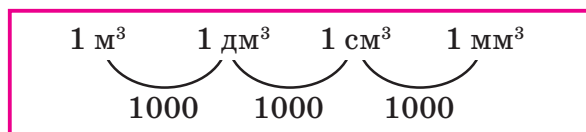
186 Вычисли:

1) $75\,000 : 500$; 3) $284\,700 : 390$; 5) $1\,911\,400 : 5030$;
2) $90\,000 : 1800$; 4) $1\,260\,000 : 450$; 6) $24\,766\,000 : 40\,600$.

187 Составь программу действий и вычисли:

1) $[924 \cdot 907 - (92\,749 + 76\,571) : 415] : 138$;
2) $409\,210 - [3007 \cdot (1511 - 560\,480 : 620) + 148\,687] : 856$.

188 Проследи по цепочке таблицу мер объёма, расскажи о соотношениях между ними. Какой единице объёма равен 1 литр?



Сколько кубических миллиметров в 1 кубическом дециметре?

Сколько кубических сантиметров в 1 кубическом метре?

Сколько кубических миллиметров в 1 кубическом метре?

189 Запиши в виде выражения:

- 1) количество кубических миллиметров в a кубических сантиметрах;
- 2) количество кубических дециметров в b кубических метрах;
- 3) количество кубических сантиметров в c кубических дециметрах;
- 4) количество кубических сантиметров в d кубических метрах.

190 Выполни действия:

1) $8\text{ дм}^3\ 36\text{ см}^3 + 964\text{ см}^3$; 5) $43\text{ см}^3\ 800\text{ мм}^3 \cdot 5$;
2) $1\text{ м}^3\ 217\text{ дм}^3 + 5\text{ м}^3\ 95\text{ дм}^3$; 6) $6\text{ м}^3\ 24\text{ дм}^3 \cdot 25$;
3) $4\text{ см}^3 - 2\text{ см}^3\ 219\text{ мм}^3$; 7) $18\text{ дм}^3 : 16$;
4) $9\text{ дм}^3\ 4\text{ см}^3 - 7\text{ дм}^3\ 78\text{ см}^3$; 8) $20\text{ м}^3\ 480\text{ дм}^3 : 40$.

191 C – множество делителей числа 8, а D – множество делителей числа 9.

- а) Запиши множества C и D с помощью фигурных скобок.
- б) Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств C и D , найди их объединение и пересечение. Сделай записи, используя знаки \cup и \cap .
- в) Верны ли утверждения:

$1 \in C \cap D$, $8 \notin C \cap D$, $9 \in C \cup D$, $72 \notin C \cup D$?

г) Какое число является делителем любого числа?

192 Задай характеристическим свойством множество $A = \{a, б, в\}$. Составь все подмножества этого множества.

193 Задай характеристическим свойством множество $B = \{19, 20, 21\}$. Запиши все множества, равные множеству B .

194 Найди правильный перевод условия задачи на математический язык. Составь задачу с другими величинами, имеющую такое же решение.

С трёх полей собрали a ц картофеля. С первого поля собрали b ц, а со второго – в 2 раза больше, чем с первого. Картофель, собранный с третьего поля, развезли поровну в 4 овощехранилища. Сколько картофеля отвезли в каждое овощехранилище?

1) $(a + b + 2b) : 4$;

2) $(a - b - 2b) \cdot 4$;

3) $(a - b - 2b) : 4$;

4) $(b - a - 2a) : 4$.

195 Разгадай кроссворд.

По горизонтали:

а) 2496 : 32

б) 13 590 : 45

в) 78 400 : 16

г) 1 259 600 : 25

д) 7 205 600 : 8

е) 5 712 000 : 34

По вертикали:

а) 2 803 200 : 4

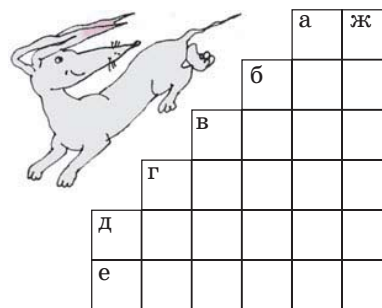
б) 2 283 460 : 58

в) 3 366 720 : 840

г) 4 807 000 : 9500

д) 9 560 460 : 105 060

ж) 24 612 000 : 30



196 Переведи условие задачи на математический язык и реши её *методом перебора*.

Мастер за несколько часов изготовил 84 одинаковые детали. Если бы он изготавливал в час на 2 детали больше, то ему для этой работы потребовалось бы на час меньше. С какой производительностью работал мастер, если в течение всего времени работы она не менялась?

197 Обозначь x цифру десятков, а y – цифру единиц двузначного числа. Построй математическую модель задачи и реши её *методом перебора*.

Задумано двузначное число меньше 80, которое на 58 больше произведения своих цифр. Какое число задумано?



198 Найди значение выражения:

1) $[(249 \cdot 803 + 189) : 248 - 98] \cdot 780$;

2) $[84 706 - (203 \cdot 407 + 957)] \cdot (192 150 : 549)$.

199 Выполни действия:

1) $5 \text{ м}^3 928 \text{ дм}^3 + 2 \text{ м}^3 84 \text{ дм}^3$;

2) $9 \text{ см}^3 45 \text{ мм}^3 - 6 \text{ см}^3 796 \text{ мм}^3$;

3) $18 \text{ дм}^3 500 \text{ см}^3 \cdot 4$;

4) $42 \text{ м}^3 : 20$.

200 Вычисли, расположи ответы примеров в порядке возрастания и сопоставь их соответствующим буквам. Расшифруй литературный термин. Что он означает? Приведи примеры.

А	$5032 : 68$
----------	-------------

Т	$40\ 850 : 43$
----------	----------------

З	$2\ 431\ 068 : 578$
----------	---------------------

А	$25\ 040 : 5$
----------	---------------

Т	$197\ 500 : 250$
----------	------------------

Е	$1\ 311\ 000 : 690$
----------	---------------------

И	$78\ 279 : 97$
----------	----------------

Н	$234\ 688 : 386$
----------	------------------

201 A – множество делителей числа 16, а B – множество делителей числа 28.

а) Запиши множества A и B с помощью фигурных скобок.

б) Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств A и B , найди их объединение и пересечение. Сделай записи, используя знаки \cap и \cup .

в) $D = \{2, 4, 8\}$. Какие из высказываний верны:

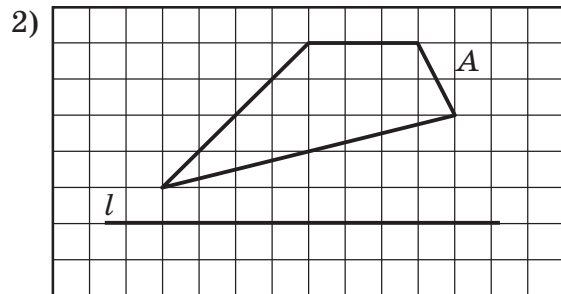
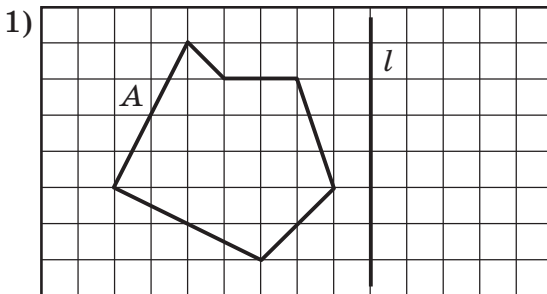
$$D \subset A,$$

$$D \subset B,$$

$$D \not\subset A,$$

$$D \not\subset B?$$

202 Нарисуй в тетради по клеточкам фигуру A и прямую l . Построй фигуру, симметричную A относительно l .



с

203* Из Древнего Вавилона (около 2 тыс. лет до н. э.)

Длина и четверть ширины вместе составляют 7 ладоней, а длина и ширина вместе – 10 ладоней. Сколько ладоней составляют длина и ширина в отдельности?

Задачи для самопроверки.

204 Найди выражение, которое является правильным переводом данной задачи на математический язык.

Отряд пограничников, выполняя боевое задание, прошёл a км. Первые 3 часа пограничники шли по дороге со скоростью b км/ч и сделали привал на 2 часа. Остальное время они шли по болотистой местности со скоростью c км/ч. Сколько времени пограничники потратили на весь поход?

1) $a : 3 + b : 2 + c;$

3) $3 + 2 + (a - b) : c;$

2) $a : 3 + (b + c) : 2;$

4) $3 + 2 + (a - 3b) : c.$



205 Некоторое число сначала увеличили на 14, потом увеличили в 4 раза, результат вычли из 110 и получили 18. Какое число задумали?

206 Упрости выражение:

1) $a + 4 + 3a + 12$;

2) $m \cdot 8 \cdot n \cdot 9$;

3) $16x - 7x - 2x$.

207 Построй математическую модель задачи и найди ответ при данных значениях букв.

1) В 5 одинаковых банок разложили x кг варенья. Сколько таких банок потребуется, чтобы разложить y кг варенья? ($x = 15$, $y = 36$.)

2) Для столовой закупают на неделю n батонов хлеба. Сколько батонов хлеба надо закупить на 4 дня при постоянном расходе хлеба в день? ($n = 280$.)

3) При испытании авиамodelей одна из них летела со скоростью a м/с и продержалась в воздухе 40 секунд. Скорость второй была на 2 м/с больше скорости первой, но она продержалась в воздухе только b секунд. На сколько метров первая модель пролетела больше, чем вторая? ($a = 4$, $b = 25$.)

208 Построй математическую модель задачи и ответь на поставленный вопрос.

Катя, Ира и Лена вместе собрали 35 стаканов малины. Ира собрала в 2 раза больше малины, чем Катя, а Лена – в 4 раза больше, чем Катя. Сколько малины собрала каждая девочка?



209 Реши задачу *методом проб и ошибок*.

Найти периметр прямоугольника, у которого ширина на 4 см меньше длины, а площадь составляет 32 см².

210 Реши задачу *методом перебора*.

1) Найти двузначное число, которое на 34 больше произведения своих цифр.

2) Для новогоднего праздника надо было изготовить 48 гирлянд. Эту работу поручили нескольким ученикам, распределив между ними гирлянды поровну. Если бы учеников было на 2 больше, то гирлянд каждому пришлось бы делать на 4 меньше. Сколько было учеников и сколько гирлянд сделал каждый из них?

211 Выполни действия:

1) $723 \cdot 409$;

4) $72\ 560 : 8$;

2) $2070 \cdot 500$;

5) $253\ 536 : 417$;

3) $8003 \cdot 960$;

6) $369\ 000 : 820$.

212 Найди значение выражения:

$189 + [(747 - 699) \cdot 13 - 35] : 19$.



§ 3. Язык и логика

1. Высказывания.

Речь человека, тексты, которые он читает и пишет, состоят из предложений. Это касается и обычного, и математического языка. То, что говорится в каждом предложении, может оказаться верным или неверным.

Например, в учебнике можно прочесть верное предложение «Земля вращается вокруг Солнца», а в таблице умножения – предложение $2 \cdot 2 = 4$. А если ученик скажет, что семью семь сорок семь, – это будет неверное предложение. Надо сказать, что и в учебниках встречаются неверные предложения – из-за опечаток, а иногда и по невнимательности.

Верные и неверные предложения называют в математике **высказываниями**, или **утверждениями**.

При этом вместо слов «верное» и «неверное» часто говорят **истинное** и **ложное**. Таким образом, утверждения бывают истинные и ложные.

В высказываниях всегда можно выделить **тему** – то, о чем говорится, и **рему** – то, что сообщается о теме. Например, в написанном выше предложении говорится о планете Земля – это *тема*, и сообщается, что она вращается вокруг Солнца, – это *рема*. Точно так же в математическом предложении $28 + 36 = 64$ говорится о сумме чисел 28 и 36 и сообщается, что эта сумма равна 64.

Не всякое предложение является утверждением. В самом деле, если кто-нибудь спрашивает «Который час?» или кричит «Ура!», не имеет никакого смысла говорить о том, верны или неверны эти предложения. В первом из этих предложений тема есть, а ремы нет, а во втором нет даже темы.

Очень часто бывает, что предложение является утверждением, однако ответить на вопрос, истинно оно или ложно, мы не можем. Например, далеко не все могут ответить на вопрос, истинно или ложно утверждение: «Слово *also* по-немецки означает *следовательно*». Но, посмотрев в словарь, нетрудно убедиться, что оно истинно.

Для доказательства истинности утверждения «Слово *also* по-английски означает *следовательно*» нужно посмотреть в другой, англо-русский словарь. Там мы найдем, что это слово в английском языке означает «также». Значит, данное утверждение ложно.

Так в практической жизни можно доказать или опровергнуть утверждение, используя словарь, справочник, энциклопедию.



В отличие от житейской практики в науке доказательство и опровержение некоторых утверждений – очень сложное дело. Например, на доказательство утверждения «Земля вращается вокруг Солнца» ученым понадобилось не одно столетие. В итоге накопленное научное знание содержится в словарях, справочниках, энциклопедиях, помогая человеку решать практические задачи.

В математике для доказательства истинности утверждений используют строгие математические методы, и нам ещё предстоит этому научиться.

К

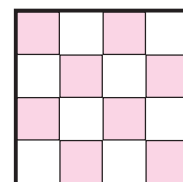
213 Среди данных предложений найди высказывания и укажи в них *тему* и *рему*.

- Когда заканчиваются летние каникулы?
- Учебный год в России начинается 1 сентября.
- Какая красота!
- Каир – столица Египта.
- Сумма пяти и восемнадцати.
- Трижды восемь – двадцать восемь.



214 Найди в высказываниях *тему* и *рему*. Какие из этих высказываний истинны, а какие – ложны?

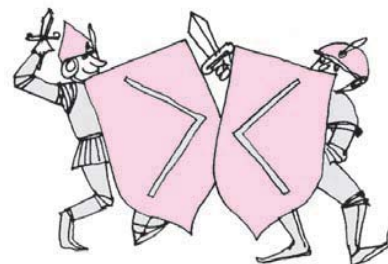
- В каждом январе 31 день.
- В каждом феврале 28 дней.
- Следующий день после воскресенья – вторник.
- В неделе семь дней.
- В слове «определение» 6 слогов.
- Мяч имеет форму цилиндра.
- Шар и круг – это одинаковые фигуры.
- Сумма всех десяти цифр равна 45.
- Всякое трёхзначное число больше 100.
- Существует наибольшее пятизначное число.
- Существует наибольшее натуральное число.
- Существует наименьшее натуральное число.
- На рисунке закрашено $\frac{8}{15}$ квадрата.



215 Придумай одно истинное и одно ложное высказывание. Приведи примеры предложений, которые высказываниями не являются.

216 Определи истинность высказываний и запиши их с помощью знаков $>$, $<$, \geq , \leq .

- Три меньше пяти.
- Три больше пяти.
- Три меньше или равно пяти.
- Три не больше пяти.
- Три больше или равно пяти.
- Три не меньше пяти.

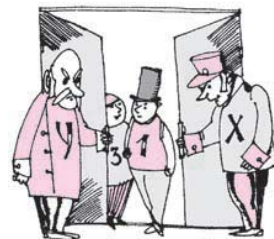


217 Определи истинность высказываний. Прочитай высказывания третьего столбика разными способами.

- | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1) $12 + 17 = 29$; | 5) $12 + 17 = 28$; | 9) $12 + 17 \geq 29$; |
| 2) $12 + 17 \neq 29$; | 6) $12 + 17 \neq 28$; | 10) $12 + 17 \leq 29$; |
| 3) $12 + 17 > 29$; | 7) $12 + 17 > 28$; | 11) $12 + 17 \geq 28$; |
| 4) $12 + 17 < 29$; | 8) $12 + 17 < 28$; | 12) $12 + 17 \leq 28$. |

218 Истинными или ложными высказываниями становятся следующие предложения при указанных значениях букв x и y ?

- а) $12x - 35y = 1$ ($x = 3, y = 1$);
 б) $14x - 26y = 0$ ($x = 6, y = 3$);
 в) $2x - y > 27$ ($x = 14, y = 5$);
 г) $x + 2y < 649$ ($x = 8, y = 320$);
 д) $5x - 6y \geq 28$ ($x = 8, y = 2$);
 е) $3x + y \leq 210$ ($x = 60, y = 25$).



219 Какие из следующих высказываний истинны? Как можно их доказать или опровергнуть?

- а) Муж и жена всегда имеют одинаковую фамилию.
 б) В начальной школе учителя всегда женщины.
 в) У каждого человека есть родители.
 г) Император Петр Великий перенёс столицу России из Москвы в город Владимир.
 д) Президент Российской Федерации – высшая государственная должность в России.
 е) Картину «Богатыри» написал художник В. М. Васнецов.
 ж) Строки «Москва, Москва!.. Люблю тебя, как сын, как русский, – сильно, пламенно и нежно!» принадлежат М. Ю. Лермонтову.
 з) По крайней мере у трёх великих немецких композиторов-классиков фамилии начинаются с буквы «Б».

220 Проверь истинность утверждения:

$$\frac{28\,693 : (7\,077 - 2\,978) \cdot 507}{35 \cdot 202 - 51\,948 : (15\,777 - 44 \cdot 35) + 334} = \frac{3549}{6000}.$$



π **221** Запиши дробь, у которой:

- а) числитель равен 2, а знаменатель 5;
 б) знаменатель равен 6, а числитель 7;
 в) числитель 3, а знаменатель на 2 больше;
 г) знаменатель 4, а числитель в 2 раза больше.

Какие из этих дробей являются правильными, а какие – неправильными? Построй их графическую иллюстрацию с помощью отрезка и его частей.

222 Какие слова пропущены?

- 1) Чтобы найти $\frac{8}{9}$ от числа a , надо это число _____ на 9 и _____ на 8.
- 2) Чтобы найти число, $\frac{3}{4}$ которого равны b , надо b _____ на 3 и _____ на 4.
- 3) Чтобы найти, какую часть число 6 составляет от числа 10, надо 6 _____ на 10.

223 1) Как найти часть числа a , выраженную дробью $\frac{m}{n}$?

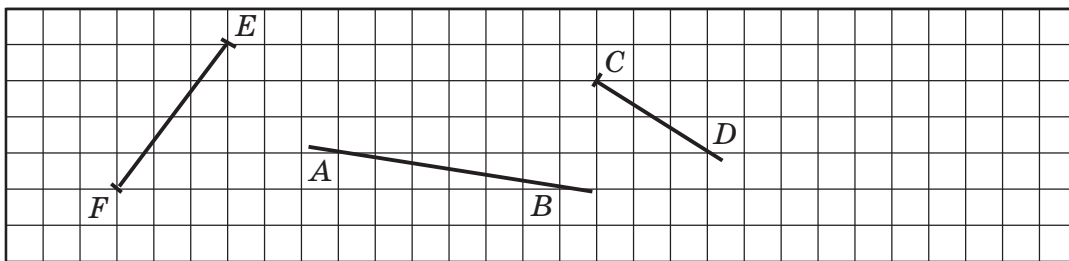
- 2) Как найти число, если его часть, выраженная дробью $\frac{m}{n}$, равна b ?
- 3) Как найти, какую часть число b составляет от числа a ?

224 Приведи доказательства или опровержения следующих утверждений:

- 1) $\frac{2}{9}$ от 18 равно 4.
- 2) Число, $\frac{3}{4}$ которого составляет 48, равно 36.
- 3) Число 7 составляет $\frac{7}{11}$ от числа 11.

225 В книге четыре рассказа. Первый рассказ занимает 12 страниц, что составляет $\frac{2}{3}$ второго рассказа. Третий рассказ занимает $\frac{5}{6}$ суммы страниц первых двух рассказов. Какую часть книги составляет четвёртый рассказ, если всего в книге 64 страницы?

226 Пересекаются ли: прямая AB и луч CD ; прямая AB и отрезок EF ; отрезок EF и луч CD ? Перечерти рисунок по клеточкам в тетрадь и отметь точки пересечения фигур. Построй луч MN , который пересекает прямую AB и луч CD , но не пересекает отрезок EF .



227 Истинными или ложными становятся следующие предложения при указанных значениях переменных x , y , z ?

- 1) $987x - 830y + 4502z = 40\,802\,149$, если $x = 607$, $y = 409$, $z = 9005$;
- 2) $(x : 24)(y : 53) - 508z = 3\,709\,136$, если $x = 16\,896$, $y = 413\,400$, $z = 3508$.

228 Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны? Из букв, соответствующих истинным высказываниям, составь название животного.

- А** Земля имеет только один естественный спутник.
- Б** В Солнечной системе 8 больших планет.
- В** Рим – столица Испании.
- Г** Нил и Амазонка – крупнейшие реки Африки.
- Д** Эльбрус – высочайшая вершина Европы.
- Е** Америку впервые открыл Америго Веспуччи.
- Ж** Среди двузначных чисел чётных чисел больше, чем нечётных.
- З** Скорость света в вакууме приближённо равна 300 000 км/с.
- И** 1 дм³ равен 1 литру.
- К** Слово «треугольник» состоит из 11 различных букв русского языка.
- Л** В слове «перпендикуляр» сделано 3 ошибки.
- М** Слово «bonjour» по-французски означает «до свидания».
- Н** Слово «опосум» написано правильно.
- О** Квадрат является прямоугольником.
- П** Куб и цилиндр являются плоскими фигурами.
- Р** Династия Каролингов предшествовала на троне Франции династии Капетингов.



229 Осенью с трёх яблонь собрали урожай 90 кг яблок. С первой яблони собрали 35 кг, а со второй – $\frac{5}{7}$ урожая первой яблони. С какой яблони собрали больше яблок – со второй или с третьей, и на сколько? Какую часть всего урожая составляют яблоки, собранные с третьей яблони?



230 Начерти прямую l и отметь на ней точки A , B и C так, чтобы точка B лежала между точками A и C .

- а) Запиши 6 различных обозначений этой прямой.
- б) Обведи карандашами разного цвета лучи AB и CA . Найди пересечение этих лучей.
- в) Построй луч TK , который пересекает луч BC , но не пересекает отрезок BC .

231* Продолжи каждый из рядов на три числа, сохраняя закономерность:

а) 3, 5, 10, 12, 24, 26, ...

б) 1, 2, 5, 10, 17, 26, ...

2. Общие утверждения.

Особое значение для математики имеют **общие утверждения**. Так называют высказывания, в которых утверждается, что **все** элементы заданного множества обладают указанным свойством. Общий характер высказывания выражается словами *любой, каждый, все, всегда* и т. п. Например:



В каждой неделе 7 дней.

Результат умножения любого числа на 0 равен нулю.

Сумма любых двух чисел не зависит от порядка слагаемых.

Периметр всякого прямоугольника равен сумме длин его сторон.

Сумма двух натуральных чисел всегда делится на 3.

Произведение любых двух натуральных чисел больше их суммы.

Очень часто обобщающие слова опускают и приведённые высказывания произносят короче:

В неделе 7 дней.

Результат умножения числа на 0 равен нулю.

Сумма двух чисел не зависит от порядка слагаемых.

Периметр прямоугольника равен сумме длин его сторон.

Сумма двух натуральных чисел делится на 3.

Произведение двух натуральных чисел больше их суммы.

Общее утверждение, как и всякое высказывание, может оказаться как истинным, так и ложным. Так, в приведённых примерах первые четыре утверждения истинны, а последние два ложны.

Действительно, сумма двух натуральных чисел не всегда делится на 3: например, $1 + 3 = 4$ на 3 не делится. Этот пример показывает, что предпоследнее общее утверждение ложно, то есть он *опровергает* это утверждение.

Пример, опровергающий общее утверждение, называют **контрпримером**. Приставка «контр» («против») подчёркивает, что речь идёт именно об опровержении утверждения.

Привести контрпример для последнего утверждения немного сложнее: надо либо вспомнить, что $2 \cdot 2 = 2 + 2$, либо догадаться взять одно или даже оба числа равными единице:

$$2 \cdot 1 < 2 + 1, \quad 1 \cdot 1 < 1 + 1.$$

Таким образом, для опровержения общего утверждения достаточно привести хотя бы один контрпример. Это касается, конечно, и обычной жизни. Скажем, для опровержения утверждения «Все кошки чёрные» можно показать белую, рыжую, полосатую кошку – любой окраски, кроме чёрной.



В то же время для доказательства истинности общего утверждения привести даже большое число примеров недостаточно. Так, встречая среди пограничников только мужчин, мы не можем сделать вывод, что все пограничники – мужчины. И каждый, кто был, например, в московском аэропорту Шереметьево-2, мог бы опровергнуть это утверждение – в настоящее время там работают и пограничники-женщины. Точно так же для доказательства утверждения о сумме углов треугольника недостаточно измерить углы даже миллиона треугольников.

К

232 Какие из следующих высказываний являются *общими* утверждениями?

- 1) Человек существует не изолированно, а находится в тесной связи с миром природы.
- 2) Некоторые виды растений и животных занесены в Красную книгу.
- 3) Продолжительность жизни звезды зависит от её массы.
- 4) Все планеты Солнечной системы обращаются вокруг Солнца в одном направлении.
- 5) Некоторые созвездия названы именами животных.
- 6) У каждой реки есть исток.
- 7) Все реки впадают в Каспийское море.
- 8) Некоторые произведения А.С. Пушкина написаны в прозе.
- 9) Голос любого человека имеет свои особенности звучания.
- 10) В некоторых аккордах звуки располагаются по терциям.
- 11) Блок-схемы задают последовательность операций в программе.
- 12) В некоторых странах весной стрелки часов переводят на час вперёд.



233

Приведи примеры истинных и ложных *общих* высказываний из области математики, русского языка, географии, астрономии, спорта, жизни класса.

234

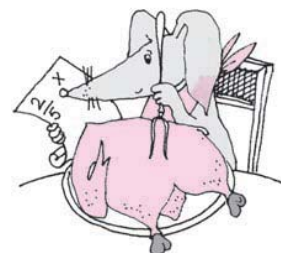
Приведи *контрпример* к каждому из следующих утверждений:

- а) Все натуральные числа больше единицы.
- б) Любое натуральное число делится на 2.
- в) Всякое число, делящееся на 5, оканчивается цифрой 5.
- г) Все города России находятся в Европе.
- д) Все города Европы находятся в России.
- е) В каждом месяце не меньше 30 дней.
- ж) Существительные, оканчивающиеся буквой «е», всегда среднего рода.
- з) В русском языке подлежащее в предложении всегда является существительным.

П

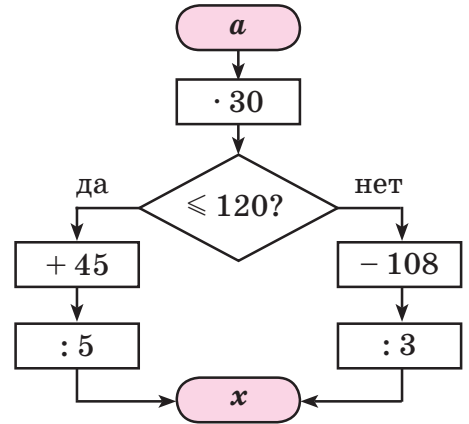
235 Как найти:

- 1) $\frac{2}{5}$ от x ;
- 2) число, $\frac{3}{4}$ которого составляют t ;
- 3) часть, которую число 5 составляет от n ?



236 Выполни вычисления по алгоритму, заданному блок-схемой. Расположи ответы примеров в порядке убывания, сопоставив их соответствующим буквам, и расшифруй название геометрической фигуры. Какие ещё пространственные геометрические фигуры ты знаешь?

a	0	1	2	3	4	5	6	7
x								
Буквы	Р	Э	А	Т	Е	Д	Р	Т



237 Подбери пропущенные слова и запиши правила в тетрадь:

- 1) Чтобы найти часть от числа, выраженную дробью, надо это число _____ на знаменатель дроби и _____ на числитель.
- 2) Чтобы найти число по его части, выраженной дробью, надо эту часть _____ на числитель дроби и _____ на знаменатель.
- 3) Чтобы найти, какую часть одно число составляет от другого, надо первое число _____ на второе.

Проиллюстрируй правила с помощью чертежа.

238 Составь выражения и найди их значения при данных значениях букв:

- 1) В корзине n груш, что составляет $\frac{3}{7}$ всех фруктов, лежащих в корзине. Сколько всего фруктов в корзине? ($n = 21$.)
- 2) В наборе x конфет. Шоколадные конфеты составляют $\frac{4}{9}$ всех конфет этого набора. Сколько нешоколадных конфет в наборе? ($x = 36$.)
- 3) На стоянке стояли a легковых и b грузовых машин. Из них 4 машины уехали. Какую часть всех машин, стоявших на стоянке, составляют уехавшие машины? ($a = 5, b = 2$.)

239 Андрей весит 32 кг, что составляет $\frac{4}{7}$ веса его старшей сестры и $\frac{2}{5}$ веса его папы. Вес мамы составляет $\frac{7}{8}$ веса папы. Смогут ли они все вместе подняться в лифте грузоподъемностью 300 кг, если с ними должен подняться их пудель, который весит 17 кг?



240 Реши уравнение:

1) $405 - (9x + 70) : 4 = 383;$

2) $1800 : (240 : y) - 47 = 253.$

241 Найди значения выражения:

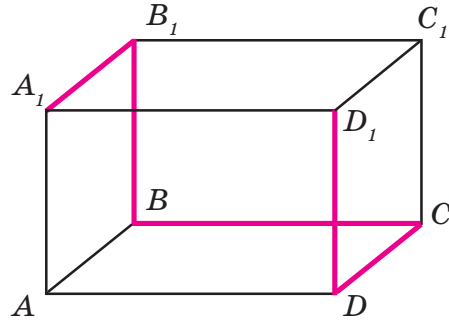
1) $(20\ 200 - 3\ 829\ 925 : 209) : (16\ 000 - 2\ 014\ 125 : 131);$

2) $(2\ 551\ 947 - 477\ 719 : 137) : (145\ 271 - 1\ 481\ 384 : 83).$

242 1) Сколько рёбер, граней и вершин у прямоугольного параллелепипеда?

2) Найди на рисунке равные ребра и равные грани параллелепипеда. Назови их.

3) С помощью модели прямоугольного параллелепипеда найди длину ломаной линии $A_1B_1BCDD_1$, если $AB = 4$ см, $AD = 8$ см, $AA_1 = 5$ см. Пересекаются ли отрезки BC и DD_1 ?



243 В чём сходство и в чем различие отрезка и луча, луча и прямой?

Построй: а) прямую AB ; б) прямую BA ; в) луч AB ; г) луч BA .

244 а) Построй два луча OC и OD так, чтобы они образовывали острый угол. Измерь величину угла COD и построй смежный с ним угол. Сколько решений имеет эта задача? Как найти величину смежного угла?

б) Построй два луча BK и BM так, чтобы они образовывали тупой угол. Измерь величину угла KBM и построй вертикальный для него угол. Сколько решений имеет эта задача? Как найти величину угла, вертикального данному?

245 Реши задачу с помощью схемы:

1) Число a составляет $\frac{4}{5}$ числа b . Какую часть числа a составляет число b ?

2) Число a меньше числа b на $\frac{1}{5}$ часть b . Какую часть разность $(b - a)$ составляет от a ?

Д

246 Составь выражения:

1) Утром Баба Яга прочитала a страниц, а вечером – b страниц. Число страниц, прочитанных ею за день, составило две трети от числа всех страниц книги. Сколько страниц в этой книге?

2) Волк и Заяц соревновались в беге. Волк пробежал за 8 минут s метров, а Заяц за 3 минуты пробежал $\frac{5}{9}$ этого расстояния. На сколько скорость Зайца оказалась больше скорости Волка?

3) Золушке надо перебрать d кг крупы. Она уже перебрала n кг крупы. Какую часть крупы ей ещё осталось перебрать?



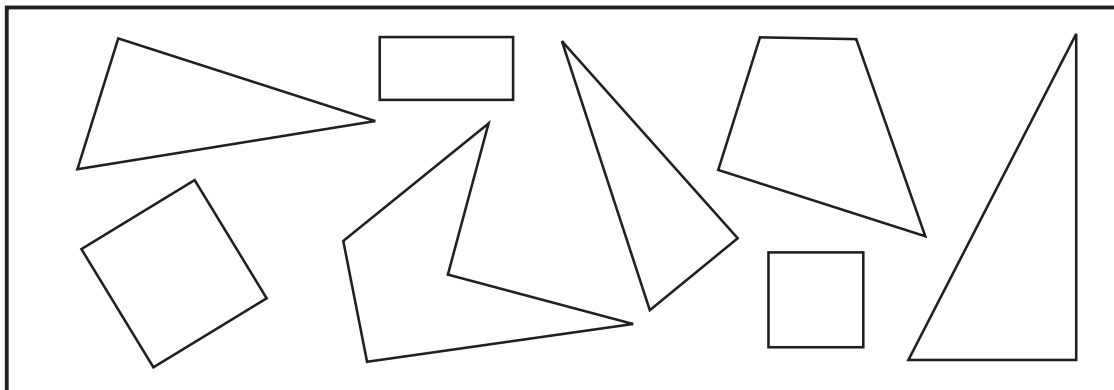
247 Найди значение выражения:

1) $4\ 306\ 600 - (3798 + a : 230) \cdot 905$, если $a = 208\ 840$;

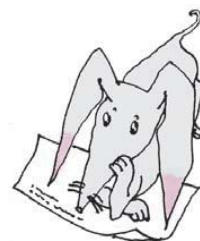
2) $(6080b + 7\ 612\ 040) : 7940 - 4895$, если $b = 8007$.

248 Придумай задачи, для решения которых требуется: 1) найти часть от числа; 2) найти число по его части; 3) найти часть, которую одно число составляет от другого.

249 1) Какие из приведённых высказываний являются общими, а какие – нет? Из букв, соответствующих общим высказываниям, составь имя мальчика.



- А** Все фигуры на чертеже – многоугольники.
- Н** На чертеже есть круги.
- Р** Некоторые фигуры на чертеже – треугольники.
- Л** Все фигуры на чертеже – треугольники.
- К** Каждая фигура на чертеже является квадратом.
- Т** На чертеже есть квадраты.
- О** Некоторые квадраты на чертеже не являются прямоугольниками.
- И** Все фигуры на чертеже имеют хотя бы один прямой угол.
- Я** У некоторых четырёхугольников на чертеже 5 сторон.



2) Какие высказывания для данного чертежа являются истинными, а какие – ложными? Из букв, соответствующих истинным высказываниям, составь имя девочки.

с **250*** Вода при замерзании увеличивается на $\frac{1}{11}$ своего объёма. На какую часть своего объёма уменьшается лед при обратном превращении в воду?

251* Рыбак поймал рыбу. Когда у него спросили, какова масса пойманной рыбы, он сказал: «Я думаю, что хвост её весит 1 кг, голова – столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище – сколько голова и хвост вместе». Чему же равна масса этой рыбы?



3. «Хотя бы один».

Другой важный для математики тип утверждений – это утверждение о том, что в заданном множестве существует **хотя бы один** элемент, обладающий определённым свойством. Например:

Можно найти такое натуральное число k , что $57 = 3k$.

Существует такое натуральное число x , что $(2x + 3) : 7 = 11$.

Некоторые люди имеют рост больше 2 м 20 см.

Произведение двух натуральных чисел может быть больше их суммы.

Сумма двух натуральных чисел не всегда делится на 3.

Грибы не всегда съедобны.



В противоположность утверждению типа «все», истинность утверждения типа «хотя бы один» с помощью примера можно доказать.

Так, в первом примере достаточно взять $k = 19$ – ведь $57 = 3 \cdot 19$, а во втором примере можно убедиться, что указанным свойством обладает $x = 37$. В третьем примере надо найти *хотя бы одного* человека ростом выше 2 м 20 см, а в последнем – *хотя бы один* несъедобный гриб.

Утверждения типа «хотя бы один» называют также утверждениями *о существовании*: в них говорится, что в заданном множестве существует хотя бы один элемент, обладающий указанным свойством.

К

252 Среди приведённых ниже высказываний найди *общие* утверждения, высказывания типа «хотя бы один» и высказывания, не относящиеся к этим двум видам утверждений.

- 1) Можно найти существительное, состоящее из 7 различных букв.
- 2) В доме может быть больше 10 этажей.
- 3) Некоторые люди носят очки.
- 4) У кошки четыре ноги.
- 5) Иногда шторм длится более пяти дней.
- 6) Есть люди, которые не умеют плавать.
- 7) Некоторые медведи зимой не спят.
- 8) Акулы – хищные рыбы.
- 9) Вороны иногда остаются зимовать в городе.
- 10) В пустыне Сахара иногда идёт дождь.
- 11) На Южном полюсе температура воздуха всегда отрицательная.
- 12) Император Франции Наполеон I умер в 1815 году.



253 Придумай различные способы формулировки высказываний:

- 1) Все птицы имеют крылья.
- 2) Некоторые птицы не умеют летать.

254 Придумай истинные и ложные высказывания типа «хотя бы один».

255 Докажи, что существует натуральное число x такое, что:

- а) $3x > 128$; е) $x(6 - x) = 8$;
 б) $3x < 128$; ж) $(x - 1)(x + 11) = 13$;
 в) $2x - 4 = 52$; з) $35 : x - 35 : (x + 2) = 2$;
 г) $12x - 7x = 90$; и) $x + (x + 1) + (x + 2) = 18$;
 д) $(8 + 3x) : 10 = 2$; к) $(2x - 1)(3x - 2)(4x - 3) = 1$.



256 Докажи следующие утверждения:

- 1) Некоторые числа больше семи.
- 2) Существуют числа, кратные пяти.
- 3) Можно найти число, при делении которого на 6 получится 9.
- 4) Сумма двух правильных дробей может быть неправильной дробью.
- 5) Число, делящееся на 12, может не делиться на 8.
- 6) Существует трёхзначное число, большее 995.
- 7) Некоторые делители числа 28 – нечётные числа.
- 8) Существует число, кратное одновременно 8 и 12.

257 Правильно ли проведено доказательство утверждений?

- 1) Все натуральные числа делятся на 7: например, $14 : 7 = 2$.
- 2) Некоторые правильные дроби имеют знаменатель 8: например, знаменатель дроби $\frac{3}{8}$ равен 8.
- 3) Существуют чётные числа, кратные 3: например, 26 кратно 3.
- 4) В русском языке некоторые глаголы начинаются с буквы «и»: например, «игрушка» начинается с буквы «и».
- 5) Все кошки четвероногие: например, у кошки Мурки 4 ноги.
- 6) Все имена существительные в русском языке состоят из 5 букв: например, существительное «книга» состоит из 5 букв.

258 Докажи или опровергни утверждения:

- 1) Все числа кратны десяти.
- 2) Любое число, оканчивающееся цифрой 3, делится на 3.
- 3) Сумма цифр двузначного числа не может быть больше произведения его цифр.
- 4) Существует натуральное число x такое, что $18 - 4x = 6$.
- 5) Некоторые решения неравенства $2 < x \leq 7$ являются четными числами.
- 6) Каждый делитель числа 10 является делителем числа 12.

π

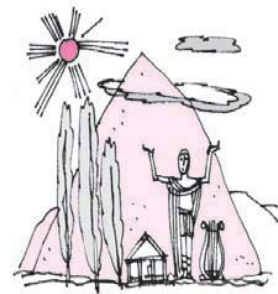
259 Вспомни правила сравнения дробей: 1) с одинаковыми числителями; 2) с одинаковыми знаменателями. Сравни:

- а) $\frac{3}{17}$ и $\frac{9}{17}$; в) $\frac{4}{43}$ и $\frac{4}{19}$; д) $\frac{9}{23}$ и $\frac{23}{9}$; ж) $6\frac{2}{9}$ и $6\frac{7}{9}$;
 б) $\frac{8}{13}$ и $\frac{6}{13}$; г) $\frac{7}{16}$ и $\frac{7}{51}$; е) $1\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{5}$; з) $4\frac{3}{8}$ и $\frac{7}{94}$.

260 Расшифруй название одного из наиболее опасных действующих вулканов. Он расположен на юге Италии близ Неаполя.

210	340	600	480	92	300
: 7	+ 80	- 40	: 60	- 85	: 25
: 5	: 14	: 2	+ 15	· 70	· 7
· 17	· 5	· 3	· 9	+ 50	+ 16
- 49	- 70	+ 60	- 47	: 60	- 19
+ 8	: 16	: 18	: 4	+ 37	: 9
Й	У	Е	З	И	В

9	50	40	5	9	46	61



261 Представь число в виде суммы целой и дробной части:

$$2\frac{7}{8}; 3\frac{9}{14}; 5\frac{16}{21}; 12\frac{35}{94}.$$

262 Выполни действия:

а) $\frac{9}{16} - \frac{3}{16};$

д) $5\frac{4}{7} + 1\frac{2}{7};$

и) $1\frac{4}{15} + 3\frac{12}{15} - 2\frac{7}{15};$

б) $\frac{1}{8} + \frac{7}{8};$

е) $5\frac{6}{11} - 3\frac{1}{11};$

к) $10\frac{5}{28} - 5\frac{17}{28} + 1\frac{12}{28};$

в) $\frac{7}{9} + \frac{4}{9};$

ж) $4\frac{7}{12} + 2\frac{9}{12};$

л) $4\frac{3}{4} - (8\frac{1}{4} - 7\frac{3}{4});$

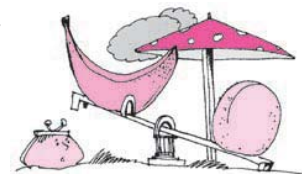
г) $\frac{4}{5} - \frac{4}{5};$

з) $8\frac{1}{13} - 7\frac{7}{13};$

м) $18\frac{9}{10} - (7\frac{8}{10} + 9\frac{4}{10}).$

263 Проверь истинность высказываний:

- 1) 4% от 800 равны 32.
- 2) Число, 2% которого составляют 200, равно 10 000.
- 3) Число 9 составляет 9% от 900.
- 4) 5% от 800 равны 45.
- 5) Число, 7% которого составляют 35, равно 500.
- 6) Число 50 составляет 1% от 50 000.



264 1) Страховка составляет 8% от стоимости автомобиля. Чему равна стоимость автомобиля, если за его страховку клиент заплатил 12 000 р.?

2) Цена масла 400 р. за килограмм, а стоимость батона хлеба составляет 6% цены масла. Сколько должен заплатить человек, купивший 2 батона хлеба и 200 г масла?

265 Найди в каждом равенстве число, которое является кратным двух других чисел (делителей). Запиши другие равенства, устанавливающие соотношение между этими делителями и их кратным: 1) $12 \cdot 6 = 72$; 2) $32 : 4 = 8$.

266 При делении числа a на число b получилось частное k . Запиши различные равенства, выражающие взаимосвязь между a , b и k . Вставь пропущенные буквы:

« Число является делителем числа »

« Число кратно числу »

267 1) Вычисли сумму длин всех ребер, площадь полной поверхности и объём прямоугольного параллелепипеда с измерениями 7 м, 3 м и 5 м.
2) Вычисли сумму длин всех ребер, площадь полной поверхности и объём куба с длиной ребра 4 см.

268 Из фанеры требуется сделать открытый ящик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда длиной 40 см, шириной 20 см и высотой 15 см. Сколько фанеры потребуется для изготовления ящика? Чему будет равен его объём?

269 Упрости выражение и найди его значение при данном значении переменной:
1) $68x - 28x + x + 9x$, если $x = 700$; 3) $432z - 130z + 18z - 70z$, если $z = 520$;
2) $199y + y - 46y - 34y$, если $y = 90$; 4) $29k + 175k + 71k + 25k$, если $k = 940$.

270 Проверь истинность неравенства:

$$\frac{500\,000 - 23\,946 : 78 - 498\,855}{(405 \cdot 8004 - 3\,212\,197 - 129\,472 : 64) : 685} < 2\frac{39}{49}.$$



271 1) Длина тела у белки меньше, чем у сурка, в 3 раза, или на 40 см. Чему равна длина тела у сурка? А у белки?
2) В школьном саду яблонь больше, чем слив, в 7 раз, или на 240. Сколько яблонь и сколько слив в школьном саду?



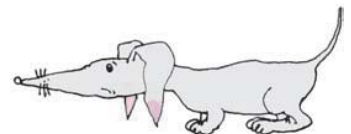
272 Докажи, что существует такое натуральное число x , что:

- 1) $38x < 1569$; 3) $(x+1)(x+2)(x+3) = 60$; 5) $3x - 1 = 935$;
2) $38x > 1569$; 4) $x(x+1)(x+2) = 210$; 6) $5x + x = 1308$.

273 Докажи следующие утверждения:

- 1) Существует натуральное решение неравенства $x \leq 2$.
- 2) Произведение двух натуральных чисел может быть меньше четырёх.
- 3) Иногда сумма цифр двузначного числа больше их произведения.
- 4) Некоторые делители числа 18 являются также делителями числа 15.
- 5) Можно найти квадрат, площадь которого составляет 49 м^2 .
- 6) Числа, кратные 5, не всегда кратны 10.
- 7) Существует число, 1% которого равен 8.
- 8) Некоторые дроби меньше, чем $\frac{1}{5}$.

Что общего во всех этих высказываниях?



274 1) В школе 1200 учеников. Девочки составляют 45% всех учеников. Сколько мальчиков учатся в этой школе?

2) На вечерний сеанс в кинотеатр продано 592 билета, что составляет 74% всех имеющихся в кинотеатре мест. Сколько билетов ещё осталось?



275 Реши уравнения:

$$1) 13\frac{2}{9} - (x + 2\frac{5}{9}) = 7\frac{5}{9};$$

$$2) (y - 4\frac{8}{11}) + 1\frac{9}{11} = 7\frac{3}{11}.$$

276 1) Чтобы сделать бассейн, в земле выкопали котлован в форме прямоугольного параллелепипеда длиной 25 м, шириной 6 м и глубиной 3 м. Сколько кубических метров земли пришлось вынуть?

2) Длина комнаты 7 м, ширина 5 м, а высота 3 м. Сколько квадратных метров обоев требуется для оклейки стен комнаты, если площадь окон и дверей равна 12 м^2 , а отходы обоев при поклейке составляют $\frac{1}{15}$ часть площади оклеивания? Сколько рулонов обоев для этого надо купить, если в каждом рулоне 10 м^2 обоев?

277 В хоккее играли две команды. За весь матч было забито 12 голов, причем первая команда забила в 3 раза больше голов, чем вторая. На сколько меньше голов забила вторая команда, чем первая?



278 1) $52\,106 \cdot 503 + 5346 \cdot 503 - 1\,300\,938;$

2) $(450 \cdot 2840 - 2034 \cdot 450 - 78\,795) : 405 - 193.$

с **279*** Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 143, а номер последней состоит из тех же цифр, но записанных в другом порядке. Сколько страниц выпало из книги?

4. О доказательстве общих утверждений.

Итак, утверждения о существовании можно доказать приведением примера. А как доказываются общие утверждения?

Напомним, что в общем утверждении (утверждении типа «все») говорится, что *все элементы некоторого множества обладают определённым свойством*. Поэтому самый простой приём доказательства состоит в том, что мы «испытываем» по очереди все элементы множества: перебираем их один за другим и для каждого проверяем наше утверждение. Когда эти элементы «закончатся», то утверждение будет доказано. Например, для доказательства того, что в математическом кружке занимаются все мальчики из 5 «А», достаточно фамилию каждого мальчика из классного журнала найти в списке участников кружка.



Но в математике дело обстоит не так просто – из-за того, что часто приходится иметь дело с бесконечными множествами, например со всеми натуральными числами. *Элементы бесконечного множества уже нельзя испытать все*, и при любом числе испытаний может оказаться, что ещё непроверенный элемент как раз и опровергает утверждение, которое мы хотим доказать.

Представим себе, например, что из непрозрачного мешка можно вытащить любое число разноцветных шаров. Тогда если мы вытащим поочередно тысячу, миллион или сколько угодно белых шаров, то нет никакой гарантии, что следующий шар не окажется, скажем, красным. Поэтому посредством перебора нельзя убедиться, что все шары в мешке именно белые.



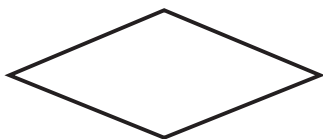
Однозначно ответить на вопрос, как доказываются общие утверждения, невозможно. До сих пор в математике есть утверждения, истинность которых математиков очень интересует, но они не могут ни доказать их, ни опровергнуть. В связи с каждой такой нерешённой проблемой, с недоказанным утверждением одни математики думают, что это утверждение верно, другие предполагают, что оно неверно. Но ни те, ни другие не считают своё мнение окончательным до тех пор, пока утверждение не будет доказано или опровергнуто.

С некоторыми способами доказательства общих утверждений, которые были выработаны в процессе развития математики, мы познакомимся в следующем пункте.

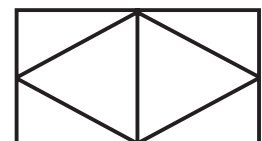
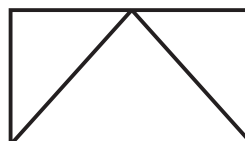
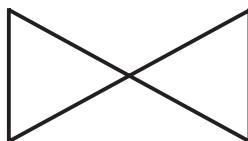
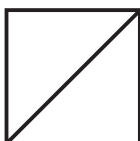


280 Докажи методом перебора следующие утверждения:

- 1) При делении на 9 любого числа из множества $\{20, 56, 101\}$ в остатке получается 2.
- 2) Все числа из множества $\{273, 343, 1505\}$ делятся на 7.
- 3) Число 37 является делителем всех чисел из множества $\{222, 333, 555\}$.
- 4) Все числа из множества $\{1001, 10011001, 100110011001\}$ кратны 7, 11 и 13.
- 5) Каждая фигура на рисунке имеет ось симметрии.

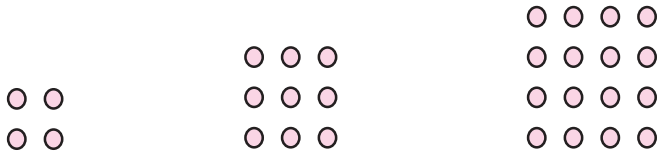


- 6) Все фигуры, изображённые на рисунке, можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одной линии дважды.

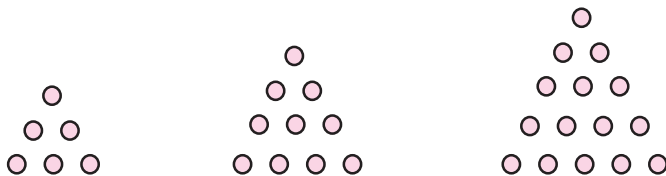


281 Докажи или опровергни следующие утверждения:

- 1) Все летние месяцы состоят из 31 дня.
- 2) Каждый звонкий согласный звук русского языка имеет парный глухой согласный звук.
- 3) При переводе в неправильную дробь любого смешанного числа из множества $\left\{2\frac{7}{8}, 4\frac{11}{18}, 5\frac{8}{15}, 13\frac{5}{6}\right\}$ в числителе получается 83.
- 4) Все элементы множества $\left\{\frac{22}{9}, \frac{42}{19}, \frac{58}{27}, \frac{94}{23}\right\}$ удовлетворяют неравенству $2\frac{4}{31} \leq x \leq 3\frac{1}{9}$.
- 5) Уравнение $x(x-5)(x-7)(x+11) = 0$ имеет натуральные корни.
- 6) Между числами 200 и 220 имеется 6 чисел, кратных 3.
- 7) В множестве чисел от 40 до 50 каждое число имеет больше двух делителей.
- 8) 49 шаров можно уложить в виде квадрата так, как показано на рисунке для 4, 9, 16 шаров:



- 9) 100 шаров можно уложить в виде равностороннего треугольника так, как показано на рисунке для 6, 10, 15 шаров:



282 Придумай высказывание общего вида об элементах конечного множества. Докажи или опровергни его методом перебора.

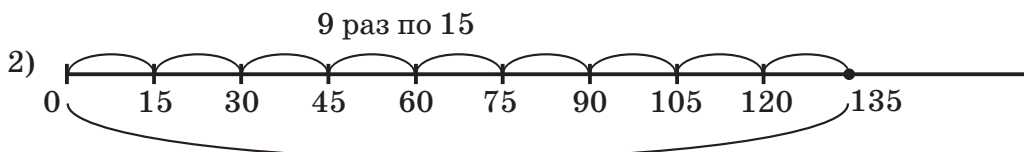
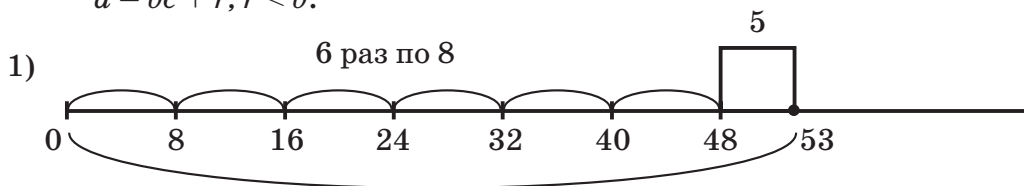
283 Любую из звёздочек в записи $5*5*5*5$ можно зачеркнуть или поставить вместо нее знак умножения. Какое из полученных числовых выражений имеет наибольшее значение?

284 По конституции Федерации Бусирия каждая из входящих в её состав 12 республик должна иметь свой, отличный от других флаг, состоящий из трёх продольных или трёх поперечных полос различных цветов – красного, жёлтого или синего. Может ли тринадцатая республика войти в состав Федерации?



π

285 По рисунку найди делимое, делитель, частное и остаток. Запиши соотношение между ними, пользуясь формулой деления с остатком: $a = bc + r, r < b$.



286 Выполни деление с остатком и сделай проверку:

- 1) $3429 : 8$; 3) $2956 : 35$; 5) $572\ 510 : 807$;
2) $81\ 453 : 9$; 4) $43\ 112 : 59$; 6) $205\ 648 : 672$.

287 Почему при делении с остатком нельзя в делимом и делителе отбросить одно и то же число нулей? Выполни деление и сделай проверку.

- 1) $160 : 30$; 2) $2700 : 400$; 3) $58\ 000 : 7000$; 4) $200\ 000 : 40\ 000$.

288 Выдели целую часть из неправильной дроби: $\frac{11}{4}, \frac{17}{8}, \frac{14}{3}, \frac{21}{5}$.
Сделай рисунок.

289 Запиши смешанное число в виде неправильной дроби: $2\frac{3}{4}, 5\frac{1}{2}, 6\frac{2}{3}, 4\frac{3}{5}$.
Сделай рисунок.

290 Найди:

- 1) 3% от a ; 3) число, 8% которого равны c ;
2) 14% от b ; 4) число, 25% которого равны d .



291 БЛИЦтурнир

- 1) Медведь сел на пенёк и съел c пирожков. Это составило 30% всех пирожков, лежащих в корзине. Сколько пирожков лежало в корзине?
- 2) В наборе a фломастеров. $\frac{3}{8}$ всех фломастеров красных тонов. Сколько в наборе фломастеров других тонов?
- 3) Заяц тащил арбуз, масса которого равна b кг. Он встретил Волка, который нес дыню. На сколько тяжелее ноша Волка, если масса арбуза составляет $\frac{2}{5}$ массы дыни?
- 4) В поезде ехало d пассажиров. В первом вагоне ехало 15% всех пассажиров, во втором вагоне – 20% всех пассажиров. Сколько пассажиров ехало в остальных вагонах?

292 Выполни действия:

а) $(38 : 2 + 6) : 5 + [(72 - 18) : 9 + 64 : (8 \cdot 2) - 7] \cdot 19 - 14;$

б) $100 - 56 : 14 \cdot [16 - 28 : (63 : 9)] + 80 : 40 \cdot (36 : 4) + 42.$

Д

293 Докажи или опровергни следующие утверждения:

1) Все числа из множества $\{75, 125, 450\}$ кратны 25.

2) Каждое число из множества $\{6, 9, 12\}$ является делителем 60.

3) Любое число из множества $\{19, 20, 21\}$ имеет ровно два делителя.

4) При делении всех чисел из множества $\{24, 38, 45\}$ на число 7 в остатке получается 3.

294

1) Запиши смешанное число в виде неправильной дроби и сделай рисунок:

$4\frac{1}{2}, 3\frac{2}{5}, 2\frac{4}{9}.$

2) Запиши частное в виде дроби и выдели из неё целую часть: $32 : 5, 57 : 12, 430 : 27, 725 : 36.$

295

Площадь поселка 600 га. Постройки, дороги и тротуары занимают 45% всей площади поселка, а зелёные насаждения – две трети *от оставшейся части*. Сколько в поселке неиспользованных площадей?

296

Упрости уравнение, а затем найди его корень:

1) $840 : x = 900 - 879;$

3) $14t - 9t = 1025;$

2) $y - 49 = 1515 : 15;$

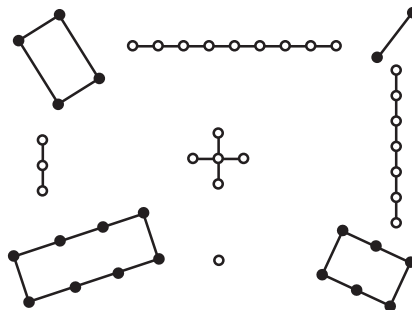
4) $3m + m + 6m = 2400.$

с

297* Разделив некоторое целое число на 15, Боря получил в остатке 8, а разделив его на 20, он получил в остатке 17. Покажи, что Боря ошибся.

298*

По древнекитайскому преданию, император Ю, живший примерно 4000 лет назад, увидел на берегу реки священную черепаху. На панцире черепахи был изображён рисунок из белых и чёрных кружков:



В этом рисунке была найдена удивительная закономерность. Открытие её произвело столь неизгладимое впечатление, что символ стали считать священным и употреблять при заклинаниях. Назвали его «Ло Шу». Какая закономерность так поразила древних китайцев в этой таблице?

5. Введение обозначений.

Как мы уже говорили, истинность высказывания на конечном множестве можно доказать, осуществляя непосредственный перебор. Для доказательства утверждений, верных на бесконечных множествах, в математике часто используют введение специальных обозначений. Подобно тому, как в обычной жизни люди называют друг друга по именам, в математике для рассмотрения любого объекта ему *дают имя* – обозначение.

Если требуется доказать, что все элементы некоторого множества обладают определённым свойством, можно взять **произвольный** элемент этого множества и обозначить его какой-нибудь буквой. После присвоения элементу некоторого имени мы можем его называть и записывать под присвоенным ему именем в выражениях, формулах, равенствах и неравенствах.



При введении обозначений в математике, как и в других науках, имеются определённые традиции. Так, неизвестные числа при решении текстовых задач обозначаются обычно буквами x и y . А если, например, речь идёт о задачах на движение, то для обозначения пути, скорости и времени используются соответственно буквы s , v , t . Площадь геометрических фигур чаще всего обозначается буквой S , периметр многоугольника – буквой P , объём геометрического тела – буквой V .

Посмотрим, как введение обозначений помогает доказывать математические утверждения.

Задача 1.

Доказать, что сумма любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

Напомним, что, когда мы говорим «делится», мы имеем в виду «делится без остатка».

Возьмем произвольное натуральное число и обозначим его буквой n . Тогда следующие за ним два числа равны соответственно $n + 1$ и $n + 2$. Мы должны доказать, что сумма этих трёх чисел, то есть число $n + (n + 1) + (n + 2)$, делится на 3. Преобразуем полученную сумму, используя переместительное и сочетательное свойства сложения:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3.$$

По распределительному свойству, $3n + 3 = 3 \cdot n + 3 \cdot 1 = 3(n + 1)$, и поэтому

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1).$$

Следовательно, данная сумма делится на 3 (без остатка), что и требовалось доказать.

Задача 2.

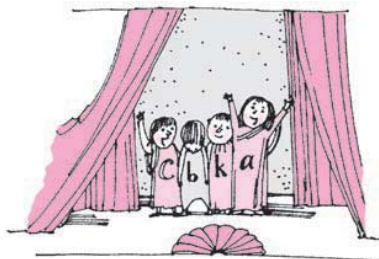
Доказать, что частное двух натуральных чисел не изменится, если каждое из них увеличить в одно и то же число раз (при делении без остатка).

В этой задаче у нас целых четыре «персонажа»: два числа, частное от деления одного из них на другое и число, на которое они умножаются для увеличения «в несколько раз». Поэтому мы введём четыре имени: делимое обозначим буквой a , делитель – буквой b , частное – буквой k , а четвёртое число – буквой c .

Так как $a : b = k$, выполняется равенство $a = bk$. Это равенство не нарушится, если обе его части умножить на число c , то есть $ac = (bk)c$. На основании переместительного и сочетательного свойств умножения имеем:

$$ac = (bk)c = b(kc) = b(ck) = (bc)k.$$

А это равенство и означает, что $(ac) : (bc) = k$, то есть при умножении делимого и делителя на одно и то же число частное от деления не меняется, что и требовалось доказать.

**К**

299 Докажи, что сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.

300

Докажи, что для натуральных чисел верны утверждения:

- Сумма двух чётных чисел – число чётное.
- Сумма любых двух соседних чисел – число нечётное.
- Разность чётного и нечётного числа – число нечётное.
- Произведение любых двух соседних чисел – число чётное.

**301**

Запиши предложения в тетради и закончи их так, чтобы они были верны на множестве натуральных чисел. Докажи их.

- Сумма чётного и нечётного числа – число _____
- Сумма любых двух нечётных чисел – число _____
- Разность любых двух нечётных чисел – число _____
- Произведение чётного и нечётного числа – число _____

302

Докажи или опровергни следующие утверждения на множестве натуральных чисел:

- Если разность двух чисел чётна, то их сумма чётна.
- Если разность двух чисел нечётна, то их сумма нечётна.
- Если сумма двух чисел чётна, то они оба чётны.
- Если сумма двух чисел чётна, то они оба нечётны.
- Если сумма двух чисел чётна, то хотя бы одно из них чётно.
- Если сумма двух чисел чётна, то хотя бы одно из них нечётно.



303 Переведи с математического языка на русский некоторые свойства умножения и деления (при условии, что все данные операции деления выполнимы на множестве натуральных чисел). Рассмотрим их доказательство и объясни, на основании каких свойств чисел выполнены преобразования.

$$1) \quad (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

Доказательство:

$$((a : c) \cdot b) \cdot c = (a : c) \cdot (b \cdot c) = (a : c) \cdot (c \cdot b) = ((a : c) \cdot c) \cdot b = a \cdot b.$$

Значит, $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$, что и требовалось доказать.

$$2) \quad a : (b \cdot c) = (a : b) : c$$

Доказательство:

$$((a : b) : c) \cdot (b \cdot c) = ((a : b) : c) \cdot (c \cdot b) = [((a : b) : c) \cdot c] \cdot b = (a : b) \cdot b = a.$$

Значит, $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$, что и требовалось доказать.

$$3) \quad a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$$

Доказательство:

$$(a \cdot c) : (b \cdot c) = (a \cdot c) : (c \cdot b) = ((a \cdot c) : c) : b = a : b,$$

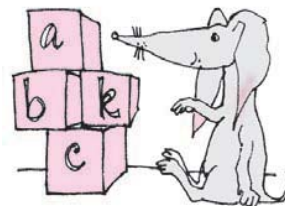
что и требовалось доказать.

$$4) \quad a : b = (a : c) : (b : c)$$

Доказательство:

$$(a : c) : (b : c) = ((a : c) \cdot c) : ((b : c) \cdot c) = a : b, \text{ что и требовалось доказать.}$$

На с. 75 приведено другое доказательство свойства 3. Какое из доказательств тебе понравилось больше?



304 Заполни пробелы и докажи получившиеся утверждения:

- 1) Если делимое увеличить в 3 раза, а делитель оставить без изменения, то частное _____
- 2) Если делимое уменьшить в 2 раза, а делитель оставить без изменения, то частное _____
- 3) Если делитель увеличить в 2 раза, а делимое оставить без изменения, то частное _____
- 4) Если делимое и делитель разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то частное _____

305 Докажи, что:

- 1) Если каждое из двух чисел делится на 3, то и их сумма делится на 3.
- 2) Если одно из двух чисел делится на 5, то и их произведение делится на 5.
- 3) Если одно из чисел делится на 4, а другое нет, то их сумма не делится на 4.
- 4) Если одно из чисел делится на 6, а другое нет, то их разность не делится на 6.

π

306 «Счёт-тест»

В этом задании ты можешь проверить свое умение считать. Тест пройден, если в указанное время все ответы найдены верно.

Тест 1 (устно, 4 мин).

$70 - 26$	$47 + 25$	$14 + 49$	$7 \cdot 5$
$: 2$	$: 36$	$: 3$	$\cdot 3$
$+ 38$	$\cdot 19$	$+ 19$	$- 9$
$: 15$	$- 6$	$: 8$	$: 16$
$\cdot 9$	$: 4$	$\cdot 16$	$\cdot 7$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
$45 : 3$	$20 \cdot 8$	$90 - 26$	$80 \cdot 9$
$\cdot 5$	$: 40$	$: 8$	$- 90$
$- 19$	$\cdot 27$	$\cdot 60$	$: 70$
$: 8$	$- 27$	$- 30$	$\cdot 6$
$\cdot 17$	$: 9$	$: 9$	$: 18$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>

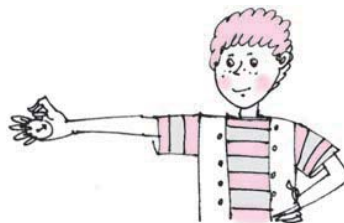
Тест 2 (письменно, 4 мин).

а) $843\,474\,818 + 48\,560\,769$;

б) $17\,523\,401 - 2\,960\,845$.

Тест 3 (письменно, 4 мин).

а) $85\,900 \cdot 704$; б) $771\,400 : 19$.



307 Как, не производя вычислений, найти значения выражений:

1) $815 + 79 - 79 + 79 - 79 + 79 - 79 + 79 - 79$;

2) $3400 - 29 + 35 + 29 - 35 - 148 + 7 + 148 - 7$;

3) $75 \cdot 6 : 6 \cdot 6 : 6 \cdot 6 : 6 \cdot 6 : 6 \cdot 6 : 6 \cdot 6 : 6$;

4) $5020 : 94 \cdot 94 \cdot 45 \cdot 2 : 45 \cdot 57 : 57 : 2$;

5) $a + b - b + c - c$; 6) $a \cdot b : b \cdot c : c$?



308 Прочитай разными способами равенство $4 \cdot 6 = 24$.

Какие ещё равенства, выражающие взаимосвязь между числами 4, 6 и 24, можно записать? Какие свойства чисел использованы для составления этих равенств?

309 Запиши данные равенства с помощью умножения. Назови в каждом из них делители и кратное.

1) $a : 3 = b$;

2) $c : d = 4$;

3) $m : 5 = n$.

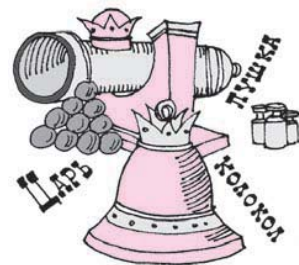
310 Запиши каждое равенство с помощью деления, назови делители и кратное, если значения всех переменных – натуральные числа:

1) $2x = y$;

2) $a = bk$;

3) $vt = s$.

- 311** 1) В Московском Кремле находятся Царь-колокол и Царь-пушка, отлитые русскими мастерами. Вес колокола – 200 т, а вес пушки составляет 20% веса колокола. Сколько весит Царь-пушка?
- 2) Спортивная площадка, имеющая площадь 420 м², занимает 7% школьного участка. Чему равна площадь школьного участка?
- 3) После того как туристы прошли $\frac{3}{7}$ всего пути, им осталось пройти 28 км. Чему равна длина их маршрута?
- 4) Рубашка стоила 300 р., затем цена её увеличилась на 10%. Сколько стала стоить рубашка после повышения цен?
- 5) Для хранения желудей их необходимо просушить, причём при сушке они теряют 8% своего веса. Сколько желудей нужно собрать, чтобы после просушки получить 368 кг желудей?
- 6) Школьники сдали в аптеку 12 кг сушёной малины и 10 кг сушёной черники. Сколько всего свежих ягод они собрали, если малина при сушке теряет $\frac{3}{4}$ своего веса, а черника – $\frac{4}{5}$ своего веса?



312 Составь программу действий и вычисли:

- 1) $15 \cdot (325 - 325) + 36 \cdot 1 - 29 \cdot [(704 : 704 + 0 \cdot 51) : 1 - 0 : 17]$;
- 2) $(42 - 0 : 24) : [(16 - 7 : 7) : 1 - 1 \cdot 9] + 18 \cdot (6 \cdot 8 - 12 \cdot 4)$;
- 3) $(7050 \cdot 32 + 14\,400) : 24 - (1\,752\,300 : 354 \cdot 804 - 326\,936) : 608$;
- 4) $20\,000 - [8976 \cdot 97 - (4\,713\,450 : 1005 + 3978 : 39 \cdot 506)] : 310$.

313 БЛИЦтурнир

- 1) Автобус обычно проходит s км за 4 часа. Однако он ехал со скоростью на 5 км/ч меньше обычной. Какое время затратил автобус на весь путь?
- 2) Два прямоугольника имеют одинаковую площадь, равную a м². Длина первого прямоугольника b м, а длина второго – на 14 м больше. На сколько ширина второго прямоугольника меньше ширины первого прямоугольника?
- 3) Одна сторона треугольника равна s м, вторая составляет $\frac{4}{5}$ длины первой стороны, а третья – 25% длины первой стороны. Чему равен периметр треугольника?
- 4) На одной полке стоит d книг, что составляет $\frac{2}{3}$ книг, стоящих на второй полке, и 80% книг, стоящих на третьей полке. Сколько книг стоит на всех трёх полках вместе?
- 5) У Саши было n р. Он купил альбом за k р. и 3 тетради, цена которых в 2 раза меньше цены альбома. На оставшиеся деньги он купил 5 одинаковых карандашей. Сколько стоит один карандаш?



б) Бабушка испекла x пирожков. Из них с рисом было y пирожков, с мясом – в 2 раза больше, чем с рисом, а остальные пирожки были с капустой. Треть пирожков с капустой бабушка раздала поровну своим четверым внукам. Сколько пирожков получил каждый внук?

314 Реши уравнение:

1) $(80x + 240) : 180 = 4;$

3) $8t - 3t + 5t = 70;$

2) $500 - 360 : (y - 4) = 460;$

4) $n + 4n - 3n = 52.$



315 Выполни действия:

1) $8\frac{3}{5} - (2\frac{4}{5} + 1\frac{1}{5});$

3) $(2\frac{4}{7} + 9\frac{6}{7}) - 2\frac{6}{7};$

2) $(3\frac{2}{9} + 5\frac{8}{9}) - 4\frac{1}{9};$

4) $6\frac{1}{11} - (3\frac{4}{11} + 1\frac{1}{11}).$

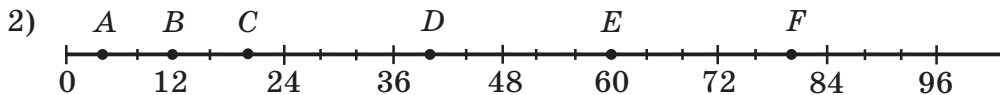
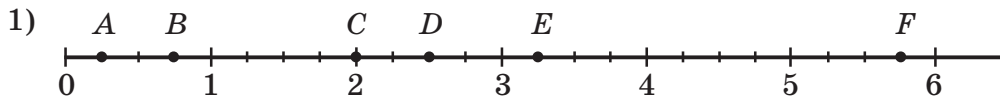
316 1) Велосипедист проехал в первый час $18\frac{3}{5}$ км, а во второй час – на $1\frac{4}{5}$ км больше, чем в первый. За эти два часа он проехал на $20\frac{1}{5}$ км больше, чем в третий час. Какой путь проехал велосипедист за все 3 часа?

2) Теплоход проплыл за 3 часа $104\frac{1}{4}$ км. В первый час он проплыл $32\frac{3}{4}$ км. Это на $3\frac{2}{4}$ км меньше, чем он проплыл во второй час. Сколько километров проплыл теплоход в третий час?

317 Расположи карточки с числами и буквами в порядке возрастания чисел и зачеркни 3 буквы так, чтобы получилась фамилия известного русского художника.

$1\frac{3}{7}$	$\frac{5}{9}$	2	$\frac{1}{9}$	$1\frac{5}{6}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{7}{9}$	$1\frac{5}{7}$	$\frac{7}{8}$
Т	Р	Ь	В	Л	М	Б	А	Е	У

318 Определи координаты точек A, B, C, D и F координатного луча:



319 Начерти координатный луч и отметь на нем точки, выбрав удобную цену деления:

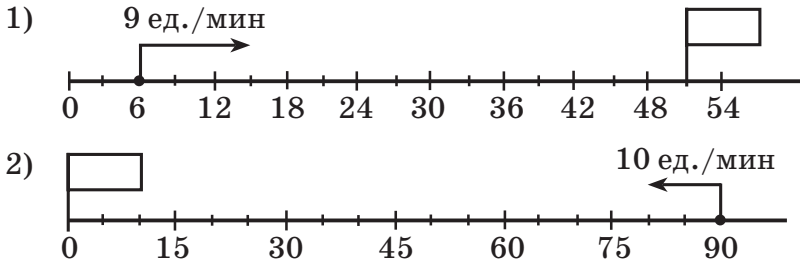
1) $A(\frac{2}{3}), B(2), C(3\frac{1}{3}), D(4\frac{2}{3}), E(6), F(7\frac{1}{3});$

2) $A(5), B(20), C(35), D(45), E(60), F(85);$

3) $A(4), B(12), C(28), D(36), E(44), F(52).$



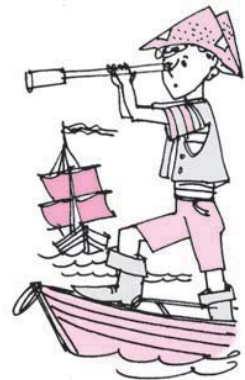
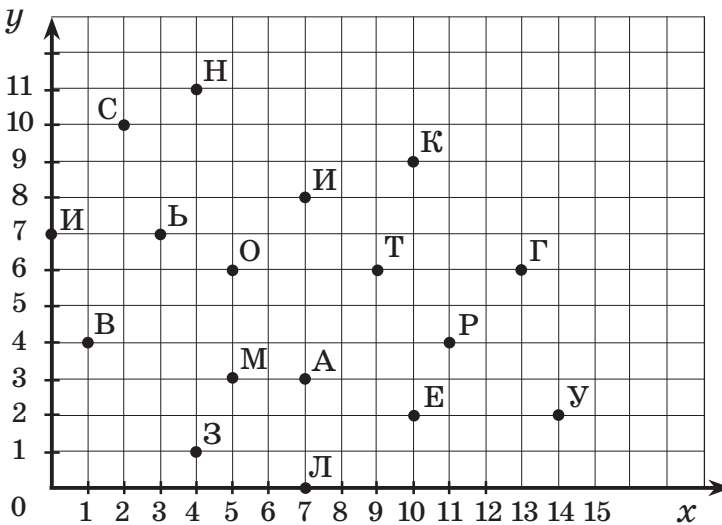
320 Перерисуй в тетрадь координатный луч и изобрази на нем движение точки. Запиши формулу зависимости переменной координаты x от времени движения t . Определи координату движущейся точки через 3 минуты после выхода. Проверь с помощью вычислений.



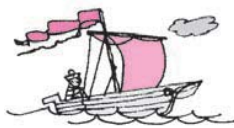
321 Сравни выражения с натуральными значениями переменных:

- 1) $19 + a$ и $a + 19$; 3) $18 : c$ и $48 : c$; 5) $m \cdot 14$ и $m : 14$;
 2) $b - 15$ и $b - 21$; 4) $25d$ и $52d$; 6) $n - 12$ и $3 + n$.

322 Определи координаты точек координатного угла и расшифруй названия морских терминов. Что они означают?



(10; 9)	(0; 7)	(7; 0)	(3; 7)	(1; 4)	(7; 3)	(9; 6)	(10; 2)	(11; 4)



(9; 6)	(11; 4)	(7; 3)	(1; 4)	(10; 2)	(11; 4)	(4; 1)

(13; 6)	(7; 3)	(7; 0)	(7; 8)	(5; 6)	(4; 11)

(14; 2)	(4; 1)	(10; 2)	(7; 0)

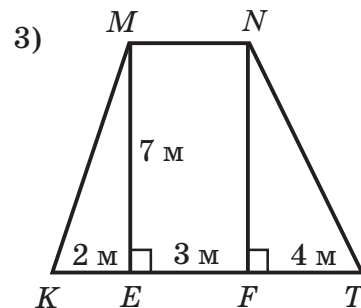
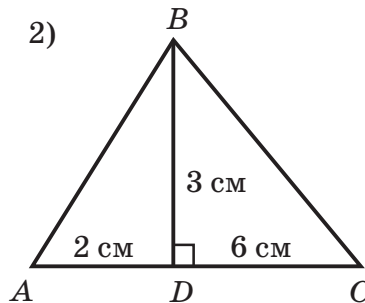
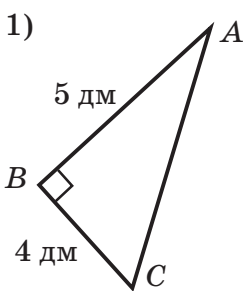
323 Движение точки по координатному лучу описывается формулой:

1) $x = 5 + 2t$; 2) $x = 80 - 10t$ (t – время в секундах).

Определи положение движущейся точки в начальный момент, скорость и направление её движения. Где окажется точка через 5 секунд после выхода? Проверь с помощью построений.

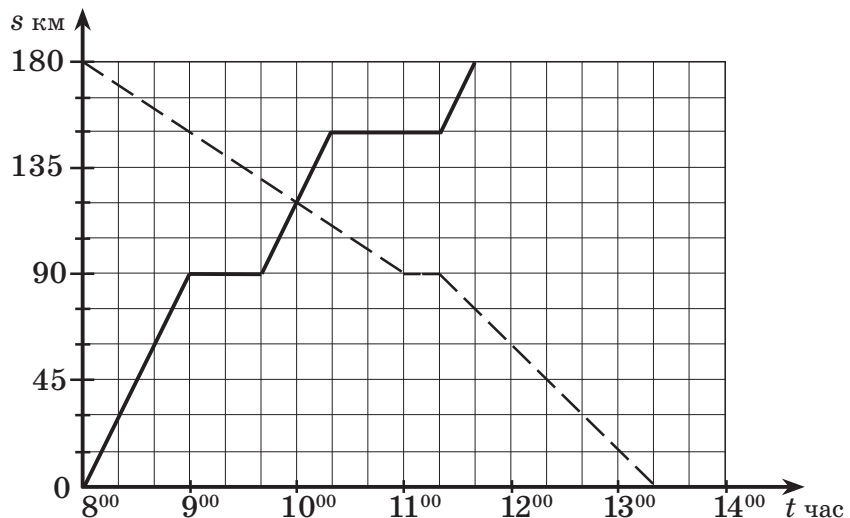
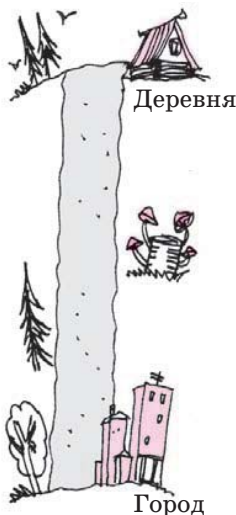
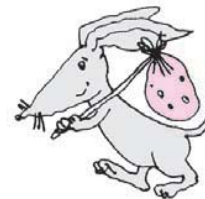
324 Нарисуй координатный угол и построй точки $A(7; 6)$, $B(1; 2)$, $C(5; 10)$ и $D(15; 6)$. 1) Проведи луч BA и отрезок CD и определи координаты их точки пересечения. 2) Измерь с помощью транспортира углы, образованные этими отрезком и лучом. Сколько углов достаточно измерить?

325 Какой треугольник называют прямоугольным? Как называются стороны прямоугольного треугольника? Как найти его площадь? Найди площадь фигур:



326 Рассмотрим графики движения двух объектов и определи по ним для каждого объекта:

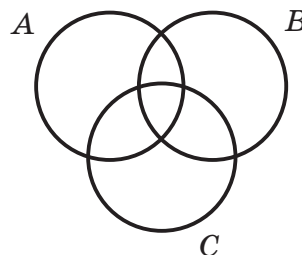
- 1) время начала и направление движения;
- 2) количество и продолжительность остановок;
- 3) скорость движения на всех участках пути;
- 4) время и место встречи с другим объектом;
- 5) время прибытия в пункт назначения.



327 Начерти два смежных угла. Построй с помощью транспортира биссектрисы этих углов и измерь величину угла, образованного биссектрисами. Повтори эксперимент ещё 2 раза. Что ты замечаешь? Можно ли считать, что замеченная закономерность этим уже доказана?

328 Перечерти диаграмму Эйлера–Венна для множеств A , B и C в тетрадь и раскрась указанные множества:

- | | |
|-----------------|--------------------------|
| 1) $A \cap B$; | 5) $(A \cap B) \cap C$; |
| 2) $A \cap C$; | 6) $A \cup (B \cup C)$; |
| 3) $A \cup B$; | 7) $(A \cap B) \cup C$; |
| 4) $B \cup C$; | 8) $A \cap (B \cup C)$. |



329 Докажи, что разность любых двух чётных чисел – число чётное.

330 Заполни пробел и докажи получившееся утверждение:
Произведение чётного и нечётного числа – число _____.

331 Докажи, что:

- 1) Если каждое из двух чисел делится на 8, то и их сумма делится на 8.
- 2) Если одно из двух чисел делится на 3, то и их произведение делится на 3.
- 3) Каждое натуральное число, кроме 1, в два раза меньше суммы соседних с ним чисел.

332 Реши уравнение и сделай проверку:

1) $75 - (5x + x) \cdot 3 = 39$;	2) $(8y - 6y + 5y) : 4 = 28$.
-----------------------------------	--------------------------------

333 1) Масса сахара равна 12% от массы сахарного тростника, используемого при производстве сахара. Сколько сахара будет получено из 3 т сахарного тростника?
2) Масса сахара равна 17% от массы сахарной свеклы, используемой при производстве сахара. Сколько свеклы требуется переработать для получения 34 ц сахара?

334 Какое из данных 4 выражений является математической моделью задачи? Теплоход проплыл по реке a км со скоростью b км/ч, а затем по озеру на 12 км больше. Сколько времени затратил теплоход на весь путь, если скорость его движения по озеру составляет $\frac{6}{7}$ от скорости движения по реке?

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1) $a : b + 12 : (b : 7 \cdot 6)$; | 3) $a : b + (a + 12) : (b : 7 \cdot 6)$; |
| 2) $(a + 12) : b + a : 7 \cdot 6$; | 4) $a : b + (a + b) : (b : 6 \cdot 7)$. |

335 Проверь истинность высказывания:
$$\frac{(320 + 85) \cdot (3003 - 93\ 528 : 36) - 1025 \cdot 160}{390\ 156 : 78 - [638\ 774 - 304 \cdot (617 + 89)] : 85} \geq 2\frac{1}{5}.$$



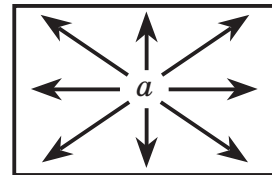
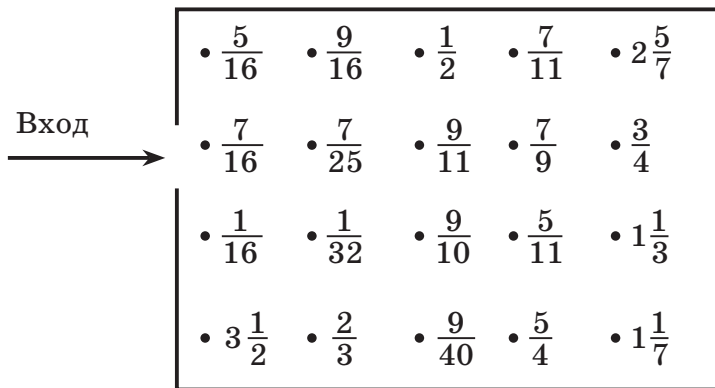
336 Реши задачу и запиши решение по действиям с вопросами:

1) В куске 32 м ткани. Для пошива 4 одинаковых пальто требуется 17 м 20 см этой ткани. Сколько таких пальто можно сшить из этого куска? Сколько ткани ещё останется в куске?

2) Два оператора, работая вместе, перевели в цифровой формат 120 книг за 6 часов, а один первый оператор мог бы выполнить эту работу за 15 ч. За сколько часов, работая отдельно, перевел бы все книги второй оператор, если они работают с постоянной производительностью?

337 Числовой лабиринт

Надо найти выход из числового лабиринта. Пройти по нему можно, перемещаясь от числа к большему числу, находящемуся рядом с ним в любом из указанных восьми направлений. 1) Какое число обозначает выход из лабиринта? 2) Запиши последовательность чисел, ведущих от входа к выходу.



338 Что общего и что различного в выражениях:

1) $(7\frac{1}{11} - 4\frac{5}{11}) - (2\frac{3}{11} + 5\frac{8}{11} - 6\frac{2}{11}) + 1\frac{8}{11}$;

2) $7\frac{1}{11} - (4\frac{5}{11} - 2\frac{3}{11}) + 5\frac{8}{11} - (6\frac{2}{11} + 1\frac{8}{11})$?

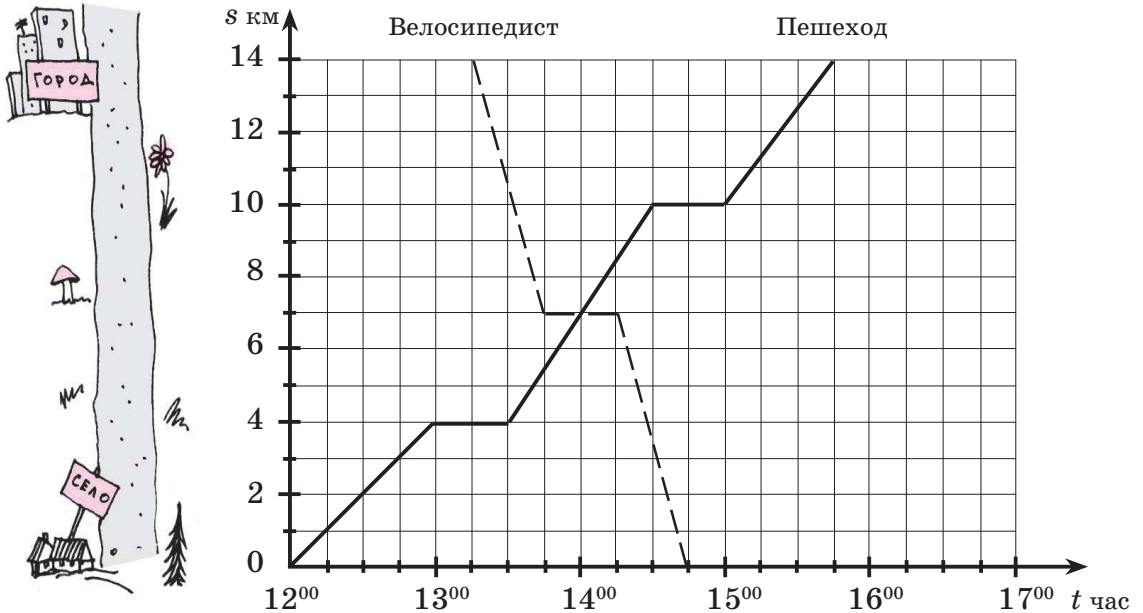
Найди значения выражений.

339 Отметь на числовом луче дроби $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{3}{12}, \frac{9}{12}$ ($e = 12$ клеток). Какие из этих дробей равны? Как связаны между собой числители и знаменатели равных дробей? Приведи пример дроби, равной $\frac{9}{12}$, но имеющей другой числитель и знаменатель.

340 Построй фигуру, последовательно соединив точки координатного угла:

$A_1(7; 8), A_2(5; 10), A_3(4; 10), A_4(3; 9), A_5(3; 8), A_6(4; 7), A_7(4; 6), A_8(2; 5),$
 $A_9(0; 5), A_{10}(3; 2), A_{11}(4; 2), A_{12}(4; 0), A_{13}(6; 0), A_{14}(6; 1), A_{15}(5; 1), A_{16}(5; 3),$
 $A_{17}(6; 4), A_{18}(6; 6), A_{19}(5; 8), A_1.$

341 Пользуясь графиком движения пешехода и велосипедиста, найди истинные высказывания. Из соответствующих им цифр составь наибольшее и наименьшее возможные натуральные числа (каждая цифра входит в запись числа один раз).



- 0** Пешеход вышел из села в город в 12 часов со скоростью 4 км/ч.
- 1** Велосипедист выехал из села в город в 13 ч 15 мин со скоростью 7 км/ч.
- 2** Велосипедист и пешеход сделали в пути по одной остановке.
- 3** Скорость движения велосипедиста после остановки не изменилась.
- 4** Скорость движения пешехода после первой остановки увеличилась на 2 км/ч.
- 5** В 15 ч 30 мин пешеход находился на расстоянии 12 км от города.
- 6** За время с 14 ч до 15 ч 30 мин пешеход прошёл 6 км.
- 7** Встреча пешехода и велосипедиста произошла в 14 ч на расстоянии 7 км от села.
- 8** Пешеход прибыл в город в 16 ч.
- 9** Велосипедист вернулся в село в 14 ч 15 мин.

342* Установи закономерность и, сохраняя её, продолжи ряд на два числа:

а) 9, 15, 27, 45, 69, ... в) 4, 8, 8, 11, 16, 14, 32, 17, ...

б) 342, 313, 284, 255, ... г) 3, 7, 16, 35, 74, 153, ...

343* Ткань во время стирки садится на $\frac{1}{16}$ часть по длине и на $\frac{1}{15}$ часть по ширине. Какой длины надо взять кусок ткани, чтобы после стирки иметь 378 м^2 , если до стирки ширина её была 90 см?

344* Если каждому из своих детей мама даст по 13 тетрадей, то у неё останется 8 тетрадей; если же она им даст по 15 тетрадей, то все тетради будут розданы. Сколько тетрадей было у мамы?

345* **Пифагор Самосский** (около 570 – 490 гг. до н. э.)

Поликрат (известный из баллады Шиллера тиран с острова Самос) однажды спросил на пиру у Пифагора, сколько у того учеников. «Охотно скажу тебе, о Поликрат, – отвечал Пифагор. – Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны вечной природы, седьмая часть упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь ещё к ним трёх юношей, из которых Теон превосходит прочих своими способностями. Столько учеников веду я к рождению вечной истины». Сколько учеников было у Пифагора?



Задачи для самопроверки.

346 Среди данных высказываний найди общие высказывания и высказывания о существовании. Из цифр, соответствующих общим высказываниям, составь все возможные трёхзначные числа (цифры в записи чисел не повторяются).

- 0** Некоторые натуральные числа являются делителями числа 36.
- 1** Любое натуральное число делится на себя и на единицу.
- 2** Можно найти два натуральных делителя числа 7.
- 3** Существует натуральное число, имеющее меньше двух делителей.
- 4** Делитель числа не всегда меньше самого числа.
- 5** Кратное числа не всегда больше самого числа.
- 6** Все числа, кратные десяти, оканчиваются нулем.
- 7** Некоторые числа, кратные четырём, оканчиваются цифрой 4.
- 8** Каждое натуральное число больше предыдущего на единицу.
- 9** Существует наименьшее натуральное число.

347 Приведи *контрпример* к утверждению: «Все натуральные решения неравенства $8 < x < 11$ кратны двум».

348 Докажи утверждения:

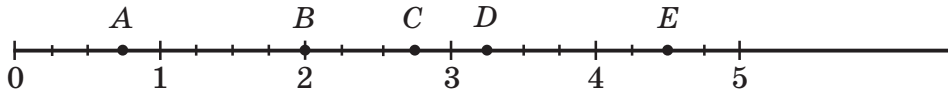
- 1) Существуют двузначные числа, имеющие 6 делителей.
- 2) Из всех прямоугольников с периметром 16 см наибольшую площадь имеет квадрат (считать, что длины сторон прямоугольников выражаются натуральными числами).
- 3) Если каждое слагаемое делится на 7, то и сумма делится на 7.

349 Истинными или ложными становятся следующие предложения при указанных значениях переменных x и y ?

- 1) $54x + 32y = 806$ ($x = 10$, $y = 8$);
- 2) $(15x - 9) : y \leq 17$ ($x = 4$, $y = 3$).

350 Выполни деление с остатком и сделай проверку: $918 : 45$.

351 Определи координаты точек A , B , C , D и E :



352 Сравни: 1) $\frac{5}{9}$ и $\frac{8}{9}$; 2) $\frac{4}{11}$ и $\frac{4}{39}$; 3) $\frac{3}{19}$ и $\frac{8}{5}$; 4) $3\frac{4}{7}$ и $4\frac{3}{7}$.

353 Реши уравнение:

- 1) $(120 - 7x) : 3 = 26$;
- 2) $(2\frac{7}{9} + y) - 3\frac{4}{9} = 1\frac{8}{9}$.

354 Задумано число. Если его увеличить на $7\frac{6}{23}$, то получится число, превышающее разность чисел $9\frac{10}{23}$ и $1\frac{17}{23}$ на $4\frac{2}{23}$. Найди это число.

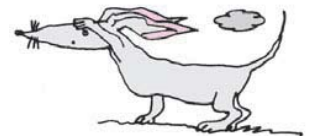
355 Ширина прямоугольного параллелепипеда равна 20 дм, что составляет $\frac{4}{5}$ его длины. Высота параллелепипеда составляет $\frac{2}{9}$ суммы его длины и ширины. Чему равен объём параллелепипеда?

356 Мама купила 6 чашек по цене 150 р. и чайник за 300 р. Через неделю магазин повысил цену чашки на 10%, а цену чайника снизил на 15%. Увеличилась или уменьшилась при этом стоимость маминой покупки и на сколько?

357 Построй прямоугольник $ABCD$ по координатам его вершин: $A(3; 2)$, $B(3; 6)$, $C(9; 6)$ и $D(9; 2)$. Проведи диагонали этого прямоугольника и найди координаты их точки пересечения.

358 Проверь истинность высказывания:

$$\frac{(826\ 826 : 826 + 205 \cdot 308) : 49 - 2350 : 235}{68 - (430 \cdot 80 - 138\ 600 : 45) : 870} \geq 40\frac{19}{32}.$$



Глава 2

Делимость натуральных чисел

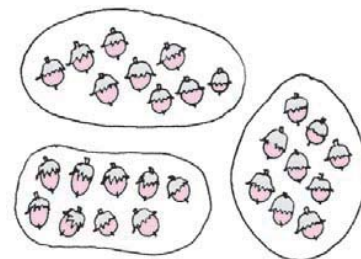
Во всей этой главе при обсуждении вопросов делимости рассматриваются только натуральные числа.

§ 1. Основные понятия

1. Делители и кратные.

Мы знаем, что, например, число 27 делится на 3. Но почему это утверждение верно?

На этот вопрос мы отвечали так: 27 предметов можно разложить на 3 равные группы по 9 предметов в каждой, и ничего не останется. Другими словами, для проверки этого утверждения надо указать «второй сомножитель» числа 3 – в данном случае 9, – такой, чтобы при умножении его на 3 получилось 27. Действительно, $9 \cdot 3 = 27$.



В то же время, 27 не делится на 4, потому что нельзя подобрать такой сомножитель c , чтобы выполнялось равенство $4c = 27$. Действительно, при $c = 6$ произведение $4c = 4 \cdot 6$ меньше 27, а при $c = 7$ произведение $4c = 4 \cdot 7$ больше 27.

Эти рассуждения иллюстрируют уже знакомое нам определение делимости:

Число a делится на число b , если существует такое число c , что выполняется равенство $a = bc$.

При этом число c называется **частным** от деления a на b , число a – **кратным** b , а число b – **делителем** a . Например, каждое из чисел 7, 11 и 13 является делителем числа 1001 – в этом можно убедиться, проведя деление «столбиком». В то же время 1001 – кратное каждого из этих чисел.

К

359 1) Может ли делитель числа быть больше самого этого числа? Почему?

2) Докажи, что любое число является делителем самого себя.

3) Какое число является делителем всех чисел?

4) Может ли у числа быть ровно 1 делитель, 2 делителя, 3 делителя, больше трёх делителей?

360

Докажи, что число 782 является делителем числа 43 792. Как об этом можно сказать иначе?

361

Как найти все делители данного числа? Можно ли упростить перебор, если вспомнить о парных делителях? Сколько делителей у чисел: а) 60; б) 136?

362 Запиши с помощью фигурных скобок множество делителей каждого из чисел: 6, 7, 12, 17, 32, 42, 81. Сколько делителей у каждого из них? Может ли у числа быть меньше двух делителей?

Образец ответа: $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$, 4 делителя.

363 Пользуясь результатами предыдущего задания, найди все общие делители для указанных чисел. Подчеркни их наибольший общий делитель.

а) 6 и 7; б) 6 и 12; в) 12 и 81; г) 6, 42 и 81.

Образец ответа: $D(10, 15) = \{1, \underline{5}\}$.

364 Поставь вместо звёздочки нужный знак в следующем предложении: «Если A – множество делителей числа n , B – множество делителей числа k , то $A * B$ – множество общих делителей чисел n и k ».

365 Найди наибольший общий делитель чисел методом перебора. Делители какого числа целесообразно находить для сокращения перебора? Сформулируй правило (алгоритм) перебора.

1) 7 и 420; 3) 1 и 3473; 5) 8, 12 и 42; 7) 33 и 77;
2) 7 и 12 345; 4) 8917 и 2; 6) 4, 36 и 84; 8) 555 и 999.

Образец ответа: НОД (7, 16, 25) = 1.

366 Среди чисел a , b , c и d найди, не вычисляя, числа, делителями которых являются 2, 5, 10. Проверь с помощью вычислений.

$a = 3 \cdot 5 \cdot 7$ $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$ $c = 5 \cdot 5$ $d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$

367 1) Может ли кратное числа быть меньше самого этого числа?
2) Докажи, что любое число кратно самому себе.

368 Назови несколько кратных для каждого из чисел: 2, 7, 39, a . Как можно последовательно выписать все кратные данного числа? Может ли число иметь более 1000 кратных?

369 Запиши с помощью фигурных скобок множество кратных для каждого из чисел: 4, 5, 14, 16, 21.

Образец ответа: $K(9) = \{9, 18, 27, 36, \dots\}$.

370 Пользуясь результатами предыдущего задания, запиши множество общих кратных для чисел: а) 4 и 5; б) 4 и 16; в) 14 и 21. Подчеркни наименьшее общее кратное.

Образец ответа: $K(8, 12) = \{\underline{24}, 48, 72, 96, \dots\}$.

371 Найди наименьшее общее кратное чисел с помощью перебора. Кратные какого числа целесообразно перебирать?

- 1) 1 и 3473; 3) 5, 15 и 25; 5) 3, 10 и 18; 7) 7 и 12 345;
 2) 8917 и 2; 4) 6, 8 и 12; 6) 7, 8 и 14; 8) 36 и 96.

Образец ответа: НОК (9, 12, 18) = 36.

372 Определи, не вычисляя, является ли число $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ кратным для чисел a , b , c и d . Проверь с помощью вычислений.

$a = 2 \cdot 3$

$b = 3 \cdot 3$

$c = 2 \cdot 5$

$d = 7$

373 Из букв, соответствующих истинным высказываниям, составь математический термин:

Р 8 – делитель 68

Н 70 – кратное 5

А 15 – делитель 3

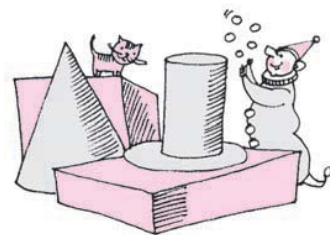
Т 4 – кратное 12

К 24 – делитель 72

С 56 – кратное 7

У 1 – делитель a

О x – кратное x



374 Выбери из чисел 5, 7, 21, 25, 28, 35, 42, 56, 75, 80 те, которые:

- а) кратны 5; в) являются делителями 100; д) кратны 4 и 7;
 б) не кратны 1; г) не являются делителями 42; е) кратны 4 или 7.

375 Число называется «*совершенным*», если оно равно сумме всех своих делителей, не считая самого числа. Являются ли числа 6, 28, 496 совершенными?

376 Два числа называются «*дружественными*», если каждое из них равно сумме делителей другого числа, не считая его самого. Являются ли числа 220 и 284 дружественными?

377 Заполнив несколько строк в таблице, найди закономерность, которой подчиняются числа, стоящие в трёх последних столбцах каждой строки. Затем заполни таблицу до конца. Можно ли утверждать, что данная закономерность справедлива для всех пар чисел? Почему?

Числа	Произведение	НОД	НОК
4 и 6	24	2	12
6 и 9			
5 и 7			
35 и 45			
16 и 18			
735 и 845	735 · 845	5	

378 Какая последняя цифра может быть у числа, кратного:

а) 10; б) 5; в) 2; г) 3; д) 7; е) 11; ж) 561; з) 3282?

379 Какое число имеет больше делителей – 7 или 14, 6 или 30, 12 или 36, 8 или 40, 111 или 111 111 111? Сделай вывод.

380 Нарисуй на одном рисунке диаграмму Эйлера–Венна для множеств:

1) $D(18)$ и $D(36)$; 2) $D(5)$ и $D(487)$; 3) $D(60)$, $D(12)$, $D(36)$ и $D(180)$.



381 Как связаны между собой два числа и рисунок в первой строке таблицы? Проверь свою гипотезу для второй строки. Пользуясь установленной закономерностью, найди недостающие числа и рисунки.

<p>а)</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>180</td> <td></td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>64</td> <td></td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>480</td> <td></td> <td>?</td> </tr> <tr> <td>?</td> <td></td> <td>75</td> </tr> <tr> <td>72</td> <td></td> <td>12</td> </tr> </table>	180		60	64		16	480		?	?		75	72		12	<p>б)</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>27</td> <td></td> <td>81</td> </tr> <tr> <td>56</td> <td></td> <td>392</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td></td> <td>?</td> </tr> <tr> <td>?</td> <td></td> <td>8400</td> </tr> <tr> <td>45</td> <td></td> <td>405</td> </tr> </table>	27		81	56		392	9		?	?		8400	45		405	<p>в)</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>76</td> <td></td> <td>84</td> </tr> <tr> <td>121</td> <td></td> <td>136</td> </tr> <tr> <td>48</td> <td></td> <td>?</td> </tr> <tr> <td>?</td> <td></td> <td>117</td> </tr> <tr> <td>78</td> <td></td> <td>102</td> </tr> </table>	76		84	121		136	48		?	?		117	78		102
180		60																																													
64		16																																													
480		?																																													
?		75																																													
72		12																																													
27		81																																													
56		392																																													
9		?																																													
?		8400																																													
45		405																																													
76		84																																													
121		136																																													
48		?																																													
?		117																																													
78		102																																													

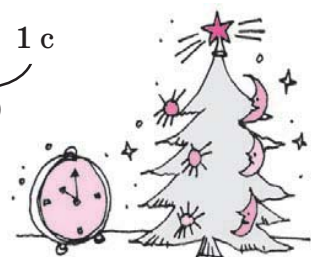
382 Выполни действия и запиши заданную программу действий в виде выражения:

- | | | | |
|----------------|-----------------|---------------|-----------------|
| а) ① $68 - 12$ | б) ① $350 : 5$ | в) ① $60 - 9$ | г) ① $540 : 90$ |
| ② $56 : 7$ | ② $40 \cdot 70$ | ② $9 + 8$ | ② $31 - 6$ |
| ③ $8 + 24$ | ③ $3000 - 2800$ | ③ $51 : 17$ | ③ $1600 : 400$ |
| | | ④ $102 - 3$ | ④ $25 \cdot 4$ |

383 Расставь скобки так, чтобы получилось верное равенство:

- | | |
|---|---|
| 1) $5 \cdot 38 - 70 : 8 - 6 = 60$; | 3) $30 - 49 : 42 : 6 \cdot 8 = 184$; |
| 2) $630 : 7 : 2 \cdot 9 \cdot 25 = 125$; | 4) $180 : 300 - 30 \cdot 9 + 199 = 205$. |

- 384** Проследи по цепочке таблицу мер времени и расскажи о соотношениях между ними:



Сколько суток в одном високосном году?
Сколько секунд в одном часе?
Сколько минут в одних сутках?

- 385** а) Какую часть года составляет 1 мес.? 2 мес.? 3 мес.? 4 мес.? 6 мес.? Отметь полученные дроби на числовом луче. Какими ещё дробями можно выразить указанные части года?
б) Какую часть составляет 1 с от 1 мин? 4 мин от 1 ч? 1 ч от 1 суток? 5 ч от 2 суток?

- 386** Вырази:

а) в секундах: $\frac{1}{3}$ мин, $\frac{5}{12}$ мин, $\frac{1}{2}$ ч, $1\frac{2}{3}$ ч, 8 мин 6 с, 2 ч 43 мин;

б) в минутах: $\frac{1}{4}$ ч, $2\frac{1}{2}$ ч, 4 ч 5 мин, 6 ч 48 мин, 3360 с, 1 сут. 4 ч 20 мин.

- 387** В таблице приведено расписание поездов, идущих из Москвы в Санкт-Петербург:

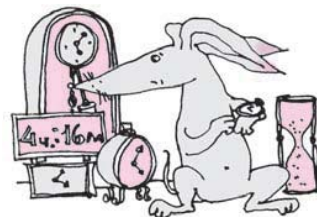
Город \ № поезда	№ 2	№ 10	№ 20	№ 160	№ 652
Москва	23 ⁵⁵	22 ¹⁵	1 ⁰⁰	17 ¹⁹	2 ³⁰
Тверь	–	–	3 ⁰⁷	18 ⁴⁶	6 ³²
Вышний Волочек	–	–	–	–	7 ⁴⁰
Бологое	3 ⁴⁵	2 ²¹	5 ⁰⁵	20 ¹⁶	11 ⁴⁰
С.-Петербург	8 ²⁵	6 ⁴⁰	9 ³⁸	23 ²⁰	14 ³⁵

- 1) Почему в расписании есть пустые клетки?
- 2) Какой поезд отправляется из Москвы в 23 ч 55 мин и когда он прибывает в Санкт-Петербург?
- 3) На каком поезде следует ехать, чтобы прибыть в Санкт-Петербург максимально близко к 9 ч утра?
- 4) Сколько времени затрачивает каждый из поездов, приведённых в расписании, на весь путь от Москвы до Санкт-Петербурга?
- 5) На сколько меньше времени затрачивает на путь от Твери до Бологого 160-й поезд, чем 652-й?

388 Самолёт летит из Москвы в Ижевск 1 ч 55 мин. В котором часу он вылетает из Москвы, если прибывает в Ижевск в 18 ч 15 мин по местному времени, а из-за разницы в часовых поясах местное время опережает московское на 1 час?

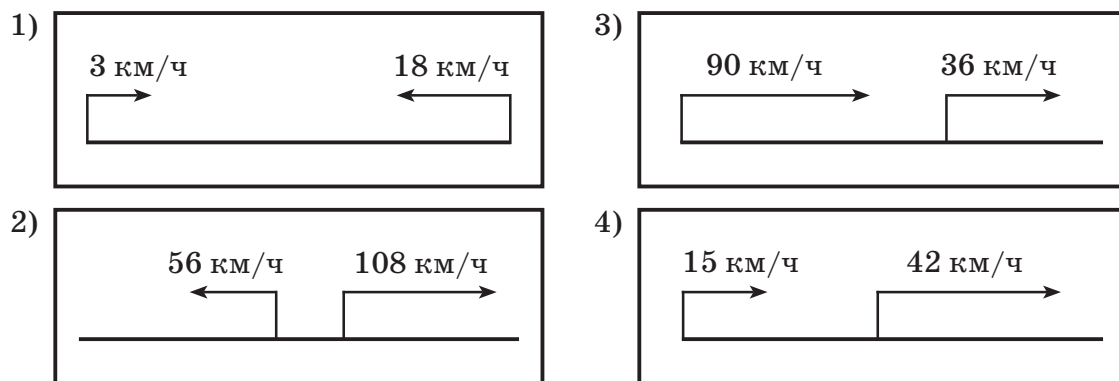
389 Выполни действия:

- а) $12 \text{ мин } 54 \text{ с} + 4 \text{ мин } 32 \text{ с} - 11 \text{ мин } 30 \text{ с}$;
 б) $5 \text{ ч } 18 \text{ мин} - 2 \text{ ч } 45 \text{ мин} + 6 \text{ ч } 27 \text{ мин}$;
 в) $8 \text{ мин } 34 \text{ с} \cdot 9$; д) $23 \text{ мин } 28 \text{ с} : 4$;
 г) $4 \text{ ч } 16 \text{ мин} \cdot 5$; е) $7 \text{ сут. } 2 \text{ ч} : 17$.



390 Три года назад брату было 10 лет, а сестре – в 5 раз меньше. Во сколько раз брат был старше сестры год назад? Во сколько раз он будет старше сестры через 3 года?

391 На рисунке показаны различные случаи движения объектов:



Найди для каждого случая скорость сближения или скорость удаления. На сколько километров изменится расстояние между объектами через 3 ч после начала движения, если встречи за это время не произойдёт?

392 Скорость пешехода равна 6 км/ч, что составляет $\frac{3}{11}$ скорости велосипедиста.

С какой скоростью они сближаются, если движутся: а) навстречу друг другу; б) велосипедист догоняет пешехода?

393 Скорость пассажирского поезда 75 км/ч, а скорость товарного поезда составляет $\frac{13}{15}$ скорости пассажирского. С какой скоростью они удаляются, если:

а) движутся в противоположных направлениях; б) товарный поезд идет вслед за пассажирским?

394 По одной дороге скачут два всадника. Первый всадник скачет со скоростью a км/ч, а скорость другого всадника составляет 85% скорости первого. С какой скоростью изменяется расстояние между ними, если они движутся: 1) навстречу друг другу; 2) в противоположных направлениях; 3) вдогонку; 4) с отставанием?

- 395** а) Медиками установлено, что для нормального развития ребёнок, которому T лет (T меньше 18), должен спать в сутки t часов, где t определяется по формуле $t = 17 - \frac{T}{2}$. Сколько времени должен спать в сутки ребенок в возрасте 1 года, 2 лет, 4 лет, 7 лет? Заполни таблицу:

T	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
t											



- б) Построй линейную диаграмму, показывающую изменение продолжительности сна с 8 до 18 лет. Сравни рекомендации медиков со своим режимом дня.

- 396** Проверь истинность высказывания:

$$7\frac{1}{43} \leq \frac{[(7777 : 77 + 157) : 86 + 216] : 219 \cdot 306}{(734 \cdot 208 - 128 - 580 \cdot 40) : (818 \cdot 176 : 272)} < 7\frac{5}{43}.$$

- 397** 1) Запиши множество делителей числа 56, располагая делители в порядке возрастания.
 2) Найди с помощью перебора НОД (12, 32, 48).
 3) Укажи наибольший общий делитель для чисел $2 \cdot 7 \cdot 11$ и $7 \cdot 13$.

- 398** 1) Запиши последовательно в порядке возрастания, начиная с наименьшего, десять кратных числа 15.
 2) Найди с помощью перебора НОК (4, 6, 15).
 3) Укажи наименьшее общее кратное для чисел $5 \cdot 7$ и $2 \cdot 7 \cdot 11$.

- 399** Сколько делителей числа 333 333 333 333 ты сможешь найти?

- 400** Найди четыре различные цифры, которые могут стоять в разряде десятков у чисел, кратных 25.

- 401** а) Что больше: $\frac{8}{9}$ от 4 ч 12 мин или 28% от 8 ч 20 мин?

- б) Что меньше: число, 15% которого составляют 3 мин 45 с, или число, $\frac{3}{5}$ которого составляют 15 мин?

- 402** В один из дней теннисного турнира на одном корте были сыграны 3 игры, которые длились соответственно 1 ч 48 мин, 1 ч 56 мин и 2 ч 8 мин. В котором часу закончилась последняя игра, если первая игра началась в 10 ч 15 мин, а перерывы между играми длились по 40 мин?

- 403** Серёжа и Валера бегут по одной тропинке. Скорость Сережи 120 м/мин, а скорость Валеры на 4 м/мин меньше. С какой скоростью изменяется расстояние между ними, если они бегут: 1) навстречу друг другу; 2) в противоположных направлениях; 3) вдогонку; 4) с отставанием?

404 На ткацкой фабрике одна работница обслуживает 5 станков, каждый из которых производит 2 м ткани в минуту, а вторая работница – 4 станка, производящих по 3 м ткани в минуту. Однажды по техническим причинам у второй работницы один из станков был остановлен на 1 ч 30 мин. Какая из работниц выпустила в этот день больше ткани и на сколько, если на фабрике 7-часовой рабочий день?

405 Реши уравнение:

а) $900 - (14x + 8) : 20 = 894$;

б) $500 : (3y - 7) + 95 = 120$.

406 Составь выражение по следующей программе и найди его значение:

1. Разделить 2 310 000 на 75.

2. 10 000 уменьшить на 994.

3. Найти произведение результатов действий 1 и 2.

4. Результат действия 3 уменьшить в 2640 раз.

с **407*** В семье шестеро детей, причём возраст каждого ребенка в годах выражается числом, делящимся только на само себя и на единицу. Пятеро из них соответственно на 2, 6, 8, 12 и 14 лет старше самого младшего. Сколько лет младшему?

408* **Задача-шутка**

Найди дробь, у которой числитель меньше знаменателя и которая не изменится, если её запись перевернуть «вверх ногами».

409* Когда спросили у пастуха, сколько овец в отаре, то он ответил: «60 овец пьют воду, а остальные $\frac{2}{3}$ всех овец пасутся». Сколько овец в отаре?

2. Простые и составные числа.

Всякое натуральное число делится само на себя и на 1 – это следует из равенства $a = a \cdot 1$.

Натуральные числа, которые имеют ровно два различных делителя – само себя и 1, – называются **простыми**. Таковы, например, числа 2, 3, 5, 7, 89.

Натуральные числа, которые имеют более двух делителей, называются **составными**. Составным является, например, число 6: оно имеет 4 делителя – 1, 2, 3 и 6.

Число 1 имеет единственный делитель. Оно не считается ни простым, ни составным.

Таким образом, множество натуральных чисел разбивается на 3 части:

1) *число 1* (имеет единственный делитель);

2) *простые числа* (имеют в точности 2 делителя);

3) *составные числа* (имеют больше 2 делителей).

Отметим, что утверждение о том, что некоторое число является составным, по сути есть утверждение о существовании: число является составным, если оно имеет хотя бы один делитель, не равный ни ему самому, ни 1.

Другими словами, число является составным, если его можно разложить хотя бы на два множителя, *ни один из которых не равен 1*. Например, $21 = 3 \cdot 7$.

В разложении на два множителя простого числа, напротив, один из множителей всегда равен 1, а другой – самому числу.

Интерес математиков к простым числам огромен, начиная с древнейших времен. Само понятие простого числа было введено древнегреческим ученым Пифагором ещё в VI веке до н. э. А в III веке до н. э. Евклид доказал, что простых чисел бесконечно много (то есть за каждым простым числом есть ещё большее простое число).

Другой греческий математик того же времени, Эратосфен, придумал остроумный способ составления списка простых чисел, который иногда используется в практических вычислениях и сегодня. Он записывал все числа от 1 до какого-либо числа, вычёркивал из него 1, а затем последовательно вычёркивал кратные 2, 3, 5, 7 и т. д. Каждый раз вычёркивались кратные первого «уцелевшего» числа (кроме, разумеется, самого этого числа):

2	3	4	5	6	7	8	9	10	
11	12	13	14	15	16	18	19	20	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40



Так как греки делали записи на покрытых воском табличках, а числа не вычёркивали, а выкалывали иглой, то таблица в конце вычислений напоминала решето. С тех пор метод Эратосфена называют «решетом Эратосфена»: в этом решете простые числа «отсеиваются» от остальных.

К

410 1) Известно, что число 809 простое. Делится ли оно на 19?

2) Каким числом – простым или составным – является произведение чисел $809 \cdot 809$?

411

а) Есть ли чётные простые числа? Сколько их? Почему?

б) Есть ли простые числа, оканчивающиеся цифрой 0? Какими цифрами не может оканчиваться многозначное простое число?

в) Какими цифрами может оканчиваться многозначное составное число?

412

Докажи, что приведенные ниже числа являются составными:

а) 8, 28, 111;

б) 77 777, 1111, 242 242, 373 737, 111 111 111;

в) 1111...1 (1996 цифр);

г) 1111...1 (1995 цифр).



413

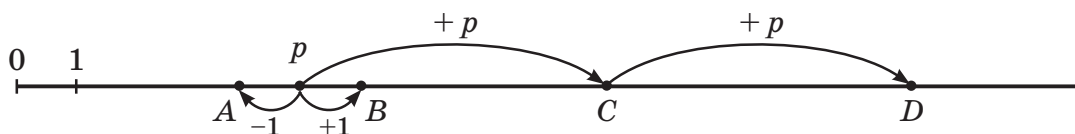
Найди множество простых решений неравенства:

1) $x < 10$; 2) $5 < y \leq 19$; 3) $21 \leq z < 41$; 4) $56 \leq t \leq 81$.

414

Используя таблицу простых чисел, определи, являются ли простыми числа: 59, 83, 91, 97, 127, 379, 511, 697, 761, 803, 851, 991, 997?

415 Могут ли быть простыми числами координаты точек A , B , C и D , если p – простое число?



416 Выясни истинность утверждений:

- 1) В множестве $\{7, 11, 97, 289, 21\ 005\}$ все числа простые.
- 2) В множестве $\{2, 5, 19, 41, 57, 84\ 291\}$ имеются составные числа.
- 3) Все нечётные числа являются простыми числами.
- 4) Существуют числа, произведение которых является простым числом.
- 5) Существуют простые числа, произведение которых является простым числом.

417 Всеми возможными способами представь в виде произведения двух множителей числа 5, 8, 9, 11, 12, 17, 28 (порядок множителей не принимается во внимание). Какие из данных чисел являются простыми, а какие – составными?

418 При каких значениях x число $11x$ является простым?

419 a и b – простые числа. Перечисли делители чисел: 1) $a \cdot b$; 2) $a \cdot a \cdot b$; 3) $a \cdot a \cdot b \cdot b$.

420 Можно ли найти 4 различных простых числа, чтобы произведение двух из них равнялось произведению двух других?

421 Ученики пятого класса купили 203 учебника. Каждый пятиклассник купил одинаковое количество книг. Сколько в классе учеников и сколько учебников купил каждый?

π **422** Запиши множество делителей каждого числа и найди наибольший общий делитель:

- 1) 16 и 56; 2) 34 и 68; 3) 18 и 48; 4) 29 и 45.

423 Найди наибольший общий делитель данных чисел *методом перебора*:

- 1) 5, 30 и 46; 2) 4, 22 и 78; 3) 10, 23 и 58; 4) 6, 15 и 36.

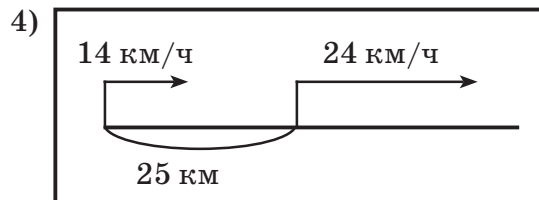
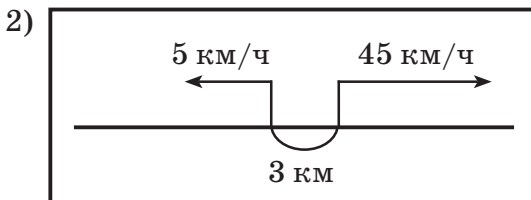
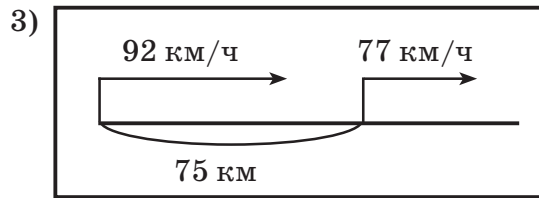
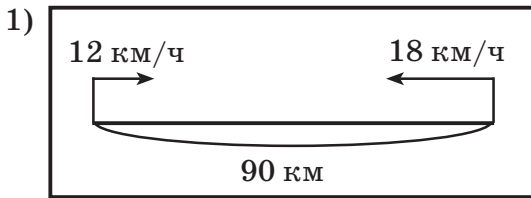
424 Запиши множество кратных каждого числа и найди наименьшее общее кратное:

- 1) 12 и 20; 2) 36 и 90; 3) 45 и 75; 4) 52 и 39.

425 Найди наименьшее общее кратное чисел *методом перебора*:

- 1) 3, 4 и 18; 2) 10, 16 и 40; 3) 6, 9 и 24; 4) 12, 15 и 20.

426 По рисунку найди расстояние между движущимися объектами через 2 ч после начала движения:



427 Акула плывет со скоростью b м/мин, что составляет 78% скорости рыб-меч. Сейчас между ними c м. Какое расстояние будет между ними через 9 мин, если они плывут: 1) навстречу друг другу; 2) в противоположных направлениях; 3) вдогонку; 4) с отставанием? (Встречи за это время не произойдёт.)

428 Два велосипедиста едут по одной дороге. Сейчас расстояние между ними 54 км. Скорость одного велосипедиста 12 км/ч, что составляет $\frac{3}{4}$ скорости второго велосипедиста. Какое расстояние будет между ними через 2 ч? (Рассмотреть все случаи.)

429 Таня идёт в школу со скоростью 80 м/мин. Сейчас расстояние до школы равно 720 м. Каким оно станет через 4 мин? Запиши формулу, выражающую зависимость переменного расстояния до школы d м от времени движения t мин. Составь таблицу соответственных значений t и d ($0 \leq t \leq 9$, $t \in N$).

430 В таблице приведены соответствующие значения переменных x и y . Построй формулу, выражающую зависимость y от x .

1)

x	1	2	3	4	5
y	8	16	24	32	40

3)

x	1	2	3	4	5
y	9	19	29	39	49

2)

x	5	7	9	11	13
y	14	16	18	20	22

4)

x	5	7	9	11	13
y	25	49	81	121	169

431 Расставь скобки в выражении всеми возможными способами и найди значения полученных выражений: $12\frac{2}{7} - 4\frac{4}{7} - 3\frac{5}{7} + 2\frac{3}{7}$.

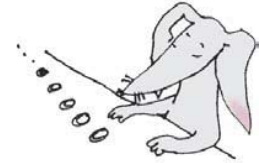
432 Построй математическую модель задачи и найди её решение *методом проб и ошибок*.

Одна из сторон прямоугольника на 20 см больше другой. Если большую сторону уменьшить в 3 раза, а меньшую сторону увеличить в 2 раза, то площадь нового прямоугольника будет равна 200 см^2 . Найди стороны данного прямоугольника.

433 Найди значение выражения:

1) $7x - 3x - x + 5x$, если $x = 40, 96, 28\ 000$;

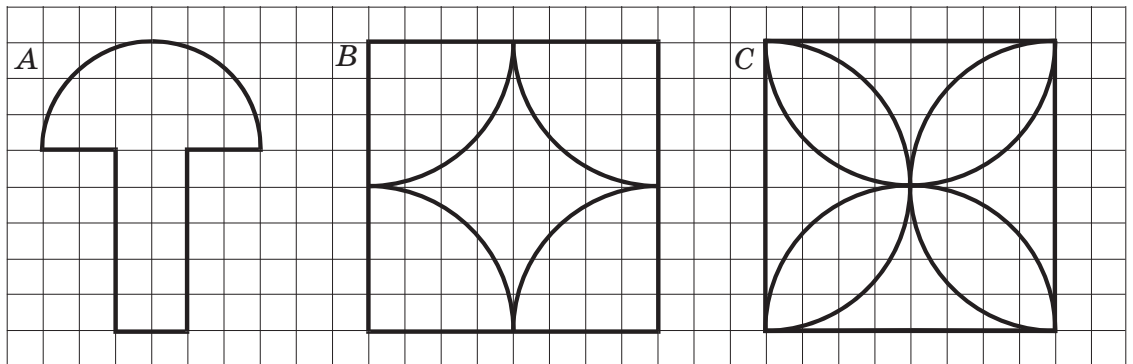
2) $y + 5y - 4y + 2y$, если $y = 63, 900, 50\ 505$.



Сколько действий в каждом примере тебе для этого понадобилось?

434 В трёх коробках 80 карандашей. В первой коробке в 4 раза меньше карандашей, чем во второй, и в 5 раз меньше, чем в третьей. Сколько карандашей в каждой коробке?

435 Построй данные фигуры на клетчатой бумаге с помощью циркуля и линейки, увеличив их размеры в 2 раза.



436 Найди значение выражения

$$[28\ 695\ 680 + (796 \cdot 5028 + 172 \cdot 796 + 4800 \cdot 796) : 200 - 888] : 128 \cdot 70\ 080.$$

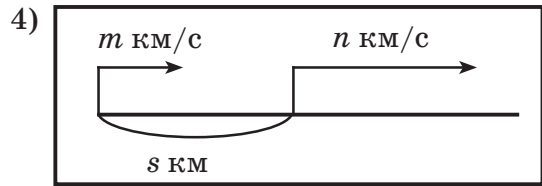
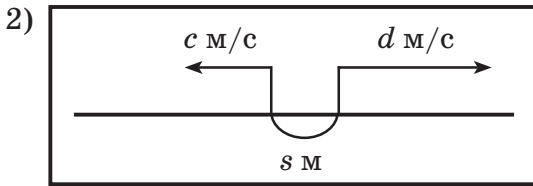
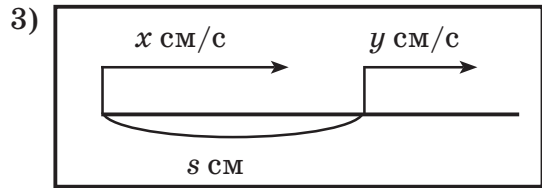
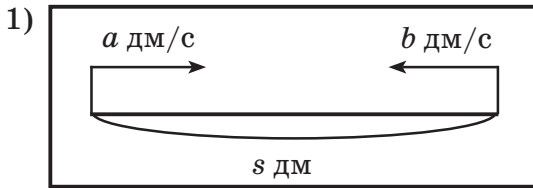
437 1) По таблице простых чисел подсчитай, сколько простых чисел в каждой из первых десяти сотен. Какую закономерность в расположении простых чисел ты замечаешь?

2) Два простых числа, разность которых равна 2, называют *близнецами*. Найди в таблице все пары чисел-близнецов. Сколько таких пар среди первых 500 чисел и среди чисел от 500 до 1000? Какие из них самые большие? Ученые до сих пор не знают, есть ли самая большая пара чисел-близнецов.

438 Запиши множество делителей числа 56 и выбери из него подмножество A простых делителей.

439 Запиши все двузначные числа, которые представляются в виде произведения двух простых множителей, один из которых равен: а) 11; б) 13; в) 17; г) 19; д) 23; е) 29.

440 По рисункам найди расстояние между движущимися объектами через 3 с после начала движения, если встречи за это время не произойдёт:



441 Расстояние между двумя теплоходами в 12 ч дня было равно 455 км. Скорость первого теплохода 49 км/ч, а скорость второго теплохода составляет $\frac{6}{7}$ скорости первого. Какое расстояние будет между теплоходами в 15 ч, если они плывут: 1) навстречу друг другу; 2) в противоположных направлениях; 3) вдогонку; 4) с отставанием?

442 Составь программу действий и вычисли:

а) $[450 : 5 : (3 \cdot 6) + 35] \cdot 7 - 6 \cdot 40 + (540 : 60 + 7) \cdot (63 : 9)$;

б) $[500 - (3500 : 700 \cdot 80 - 40 \cdot 9) \cdot (64 : 8)] : 9 - (72 : 6) : (81 : 27)$.

443 Найди закономерность и, сохраняя её, заполни пустые клетки:

а)

$1\frac{7}{15}$	$4\frac{11}{15}$?
?	$8\frac{2}{15}$	$11\frac{6}{15}$

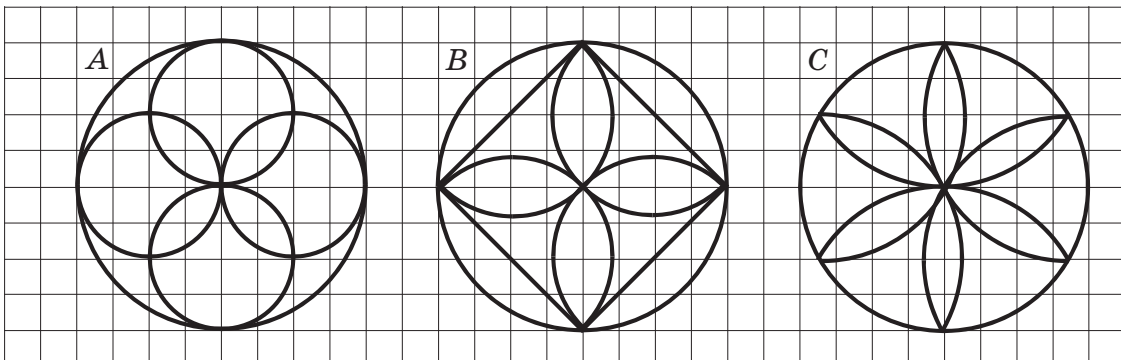
б)

$5\frac{1}{9}$	$2\frac{7}{9}$?
$8\frac{5}{9}$?	$3\frac{8}{9}$

в)

$3\frac{1}{7}$	2	$6\frac{2}{7}$
$5\frac{2}{19}$?	$15\frac{6}{19}$

444 Построй данные фигуры на клетчатой бумаге с помощью циркуля и линейки, увеличив их размер в 2 раза. Раскрась получившиеся узоры. Придумай и нарисуй свои узоры из геометрических фигур.



- с** **445*** Перемножив четыре простых последовательных числа, Нина получила в результате число, цифра единиц которого 0. Какие числа она перемножила и какой получила результат?
- 446*** Чтобы войти в замок Арифмос, надо набрать шифр: записать последовательно в возрастающем порядке по одному разу 10 первых простых чисел натурального ряда. В полученном многозначном числе, не переставляя цифры, вычеркнуть половину цифр так, чтобы оставшиеся выражали: а) наименьшее возможное число; б) наибольшее. Какие это числа?
- 447*** Продолжи ряд на два числа, сохраняя закономерность: 4, 7, 12, 21, 38, ...

§ 2. Основные свойства делимости натуральных чисел

1. Делимость произведения.

Задачи, связанные с делимостью натуральных чисел, очень разнообразны. Для их решения полезно знать некоторые общие свойства делимости, которые помогают существенно упростить вычисления.

Задача. Делится ли произведение $6851 \cdot 999$ на 3?

Ясно, что 999 делится на 3, значит,

$$6851 \cdot 999 = 6851 \cdot (3 \cdot 333) = 3 \cdot (6851 \cdot 333),$$

то есть $6851 \cdot 999$ делится на 3 – частное равно $6851 \cdot 333$. Перемножать числа 6851 и 333 здесь не нужно, поскольку мы уже указали частное, а определять его числовое значение в условии данной задачи не требуется.

Этот пример иллюстрирует общее утверждение, общее свойство делимости натуральных чисел.

Свойство 1. Если одно из двух чисел делится на некоторое число, то и произведение данных чисел делится на это число.

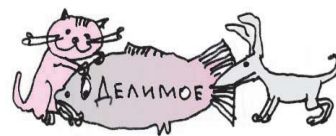
Это свойство – утверждение типа «все»: оно выполняется для любых натуральных чисел. Чтобы доказать его «по всем правилам», следует обозначить буквами числа, о которых идет речь в условии.

В данном свойстве действуют три «персонажа»: два числа – сомножители и некоторое третье число. Первые два числа обозначим буквами a и b , а третье число – буквой c .

Одно из чисел a и b , по условию, делится на c . Пусть, например, b делится на c . Это означает, что существует k такое, что $b = ck$. Тогда

$$ab = a(ck) = c(ak),$$

то есть ab делится на c , в частном получается число ak .



Свойство 2. Если первое число делится на второе, а второе делится на третье, то и первое число делится на третье.

Обозначим первое, второе и третье числа буквами a , b и c . По условию a делится на b , то есть $a = bn$, где n – некоторое натуральное число. В полученном произведении множитель b делится на c . Значит, по свойству 1, на c делится и все произведение – число a , что и требовалось доказать.

К

448 Не вычисляя произведения, установи, делится ли оно на данное число.

- | | |
|---------------------------|---|
| 1) $508 \cdot 12$ на 3; | 4) $45 \cdot 26 \cdot 36$ на 15; |
| 2) $85 \cdot 3719$ на 5; | 5) $210 \cdot 29$ на 3 и на 29; |
| 3) $2510 \cdot 74$ на 37; | 6) $3800 \cdot 44 \cdot 18$ на 11, 100 и 9. |

449 Подбери три значения x так, чтобы произведение:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $3x$ делилось на 5; | 3) $9x$ делилось на 6; |
| 2) $12x$ делилось на 7; | 4) $8x$ делилось на 14. |

450 Докажи или опровергни утверждение:

- 1) Если число делится на произведение двух чисел, то оно делится и на каждое из этих чисел.
- 2) Если число делится на два других числа, то оно делится и на их произведение.
- 3) Если произведение двух чисел делится на данное число, то и каждый множитель делится на это число.

451 Какие делители произведения $3 \cdot 25 \cdot 62$ ты можешь назвать?

452 Как можно делить произведение на число? Раздели на 9 произведение:

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| а) $28 \cdot 9 \cdot 35$; | в) $76 \cdot 512 \cdot 360$; | д) $4500 \cdot 7 \cdot 398$; |
| б) $18 \cdot 752 \cdot 800$; | г) $155 \cdot 810 \cdot 34$; | е) $83 \cdot 63\,000 \cdot 98$. |

453 Найди значение частного:

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| 1) $(12abc) : 4$; | 4) $(45xyz) : 9$; | 7) $(270mnkt) : 3$; |
| 2) $(12abc) : 12$; | 5) $(45xyz) : 45$; | 8) $(270mnkt) : 270$; |
| 3) $(12abc) : b, b \neq 0$; | 6) $(45xyz) : x, x \neq 0$; | 9) $(270mnkt) : k, k \neq 0$. |

П

454 Для чисел, больших 3, определи, каким числом – простым или составным – является:

- а) число, следующее за простым числом;
- б) число, следующее за составным числом;
- в) число, предшествующее простому числу;
- г) число, предшествующее составному числу;
- д) сумма двух простых чисел;
- е) сумма двух составных чисел.



455 Найди НОД и НОК чисел 50 и 8. Какими способами можно это сделать?

456 Укажи наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное для чисел, представленных в виде произведения:

1) $2 \cdot 5 \cdot 7$ и $2 \cdot 7 \cdot 13$;

2) $2 \cdot 11$ и $5 \cdot 23$.

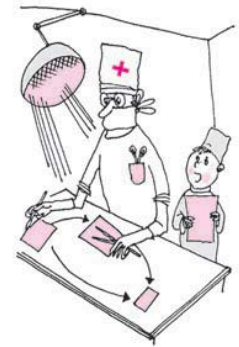
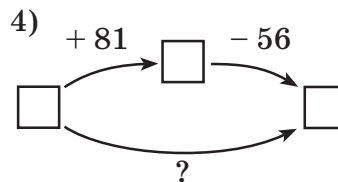
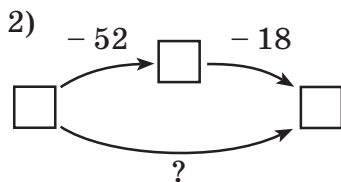
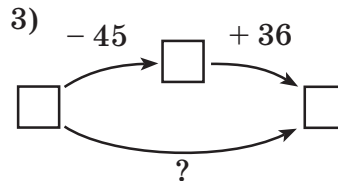
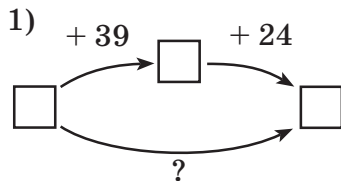
457 Найди значения сумм. Из соответствующих им букв составь фамилию известного русского композитора.

$2 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10$	203 080 А	23 080 К	20 380 Д
$7 \cdot 100\,000 + 5 \cdot 1000 + 4$	70 504 Б	705 004 Р	750 004 О
$9 \cdot 1\,000\,000 + 1 \cdot 10\,000 + 6 \cdot 100$	9 010 600 И	916 000 Л	9 016 000 Ч
$8 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 2 \cdot 10 + 2$	80 522 Б	85 022 Н	805 202 Ж
$1 \cdot 100\,000 + 7 \cdot 10 + 3$	10 703 У	10 073 М	100 073 Ш
$2 \cdot 100\,000 + 6 \cdot 100 + 4 \cdot 10$	200 064 В	200 640 Е	20 640 Г

458 Представь данные числа в виде суммы разрядных слагаемых:

а) 35 702; б) 800 410; в) 2 902 009; г) 32 540 206; д) 914 000 358.

459 Найди неизвестную операцию:



460 Два муравья отправились одновременно из одного муравейника за сосновыми иглами. Один муравей ползёт со скоростью 3 см/с, а другой – со скоростью 5 см/с. Какое расстояние будет между ними через 8 с, если: 1) они оба ползут на север; 2) один муравей ползёт на север, а другой – на юг?

461 По дну водоёма ползут два рака со скоростью a дм/мин и b дм/мин. Сейчас между ними c дм. Какое расстояние будет между ними через 7 мин, если они ползут: 1) в противоположных направлениях; 2) навстречу друг другу (встречи за это время не произойдет)?

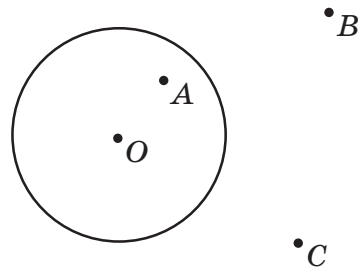
462 Воробей гонится за стрекозой. Сейчас между ними s м. Скорость воробья x м/мин, а скорость стрекозы y м/мин. Какое расстояние будет между ними через 4 мин, если: 1) $x > y$; 2) $x < y$?

463 По данному выражению составь задачу на одновременное движение двух объектов и нарисуй схему. Произойдёт ли встреча? Если да, то через сколько времени после начала движения она произойдёт?

- 1) $27 - (6 + 3) \cdot 2$; 3) $27 - (6 - 3) \cdot 2$;
2) $27 + (6 + 3) \cdot 2$; 4) $27 + (6 - 3) \cdot 2$.

464 По рисунку определи число общих точек окружности со следующими фигурами:

- 1) прямыми AO , AC и CB ;
2) отрезками AO , AC и CB ;
3) лучами AO и OA , AC и CA , BC и CB .



465 Начерти окружность с центром в точке O и радиусом 4 см 5 мм. Проведи прямую, пересекающую окружность в точках A и B . На каком расстоянии от центра окружности находятся точки A и B ?

466 Начерти отрезок MK , равный 6 см. Проведи окружность с центром M и радиусом 4 см, а затем другую окружность – с центром K и радиусом 5 см. Обозначь точки пересечения буквами A и B .

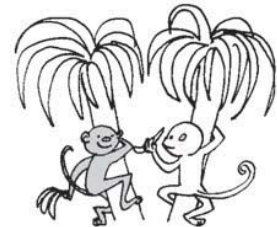
- 1) Чему равна длина отрезков AM , AK , BM и BK ?
2) Измерь транспортиром углы треугольников AMK и BMK . Что ты замечаешь? Как это можно объяснить?

467 Начерти отрезок CD , равный 4 см, и построй все точки, которые:

- 1) удалены от точек C и D на расстояние 3 см;
2) удалены от точек C и D на расстояние 2 см;
3) находятся на расстоянии 2 см 5 мм от точки C и на расстоянии 3 см 5 мм от точки D .

468 Упрости выражение и найди его значение:

- 1) $534 - 134 + 8a + 2a$, если $a = 8, 25, 94\ 000$;
2) $11b + 7b - 15 + b$, если $b = 50, 99, 1\ 001\ 001$.



469 Составь выражение и найди его значение при $x = 6$.

Одна обезьяна увидела в лесу 3 пальмы, а на них – бананы. С одной пальмы она собрала x штук бананов, со второй – в 2 раза больше, чем с первой, а с третьей – на 25 штук больше, чем со второй. Сколько бананов осталось у обезьяны, если 18 бананов она сразу же съела?

- 470** 1) $850 : 17 \cdot (336 : 6 - 9 \cdot 4) - [(8100 : 90 - 34) : 7 + 3 \cdot 8] \cdot 30 + 60 : 1$;
2) $[(18 + 19) \cdot 6 : 3 - 25] : 7 \cdot 90 + 39 \cdot (52 - 52) - 250 : 50 \cdot (270 : 3 - 76)$.

D

471) Подбери три значения x так, чтобы произведение:

- 1) $12x$ делилось на 17; 2) $8x$ делилось на 4; 3) $1598x$ делилось на 637.

472)

Докажи или опровергни утверждение: «Если произведение двух чисел делится на число $k = 3$, то хотя бы один из множителей тоже делится на k ».А верно ли это для чисел $k = 4, 5, 8$?

473)

Найди частное от деления:

- 1) $701 \cdot 18 \cdot 395$ на 6; 3) $48abc$ на 12; 5) $36mn$ на m , где $m \neq 0$;
2) $53 \cdot 1784 \cdot 625$ на 5; 4) $52xyz$ на 52; 6) $27dky$ на y , где $y \neq 0$.

474)

Два пешехода идут по одной дороге со скоростью соответственно 100 м/мин и 80 м/мин. Сейчас между ними 900 м. Какое расстояние будет между ними через 3 мин? (Рассмотри 4 случая и нарисуй для каждого из них схему.)

475)

Найди неизвестную операцию:

$$1) \quad \square \xrightarrow{+ 2\frac{4}{7}} \square \xrightarrow{+ 3\frac{6}{7}} \square$$

?

$$3) \quad \square \xrightarrow{+ 9\frac{1}{5}} \square \xrightarrow{- 7\frac{3}{5}} \square$$

?

$$2) \quad \square \xrightarrow{- 2\frac{1}{9}} \square \xrightarrow{- 3\frac{8}{9}} \square$$

?

$$4) \quad \square \xrightarrow{- 4\frac{1}{3}} \square \xrightarrow{+ 1\frac{2}{3}} \square$$

?

Сделай проверку, взяв в качестве объекта операции число 8.

476)

Начерти окружность с центром в точке O и радиусом 2 см. Отметь указанным цветом множество точек X , удовлетворяющих условию:

- 1) $OX = 2$ см (красным); 2) $OX < 2$ см (синим); 3) $OX > 2$ см (зелёным).

477)

Начерти отрезок AB , равный 5 см. Проведи окружность с центром в точке A радиусом 4 см и окружность с центром в точке B радиусом 3 см. Отметь указанным цветом множество точек X , удовлетворяющих условиям:

- 1) $AX = 4$ см и $BX = 3$ см (красным);
2) $AX < 4$ см и $BX < 3$ см (синим);
3) $AX < 4$ см и $BX > 3$ см (жёлтым);
4) $AX > 4$ см и $BX < 3$ см (зелёным).



Где расположены точки, удалённые от точки A больше, чем на 4 см, и от точки B больше, чем на 3 см?

478)

Составь программу действий и вычисли:

- 1) $106\ 937 - [3801 + (85\ 447\ 647 + 2\ 319\ 003) : 3350]$;
2) $10\ 518 + [1845 \cdot 267 + 62\ 238 : (39\ 832 - 39\ 326)] : 41$.

479)

Представь число 740 208 в виде суммы разрядных слагаемых.

480 Составь задачу, решением которой служит выражение:

а) $28 : 7 \cdot 5$;

б) $8 \cdot 12 \cdot 7$;

в) $35 + (35 - 2) + 35 : 7 \cdot 4$.

с

481* Учитель проверил работы трёх учеников – Андрея, Виталия и Сергея, но работ с собой не взял. Ученикам же он сказал так: «Все вы, ребята, написали работы на разные оценки: 3, 4 и 5. У Сергея оценка не 5, у Виталия оценка не 4, а вот у Андрея – 4». Оказалось, что ребята действительно получили разные оценки. Но учитель ошибся в том, кто какую оценку получил, и только одному ученику назвал её правильно. Какую оценку получил каждый из учеников за контрольную работу?



482*

На вопрос «Сколько среди двузначных чисел таких, у каждого из которых сумма цифр равна 9?» – Стёпа Верхоглядкин стал перебирать все двузначные числа подряд, отбирая нужные ему. Покажи ему более краткий способ решения этой задачи.

2. Делимость суммы и разности.

Задача 1. Делится ли число $9393 + 93 \cdot 93 - 186$ на 93?

Несложно проверить, что числа 9393 и 186 делятся на 93, но тогда

$$9393 + 93 \cdot 93 - 186 = 93 \cdot 101 + 93 \cdot 93 - 93 \cdot 2 = 93 \cdot (101 + 93 - 2),$$

так что и $9393 + 93 \cdot 93 - 186$ делится на 93.

Проверим истинность общего утверждения.

Свойство 1. Если два числа делятся на некоторое число, то их сумма и разность тоже делятся на это число.

Для доказательства обозначим первые два числа буквами a и b , а третье число – буквой c . Так как a , по условию, делится на c , то $a = ck$. Так как b , по условию, делится на c , то $b = cl$. Значит,

$$a + b = ck + cl = c(k + l),$$

то есть $a + b$ делится на c – в частном получается число $k + l$. Точно так же доказывается, что разность $a - b$ делится на c .

Отметим, что в доказательстве для обозначения частных $a : c$ и $b : c$ использованы две буквы, k и l . Разные имена потребовались потому, что эти частные различны.

Доказанное свойство часто полезно для нахождения общих делителей двух чисел. Найдем, например, общие делители чисел 1354 и 1357.

Пусть оба этих числа делятся на c . Тогда их разность, равная 3, также делится на c . Значит, c – это 1 или 3. Однако c не равно 3, так как 1354 не делится на 3. Следовательно, данные числа имеют только один общий делитель – число 1.

Задача 2. Делится ли число 215 на 19?

Число 215 равно сумме двух слагаемых $190 + 25$, одно из которых делится на 19, а другое нет: $215 = 190 + 25$. Может ли такая сумма делиться на 19?

Если бы это было так, то по свойству 1 слагаемое 25, равное разности $215 - 190$, тоже делилось бы на 19, а это неверно.

Сформулируем тогда следующее общее утверждение и попробуем его доказать.

Свойство 2. Если одно из двух чисел делится на некоторое число, а другое не делится на это число, то их сумма и разность не делятся на это число.

Данные числа обозначим буквами a и b , третье число – буквой c . Пусть, например, a делится на c , а b не делится на c .

Предположим, что сумма $a + b$ делится на c . Тогда, по свойству 1, разность $(a + b) - a$, то есть число b , также делится на c . Мы пришли к противоречию: число b одновременно и делится, и не делится на c .

Где источник этого противоречия? А дело в том, что мы предположили, что сумма $a + b$ делится на c . Это и привело нас к противоречию. Следовательно, сделанное нами предположение неверно, и на самом деле сумма $a + b$ не делится на c . Но именно это мы и должны были доказать.

Аналогично доказывается данное свойство и для разности двух чисел.

К

483 Определи истинность высказывания:

- а) $4500 + 25$ делится на 5; в) $888\ 888 - 19 \cdot 320$ делится на 8;
б) $13\ 000 - 26$ делится на 13; г) $171\ 717 + 2 \cdot 34$ делится на 17.

484

Какими способами можно делить сумму и разность на число? Найди частное:

- 1) $(9a + 24b) : 3$; 3) $(4mn - 96) : 2$; 5) $(68a - 4b + 36) : 4$;
2) $(60x - 48y) : 6$; 4) $(49 + 7dc) : 7$; 6) $(20xy + 45 - 5k) : 5$.

485

Найди все общие делители чисел:

- а) 3523 и 3524; в) 649 и 651; д) 12, 18 и 78;
б) 721 518 и 721 519; г) 868 и 882; е) 45, 50 и 195.

486

Каким может быть наибольший общий делитель:

- а) двух соседних чисел;
б) двух последовательных нечётных чисел;
в) двух последовательных чётных чисел?

**487**

Объясни, почему выражение не делится на 5:

- 1) $450 + 14$; 2) $121 - 35$; 3) $5x - 96$; 4) $5551 + 25y$.

488

Определи истинность высказывания:

- 1) $49 + 63$ делится на 7; 5) $77 + 88 + 99$ делится на 11;
2) $930 - 754$ делится на 10; 6) $222\ 222 - 56$ делится на 111;
3) $3637 + 72$ делится на 36; 7) $15\ 015\ 015 - 60$ делится на 15;
4) $3637 + 71$ делится на 36; 8) $252\ 525 + 624$ делится на 25.

489 1) Найди три значения x так, чтобы сумма $348 + x$: а) делилась на 2; б) не делилась на 2.

2) Найди три значения y так, чтобы разность $y - 520$: а) делилась на 10; б) не делилась на 10.

490 Верно ли, что:

а) 1002 делится на 9;

г) 1 000 023 делится на 25;

б) 10 017 делится на 9;

д) 999 975 делится на 25;

в) 3692 делится на 37;

е) 38 425 делится на 25?

491 К задуманному числу прибавили 3, сумму умножили на 4, а затем прибавили 5. Может ли результат равняться 666 666?

492 а) Даны 2008 чётных чисел. Является ли их сумма простым числом?

б) Даны 2008 нечётных чисел. Является ли их сумма простым числом?

493 Приведи *контрпример*, опровергающий утверждение:

1) Если ни одно слагаемое не делится на данное число, то сумма не делится на это число.

2) Если ни одно слагаемое не делится на данное число, то сумма делится на это число.

Сравни оба утверждения. Закончи предложение так, чтобы получилось истинное высказывание: «Если ни одно слагаемое не делится на данное число, то...»



π

494 Рассматриваются все возможные последовательности двузначных чисел, оканчивающихся на одну и ту же цифру.

а) Какие из чисел последовательности 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93 простые?

б) Во всякой ли из рассматриваемых последовательностей есть простые числа?

в) Имеются ли среди этих последовательностей такие, в которых содержится ровно одно простое число?

495 Выбери из множества $A = \{2, 5, 6, 8, 12, 19, 24, 32, 45, 47\}$ подмножество:

1) простых чисел;

5) чисел, кратных 3 и 5;

2) составных чисел;

6) чисел, кратных 3 или 5;

3) чисел, являющихся делителями 24;

7) делителей 8 или 12;

4) чисел, не кратных 2;

8) делителей 8 и 12.

496 Найди НОД и НОК чисел: 1) 6, 18 и 30; 2) 10, 15 и 25. Какими способами можно это сделать?

497 Укажи НОД и НОК для чисел, представленных в виде произведения:

1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ и $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$;

2) $2 \cdot 2 \cdot 2$ и $7 \cdot 7$.

498 Составь задачу, решением которой служит выражение:

а) $9000 : 100 \cdot 14$;

б) $60 : (80 : 16)$;

в) $120 : 5 - 120 : 6$.

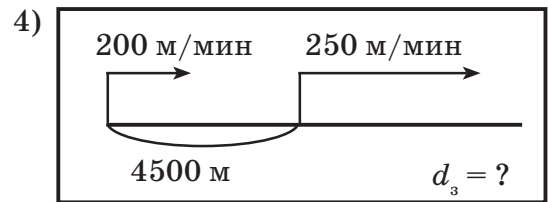
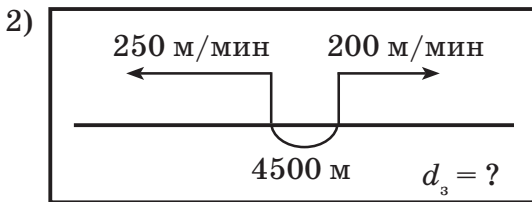
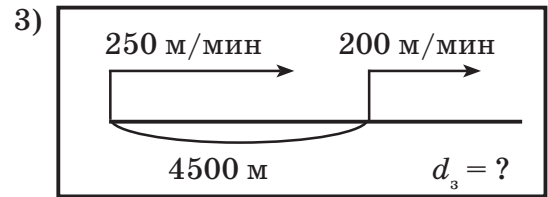
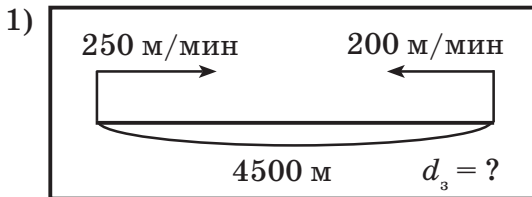
499 Перерисуй таблицы в тетрадь и заполни пустые клетки:

+	$1\frac{2}{7}$	$3\frac{4}{7}$	
2			$3\frac{1}{7}$
	6		
$5\frac{4}{7}$			

+	$\frac{5}{11}$		$2\frac{6}{11}$
$3\frac{6}{11}$		$4\frac{10}{11}$	
	$1\frac{3}{11}$		
			$5\frac{5}{11}$



500 Два велосипедиста выехали одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми 4 км 500 м. По схеме определи, в каком направлении двигались велосипедисты и с какой скоростью изменялось расстояние между ними. Каким оно станет через 3 мин после начала движения? В каких случаях и через сколько времени после выезда произойдёт встреча?



501 С одного аэродрома одновременно в противоположных направлениях вылетели самолёт и вертолёт. Скорость самолёта 740 км/ч, а скорость вертолёта 260 км/ч. Какое расстояние будет между ними через t часов после вылета? Запиши ответ в виде формулы и упрости её. Что означает число 1000 в получившейся формуле?

502 Расстояние между пунктами А и В по шоссе 200 км. По этому шоссе из пункта А в пункт В выехал автомобиль со скоростью 110 км/ч. Одновременно с автомобилем из пункта В в том же направлении выехал автобус со скоростью 70 км/ч. Какое расстояние будет между автомобилем и автобусом через t часов после выезда, если за это время встречи не произойдёт? Запиши ответ в виде формулы и упрости её. Какой смысл имеет число 40 в получившейся формуле?



503 Составь задачи на одновременное движение двух объектов, решение которых можно записать в виде формул:

1) $d = 500 - (70 + 30)t$;

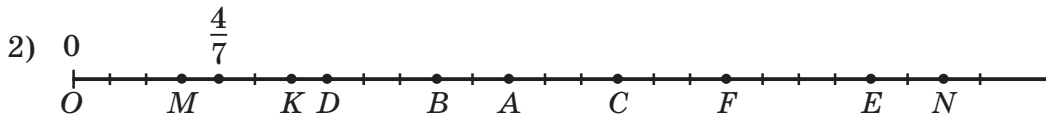
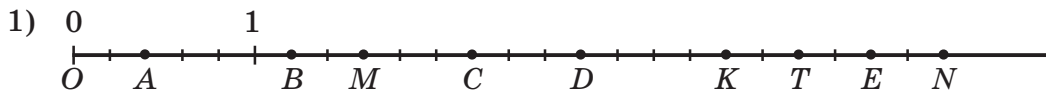
3) $d = 96 - (56 - 40)t$;

2) $d = 18 + (16 + 4)t$;

4) $d = 4 + (12 - 7)t$.

Упрости формулы и определи для каждого случая скорость сближения или скорость удаления объектов. В каких случаях и через сколько времени после начала движения произойдёт встреча?

504 Определи координаты точек, отмеченных на рисунке. Чему равно расстояние между точками O и D , A и M , K и C , выраженное в единичных отрезках? Как найти расстояние между двумя точками координатного луча?



505 Найди правильный перевод условия задачи на математический язык:

а) Товарный поезд должен пройти n км. Он шёл x ч со скоростью 50 км/ч и y ч со скоростью 60 км/ч. Сколько километров ему осталось пройти?

1) $n + x : 50 + y : 60$;

3) $n - (50x + 60y)$;

2) $n : (50x + 60y)$;

4) $n - 50x - 60y$.

б) После того как 12 человек купили по k билетов, а 20 человек – по m билетов, в кассе осталось t билетов. Сколько билетов было в кассе вначале?

1) $t - k : 12 - m : 20$;

3) $t + 12k + 20m$;

2) $t - (12k + 20m)$;

4) $t(12k + 20m)$.

506 Реши уравнение:

1) $\frac{x}{18} = 3$;

3) $(19 \cdot 700) : 70 - \frac{850 + x}{18} = 6000 : 50$;

2) $\frac{96}{x} = 2$;

4) $\frac{2 \cdot (x \cdot 5) \cdot 16}{74 + 68} - 92 : 4 = 50\,000\,012 - 49\,998\,435$.

507 Филеас Фогг отправился со своим слугой Паспарту в кругосветное путешествие. Уже за первую неделю им удалось преодолеть значительное расстояние. По горам они прошли 32 км, что составило $\frac{4}{25}$ расстояния, которое они проплыли на плоту. Через джунгли они пробирались 2 дня, преодолевая в день 24 км. На воздушном шаре путешественники пролетели в 8 раз больше, чем проплыли на плоту, а на лошадях проскакали 15% расстояния, которое пролетели на воздушном шаре. Какое расстояние преодолел Филеас Фогг со своим слугой за эту неделю?

517 По формуле зависимости расстояния d между движущимися объектами от времени движения t построй схему и найди скорость сближения или скорость удаления (d выражено в километрах, а t – в часах):

1) $d = 120 - (18 + 12)t$;

3) $d = 48 - (50 - 42)t$;

2) $d = 80 + (36 + 9)t$;

4) $d = 34 + (72 - 45)t$.

Для каждого случая найди расстояние между движущимися объектами через 2 часа после начала движения. В каких случаях и через сколько времени после начала движения произойдёт встреча?

518 Числовой кроссворд

По горизонтали:

а) $451\ 044 : 748$;

б) $1\ 691\ 480 : 56$;

в) $35\ 490\ 056 : 7$;

г) $43\ 750\ 912 \cdot 8$;

д) $53\ 906\ 028 \cdot 604$;

е) $80\ 420 \cdot 7804$;

ж) $97\ 054 \cdot 98$;

з) $31\ 347\ 600 : 346$;

и) $148\ 120 : 529$.

По вертикали:

а) $945\ 631 \cdot 642$;

б) $12\ 023\ 036 : 4$;

в) $1\ 665\ 870 : 30$;

г) $23\ 472 : 72$;

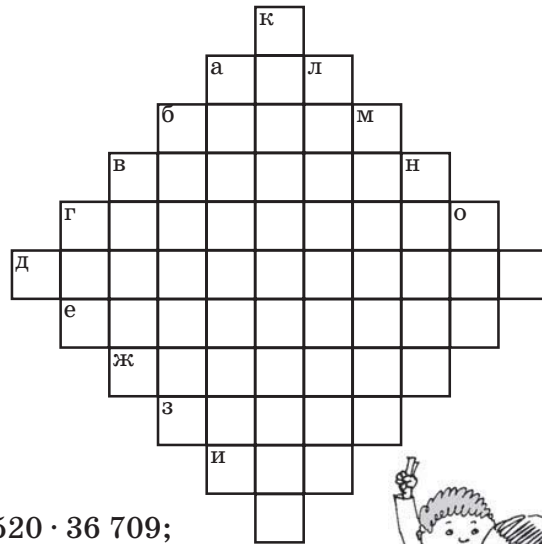
к) $1\ 367\ 520 \cdot 36\ 709$;

л) $115\ 672 \cdot 2600$;

м) $936\ 847 + 4\ 083\ 843$;

н) $520\ 100 - 430\ 118$;

о) $4\ 882\ 440 : 8004$.

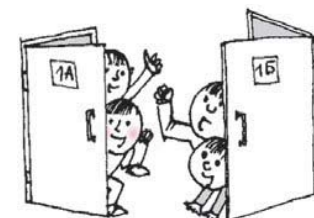


519* Сколько чисел от 1 до 100 таких, каждое из которых делится на 3, но в своей записи не имеет ни одной тройки?

520* Расшифруй ребусы, если одинаковым буквам соответствуют одинаковые числа, а разным – разные:

а)
$$\begin{array}{r} \text{Д В А} \\ \times \text{Д В А} \\ \hline * * * * \\ * * * * \\ \hline \text{Е * * *} \\ \hline \text{Ч Е Т Ы Р Е} \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} \text{Ш Е П Н У Л} \\ \text{Ш Е П Н У Л} \\ + \text{Ш Е П Н У Л} \\ \hline \text{Ш Е П Н У Л} \\ \hline \text{К Р И К Н У Л} \end{array}$$



521* Задачи Л. Н. Толстого

1) У двух мужиков 40 овец, а у одного меньше против другого на 6. Сколько у каждого?

2) Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Так как три дома разделить было нельзя на 5 частей, то их взяли три старших брата, а меньшим за то выделили деньги. Каждый из трёх братьев заплатил по 800 р., меньшие братья разделили эти деньги между собой, и тогда у всех стало поровну. Много ли стоит один дом?

**Задачи для самопроверки.**

522 Запиши буквенный код, соответствующий истинным высказываниям.

А 52 – кратное 26;

Г 49 не кратно 7;

Б 45 – делитель 5;

Д 1 – простое число;

В 18 не является делителем 9;

Е 27 – составное число.

523 Составь множество делителей и множество кратных числа 15, а затем – числа 20. Запиши множества их общих делителей и общих кратных. Используя эти множества, найди НОК и НОД чисел 15 и 20.

524 Подбери два значения x так, чтобы выражение:

1) $20x$ делилось на 11;

3) $48 - x$ делилось на 4;

2) $25x$ не делилось на 3;

4) $x + 36$ не делилось на 9.

525 1) Какую часть составляют 7 мин от 3 ч?

2) Вырази в минутах: $\frac{3}{4}$ ч, $3\frac{1}{5}$ ч, 4 ч 18 мин, 480 с.

526 Выполни действия: 1) 5 ч 18 мин – 1 ч 43 мин; 2) 8 мин 26 с · 25.

Вырази ответ в возможно более крупных единицах измерения времени.

527 Сделай чертёж к задаче и запиши выражение.

По одной дороге едут два поезда. Сейчас между ними n км. Скорость первого поезда a км/ч, а скорость второго – b км/ч ($a > b$). Какое расстояние будет между поездами через 2 часа, если встречи за это время не произойдёт? (Рассмотри 4 случая.)

528 Составь программу действий и вычисли:

$$720 - [(280 : 4) \cdot 5 + 150 - 20 \cdot 8] : 2 - 800 : (64 : 4).$$

§ 3. Признаки делимости натуральных чисел

1. Признаки делимости на 10, на 2 и на 5.

Для выяснения, делится ли одно число на другое, всегда можно провести деление известным нам способом – «уголком». Но это занятие часто бывает довольно утомительным, и математики придумали некоторые специальные приемы для получения быстрого ответа на этот вопрос – **признаки делимости**.

Простейший из них нам хорошо известен – это признак делимости на 10, а именно: если число оканчивается на 0, то оно делится на 10, а если число оканчивается на любую другую цифру, то оно не делится на 10.

Чтобы объединить подобные два утверждения в одно, обычно используют словосочетание «*в том и только в том случае*». Таким образом, признак делимости на 10 формулируется так: «**Число делится на 10 в том и только в том случае, когда его последняя цифра равна 0**».

Вместо длинного выражения «*в том и только в том случае*» в математической записи часто употребляется специальный знак \Leftrightarrow (читают: «равносильно»). С помощью знака равносильности признак делимости на 10 записывается так:

Число a делится на 10 \Leftrightarrow Последняя цифра числа a равна 0

Рассмотрим теперь вопрос о делимости на 5. Здесь нам существенно помогут изученные свойства делимости.

Задача. *Какие из чисел 34 470, 745, 5637 делятся на 5?*

Число 34 470 делится на 10, а 10 делится на 5. Поэтому, *по свойству 2 делимости произведения*, 34 470 делится на 5. Ясно, что и всякое число, оканчивающееся цифрой 0, делится на 5.

Число 745 представим в виде суммы: $745 = 740 + 5$. Оба слагаемых делятся на 5, и, *по свойству 1 делимости суммы*, их сумма 745 делится на 5. Ясно, что и всякое число, оканчивающееся цифрой 5, делится на 5.

Число 5637 также представим в виде суммы: $5637 = 5630 + 7$. Здесь первое слагаемое делится на 5, а второе не делится на 5. *По свойству 2 делимости суммы*, сумма 5637 не делится на 5.

Эти примеры иллюстрируют признак делимости на 5: «**Число делится на 5 в том и только в том случае, когда оно оканчивается цифрой 0 или 5**».



С помощью знака равносильности этот признак можно записать так:

Число a делится на 5 \Leftrightarrow Последняя цифра числа a равна 0 или 5

Аналогично можно проиллюстрировать, что число делится на 2 в том и только в том случае, когда оно оканчивается одной из цифр – 0, 2, 4, 6, 8. Эти цифры, как мы уже знаем, условились называть **чётными**, в отличие от остальных цифр – 1, 3, 5, 7, 9, которые называют **нечётными**. Поэтому признак делимости на 2 формулируется немного проще: «**Число делится на 2 в том и только в том случае, когда оно оканчивается чётной цифрой**».

Это можно записать так:

Число a делится на 2 \Leftrightarrow Последняя цифра числа a – чётная

Таким образом, числа, кратные 2 (чётные числа), оканчиваются чётными цифрами, а числа, не кратные 2 (нечётные числа), – нечётными цифрами.

Говоря о признаках делимости на 2, 5 и 10, мы рассматривали конкретные примеры. Вместе с тем эти признаки могут быть доказаны и в общем виде, причем все три одновременно. Действительно, в записи многозначного натурального числа можно отделить единицы, то есть представить это число в виде $10a + b$, где b – последняя цифра числа. Например:

$$590 = 10 \cdot 59 + 0, \quad 348 = 340 + 8 = 10 \cdot 34 + 8, \quad 96\,005 = 10 \cdot 9600 + 5.$$

В сумме $10a + b$ первое слагаемое делится на 10, а значит, оно делится на 2 и на 5. Поэтому делимость на 2, 5 и 10 зависит только от числа b , то есть от последней цифры данного числа.

Конечно, в записи числа можно отделить и несколько последних цифр. Например, его можно записать в виде $100a + b$, где b – *двузначное* число, образованное двумя последними цифрами данного числа. Например:

$$4876 = 100 \cdot 48 + 76.$$

Такая запись позволяет получить признаки делимости на 100, 4 и 25. И поскольку 100 кратно 4 и 25, то всё зависит от делимости на эти числа числа b .

Можно отделить и три последние цифры, то есть записать число в виде $1000a + b$, где b – *трёхзначное* число. Эту новую запись можно использовать для получения признаков делимости на 1000, 8 и 125.

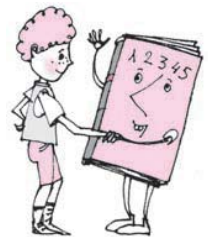
К

529 Выпиши множество решений неравенства $978 < x < 1020$, кратных 10.

530

Докажи, не выполняя вычислений, что:

- 1) сумма $530 + 7100$ делится на 10;
- 2) сумма $497 + 21\,500$ не делится на 10;
- 3) разность $58\,930 - 760$ кратна 10;
- 4) разность $8410 - 2927$ не кратна 10;
- 5) произведение $39 \cdot 820 \cdot 713$ делится на 10;
- 6) число 10 является делителем произведения $47 \cdot (1310 - 490)$.



531 Запиши:

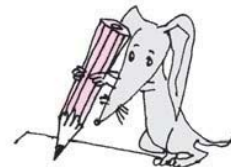
- 1) Наименьшее пятизначное число, кратное 10, сумма цифр которого равна 12.
- 2) Наибольшее семизначное число, кратное 1000, сумма цифр которого равна 15.

532 1) Какие из чисел кратны 2, а какие – нет:

36, 87, 481, 594, 708, 563, 8885, 10 000?

2) Какие из чисел делятся, а какие не делятся на 5:

135, 440, 5554, 73 209, 908 015?



533 Запиши множество:

- 1) чётных решений неравенства $389 < a \leq 400$;
- 2) нечётных решений неравенства $795 \leq b < 803$.

534 Какие числа, кратные 5, являются решениями неравенства:

- 1) $95 \leq c < 100$;
- 2) $560 < d \leq 562$;
- 3) $247 \leq c \leq 275$?

535 1) Запиши множество трёхзначных чисел, больших 970 и кратных 5.

2) Запиши множество двузначных чисел, больших 87 и не кратных ни 2, ни 5.

536 Составь из цифр 3, 4, 5 и 6 все возможные трёхзначные числа: а) кратные 2; б) кратные 5 (цифры в записи числа не повторяются). Сколько чисел получилось?

537 Найди все значения переменной a из множества $A = \{145, 236, 340, 801, 1294, 4567\}$, при подстановке которых в данное предложение получаются истинные утверждения:

- 1) Число a делится на 2.
- 2) Число a делится на 5.
- 3) Число a делится на 2 и на 5.
- 4) Число a делится на 2, но не делится на 5.
- 5) Число a делится на 5, но не делится на 2.
- 6) Число a не делится ни на 2, ни на 5.
- 7) Число a делится на 10.

Для каких предложений полученные ответы равны?

538 Докажи или опровергни утверждения:

- 1) Если число делится на 10, то оно делится на 5.
- 2) Если число делится на 5, то оно делится на 10.
- 3) Если число делится на 10, то оно делится на 2.
- 4) Если число делится на 2, то оно делится на 10.
- 5) Если число делится на 10, то оно делится на 2 и на 5.
- 6) Если число делится на 2 и на 5, то оно делится на 10.

Какие из этих утверждений можно объединить в одно с помощью словосочетания «в том и только в том случае»? Сформулируй новые утверждения и определи их истинность.

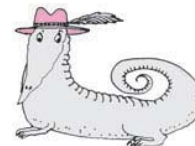


539 При каких значениях переменной значение выражения делится на 2:
 1) $758 + x$; 2) $1643y$; 3) $n - 916 \cdot 835$; 4) $5000m$?

540 Докажи, что выражение $2935c + 16\,000d$ кратно 5 при любых значениях переменных c и d .

541 Запиши три пары значений переменных x и y , при которых значение выражения $12x + 45y$:

- 1) делится на 2;
- 2) не делится на 5;
- 3) делится на 2 и на 5;
- 4) не делится ни на 2, ни на 5.



Для каждого случая сформулируй принцип подбора пар в общем виде.

542 Какие остатки получаются при делении числа 27 628: а) на 10; б) на 100; в) на 1000; г) на 2; д) на 5? Как решить эту задачу, не производя деления?

543 При делении некоторого числа на 5 в остатке получилось 4. Какой цифрой может оканчиваться это число?

544 Шоколадка стоит целое число рублей, Олег купил пять таких шоколадок. Продавец назвал стоимость покупки: 286 рублей. Верно ли посчитал продавец?

545 Из чисел от 1 до 252 выбросили все числа, делящиеся на 2, но не делящиеся на 5, и все числа, делящиеся на 5, но не делящиеся на 2. Сколько осталось чисел?

546 1) Записав число в виде $100a + b$, где b – двузначное число, образованное двумя последними цифрами данного числа, сформулируй и докажи признаки делимости на 4 и на 25.
 2) Выпиши все двузначные числа, кратные 25.
 3) Выпиши три нечётных числа, больших 1000 и кратных 25.
 4) Выпиши все трёхзначные числа, состоящие из цифр 2, 4, 6 и кратные 4 (цифры в записи числа могут повторяться).

547 Сформулируй и докажи признаки делимости на 8 и на 125 с помощью идеи, предложенной в пункте 1.

π **548** Докажи, что число 102 060 кратно 18, а число 45 является делителем числа 31 905.

549 Используя свойства делимости, докажи или опровергни утверждение:

- 1) $36 + 72$ делится на 36; 3) $24 \cdot 17 \cdot 35$ не делится на 6;
- 2) $2100 - 16$ не делится на 21; 4) $(63 - 19) \cdot 80$ делится на 10.

550 Реши уравнение:

- а) $(50x - 85) : 9 + 48 = 83$;
- б) $222 - (560 : y + 43) = 99$.

551 Пользуясь формулой деления с остатком $a = bc + r$, где $r < b$, найди неизвестные значения букв в таблице.

a	?	26	49	?	95	?	81	163
b	7	?	6	14	?	16	18	?
c	5	8	?	7	13	6	?	8
r	3	2	?	6	4	5	?	11

552 Выполни деление с остатком и сделай проверку:

- а) 19 328 на 56; б) 487 120 на 687; в) 3 559 000 на 900.

553 Вставь вместо звездочек подходящие цифры и сделай проверку:

а)
$$\begin{array}{r} * 1 6 * \\ + 5 * 4 3 \\ \hline * 3 1 * 1 \end{array}$$
 б)
$$\begin{array}{r} 5 0 * 2 \\ - * 9 8 \\ \hline * 7 4 * \end{array}$$
 в)
$$\begin{array}{r} 8 * 3 * 0 3 * 0 3 \\ - 9 * 7 1 * 5 * 1 \\ \hline * 0 7 8 * 4 2 1 * \end{array}$$

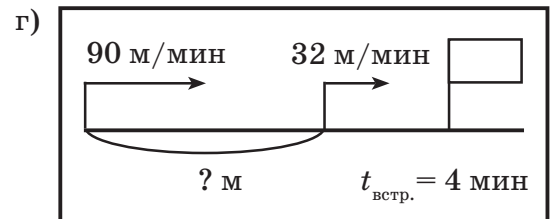
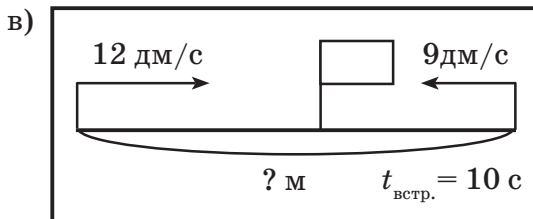
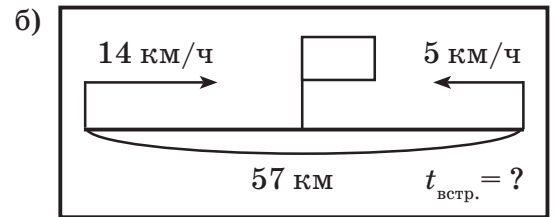
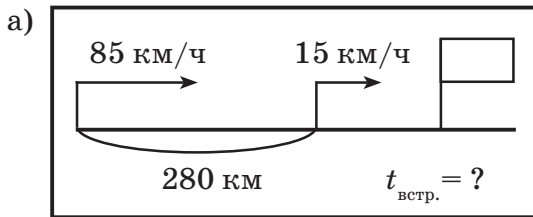
554 Выполни действия и расположи полученные значения переменной x в порядке убывания, сопоставив их соответствующим буквам. Если задание выполнено верно, то из букв будет составлено название рыбы, имеющей такую же полосатую окраску, как у зебры.

a	$1\frac{2}{7}$	$2\frac{3}{7}$	$2\frac{4}{7}$	$3\frac{1}{7}$	$4\frac{6}{7}$	$5\frac{5}{7}$	$10\frac{3}{7}$
x							

А
О
К
Н
И
Ц
Р

555 Магазин продал в первый день 160 кг яблок, что составило $\frac{1}{3}$ всех яблок, во второй день $-\frac{4}{5}$ оставшихся яблок. Сколько килограммов яблок осталось продать?

556 Пользуясь формулой одновременного движения $s = v_{\text{сбл.}} \cdot t_{\text{встр.}}$, реши задачи:



557 1) 5 октября в 18 ч 30 мин из Читы и Иркутска навстречу друг другу вышли два поезда – соответственно пассажирский и товарный. Скорость товарного поезда равна 56 км/ч, что составляет $\frac{4}{5}$ скорости пассажирского поезда. Определи время и место встречи поездов, если расстояние между Читой и Иркутском по железной дороге 1134 км.

2) Два велосипедиста едут навстречу друг другу по шоссе со скоростями 14 км/ч и 18 км/ч. В 11 ч утра расстояние между ними было равно 64 км. Успеют ли они встретиться до 13 ч 15 мин того же дня?

558 1) Автомобиль и мотоцикл едут по одной дороге в одном направлении. Сейчас между ними 105 км. Чему равна скорость мотоцикла, если автомобиль, скорость которого равна 90 км/ч, догнал его через 3 ч?

2) Всадник выехал из города N со скоростью 720 м/мин. Через 5 мин вслед за ним выехал другой всадник, скорость которого составляет $\frac{9}{8}$ скорости первого. Через сколько времени и на каком расстоянии от города N второй всадник догонит первого?

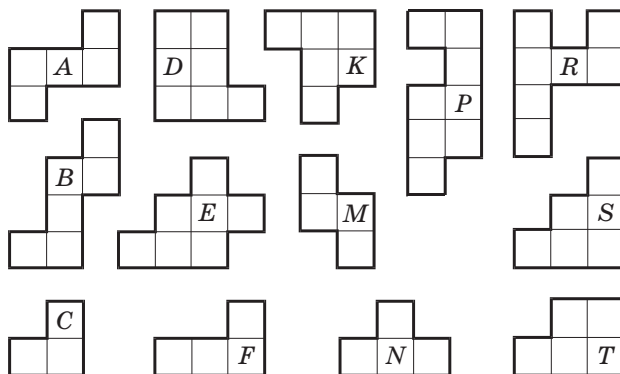
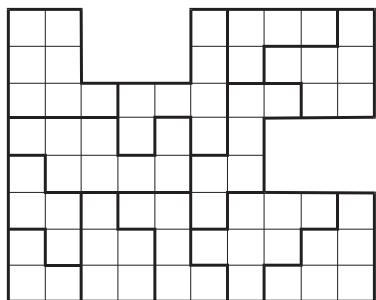
559 Гоша, Вадик и Денис отправились на рыбалку. Гоша заготовил 30 наживок, что составило $\frac{3}{5}$ числа наживок, заготовленных Вадиком, а вместе Вадик и Гоша заготовили на 20 наживок меньше, чем Денис. Улов Гоши составил 1 рыбку на каждые 3 наживки, улов Вадика – $\frac{3}{5}$ от числа его наживок, а улов Дениса – 35% от числа его наживок. Сколько рыб поймали все мальчики вместе? Сколько тарелок ухи можно сварить из этих рыб, если из каждых 5 рыб получается одна тарелка ухи?



560 Проверь истинность высказывания:

$$1\frac{1}{508} < \frac{5450 - (274\,030 : 409 - 29\,890 : 98)}{(524 \cdot 503 + 97\,108) : 710} \leq 1\frac{5}{508}.$$

561 Среди фигур, расположенных справа, найди «лишнюю» фигуру:



Д

562 Найди истинные высказывания. Из соответствующих им букв составь название страны. В какой части света она находится?

- | | |
|---|--|
| 1) А 56 008 не кратно 10; | С $93 \cdot 75\,000 \cdot 8$ кратно 1000; |
| Д 100 является делителем 5240; | Ч $14\,300 + 70$ делится на 100; |
| Л $27\,000 - 380$ делится на 10; | О 100 не кратно 500. |
| 2) Е 58 134 кратно 2; | П 2 является делителем 60 000; |
| Н $932 + 728$ не кратно 2; | У $2756 - 971$ не делится на 2; |
| Р $31 \cdot 870 \cdot 9$ делится на 5; | Ц 5 не является делителем 2305. |

563 Составь из цифр 2, 5 и 0 все возможные трёхзначные числа: а) кратные 2; б) кратные 5; в) кратные 2 и 5; г) не кратные ни 2, ни 5; д) кратные 2, но не кратные 5; е) кратные 5, но не кратные 2. (Цифры в записи числа не повторяются.)

564 Запиши множество чётных трёхзначных чисел, кратных 25, но не кратных 4.

565 1) В 1632 году, в год поступления в мушкетёры, Д'Артаньян участвовал в дуэлях с гвардейцами кардинала и другими противниками вдвое чаще, чем Арамис. Атос провел в том году 16 дуэлей, что составило $\frac{2}{3}$ дуэлей, проведённых Д'Артаньяном, а число дуэлей Портоса оказалось равным $\frac{4}{7}$ от общего числа дуэлей Атоса и Арамиса. Сколько всего дуэлей провели четыре друга в 1632 году?

2) Арамис и Атос выехали в 9 ч вечера навстречу друг другу из Парижа и Руана, расстояние между которыми 124 км. Арамис скакал со скоростью 29 км/ч, а Атос – со скоростью на 4 км/ч большей. В котором часу они встретились?

3) Расстояние от Парижа до замка кардинала Ришелье 220 км. Графиня Винтер выехала из Парижа в замок кардинала со скоростью 24 км/ч. Через 2 ч мушкетёры бросились в погоню за миледи со скоростью 36 км/ч. Успела ли миледи укрыться в замке?

4) Четыре мушкетёра отправились из Парижа в Лондон за подвесками королевы со скоростью 700 м/мин. Через 10 мин вдогонку за мушкетёрами поскакали гвардейцы кардинала со скоростью 800 м/мин. На каком расстоянии от Парижа произошла стычка между мушкетёрами и гвардейцами?

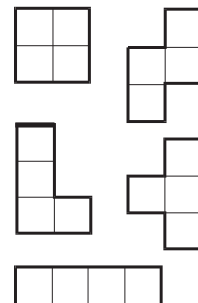
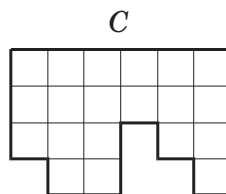
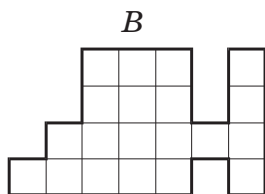
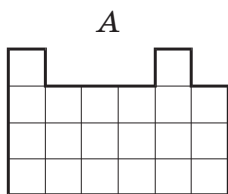


566 Реши уравнение:

$$1) \left(x + 1\frac{8}{17}\right) - 9\frac{11}{17} = 3\frac{5}{17} + \frac{9}{17};$$

$$2) 4\frac{2}{9} + \left(16\frac{5}{9} - y\right) = 15\frac{1}{9} - 8\frac{7}{9}.$$

567 Составь фигуры А, В и С из пяти четырёхклеточных фигур, расположенных справа. Решение нарисуй в тетради, раскрасив фигуры цветными карандашами.



568 Выполни действия:

$$89\ 860 + [1248 \cdot 634 - 250\ 848 : (75\ 800 - 74\ 996)] : 78.$$

569* Определи, какие цифры надо поставить вместо букв А и В, чтобы получилось верное равенство: $AB \cdot A \cdot B = BBB$. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.)

570* Из двух пунктов, расстояние между которыми 100 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость первого была 15 км/ч, а второго – 10 км/ч. Вместе с первым велосипедистом выбежала собака со скоростью 20 км/ч. Встретив второго велосипедиста, собака повернула обратно и побежала навстречу первому велосипедисту. Встретив первого велосипедиста, она снова повернула. Собака бегала между велосипедистами до тех пор, пока велосипедисты не встретились. Сколько километров пробежала собака?

571* Докажи, что если к любому трёхзначному числу приписать трёхзначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится число, делящееся на 11.

2. Признаки делимости на 3 и на 9.

Исследуем теперь, от чего зависит делимость числа на 3 и на 9.

Задача. Делится ли на 3 число 8535?

Представим это число в виде суммы разрядных слагаемых:

$$8535 = 8000 + 500 + 30 + 5 = 8 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5.$$

Из каждого «круглого» числа выделим единицу и раскроем скобки:

$$8535 = 8 \cdot (999 + 1) + 5 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 5 = 8 \cdot 999 + 8 + 5 \cdot 99 + 5 + 3 \cdot 9 + 3 + 5 = 8 \cdot 999 + 5 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + (8 + 5 + 3 + 5).$$

Числа 999, 99 и 9 делятся на 3, а значит, по свойствам делимости, и сумма первых трёх слагаемых делится на 3. Поэтому ответ на вопрос о делимости на 3 числа 8535 зависит от делимости на 3 суммы остальных слагаемых, то есть $8 + 5 + 3 + 5 = 21$. Число 21 на 3 делится, поэтому 8535 на 3 также делится.

Данный пример иллюстрирует признак делимости на 3: «Число делится на 3 в том и только в том случае, когда сумма его цифр делится на 3». Это можно записать так:

Число a делится на 3 \Leftrightarrow Сумма цифр числа a делится на 3

Признак делимости на 9 формулируется аналогично признаку делимости на 3: «Число делится на 9 в том и только в том случае, когда сумма его цифр делится на 9». Или так:

Число a делится на 9 \Leftrightarrow Сумма цифр числа a делится на 9

Более того, проиллюстрировать его можно в точности так же: если мы в рассмотренном примере заметим, что числа 999, 99 и 9 делятся на 9, то всё будет зависеть от делимости на 9 суммы цифр числа 8535. Она равна 21 и не делится на 9. Следовательно, число 8535 тоже не делится на 9.

К

572 Какие из чисел: 1) 3996; 2) 24357; 3) 187272; 4) 594820; 5) 111 111 111; 6) 1 234 567 890 – делятся на 3? делятся на 9?

573

Какие цифры можно подставить вместо звездочки в записи 741 56*, чтобы получившееся число было: 1) кратно 3? 2) кратно 9?

574

Докажи или опровергни утверждения:

- 1) Если число делится на 3, то оно делится на 9.
- 2) Если число делится на 9, то оно делится на 3.

Равносильны ли утверждения: «Число a делится на 3» и «Число a делится на 9»?

575 1) Расшифруй название одного из филиппинских народов, расположив числа, которые не кратны 9, в порядке возрастания и сопоставив их соответствующим буквам:

К 41 202	А 12 853	Н 30 517	О 61 304
О 30 570	Б 52 386	И 17 055	М 9199

2) Из приведённых выше чисел отбери те, которые не кратны 3, и тоже расположи их в порядке возрастания, сопоставив соответствующим буквам. В результате получится название одного из народов Либерии. Надо ли снова проверять на делимость все числа?

576 1) Составь число из одних пятерок, чтобы оно делилось на 9. Делится ли оно на 3?

2) Составь число из одних девяток, чтобы оно делилось на 5.

577 Алеша зашел в магазин «Школьные принадлежности» и купил тетрадь за 30 р., альбом для рисования за 60 р., три шариковые ручки и девять цветных карандашей, цену которых он не знал. Кассир попросил с него 140 р. 80 коп., с чем Алеша не согласился. Кассир пересчитал и исправил ошибку. Как Алеша догадался, что кассир в первый раз ошибся?

578 Придумай трёхзначное число, которое:

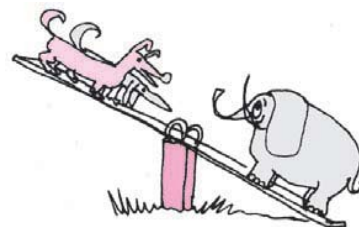
- 1) делится на 3 и на 5, но не делится на 10;
- 2) делится на 9 и на 10, но не делится на 25;
- 3) делится на 2 и на 9, но не делится на 5;
- 4) не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 9.

579 Вместо звёздочки вставь неизвестную цифру так, чтобы получилось истинное утверждение. Укажи все возможные варианты ответов.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1) 312^* делится на 2; | 3) 312^* делится на 3; | 5) 312^* делится на 4; |
| 2) 312^* делится на 5; | 4) 312^* делится на 9; | 6) 312^* делится на 25. |

580 Найди все значения переменной s , принадлежащие множеству $S = \{42, 73, 243, 347, 534, 8612, 12\,345\}$, при подстановке которых в данное предложение получаются истинные утверждения.

- 1) Число s делится на 2.
- 2) Число s делится на 3.
- 3) Число s делится на 2 и на 3.
- 4) Число s делится на 2, но не делится на 3.
- 5) Число s делится на 3, но не делится на 2.
- 6) Число s не делится ни на 2, ни на 3.
- 7) Число s делится на 6.



Найди равносильные утверждения. Всегда ли число, кратное двум различным числам, кратно и их произведению? Приведи примеры.

581 Пользуясь свойствами и признаками делимости, установи, какие из приведённых выражений делятся: а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 9. Ответ запиши в виде буквенного кода (например: *krs*).

k $270 + 318$

m $834 - 782$

r $27 \cdot 49 \cdot 275$

l $405 + 990$

n $580 - 225$

s $416 \cdot 391 \cdot 59$

582 1) Между какими двумя последовательными числами, кратными 3, заключено каждое из чисел: 317, 523, 619? Какие получаются остатки при делении этих чисел на 3?

2) Найди остатки от деления на 3 чисел: 25 966, 527 408, 1 387 915.

583 1) Между какими двумя последовательными числами, кратными 9, заключено каждое из чисел: 289, 443, 702? Какие получаются остатки при делении этих чисел на 9?

2) Найди остатки, которые получаются при делении на 9 чисел: 36 681, 578 645, 4 620 805.

584 1) Может ли при покупке трёх одинаковых книг сдача со 100 р. равняться 42 р.?

2) Купили 9 м шёлка. Может ли покупка стоить 3450 р.?

585 Докажи или опровергни утверждения:

1) Если сумма цифр числа кратна 5, то число кратно 5.

2) Если число оканчивается цифрами 0 или 9, то оно кратно 9.

3) Трёхзначное число, записанное одинаковыми цифрами, кратно 3.

4) Трёхзначное число, записанное одинаковыми цифрами, кратно 37.

π

586 Из множества чисел {3, 8, 12, 15, 24, 30, 44, 60, 72} выбери числа, которые являются:

1) делителями 36;

3) делителями 24 и кратными 3;

2) кратными 8;

4) кратными 5 и делителями 60.

587 Найди 3 значения переменной, при которых выражение:

1) $a + 25$ делится на 5;

3) $c - 14$ не делится на 7;

2) $48 - b$ делится на 8;

4) $130 + d$ не делится на 13.

588 Докажи, что при всех натуральных значениях переменных выражения $28x$, $96mnk$, $52(y + z)$ кратны 2.

589 Существует ли натуральное значение x , удовлетворяющее равенству $x - 12 = x$? Почему? А равенству $3x - 12 = x$?

590 Найди корень уравнения с помощью правила «весов» (стр. 51):

1) $x + 2 = 3x - 4$;

3) $6x + 9 = 2x + 33$;

5) $11x - 50 = x$;

2) $4x - 9 = 2x + 11$;

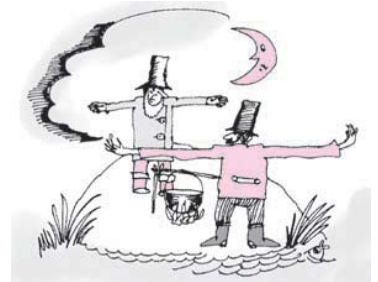
4) $5x + 6 = 7x - 10$;

6) $2x = 9x - 21$.

- 591** 1) Задуманное число увеличили в 3 раза, а затем уменьшили на 12. В результате получилось число, на 2 больше задуманного. Какое число было задумано?
 2) Найти задуманное число, если известно, что после увеличения его в 7 раз, а затем на 4 единицы получается число, на 52 единицы больше, чем само задуманное число.

592 БЛИЦтурнир

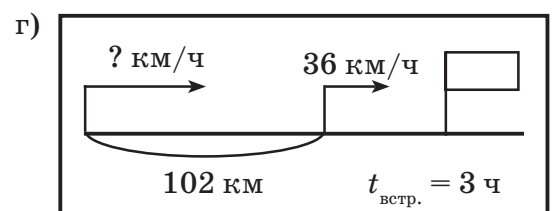
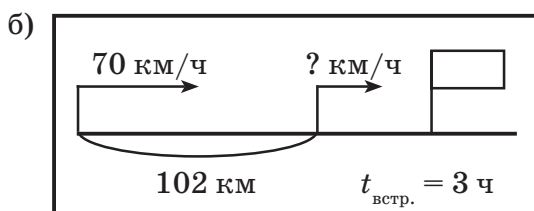
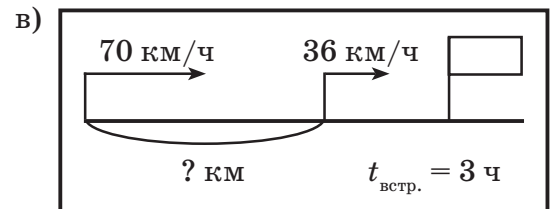
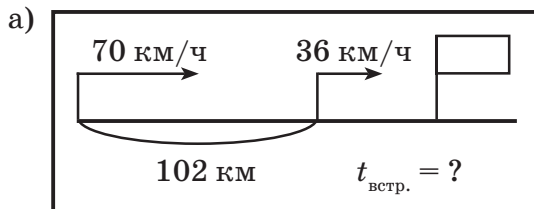
- а) Для покраски дома было израсходовано 8 одинаковых банок жёлтой краски и ещё a кг белил. Всего было израсходовано b кг краски. Сколько килограммов жёлтой краски в каждой банке?
 б) За 2 ч работы первый экскаватор вынул s м³ земли. Сколько кубических метров вынет второй экскаватор за 5 ч работы, если в час он вынимает на 15 м³ земли больше, чем первый?
 в) У Гали d марок, у Кати – на 12 марок больше, чем у Гали, а у Светы – $\frac{4}{9}$ числа марок первых двух девочек. Сколько марок у Светы?
 г) В школе x учеников. Каждый четвёртый из них учится в начальных классах, две трети – в средних, а остальные – в старших классах. Сколько учеников в старших классах?
 д) Треть учеников класса участвовали в олимпиаде, причем половина из них стали победителями. Сколько учеников в классе, если победителями стали y учеников?
 е) Первый рыбак поймал n рыб, что составило 35% рыб, пойманных вторым рыбаком. Сколько рыб поймали они вместе?



593 Проверь истинность высказывания:

$$\frac{42}{59} \leq \frac{(1006 \cdot 27 + 304\,410 : 73) : (687 \cdot 640 - 438\,934)}{(9080 \cdot 800 - 3\,669\,720) : 60\,920} < 2.$$

594 Реши задачи и определи, что в них общего, а что различного. Как называются такие задачи?



- 595** 1) На круговой диаграмме показано число учащихся, прочитавших в октябре указанное количество книг из школьной библиотеки. Измерь углы и определи число учащихся в каждой из выделенных групп, если всего в школе учатся 1400 детей.



Перерисуй в тетрадь таблицу и заполни пустые клетки:

Количество прочитанных книг	0	1	2	3 и более
Угол в градусах				
Число учащихся				

- 2) В таблице приведено количество книг, взятых в школьной библиотеке учащимися пятых классов этой школы.

Классы	5 «А»	5 «Б»	5 «В»	5 «Г»
Количество книг, взятых за год	468	660	792	240

Построй круговую диаграмму, показывающую распределение этих книг по пятым классам.

- 596** Трём покупателям продано $15\frac{1}{5}$ м материи. Первому продано $4\frac{2}{5}$ м, а второму – на $1\frac{3}{5}$ м больше, чем первому. Сколько метров материи продано третьему покупателю? На сколько метров материи больше продано третьему покупателю, чем первому?

- 597** В таблице приведены значения переменной y при указанных значениях переменной x . Построй формулу зависимости y от x .

1)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	12	13	14	15	16	17	18

3)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7	14	21	28	35	42	49

2)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	4	9	14	19	24	29	34

4)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	8	27	64	125	216	343

598 Наташа забыла первую цифру в коде замка: *85 327, но помнила, что всё шестизначное число было кратно 3. Сколько вариантов кода в самом худшем случае надо набрать Наташе, чтобы попасть к себе домой?

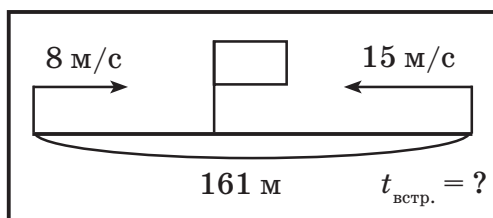
599 Запиши множество чисел, кратных 9, которые являются решениями неравенства:

- а) $148 < x \leq 162$; б) $515 \leq y < 550$; в) $735 \leq z < 738$.

600 Найди истинные высказывания. Из соответствующих им букв составь название реки. Где она расположена?

- | | |
|--|--|
| С 553 делится на 3; | Л 45 921 делится на 3 и на 9; |
| Е 3 является делителем 12 756; | О 9999 кратно 9, но не кратно 3; |
| М 347 022 не кратно 9; | А $647 + 35 \cdot 831$ не делится на 3; |
| В 9 не является делителем 77 777; | Н $272 727 - 1818$ делится на 9. |

601 Составь для данной задачи все возможные обратные задачи, представляя их условие с помощью схемы. Для всех задач запиши выражения и найди ответ.



602 В 12 часов дня из села Бубликово на велосипеде выехал почтальон со скоростью 22 км/час. Через час его пёс Шарик заметил, что почтальон забыл в Бубликово свою почтовую сумку. Пёс схватил сумку и бросился вдогонку. В 15 ч он догнал почтальона. С какой скоростью бежал Шарик?

603 Отцу было $32\frac{5}{12}$ лет, когда родилась дочь, и $35\frac{1}{12}$ лет, когда родился сын. Сколько лет сейчас дочери, если сыну $7\frac{11}{12}$ лет? Сколько лет отцу?

604 Найди корни уравнений с помощью правила «весов» (стр. 51):

- а) $4x - 27 = x$; б) $5x - 12 = x + 60$.

605 В таблице приведены значения переменной y при указанных значениях переменной x . Построй формулу зависимости y от x .

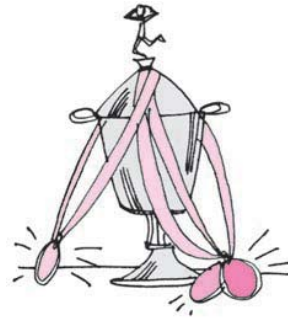
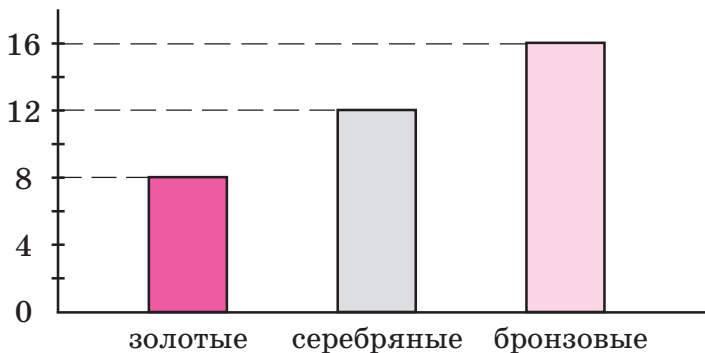
1)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	26	27	28	29	30	31	32

2)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	9	18	27	36	45	54	63

- 606** Определи, пользуясь столбчатой диаграммой, сколько медалей каждого вида завоевала спортивная команда во время олимпиады. Построй круговую и линейную диаграммы распределения завоеванных медалей по их видам.



- 607*** Сергей нашел произведение всех чисел от 1 до 11 включительно и записал результат на доске. Во время перерыва кто-то случайно стер три цифры, и в записи осталось число $399*68**$. Помоги восстановить цифры, не вычисляя произведение.

Задачи для самопроверки.

- 608** Запиши множество делителей и множество кратных числа 36.
- 609** Выбери из множества $A = \{11\ 111, 78\ 012, 123\ 400, 405\ 405, 888\ 888\}$ числа, кратные: а) 10; б) 2; в) 5; г) 3; д) 9.
- 610** Определи истинность высказываний. Составь наименьшее число из цифр – номеров истинных высказываний.
- Разность $292\ 929 - 26$ делится на 29.
 - Произведение $7 \cdot 4500 \cdot 398$ кратно 100.
 - Число 5 является делителем суммы $98\ 775 + 6350$.
 - Число 222 222 не кратно 3.
 - Число 807 534 делится на 2 и на 9.
 - Наибольшим решением неравенства $9570 \leq x < 10\ 815$, кратным 3 и 5, является число 10 800.
- 611** 1) Два мотоциклиста едут по одному шоссе со скоростями a км/ч и b км/ч ($a > b$). С какой скоростью изменяется расстояние между ними, если они едут: а) навстречу друг другу; б) в противоположных направлениях; в) вдогонку; г) с отставанием?
- 2) Саша и Дима идут по аллее навстречу друг другу. Сейчас между ними 200 м. Через сколько времени они встретятся, если скорость Саши 45 м/мин, а скорость Димы на 10 м/мин больше?
- 612** Выполни действия:
 $[(9825 + 243\ 000 : 648) \cdot 8070 - 9080 \cdot 9006 + 1\ 202\ 730] : 345$.

§ 4. Простые числа и делимость

1. Разложение чисел на простые множители.

При решении задач часто приходится представлять данное число в виде произведения нескольких множителей. В этом случае о числе говорят, что оно **разложено на множители**. Например, запись $40 = 4 \cdot 10$ означает, что число 40 разложено на множители 4 и 10.

Разложение на множители простого числа не представляет проблемы: оно состоит из двух различных множителей, где всегда один из множителей равен 1, а другой – самому числу. Например, $3 = 3 \cdot 1$.

Напротив, составное число всегда раскладывается хотя бы на два множителя, отличных от 1, причем зачастую разными способами. Так, 40 – это не только $4 \cdot 10$, но и $4 \cdot 5 \cdot 2$, и $8 \cdot 5$, и $20 \cdot 2 \dots$ Если же в любом из этих произведений продолжить разложение на множители, то все полученные в конечном итоге произведения простых множителей будут отличаться лишь порядком множителей:

$$40 = 4 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$40 = 4 \cdot 5 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2$$

$$40 = 8 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$40 = 20 \cdot 2 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$

А договорившись писать простые множители в разложении числа в порядке неубывания, придем к одному и тому же разложению этого числа на множители:

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

И вообще, **всякое составное число можно разложить на простые множители единственным образом** (с точностью до порядка множителей).

При разложении чисел на простые множители используют признаки делимости. Если числа небольшие, то запись можно вести, как было показано – в строчку. Для больших чисел используется запись в столбик.

Разложим, например, на простые множители число 11 550. Оно оканчивается нулем и поэтому делится на 10 (то есть на произведение $2 \cdot 5$).

Частное 1155 имеет сумму цифр 12, а значит, делится на 3.

Новое частное 385 делится на 5, в ответе получается 77.

$$\begin{array}{r|l}
 11\ 550 & 2 \cdot 5 \\
 1155 & 3 \\
 385 & 5 \\
 77 & 7 \\
 11 & 11 \\
 1 &
 \end{array}$$



Продолжая перебирать простые числа, находим делители 7 и 11 числа 77. В итоге в частном остается 1 и получается следующее разложение данного числа на простые множители:

$$11\ 550 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Таким образом, мы видим, что термин «составное число» выбран не случайно: составные числа как бы составлены из «кирпичиков» – простых чисел. Это свойство составных чисел даёт возможность ответить на различные вопросы, связанные с делимостью. Приведём лишь два примера.

1) Число делится лишь на те простые числа, которые входят в его разложение на простые множители. Так, число 11 550 делится на простые числа 2, 3, 5, 7 и 11, но не делится на простое число 13.

2) Число делится лишь на те составные числа, разложение которых на простые множители полностью содержится в разложении на простые множители самого числа. Например, число 11 550 делится на $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$, поскольку $11\ 550 = (3 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$. В то же время число 11 550 не делится на $4 = 2 \cdot 2$, так как в разложении числа 4 есть «лишняя» двойка.

К

613 Разложи на простые множители числа:

- 1) 8, 24, 35, 60, 72, 180, 260, 440, 600, 1000;
- 2) 162, 216, 594, 1001, 1024, 2304, 4620, 27 360.

614 Найди все числа, которые раскладываются на два разных однозначных простых множителя.

615 Запиши множество двузначных чисел, разложение которых на простые множители состоит:

- а) из двух одинаковых множителей;
- б) из трёх одинаковых множителей;
- в) из четырёх одинаковых множителей.

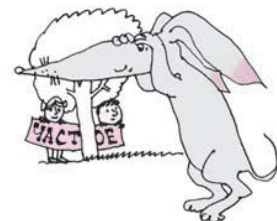
616 Разложи на простые множители числа 510, 1092, 1368, 1430 и определи, делится ли каждое из них на 7, 13, 19.

617 Запиши все четырёхзначные числа, в разложение которых на простые множители входят одновременно 7, 11 и 13.

618 $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Выпиши все числа, меньшие 100, на которые делится число a .

619 Определи, делится ли число a на b , и, если делится, найди частное:

- 1) $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 11$;
- 2) $a = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, $b = 2 \cdot 13$;
- 3) $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$;
- 4) $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$;
- 5) $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$, $b = 1000$;
- 6) $a = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$, $b = 1001$.





- 620** 1) Число a чётно. Чётно ли $3a$?
 2) Число b не делится на 5. Делится ли на 5 число $3b$?
 3) Число $3c$ делится на 7. Делится ли c на 7?
 4) Число $6d$ делится на 15. Всегда ли делится на 15 число d ?

- 621** Докажи или опровергни следующие утверждения:
 1) Если число делится на 3 и на 4, то оно делится на 12.
 2) Если число делится на 4 и на 6, то оно делится на 24.

- 622** Используя разложение на множители чисел 111 и 1001, вычисли наиболее удобным способом:

а) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$; б) $21 \cdot 37$; в) $11 \cdot 13 \cdot 35$; г) $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

- 623** В магазине имеется больше 300, но меньше 400 ножей и вилок. Если ножи и вилки считать десятками, то получится целое число десятков, если их считать дюжинами – получится целое число дюжин. Сколько в магазине вилок и сколько ножей, если ножей на 160 меньше, чем вилок?

- π** **624** 1) Почему значения следующих выражений являются составными числами: $151 \cdot 3$, $11 \cdot 139$, $401 \cdot 13$?
 2) Является ли составным числом значение произведения $1 \cdot 17$?
 3) Почему можно утверждать, что числа 210 724, 380 725, 101 121, 708 273, 290 029 – составные?

- 625** Может ли выражаться простым числом площадь квадрата, длина стороны которого является натуральным числом? А площадь прямоугольника, не являющегося квадратом?

- 626** Найди множества $D(42)$ и $D(56)$ делителей чисел 42 и 56. Запиши множество $D(42, 56)$ их общих делителей и укажи в этом множестве наибольший элемент. Как он называется?

- 627** Найди наибольший общий делитель чисел *методом перебора*:
 а) 10, 14 и 22; б) 15, 25 и 35; в) 33, 39 и 99; г) 6, 27 и 64.

- 628** 1) Запиши множество значений переменной a , при которых дробь $\frac{a}{7}$ является правильной.
 2) Запиши множество значений переменной b , при которых дробь $\frac{b}{9}$ является неправильной.

- 629** Сравни части величин:

а) $\frac{3}{11}$ и $\frac{8}{11}$; в) $\frac{7}{8}$ и $\frac{8}{7}$; д) 2% и $\frac{2}{39}$; ж) $3\frac{4}{9}$ и $2\frac{5}{9}$;
 б) $\frac{5}{6}$ и $\frac{5}{14}$; г) $\frac{243}{243}$ и $\frac{9}{4}$; е) 8% и $\frac{7}{100}$; з) $5\frac{6}{23}$ и $5\frac{6}{7}$.

630 В школьном саду растут яблоны, груши, сливы и вишни. Яблони занимают $\frac{5}{12}$ всей площади сада, груши – $\frac{2}{12}$, вишни – $\frac{4}{12}$, а остальную площадь занимают сливы. Какую часть площади сада занимают сливы?

631 В школьный буфет привезли пирожки с рисом, картошкой, мясом и вареньем. Пирожки с рисом составляют $\frac{3}{10}$ всех пирожков, а пирожки с мясом – на $\frac{1}{10}$ меньше. С вареньем было столько же пирожков, сколько с рисом. Сколько привезли пирожков с картошкой, если всего привезли 250 пирожков?

632 Магазин повысил цены на диваны на 10%, а на остальные предметы мебели – на 15%. До повышения цен диван стоил 2600 р., стол – 1800 р., а стул – 900 р. На сколько после повышения цен увеличилась стоимость набора мебели, состоящего из дивана, стола и четырёх стульев?

633 Найди значение выражения:

1) $3\frac{2}{3} + 2\frac{2}{3}$;

4) $17 - 13\frac{2}{5}$;

7) $16\frac{3}{20} - 15\frac{17}{20}$;

2) $7\frac{5}{9} + 10\frac{8}{9}$;

5) $11 - 6\frac{7}{11}$;

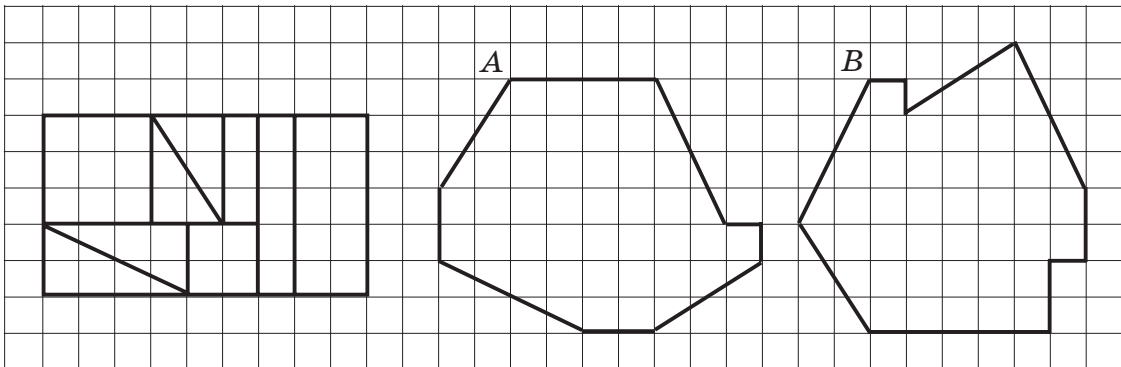
8) $9\frac{9}{40} - 5\frac{28}{40}$;

3) $25\frac{13}{15} + 12\frac{11}{15}$;

6) $23 - 9\frac{6}{17}$;

9) $8\frac{7}{34} - 4\frac{25}{34}$.

634 Перерисуй фигуры *A* и *B* в тетрадь и разбей их на части, из которых составлен прямоугольник. Части можно переворачивать.



D

635 Разложи на простые множители числа:

1) 32, 50, 92, 198, 240, 1500;

2) 2520, 10 780, 374 400, 1 742 500.

636 Запиши все трёхзначные числа, которые раскладываются на два одинаковых простых множителя.

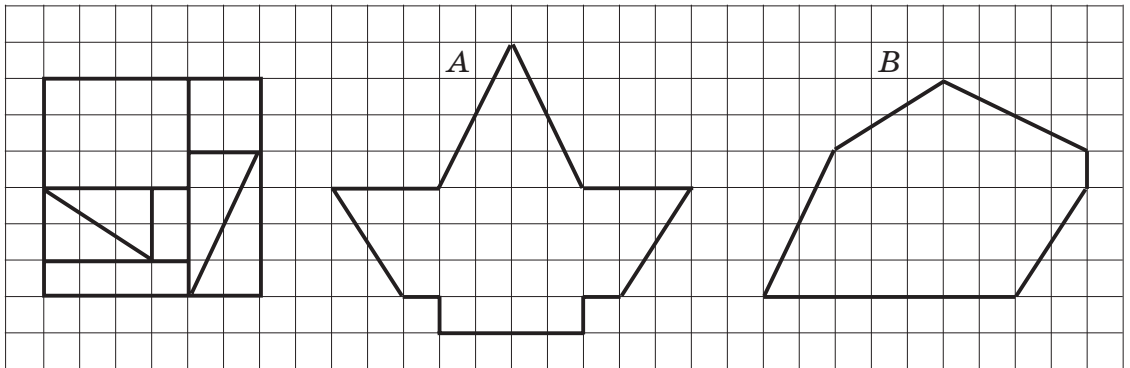
637 Выпиши все двузначные числа, являющиеся делителями числа *a*, если $a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$.

- 638** Определи, делится ли число a на число b , и, если делится, найди частное:
 1) $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 11$; 4) $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$;
 2) $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, $b = 5 \cdot 13$; 5) $a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$, $b = 405$;
 3) $a = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$, $b = 3 \cdot 5 \cdot 17$; 6) $a = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29$, $b = 2002$.

639 За самостоятельную работу по математике $\frac{2}{15}$ учеников класса получили тройки, $\frac{7}{15}$ – четвёрки, а остальные – пятёрки. Каких отметок и на сколько было выставлено больше – троек или пятёрок, если всего в классе 30 учеников?

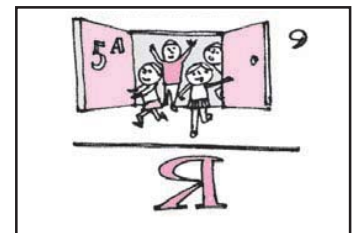
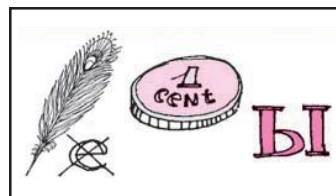
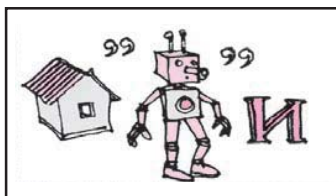
640 Найди значение выражения $(a - 3\frac{5}{18}) - (b + 8\frac{7}{18})$, если $a = 25\frac{1}{18}$, $b = 3\frac{8}{18}$.

641 Перерисуй фигуры A и B в тетрадь и разбей их на части, из которых составлен квадрат. Части можно переворачивать.



642 В магазине шкатулка стоит 1600 р., а в палатке такая же шкатулка стоит на 5% дешевле. За сколько можно купить эту шкатулку в палатке? Какая сумма при этом экономится?

с **643*** Разгадай ребусы:



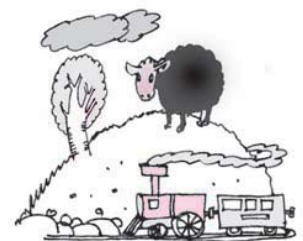
644* Загадка-анекдот

По Шотландии в одном купе поезда едут два пассажира. Один из них, поглядев в окно, удивился.

– Смотрите! – воскликнул он. – В Шотландии, оказывается, овцы чёрные!

– Отнюдь нет, – ответил попутчик. – В Шотландии есть хотя бы одна овца, у которой хотя бы один бок чёрный.

Кто из пассажиров лучше знает математику?



645* Барон Мюнхгаузен утверждал, что ему удалось найти такое натуральное число, произведение всех цифр которого равно 6552. Покажи, что он сказал неправду.

646* Вычисляя сумму всех различных простых делителей некоторого шестизначного числа, в записи которого все цифры одинаковы, Стёпа Растеряйкин получил 70, а Петя Угадайкин – 80. Покажи, что они оба ошиблись.

2. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа.

Все натуральные числа имеют хотя бы один общий делитель – число 1. Однако у некоторых чисел могут быть и другие общие делители. Например, числа 24 и 16 имеют, помимо 1, общие делители 2, 4 и 8. Их **наибольшим общим делителем** является число 8. Наибольший общий делитель чисел a и b обозначается НОД (a, b).

Мы уже знаем, что наибольший общий делитель можно найти, перебирая делители меньшего из данных чисел или делители разности этих чисел. Ещё одним распространённым способом поиска НОД является разложение заданных чисел на простые множители.

Найдём, например, наибольший общий делитель чисел 1968 и 2520. Разложим их на простые множители и выделим наибольшее возможное число одинаковых множителей:

$$1968 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 41 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 41,$$

$$2520 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Оба данных числа делятся на произведение $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, равное 24. Большого общего делителя этих чисел подобрать нельзя, так как все остальные их простые делители различны. Значит,

$$\text{НОД}(1968, 2520) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

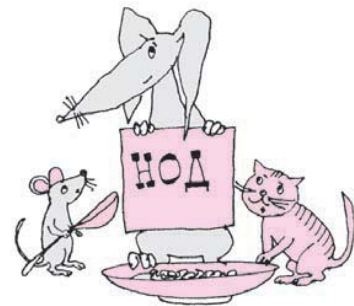
Рассмотренный пример иллюстрирует общий **алгоритм нахождения НОД** нескольких натуральных чисел с помощью разложения чисел на простые множители:

1. Разложить данные числа на простые множители.
2. Выписать в виде произведения все общие простые множители.
3. Если необходимо, найти полученное произведение.

Пример 1. Найти НОД (60, 72, 96).

$$60 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5; \quad 72 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3; \quad 96 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3}.$$

$$\text{НОД}(60, 72, 96) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$



Пример 2. Найти НОД (56, 81).

$$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7; \quad 81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

В разложении чисел 56 и 81 нет одинаковых множителей. Такие числа называются **взаимно простыми**. Их наибольший общий делитель равен 1:

$$\text{НОД}(56, 81) = 1.$$

Пример 3. Найти НОД (45, 450).

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5; \quad 450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Видим, что все простые множители числа 45 входят в разложение 450. Действительно, 450 делится на 45, поэтому 45 и будет наибольшим общим делителем этих чисел.

$$\text{НОД}(45, 450) = 45.$$

К

647 1) Опровергни утверждение: «Число 2 является общим делителем всех чисел». Назови три числа, кратных двум. Как они называются?

2) Найди множество значений переменной x , удовлетворяющих высказыванию: «Число x является общим делителем всех чисел».

648 Найди множество значений переменной y , удовлетворяющих высказыванию: «Число y является общим делителем чисел 12 и 30». Подчеркни в этом множестве наибольший элемент. Как он называется?

649 Докажи, что число 5 является наибольшим общим делителем чисел 85 и 90. Какими способами можно это сделать?

650 Даны разложения чисел на простые множители. Найди их наибольший общий делитель:

$$1) a = 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 11;$$

$$2) a = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7,$$

$$b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5;$$

$$3) a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11;$$

$$4) a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13,$$

$$b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7;$$

$$5) a = 2 \cdot 3 \cdot 7,$$

$$b = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7,$$

$$c = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19;$$

$$6) a = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,$$

$$b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5,$$

$$c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17.$$



651 Найди наибольший общий делитель чисел методом разложения на простые множители:

$$1) 75 \text{ и } 135;$$

$$3) 125 \text{ и } 462;$$

$$5) 117, 195 \text{ и } 312;$$

$$2) 180 \text{ и } 210;$$

$$4) 504 \text{ и } 720;$$

$$6) 306, 340 \text{ и } 850.$$

652 Найди наибольший общий делитель чисел наиболее удобным способом:

$$1) 14 \text{ и } 140;$$

$$2) 4914 \text{ и } 4915;$$

$$3) 6, 81 \text{ и } 9054;$$

$$4) 3150 \text{ и } 1848.$$

653 1) Даны взаимно простые числа. Всегда ли они простые?

2) Среди чисел 4, 15, 22 и 77 укажи все пары взаимно простых чисел.

654 Все ли числа каждой группы являются взаимно простыми:

- 1) 57 и 86; 2) 28, 45 и 60; 3) 333 и 7000; 4) 328 и 459?

655 1) Число a делится на число b . Найди НОД (a, b).

2) В каком случае НОД (a, b) = a ? Придумай две пары таких чисел.

3) Что можно сказать о числах a и b , если НОД (a, b) = 1?

656 Найди устно:

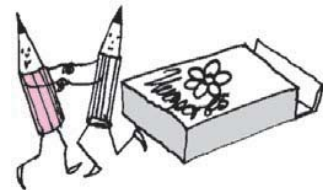
- 1) НОД (8, 48); 3) НОД (7, 15); 5) НОД (20, 100);
2) НОД (23, 69); 4) НОД (380, 381); 6) НОД (14, 25).

657 Нарисуй диаграммы Эйлера–Венна множеств: 1) D (18) и D (24); 2) D (36) и D (77); 3) D (21) и D (42).

658 1) Ковбой Джо, вычисляя НОД (24, 320), получил в ответе 48 и тут же догадался, что допущена ошибка. Как он это определил?

2) Может ли НОД нескольких чисел быть больше хотя бы одного из этих чисел?

659 Имеется по 48 синих, жёлтых и зелёных карандашей, 72 красных карандаша и 120 картинок для раскрашивания. Какое наибольшее число одинаковых наборов можно составить из этих картинок и карандашей так, чтобы все картинки и карандаши вошли в эти наборы? По сколько предметов в каждом наборе?



660 В депо из одинаковых вагонов было сформировано 3 поезда. Первый – на 418 пассажиров, второй – на 456 пассажиров, и третий – на 494 пассажира. Сколько вагонов в каждом поезде, если известно, что общее число вагонов не превышает 50?

π

661 Вычисли устно, используя законы умножения:

- 1) $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9$; 3) $203 \cdot 4 \cdot 250$; 5) $5 \cdot 12 \cdot 25 \cdot 2$;
2) $50 \cdot 386 \cdot 2$; 4) $125 \cdot 72 \cdot 8$; 6) $56 \cdot 125 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 5$.

662 Запиши множества K (15) и K (18) чисел, кратных числам 15 и 18, и множество K (15, 18) их общих кратных. Найди в множестве K (15, 18) наименьший элемент. Как он называется?

663 Найди пересечение и объединение множеств натуральных решений неравенств:

- 1) $x > 8$ и $x \leq 11$; 3) $2 < x \leq 8$ и $x \geq 7$;
2) $x \leq 4$ и $7 < x \leq 9$; 4) $5 \leq x < 8$ и $1 \leq x \leq 6$.

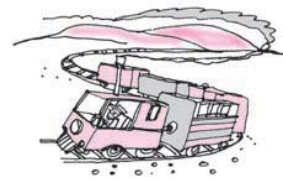
664 БЛИЦтурнир

1) Навстречу друг другу едут два поезда. Скорость одного из них равна a км/ч, что составляет $\frac{4}{5}$ скорости другого поезда. Чему равна их скорость сближения?

2) Автомобиль едет по шоссе со скоростью b км/ч. Впереди него едет велосипедист, скорость которого составляет 23% скорости автомобиля. С какой скоростью уменьшается расстояние между ними?

3) Две лодки плывут по реке навстречу друг другу. Сейчас между ними d км. Скорость первой лодки c км/ч, а скорость второй – в 3 раза меньше. Какое расстояние будет между лодками через 2 ч, если известно, что до этого времени они не встретятся?

4) Из двух пунктов, удалённых друг от друга на n км, одновременно в противоположных направлениях выехали два автобуса. Скорость первого автобуса равна v км/ч, а скорость второго составляет $\frac{7}{8}$ скорости первого. На каком расстоянии друг от друга будут автобусы через 4 часа?



665 Реши задачу, а затем составь и реши обратную задачу. Сколько можно составить обратных задач?

1) Два пассажира метро, начавшие одновременно один спуск, другой – подъём по соседним эскалаторам, встретились через 40 с. Найти длину наружной части лестницы, если скорость её движения 1 м/с и пассажиры не перемещались по эскалатору.

2) Один мальчик пробегает на коньках 8 м в секунду, а другой – 6 м в секунду. Через сколько секунд первый опередит второго на 50 м, если они одновременно побегут из одного и того же места в одном и том же направлении?

666 Реши уравнения с комментированием:

1) $(2x + 7x) : 5 = 27$; 3) $26 \cdot (7y + 5 + 3) = 1300$;

2) $(8y + y + 12y) : 14 = 30$; 4) $640 : (5k + 4 + 7k) = 16$.

667 1) С огорода принесли репу, брюкву и морковь – всего 18 кг. Сколько овощей каждого вида принесли с огорода, если известно, что моркови принесли в 2 раза меньше, чем брюквы, и в 3 раза меньше, чем репы?

2) С огорода принесли огурцы, помидоры и лук – всего 18 кг. Сколько овощей каждого вида принесли с огорода, если огурцов принесли в 4 раза больше, чем лука, а помидоров принесли столько же, сколько и огурцов?

668 Построй с помощью транспортира смежные углы, если известно, что:

1) один из них в 5 раз больше, чем второй;

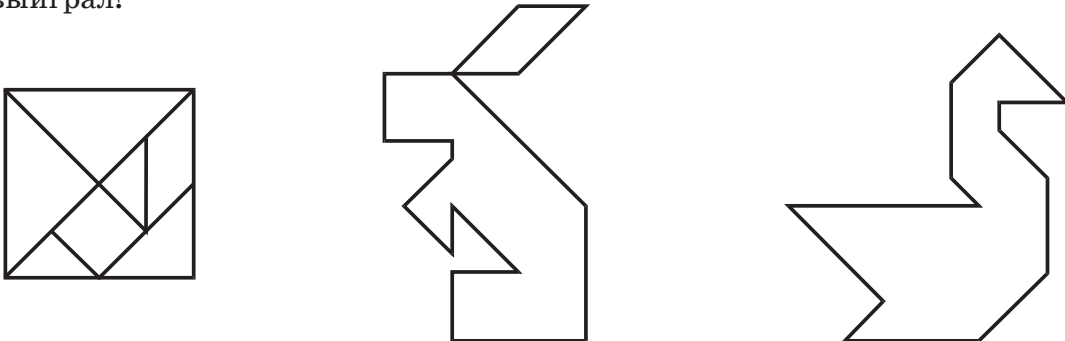
2) один из них на 56° больше, чем второй.

669 От веревки длиной $8\frac{3}{20}$ м отрезали $3\frac{17}{20}$ м. На сколько метров длина оставшейся части больше той, которую отрезали?

670 В числе 7 030 506 все нули замени одной и той же цифрой – такой, чтобы полученное число делилось на 9. Напиши множество всех возможных цифр.

671 Игра «Танграм»

Квадрат разрезали на части так, как показано на рисунке. Используя все 7 частей, составь силуэты зайца и лебедя. Кто первый это сделает – тот и выиграл!



Д

672 Найди наибольший общий делитель чисел, если:

1) $a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$;

2) $a = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 31$;

3) $a = 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 19$, $b = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$, $c = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$;

4) $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 29$, $b = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29$, $c = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29$.

673 Найди наибольший общий делитель чисел методом разложения на простые множители:

1) 520 и 468; 2) 814 и 4400; 3) 855 и 11 400; 4) 40, 100 и 180.

674 Для новогодних подарков купили 270 яблок, 675 мандаринов и различные сладости. Какое наибольшее число подарков можно приготовить, чтобы в них были одинаковые наборы яблок и мандаринов и все они вошли в эти подарки?

675 Володя отправился на велосипеде из деревни Горки в соседнюю деревню Дровино в магазин за продуктами. Перед отъездом он запер в сарае своего пса Грея, боясь, что тот подерётся с незнакомыми собаками соседней деревни. Через 6 мин Грей расширил кошачий лаз сарая и кинулся вдогонку со скоростью 400 м/мин. На каком расстоянии от деревни Дровино Грей догнал своего хозяина, если Володя ехал со скоростью 250 м/мин, а расстояние между деревнями 5 км?



676 Составь выражение и найди его значение при заданных значениях букв:

а) Отец красит m метров забора в час, а сын – n метров в час. За сколько времени, работая вместе с той же производительностью, они покрасят забор длиной k метров? ($m = 6$, $n = 2$, $k = 24$.)

б) В первом классе учатся a учеников, что на 4 ученика меньше, чем во втором классе. В третьем классе учатся в 2 раза меньше учеников, чем в первом и втором классах вместе. Сколько учеников во всех трёх классах? ($a = 22$.)

в) На машину погрузили b ящиков. В каждом ящике было 75 коробок, а в каждой коробке – по c цветных карандашей. Сколько всего карандашей погрузили на машину? ($b = 15$, $c = 24$.)

г) Двое рабочих на станках обрабатывают одинаковые детали. Первый обслуживает 5 станков, каждый из которых обрабатывает по x деталей в час, а другой – 4 станка, каждый из которых обрабатывает по y деталей в час. Сколько деталей обработают оба рабочих вместе за 7 часов? ($x = 12$, $y = 16$.)

677 Пусть A – множество натуральных решений неравенства $5 \leq x < 11$, а B – множество натуральных решений неравенства $8 < x \leq 12$. Запиши множества A и B с помощью фигурных скобок, найди их объединение и пересечение. Построй диаграмму Эйлера–Венна множеств A и B .

678 Реши уравнения и сделай проверку:

1) $560 - 3x = 278$;

3) $8000 : (28m + 4) - 15 = 25$;

2) $y : 12 + 36 = 111$;

4) $64 - (3n + 8n + n) : 40 = 37$.

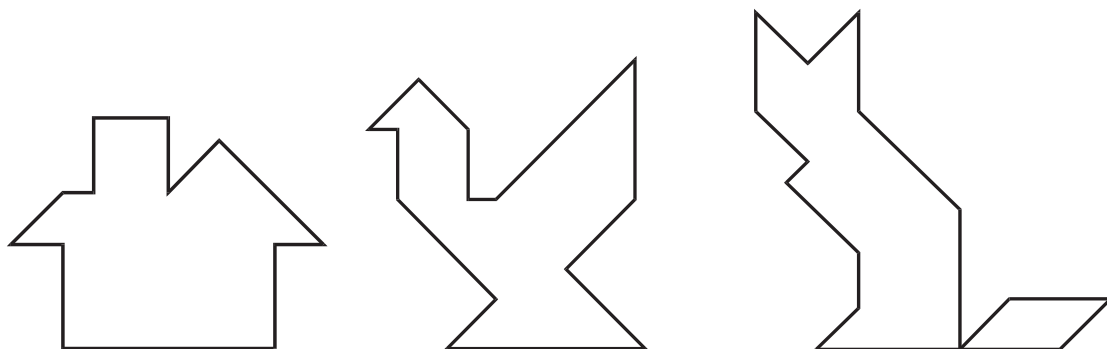
679 Докажи истинность утверждения:

$$\frac{9 \cdot 9 - [210 : 30 \cdot 7 - 6 \cdot 6 : (15 \cdot 4 - 7 \cdot 8)] : 5 \cdot 8}{[(40 \cdot 4 : 5 + 2700 : 900) : 7 \cdot 90 - 26 \cdot 5] : 40 - (9 \cdot 8) : (6 \cdot 4)} > 1.$$

Из полученной неправильной дроби выдели целую часть и проиллюстрируй это преобразование с помощью числового луча.

680 Игра «Танграм»

Используя все 7 частей, на которые разделён квадрат в № 671, составь силуэты нарисованных фигур: домика, курицы и кошки.



с

681* Найди правило размещения чисел в клетках таблицы и заполни пустые клетки:

25	26	29	
28	27	30	
33	32	31	

5	9	15	
7	13	21	
11	19		
17			

6	9	12	15
12		20	
21	26		
3		15	

682* Когда «*послезавтра*» станет «*вчера*», то «*сегодня*» будет так же далеко от воскресенья, как тот день, который был «*сегодня*», когда «*вчера*» было «*завтра*». Какой сегодня день недели?

683* Десяти собакам и кошкам скормили 56 галет. Каждой кошке досталось 5 галет, а каждой собаке – 6. Сколько было собак и сколько кошек?



3. Наименьшее общее кратное.

Любые два числа a и b имеют общие кратные, например их общими кратными являются произведения ab , $2ab$, $3ab$ и т.д. Так, произведение $12 \cdot 30$, равно 360, делится и на 12, и на 30. Однако существуют и меньшие числа, кратные 12 и 30, например 180, 120, 60. Число 60 является их **наименьшим общим кратным**.

Наименьшее общее кратное чисел a и b обозначается НОК (a , b).

Найти наименьшее общее кратное можно, перебирая кратные одного из чисел (лучше взять большее число). Например, НОК (12, 30) можно найти так:

$30 \cdot 1 = 30$, число 30 не делится на 12, значит, 30 не является НОК (12, 30);

$30 \cdot 2 = 60$, число 60 делится на 12, значит, НОК (12, 30) = 60.

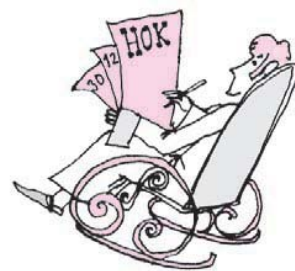
Однако понятно, что такой способ рассуждений удобен лишь для небольших чисел. В общем случае на помощь вновь приходит разложение чисел на простые множители.

Продemonстрируем алгоритм нахождения НОК на уже знакомом нам примере чисел 12 и 30. Разложим их на простые множители:

$$12 = 2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{3}; \quad 30 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5.$$

Допишем к простым множителям числа 12 «недостающий» множитель 5 из второго произведения. Полученное произведение $2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5$ содержит оба разложения, а значит, кратно каждому из них: $(2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{3}) \cdot 5 = 2 \cdot (\underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5)$.

В то же время, оно содержит минимально возможное число множителей. Таким образом, НОК (12, 30) = $2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5 = 60$.



Этот способ нахождения НОК можно использовать и в общем случае.

Мы приходим к следующему *алгоритму нахождения НОК* нескольких натуральных чисел с помощью разложения чисел на простые множители:

1. Разложить данные числа на простые множители.

2. Выписать разложение одного из них.

3. Добавить к нему недостающие множители из разложений оставшихся чисел.

4. Если необходимо, найти полученное произведение.

Пример 1. Найти НОК (80, 140).

$$80 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5; \quad 140 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{5} \cdot 7.$$

В разложении числа 80 не хватает множителя 7 из разложения числа 140. Значит, $\text{НОК}(80, 140) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 80 \cdot 7 = 560$.

Пример 2. Найти НОК (32, 25).

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2; \quad 25 = 5 \cdot 5.$$

$$\text{НОК}(32, 25) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 32 \cdot 25 = 800.$$

Числа 32 и 25 взаимно простые – в их разложении нет общих множителей, поэтому наименьшее общее кратное оказалось равным их произведению. И вообще, **наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению.**

Пример 3. Найти НОК (28, 35, 140).

$$28 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{7}; \quad 35 = \underline{5} \cdot \underline{7}; \quad 140 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{5} \cdot \underline{7}.$$

Видим, что в разложении числа 140 содержатся все простые множители чисел 28 и 35, то есть 140 является кратным этих чисел. Значит, 140 является в данном случае и наименьшим общим кратным:

$$\text{НОК}(28, 35, 140) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 140.$$

К

684 Найди наименьшее общее кратное чисел 28 и 42:

1) составляя множество $K(28, 42)$ их общих кратных;

2) методом перебора;

3) методом разложения на простые множители.



685

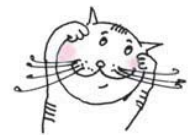
Даны разложения чисел на простые множители. Найди их наименьшее общее кратное:

$$1) a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11;$$

$$2) a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13, \quad b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7;$$

$$3) a = 2 \cdot 3 \cdot 7, \quad b = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7, \quad c = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19;$$

$$4) a = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5, \quad c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17.$$



686

Найди наименьшее общее кратное чисел методом разложения на простые множители:

1) 28 и 35;

3) 21 и 100;

5) 264 и 300;

7) 72, 90 и 96;

2) 16 и 56;

4) 18 и 162;

6) 360 и 1020;

8) 58, 87 и 435.

687 1) Число 8 069 424 делится на 527. Не выполняя разложения на простые множители, найди НОК (527, 8 069 424).

2) Число a делится на число b . Чему равен НОК (a, b)?

3) Известно, что НОК (a, b) = a . Что можно сказать о числах a и b ?

688 Вычисли устно:

1) НОК (25, 100); 3) НОК (3, 12 121 212); 5) НОК (5, 102 030 405);

2) НОК (18, 54); 4) НОК (9, 117 117 117); 6) НОК (6, 300 200 100).

689 Докажи, что данные числа взаимно простые, и найди их наименьшее общее кратное:

1) 4 и 125; 2) 33 и 1000; 3) 111 и 200; 4) 18 и 1001.

690 Известно, что НОК (a, b) = ab . Что можно сказать о числах a и b ?

691 Найди устно:

1) НОК (5, 12); 2) НОК (10, 17); 3) НОК (8, 21); 4) НОК (6, 25).

692 1) Не выполняя вычислений, опровергни утверждение:

НОК (352, 10 692) = 704.

2) Объясни, почему наименьшее общее кратное двух чисел не может быть меньше любого из них.

693 Докажи истинность равенства: НОК (18, 24) · НОД (18, 24) = 18 · 24.

Проверь, выполняется ли оно для чисел 42 и 70, а потом ещё для каких-нибудь двух чисел, которые ты возьмёшь по собственному усмотрению. Сформулируй гипотезу. Можно ли на основании рассмотренных примеров утверждать, что это свойство выполняется *для всех* натуральных чисел?

694 Число яблок в ящике меньше 100. Их можно разделить поровну между 2, 3, 4, 5 и 6 детьми. Сколько яблок в ящике?

695 На кольцевой дорожке длиной 360 м проводится эстафета, длина каждого этапа которой 150 м. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете?

696 В морской порт теплоход «Витязь» прибывает один раз в 12 дней, теплоход «Адмирал Ушаков» – один раз в 20 дней, а теплоход «Надежда» – один раз в 18 дней. В прошлый понедельник все три теплохода были в этом порту. В какой день недели они в следующий раз все вместе придут в этот порт?



π

697 Найди значения частных кратчайшим способом:

1) $(2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7) : (2 \cdot 7)$;

3) $(2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13) : (5 \cdot 5 \cdot 13)$;

2) $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) : (2 \cdot 3 \cdot 5)$;

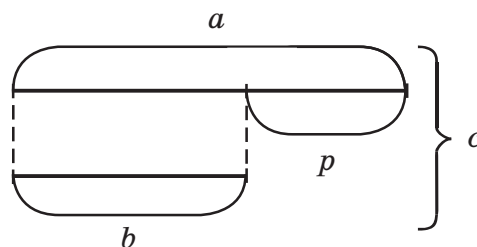
4) $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 29) : (2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 29)$.

698 При помощи разложения чисел на простые множители определи, во сколько раз: а) 10 584 больше 168; б) 525 меньше 13 125.

699 Определи истинность высказываний:

- 1) Два чётных числа не могут быть взаимно простыми.
- 2) Чётное и нечётное числа всегда взаимно простые.
- 3) Два различных простых числа являются взаимно простыми.
- 4) Два составных числа не могут быть взаимно простыми.
- 5) Два последовательных натуральных числа всегда взаимно простые.
- 6) Если число m делится на число n , то $\text{НОД}(m, n) = m$.

700 Построй с помощью схемы формулу, выражающую числа a и b через их сумму c и разность p . Пользуясь установленными соотношениями, реши задачи:



1) В классе 40 учеников, причём девочек на 6 больше, чем мальчиков. Сколько в классе девочек, а сколько мальчиков?

2) Таня купила 70 тетрадей в клетку и в линейку. Тетрадей в линейку было на 12 меньше, чем тетрадей в клетку. Сколько было тетрадей каждого вида?

3) Два бака вмещают 480 л воды, причём один из них вмещает на 32 л меньше, чем второй. Чему равна вместимость каждого бака?

4) Сумма двух чисел 954, а разность 158. Найди эти числа.

701 1) Объясни смысл равенств: $a(b + c) = ab + ac$, $a(b - c) = ab - ac$.

2) Разложи каждое число на простые множители и общие множители вынеси за скобки: а) $18 + 24$; б) $80 - 32$; в) $12 + 48$; г) $92 - 23$.

Какие свойства чисел при этом используются?

702 Найди три решения неравенства:

1) $\frac{5}{18} \leq x < \frac{5}{8}$;

2) $1\frac{4}{7} < y \leq 4\frac{2}{39}$;

3) $5\frac{3}{11} \leq z \leq 5\frac{9}{11}$.

703 В первом ящике на 7 кг больше печенья, чем во втором. Какая будет разность между количествами печенья в этих ящиках, если:

1) переложить $2\frac{3}{4}$ кг из первого ящика во второй;

2) переложить $2\frac{3}{4}$ кг из второго ящика в первый?



704 Спортсмену осталось пробежать 150 м, что составляет $\frac{3}{10}$ всей дистанции. Чему равна длина всей дистанции? Сколько метров уже пробежал спортсмен?

705 Когда израсходовали $\frac{1}{3}$ куса тесьмы, а затем $\frac{5}{6}$ оставшейся части, осталось 8 м тесьмы. Сколько тесьмы было в куске первоначально?

706 Найди значения выражений:

- 1) $5432 \cdot 257 + 257 \cdot 1568 - 1\,799\,000$;
- 2) $(406 \cdot 978 \cdot 500\,000) : 978 - 37\,509$;
- 3) $(352 \cdot 7203 + 418 \cdot 7203) : 77$;
- 4) $(216 \cdot 3005 - 216 \cdot 2985 + 980 \cdot 216) : 100 - 144\,288 : 72$.



707 Викторина «Древний Рим»

1) Выдели из неправильных дробей, принадлежащих множеству X , целую часть и расположи полученные числа в порядке убывания, сопоставив их соответствующим буквам. В ответе получится второе имя древнеримского императора Августа.

$$X = \left\{ \frac{11}{18}, \frac{39}{11}, \frac{154}{75}, \frac{126}{126}, \frac{2}{9}, \frac{21}{11}, \frac{48}{16}, \frac{57}{103}, \frac{14}{5}, \frac{40}{11}, \frac{18}{11} \right\}$$

Д
К
В
Н
Е
И
Т
Р
А
О
А

2) Представь смешанные числа, принадлежащие множеству Y , в виде неправильных дробей. Расположи дроби с числителем 92 в порядке возрастания и сопоставь их соответствующим буквам. В ответе получится название реки в Древнем Риме между Римской республикой и Галлией.

$$Y = \left\{ 13\frac{1}{7}, 5\frac{2}{8}, 2\frac{22}{35}, 1\frac{45}{48}, 30\frac{2}{3}, 2\frac{18}{37}, 4\frac{6}{18}, 18\frac{2}{5}, 3\frac{5}{29}, 6\frac{2}{14}, 4\frac{8}{21} \right\}$$

К
А
У
З
Н
Р
Е
О
Б
Л
И

708 Из жести сделали бак без крышки. Он имеет форму куба с длиной ребра 80 см. Бак надо покрасить снаружи и изнутри. Какую площадь надо покрасить? Какова вместимость бака?

Д

709 Найди наименьшее общее кратное чисел:

- 1) $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$;
- 2) $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$;
- 3) $a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, $b = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$, $c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
- 4) $a = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$, $c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

710 Найди наименьшее общее кратное чисел с помощью разложения на простые множители:

- 1) 350 и 630; 2) 2070 и 48 300; 3) 18, 42 и 60; 4) 48, 126 и 150.

711 На крыше дома висело 28 сосулек. Из них днем растаяло на 6 сосулек больше, чем осталось. Сколько сосулек растаяло, а сколько осталось?

712 Периметр садового участка прямоугольной формы равен 98 м, причём его длина на 1 м больше ширины. Чему равна площадь этого участка? Вырази её в арах.

713 Викторина «Герои произведений Гомера»

1) Выдели из неправильных дробей, принадлежащих множеству X , целую часть и расположи полученные числа в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам. В ответе получится имя божества – покровителя Одиссея.

$$X = \left\{ \frac{2}{19}, \frac{1}{5}, \frac{14}{11}, \frac{7}{11}, \frac{38}{19}, \frac{18}{19}, \frac{8}{5}, \frac{10}{11}, \frac{21}{5}, \frac{136}{137}, \frac{35}{11} \right\}$$

К
О
А
М
И
Л
Ф
Е
А
Р
Н

2) Представь смешанные числа, принадлежащие множеству Y , в виде неправильных дробей. Расположи дроби с числителем 56 в порядке убывания и сопоставь их соответствующим буквам. В ответе получится имя бога, преследовавшего Одиссея во время его путешествия.

$$Y = \left\{ 1\frac{17}{39}, 5\frac{1}{11}, 11\frac{1}{5}, 3\frac{5}{17}, 1\frac{2}{43}, 6\frac{5}{8}, 2\frac{10}{23}, 4\frac{8}{15}, 6\frac{2}{9}, 7\frac{1}{8}, 18\frac{2}{3}, 3\frac{11}{15} \right\}$$

Н
Е
О
Д
А
Р
О
У
С
Т
П
Й

3) Вычисли значения данных выражений, найди их сумму и воспользуйся указанным ключом для определения имени сына Одиссея и Пенелопы.

а) $4 \cdot 56 \cdot 25$;	Нестор – 123 529
б) $24 \cdot 2 \cdot 50 - 7200 : 8$;	Орест – 72 417
в) $8 \cdot 125 \cdot (600 - 599)$;	Филотий – 300 005
г) $39 \cdot 418 \cdot (321 - 321)$;	Алкиной – 86 739
д) $25 \cdot 125 \cdot 16$;	Телемах – 113 675
е) $(924 - 923) \cdot 715 : 715$;	Парис – 107 545
ж) $308 \cdot 75 - 308 \cdot 62$;	Гефест – 95 730
з) $256 \cdot 34 + 256 \cdot 26$;	Икарий – 204 809
и) $426 \cdot 47 + 23 \cdot 426 + 426 \cdot 15$.	Лаэрт – 127 375



с **714*** Может ли быть верным равенство:

$$К \times О \times Т = У \times Ч \times Е \times Н \times Ы \times Й,$$

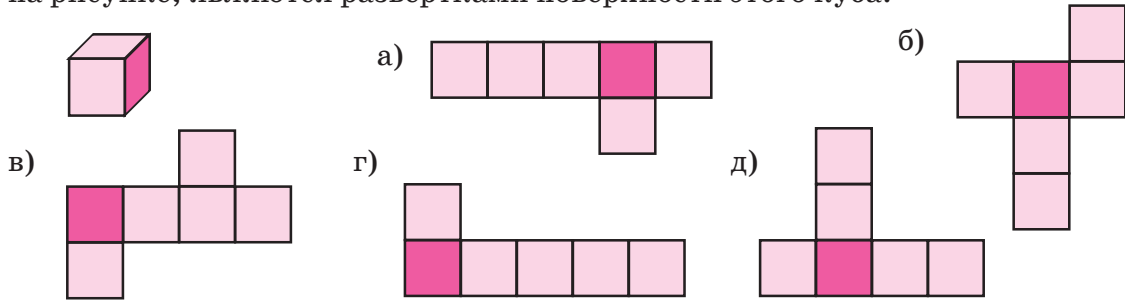
если в него вместо букв поставить цифры от 1 до 9 (разным буквам соответствуют разные цифры)?

715* Если задуманное число умножить на 5 и к полученному результату прибавить 1, потом полученную сумму увеличить в 6 раз и к результату прибавить 2, затем новую сумму умножить на 7 и полученное произведение увеличить на 4, то получим число, которое в 16 раз больше числа 135. Найди задуманное число.

716* Выполняя приказ царя Гороха, генерал Муштралкин пытался выстроить всех солдат в ряды сначала по 2, а затем – по 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, но, к его удивлению, каждый раз последний ряд оказывался неполным, так как оставалось соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 солдат. Какое наименьшее число солдат могло быть?



717* Все шесть граней куба – квадраты. Подумай, какие из фигур, изображенных на рисунке, являются развертками поверхности этого куба.



4. Степень числа.

Мы уже знаем, что сумму одинаковых слагаемых можно записать короче в виде произведения, например:

$$a + a + a + a + a = 5a.$$

Произведение одинаковых множителей также записывают короче и называют **степенью**, например:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5.$$

Читают: « a в степени 5» (или просто « a в пятой»). При этом число a называют **основанием степени**, а число 5 – **показателем степени**. Основание показывает, какой множитель взяли, а показатель – сколько таких множителей взяли.

Степенью числа a с натуральным показателем n ($n > 1$) называется произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, \quad n > 1.$$

Степенью числа a с натуральным показателем 1 называется само число a :

$$a^1 = a.$$

Вторая и третья степени числа a имеют специальное название. Вторую степень называют **квадратом**, а третью – **кубом** числа a . Читают соответственно: a^2 – « a в квадрате», a^3 – « a в кубе».

В выражениях, содержащих степени, сначала выполняется возведение в степень, затем умножение и деление, и после этого – сложение и вычитание.

Пример. Найти значение выражения $105 - 400 : 2^3$.

$$1) 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8; \quad 2) 400 : 8 = 50; \quad 3) 105 - 50 = 55.$$

Значит, $105 - 400 : 2^3 = 55$.

Обозначение в виде степени позволяет короче записывать разложение числа на простые множители, например:

$$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2; \quad 600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

В свою очередь, это позволяет упростить и правила нахождения НОК и НОД:

1) Чтобы найти НОД нескольких чисел, *надо взять их общие простые делители с наименьшими показателями*, например:

$$\text{НОД}(144, 600) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24.$$

2) Чтобы найти НОК нескольких чисел, *надо взять все их простые делители с наибольшими показателями*, например:

$$\text{НОК}(144, 600) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 16 \cdot 9 \cdot 25 = 3600.$$

К

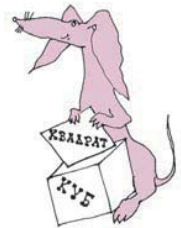
718 Запиши выражения короче:

- | | |
|--|--|
| 1) $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$; | 2) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$; |
| 3) $125 + 125 + 125 + 125 + 125 + 125$; | 4) $125 \cdot 125 \cdot 125 \cdot 125 \cdot 125 \cdot 125$; |
| 5) $(a + b) + (a + b) + (a + b) + (a + b)$; | 6) $(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$; |
| 7) $x + x + x + x + x + y + y + y + y$; | 8) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$. |

719 Прочитай выражение и найди его значение: 2^6 ; 3^4 ; 10^5 ; 7^2 ; 4^3 .

720 Запиши и вычисли степени чисел:

- | | |
|---------------------|------------------------------------|
| 1) два в кубе; | 2) два в седьмой степени; |
| 3) три в квадрате; | 4) три в пятой степени; |
| 5) один в кубе; | 6) один в девятой степени; |
| 7) ноль в квадрате; | 8) ноль в двадцать шестой степени; |
| 9) десять в кубе; | 10) десять в шестой степени. |



721 Вычисли и сравни степени: 1) 3^2 и 2^3 ; 2) 5^2 и 2^5 ; 3) 4^3 и 3^4 ; 4) 2^7 и 7^2 . Может ли a^n равняться n^a , если $a \neq n$?

722 Сравни: 1) 5^3 и $5 \cdot 3$; 2) $48 \cdot 2$ и 48^2 ; 3) 100^5 и $100 \cdot 5$. Что общего в каждой паре выражений? Существуют ли натуральные значения a и n , при которых выполняются соотношения: 1) $a^n < a \cdot n$; 2) $a^n > a \cdot n$; 3) $a^n = a \cdot n$?

723 1) Составь таблицу квадратов первых двадцати натуральных чисел. Квадратами каких чисел являются 9, 64, 225?
2) Составь таблицу кубов первых десяти натуральных чисел. Кубами каких чисел являются 8, 64, 1000?

724 Найди методом проб и ошибок число: а) квадратом которого является 2209; б) кубом которого является 4913.

725 Найди значение выражения:

- 1) a^2 , если $a = 0, 1, 6, 370, 40\ 900$;
- 2) b^3 , если $b = 0, 1, 2, 1005$;
- 3) $x^2 + 5x - 6$, если $x = 1, 2, 3, 4, 5$.



726 Запиши выражение с использованием действия возведения в степень и определи порядок действий в полученном выражении.

Образец: $4 \cdot 4 - (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \cdot 6) : 31 = 4^2 - (2^4 + 3 \cdot 6^2) : 31$.

- 1) $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$;
- 2) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
- 3) $8 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 7 \cdot 7$;
- 4) $9 \cdot 9 \cdot 9 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 6$;
- 5) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4)$;
- 6) $(7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 11 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) : 8$;
- 7) $10 \cdot 10 + (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 + 9 \cdot 9) \cdot 2 : 14$;
- 8) $2020 - 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot (7 \cdot 7 - 3 \cdot 3 \cdot 3) : (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$.

727 Найди значения выражений:

- 1) $4 \cdot 5$;
- 2) $4 \cdot 5^3$;
- 3) $(4 \cdot 5)^3$;
- 4) $8^2 + 3^2$;
- 5) $(8 + 3)^2$;
- 6) $8 + 3^2$;
- 7) $5^3 - 2$;
- 8) $5^3 - 2^3$;
- 9) $(5 - 2)^3$;
- 10) $3 \cdot 7^2 - 25$;
- 11) $56 + 3 \cdot 9^2$;
- 12) $4^3 + 3 \cdot 5^2 - 2^6$.

728 Прочитай выражения:

- 1) $(a \cdot b)^2$;
- 2) $a^2 \cdot b^2$;
- 3) $a \cdot b^2$;
- 4) $(a + b)^3$;
- 5) $a^3 + b^3$;
- 6) $a + b^3$;
- 7) $(a - b)^2$;
- 8) $a^2 - b^2$;
- 9) $a - b^2$;
- 10) $(a : b)^3$;
- 11) $a^3 : b^3$;
- 12) $a : b^3$.

729 Найди НОД и НОК чисел a и b по их разложению на простые множители:

- 1) $a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ и $b = 2 \cdot 7^3 \cdot 13$;
- 2) $a = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^3$ и $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$;
- 3) $a = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 13$ и $b = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$;
- 4) $a = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 19$ и $b = 2^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29^2$.

730 Не выполняя вычислений, объясни, почему возведение в квадрат выполнено неверно:

- 1) $36^2 = 924$;
- 2) $75^2 = 4825$;
- 3) $190^2 = 3610$;
- 4) $478^2 = 228\ 484$.

731 Разложи числа на простые множители, найди их НОД и НОК.

- 1) 975 и 1980;
- 2) 840 и 2700;
- 3) 162, 432 и 1440.

732 Найди значения выражений. Что ты замечаешь?

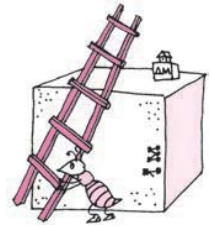
- 1) $2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1$;
- 2) $3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$;
- 3) $9 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7$;
- 4) $5 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 5$.



733 Представь числа в виде суммы разрядных слагаемых, записывая разрядные единицы как степени числа 10: а) 4302; б) 75 681; в) 608 993; г) 89 003 714.

734 Запиши с помощью степени числа 10:

- 1) количество сантиметров в 1 дм, 1 м, 1 км;
- 2) количество граммов в 1 кг, 1 ц, 1 т;
- 3) количество квадратных дециметров в 1 а, 1 га, 1 км²;
- 4) количество кубических миллиметров в 1 см³, 1 дм³, 1 м³.



735 Математическое исследование

I 1) Упрости выражения: $2^3 \cdot 2^4$, $7^2 \cdot 7^3$, $9^4 \cdot 9^2$. Что общего у всех этих выражений? Можно ли упростить произведение $5^6 \cdot 3^2$? Почему?

2) Как короче записать произведения: $a^3 \cdot a^2$, $a^5 \cdot a^4$, $a^2 \cdot a^5$? Сформулируй гипотезу о том, как умножить степени с одинаковыми основаниями $a^m \cdot a^n$, и запиши её в буквенном виде.

3) Какой смысл следует придать выражению a^0 ($a \neq 0$), чтобы предложенное тобой правило не нарушалось?

II 1) Упрости выражения: $5^6 : 5^2$, $11^7 : 11^4$, $4^5 : 4^2$. Что общего у всех этих выражений? Можно ли упростить частное $7^4 : 4^2$? Почему?

2) Как короче записать частные: $a^7 : a^3$, $a^6 : a^4$, $a^5 : a^2$ ($a \neq 0$)? Сформулируй гипотезу о том, как разделить степени с одинаковыми основаниями $a^m : a^n$ при $a \neq 0$, и запиши её в буквенном виде.

3) Какой смысл следует придать выражению a^0 ($a \neq 0$), чтобы предложенное тобой правило не нарушалось?

III 1) Объясни смысл выражения $(5^2)^3$. Представь его в виде степени с основанием 5. Что ты замечаешь? Проверь свою гипотезу для других аналогичных случаев.

2) Упрости выражения: $(a^3)^2$, $(a^2)^4$, $(a^5)^3$. Сформулируй гипотезу о возведении степени в степень $(a^m)^n$ при $a \neq 0$, запиши её в буквенном виде.

π **736** В 1934 г. индийский студент Сундарам составил бесконечную таблицу, в которой числа первой строки последовательно увеличивались на 3, числа второй строки – на 5, числа третьей строки – на 7 и т. д., а числа первого столбца увеличивались на 3:

4	7	10	13	16	19	...
7	12	17	22	27	32	...
10	17	24	31	38	45	...
13	22	31	40	49	58	...
16	27	38	49	60	71	...
19	32	45	58	71	84	...
...



Если взять любое число из этой таблицы, умножить его на 2 и к произведению прибавить 1, то всегда получится составное число. Если проделать то же самое с числом, не входящим в эту таблицу, то получится простое число. Проверь это свойство для двух чисел, входящих в таблицу, и для двух чисел, не входящих в нее (не забудь, что таблица бесконечная).

737 а) Французский математик Пьер Ферма, живший в XVII веке, обнаружил, что при небольших натуральных значениях n значение выражения $2^{2^n} + 1$ является простым числом. Проверь это утверждение для $n = 1, 2, 3$.

б) Пьер Ферма поставил вопрос о том, будет ли это свойство выполняться при любых n . Позже выяснилось, что в общем виде данное утверждение неверно. Как ты думаешь, каким способом это было доказано?

738 Вычисли устно и расположи полученные числа в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам. В ответе – имя математика XVIII века, установившего удивительную закономерность, связанную с понятием простого числа. Проблема, поставленная им, в общем виде не решена до сих пор.

19	
• 4	
– 22	
: 6	
• 8	
: 12	
	О

56	
– 49	
• 9	
+ 45	
: 36	
• 34	
	Х

350	
: 5	
+ 25	
: 19	
• 20	
– 28	
	Д



340	
+ 160	
: 20	
– 9	
• 7	
: 14	
	Л

490	
: 7	
• 4	
: 10	
– 19	
• 9	
	Б

34	
+ 56	
: 5	
• 7	
– 27	
: 11	
	Ь

92	
– 17	
: 5	
+ 19	
• 3	
– 12	
	А

900	
– 260	
: 80	
• 60	
: 12	
– 37	
	Г

739 Как изменяются результаты арифметических действий при изменении компонентов? Сравни выражения с натуральными значениями переменных:

- 1) $a + 14$ и $a + 20$; 3) $156 - c$ и $120 - c$; 5) $x : 75$ и $x : 57$;
 2) $43b$ и $39b$; 4) $d - 39$ и $d - 25$; 6) $218 : y$ и $182 : y$.

740 Пакет, в котором 3 яблока и 2 груши, весит 540 г, а пакет, в котором 3 яблока и 5 груш, весит 900 г. Чему равна масса 1 яблока и 1 груши? (Считать, что яблоки одинаковые и груши тоже, весом пакета пренебречь.)

741 На лесопилке имеются бревна длиной 6 м и 7 м. Надо напилить 42 чурбака длиной 1 м. Бревна какой длины надо брать, чтобы получилось меньше распилов?

742 Первый рабочий за день изготовил 25 одинаковых деталей, а второй – 29 таких же деталей. Первый рабочий заработал за этот день на 280 р. меньше второго. Сколько рублей заработает каждый рабочий за месяц (20 рабочих дней), если будет работать с той же производительностью?

743 В каждой коробке 20 кусков мела. Первый класс использует в среднем 1 кусок мела в 2 дня, второй класс – 1 кусок мела в день, а третий и четвертый классы – по 2 куска мела в день. Сколько коробок мела потребуется начальной школе на месяц (20 учебных дней), если в ней 4 первых, 3 вторых, 3 третьих и 2 четвертых класса?



744 При движении по таблице вправо числа складываются, а при движении вниз – вычитаются. Найди путь, ведущий от левого верхнего угла в нижний правый так, чтобы получилось число, записанное рядом с таблицей.

$4\frac{6}{7}$	$1\frac{3}{7}$	$5\frac{4}{7}$
$2\frac{1}{7}$	$5\frac{5}{7}$	$3\frac{6}{7}$
$1\frac{5}{7}$	$3\frac{2}{7}$	$6\frac{1}{7}$

Образец решения:

→	↓	↓	→
---	---	---	---

$$4\frac{6}{7} + 1\frac{3}{7} - \frac{5}{7} - 3\frac{2}{7} + 6\frac{1}{7} = 8\frac{3}{7}$$

а)

$3\frac{8}{9}$	$2\frac{7}{9}$	$5\frac{2}{9}$
$\frac{4}{9}$	$5\frac{3}{9}$	$1\frac{4}{9}$
$2\frac{5}{9}$	$6\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

10

б)

$7\frac{3}{11}$	$2\frac{9}{11}$	$3\frac{2}{11}$
$4\frac{5}{11}$	$8\frac{5}{11}$	$1\frac{8}{11}$
$2\frac{6}{11}$	$9\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

$2\frac{5}{11}$

в)

$5\frac{1}{6}$	$8\frac{2}{6}$	$2\frac{1}{6}$
$4\frac{2}{6}$	$7\frac{5}{6}$	$3\frac{2}{6}$
$\frac{5}{6}$	$2\frac{4}{6}$	$4\frac{3}{6}$

$7\frac{5}{6}$

745 Выполни действия:

- 1) $(3 \text{ ч } 32 \text{ мин} - 1 \text{ ч } 48 \text{ мин} + 5 \text{ ч } 56 \text{ мин}) : 23 \cdot 72;$
- 2) $(17 \text{ мин } 25 \text{ с} + 9 \text{ мин } 46 \text{ с} - 2 \text{ мин } 11 \text{ с}) \cdot 2880 : 400;$
- 3) $(25 \text{ т } 3 \text{ ц } 6 \text{ кг} - 12 \text{ ц } 48 \text{ кг} + 1 \text{ т } 82 \text{ кг}) : 30 : 838;$
- 4) $(16 \text{ м } 8 \text{ см} + 42 \text{ дм } 7 \text{ см} - 95 \text{ см}) \cdot 504 : 97;$
- 5) $(5 \text{ га } 6 \text{ а } 8 \text{ м}^2 - 28 \text{ а } 40 \text{ м}^2 + 8 \text{ га } 32 \text{ м}^2) : 213 \cdot 260;$
- 6) $(4 \text{ м}^3 18 \text{ дм}^3 20 \text{ см}^3 + 21 \text{ дм}^3 34 \text{ см}^3 - 38 \text{ дм}^3 854 \text{ см}^3) \cdot 5 : 20\,001.$



746 БЛИЦтурнир

1) В магазин привезли яблоки, груши и апельсины. Яблоком привезли x кг, масса груш составляет $\frac{7}{6}$ массы яблок, а масса апельсинов — $\frac{5}{12}$ массы яблок.

Сколько всего фруктов привезли в магазин?

2) В июне в пансионате отдыхало y человек, что составило 125% от числа людей, отдохнувших в мае. Сколько человек отдохнуло в пансионате за эти два месяца?

3) Патрульный катер, скорость которого равна a м/мин, догоняет лодку, движущуюся со скоростью b м/мин ($a > b$). Сейчас между ними c м. Через сколько времени катер догонит лодку?

4) Света и Галя побежали навстречу друг другу, когда расстояние между ними было d м, и встретились через t с. Галя бежала со скоростью n м/с. С какой скоростью бежала Света?

5) За 2 дня в кинотеатре продано x билетов, причём в первый день продано на y билетов больше, чем во второй. Сколько билетов продано в кинотеатре за второй день?

6) В первой пачке на m тетрадей больше, чем во второй, а всего в двух пачках k тетрадей. Сколько тетрадей в первой пачке?



747 Существует ли куб, длина ребра которого выражается натуральным числом, а сумма длин всех ребер выражается простым числом?

748 1) Из проволоки длиной 1 м 85 см надо сделать каркасную модель куба. Какая наибольшая длина ребра может быть у этого куба?

2) Объём куба равен 64 см^3 . Найди сумму длин всех его рёбер и площадь полной поверхности.

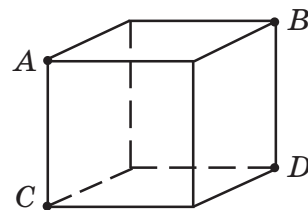
749 Сторона одного квадрата равна 5 см, а другого — в 2 раза больше. Во сколько раз площадь второго квадрата больше площади первого? Докажи, что полученный результат не зависит от размеров квадрата.

750 Длина ребра одного куба 5 см, а другого — в 2 раза больше. Во сколько раз объём второго куба больше объёма первого куба? Докажи, что полученный результат не зависит от размеров куба.

751 На поверхности куба найди кратчайший путь:

а) из точки A в точку C через точку B ;

б) из точки A в точку C через точку D .



752 Найди наибольшее натуральное решение неравенства:

$$x \leq \frac{506 \cdot 908 + 9999 - 3574 \cdot 45 : 30 - 636}{[1\ 452\ 480 : 2136 + 302 \cdot (40\ 102 - 39\ 397)] : 530}$$

Д **753** Прочитай выражения и определи, равны ли их значения:

- 1) 8^2 и $8 \cdot 2$; 3) 3^2 и 2^3 ; 5) $(4 + 6)^2$ и $4^2 + 6^2$;
 2) 5^4 и $5 \cdot 4$; 4) 9^1 и 1^9 ; 6) $(5 - 1)^3$ и $5^3 - 1^3$.

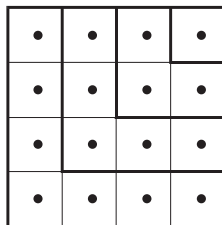
754 Проверь истинность равенств и объясни полученную закономерность, используя рисунок:

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 + 3$$

$$3^2 = 1 + 3 + 5$$

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$



Перепиши равенства в тетрадь и продолжи составление «пирамиды» до 10^2 .

755 Найди значения выражений:

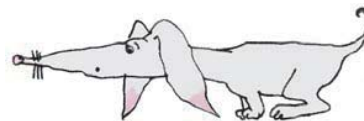
- 1) $5 \cdot 6^2$; 2) $(5 \cdot 6)^2$; 3) $(64 - 2 \cdot 3)^2$; 4) $64 - 2 \cdot 3^2$.

756 Разложи числа на простые множители, найди их НОД и НОК:

- 1) 360 и 588; 2) 1950 и 3300; 3) 180, 200 и 240.

757 Представь числа 849, 3206, 75 012, 503 970 в виде суммы разрядных слагаемых, записывая разрядные единицы как степени числа 10.

- 758** 1) Сколько метров в 1 см? в 3 см? в x см?
 2) Сколько центнеров в 1 кг? в 7 кг? в y кг?
 3) Сколько часов в 1 мин? в 5 мин? в z мин?



Образец: $1 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ см}$, $9 \text{ мм} = \frac{9}{10} \text{ см}$, $a \text{ мм} = \frac{a}{10} \text{ см}$.

759 Сумма двух чисел равна 3500, а разность составляет 12% суммы. Какие это числа?

760 В овощехранилище привезли 3 т картофеля. При сортировке 120 кг составили отходы, а остальной картофель разложили в одинаковые пакеты поровну и отправили в 3 магазина: в первый – 300 пакетов, во второй – 320 пакетов и в третий – 340 пакетов. Сколько килограммов картофеля было отправлено в каждый магазин?

761 Длина прямоугольного параллелепипеда равна 90 см, ширина 25 см, а высота 12 см. Найди длину ребра куба, объём которого равен объёму этого прямоугольного параллелепипеда. У какой из двух фигур площадь поверхности больше и на сколько?

762 Реши уравнение:

$$1) 780 : (x - 24) + 25 = 90;$$

$$3) (2x + x + 9 + 8x) : 4 - 26 = 45;$$

$$2) (31 - y : 350) \cdot 8 = 200;$$

$$4) 52 - (3y + 4 + y + 3y) : 37 = 50.$$

763 Составь выражение, соответствующее заданной программе действий, и найди значение выражения:

1) Из числа 500 010 вычтешь 497 305.

2) Полученную разность умножить на 309.

3) Произведение, полученное во втором действии, увеличить на 45 875.

4) Результат третьего действия уменьшить в 376 раз.

5) К полученному частному прибавить 3210.

764* Проверь, что значения выражения $n^2 + n + 41$ (трёхчлен Эйлера) при $n = 1, 2, 3, 4, 5$ являются простыми числами. При всех ли натуральных значениях n будут получаться простые числа?

765* – Папа, а у тебя интересный возраст, – обратился к отцу сын.
– Чем же, сынок? – спросил отец.

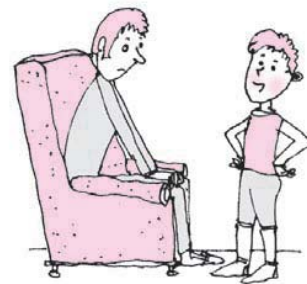
– А вот смотри, если прибавить к твоему возрасту, 38 годам, число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получим полный квадрат.

– Да, действительно, $38 + 83 = 121 = 11^2$, – согласился отец. – А вот теперь давай проверим, не случится ли подобное ещё через несколько лет, – предложил он сыну.

И они решили эту задачу. Реши её и ты.

766* В примере $(**)^3 = ***9$ вместо звездочек поставь цифры так, чтобы получилось верное равенство.

767* Витя нашел такое наименьшее из возможных натуральных чисел, при умножении которого на 2 получается точный квадрат, а при умножении на 3 – точный куб. Какое это число?



5. Дополнительные свойства умножения и деления.

Разложение натуральных чисел на простые множители даёт большие возможности для упрощения вычислений. Дело в том, что произведение двух чисел получается, если перемножить их разложения на простые множители, например:

$$(2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

Казалось бы, большой пользы от этого нет – получившееся произведение всё равно придётся долго подсчитывать. Однако реальная польза получается в другом: при выполнении более трудного действия – деления.

Как известно, деление на некоторое число является действием, обратным умножению на это число: делимое равняется произведению делителя и частного. Как мы видели, для получения делимого можно выписать вместе разложения на простые множители делителя и частного. Значит, для получения частного можно, наоборот, из простых множителей делимого вычеркнуть простые множители делителя, например:

$$183\ 456 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13, \quad 234 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13, \quad \text{и поэтому}$$

$$183\ 456 : 234 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7.$$

При этом убирать простые множители можно не все сразу, а постепенно, «по частям». Так, для нахождения частного $5845 : 35$ можно заметить, что и делимое, и делитель содержат общий множитель 5. Поэтому сначала можно вычеркнуть из их разложений простой множитель 5, а потом – оставшийся простой множитель 7. Другими словами, сначала делимое и делитель можно разделить на 5, а потом на 7:

$$5845 : 35 = 1169 : 7 = 167.$$

Главная польза от этого приёма состоит в том, что вместо сложного деления на многозначное число мы можем делить, как правило, на однозначные числа, что значительно легче. Например, для того чтобы разделить некоторое число на 288, мы можем заметить, что

$$288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3),$$

и сначала убрать из делимого первые две двойки, затем оставшиеся три двойки, а потом две тройки. Для этого понадобится три действия деления: данного числа на 4, полученного частного на 8 и нового частного на 9 – три операции деления на однозначные числа.

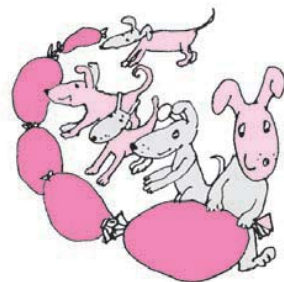
Рассмотренные нами свойства деления можно сформулировать на математическом языке с помощью следующих общих утверждений – *теорем* (при условии, что все данные операции деления выполнимы на множестве натуральных чисел).

Теорема 1. Для любых натуральных чисел a , b и c выполняется равенство

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c.$$

Доказательство этого равенства уже встречалось нам в № 303, однако разложение на простые множители позволяет упростить рассуждения.

Действительно, частное $a : (b \cdot c)$ получится, если из числа a удалить простые множители числа $b \cdot c$, то есть «объединение» всех простых множителей чисел b и c . Но то же самое получится при вычислении $(a : b) : c$, только сначала здесь удаляются простые множители числа b , а потом – простые множители числа c . Другими словами, $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$, что и требовалось доказать.



Теорема 2. Для любых натуральных чисел a , b и c выполняется равенство

$$a : b = (a : c) : (b : c).$$

В самом деле, поскольку c является делителем b , разложение на множители частного $b : c$ состоит из тех простых делителей b , которые не вошли в c . Значит, при делении $(a : c) : (b : c)$ из числа a за два шага удаляются все делители b – сначала вошедшие в c , а затем все оставшиеся. Иначе говоря, $a : b = (a : c) : (b : c)$, что и требовалось доказать.

Доказанное только что равенство можно перевести с математического языка на русский следующим образом: *частное не изменится, если делимое и делитель разделить на одно и то же натуральное число*. Не меняется частное и при умножении числителя и знаменателя на одно и то же натуральное число. Докажем это.

Теорема 3. Для любых натуральных чисел a , b и c выполняется равенство:

$$: b = (a \cdot c) : (b \cdot c).$$

Действительно, равенство $(a \cdot c) : (b \cdot c) = a : b$ верно, так как мы разделили делимое $(a \cdot c)$ и делитель $(b \cdot c)$ на число c . А теперь достаточно прочитать это равенство справа налево:

$$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c),$$

что и требовалось доказать.

Последние две теоремы означают, что на множестве натуральных чисел *частное не изменится, если делимое и делитель умножить или разделить на одно и то же число*.

К

768 Разложи делитель на простые множители и объясни, как можно выполнить деление по частям:

1) $255 : 15$; 2) $666 : 18$; 3) $1476 : 36$; 4) $4032 : 42$.

769 Выполни деление по частям:

1) $171\ 717 : 51$; 2) $495\ 000 : 150$; 3) $322\ 322\ 322 : 966$.

770 Пусть известны разложения натуральных чисел a , b и c на простые множители. Как получить разложение на простые множители чисел:

1) $(a \cdot b) : c$; 2) $(a : c) \cdot b$; 3) $(b : c) \cdot a$?

771 Определи, какие из данных равенств истинны при любых натуральных значениях a , b и c , а для оставшихся приведи контрпримеры.

1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; 3) $(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b$;
2) $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$; 4) $(a : b) : c = a : (b : c)$.

772 Разбей данные 6 чисел на группы таким образом, чтобы внутри каждой группы стояли числа, равные при любых натуральных значениях a , b и c :

1) $(a : b) \cdot c$; 3) $(a \cdot c) : b$; 5) $a \cdot (b : c)$;
2) $(a : c) : b$; 4) $a : (b \cdot c)$; 6) $(a : b) : c$.

783 Два поезда – пассажирский и товарный – выехали одновременно в противоположных направлениях из двух городов, расстояние между которыми 70 км. Скорость пассажирского поезда 80 км/ч, а скорость товарного составляет $\frac{11}{16}$ скорости пассажирского поезда. На каком расстоянии друг от друга будут поезда через 3 часа пути?

784 Переведи условие задачи на математический язык:

Поезд должен был пройти 840 км. Пройдя треть пути со скоростью, предусмотренной расписанием, он был на 1 ч задержан у семафора, и, чтобы прийти в пункт назначения по расписанию, ему пришлось увеличить скорость на 10 км/ч. С какой скоростью должен был ехать поезд?

785 Построй математическую модель задачи, используя для обозначения неизвестных величин буквы x и y :

1) На лужайке росли 35 жёлтых и белых одуванчиков. После того как 8 белых облетели, а 2 жёлтых побелели, жёлтых одуванчиков стало вдвое больше, чем белых. Сколько белых и сколько жёлтых одуванчиков росло на лужайке вначале?

2) В одной американской фирме каждый служащий является либо республиканцем, либо демократом. После того как один из республиканцев решил стать демократом, тех и других в фирме стало поровну. Затем ещё три республиканца решили стать демократами, и тогда демократов стало вдвое больше, чем республиканцев. Сколько служащих в этой фирме?

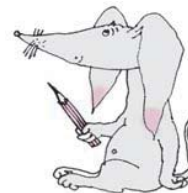


786 Какая из трёх дробей наибольшая: $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ или $\frac{5}{6}$?

787 Сколько понадобится краски, чтобы покрасить деревянный брус, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 80 см, 30 см и 20 см, если для покраски 1 дм² поверхности нужно 3 г краски?

788 По формуле объёма прямоугольного параллелепипеда $V = abc$ найди:

- 1) a , если $b = 5$ дм, $c = 8$ дм, $V = 480$ дм³;
- 2) b , если $a = 14$ мм, $c = 15$ мм, $V = 1890$ мм³;
- 3) c , если $a = 125$ см, $b = 80$ см, $V = 320$ дм³;
- 4) V , если $a = 2$ дм, $b = 45$ см, $c = 300$ мм.



789 Выполни действия:

- 1) $5^2 + 3^4$;
- 2) $3 \cdot 7^2 - 2^4$;
- 3) $0^{12} : (7^6 - 9^4)$;
- 4) $4^3 + 3 \cdot 5^3 - 2^6$.

Д

790 Выполни деление «по частям»:

- а) $1935 : 45$;
- б) $5544 : 99$;
- в) $888\ 888 : 24$;
- г) $189\ 000 : 6300$.

791 Пользуясь свойствами частного, реши уравнение:

1) $32 : 4 = x : 12$; 2) $126 : x = 63 : 7$; 3) $90 : 15 = 30 : x$.

792 Найди истинные высказывания и составь из соответствующих им букв название города:

А Сумма $4803 + 1809$ кратна 9.

В Разность $3800 - 425$ не делится на 5.

И Число 3 – делитель произведения $17 \cdot 9021 \cdot 40$.

К Число $830\ 760$ делится на 2 и на 5.

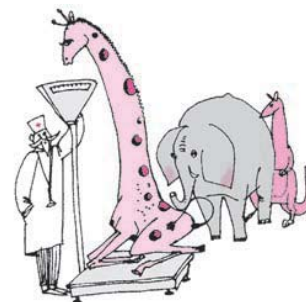
Л Квадрат числа 7 равен 14.

Н Квадрат разности чисел 8 и 2 равен 36.

М Куб числа 5 равен 125.

Р Сумма кубов чисел 1 и 2 равна 27.

С $\frac{43}{12} = 3\frac{7}{12}$ **Т** $5\frac{6}{7} = \frac{35}{7}$



793 Переведи условие задачи на математический язык:

- 1) Жираф в 12 раз тяжелее кенгуру, а слон в 5 раз тяжелее жирафа. Чему равна масса каждого из этих животных, если все вместе они весят 5 т 110 кг?
- 2) Сумма двух чисел равна 1200, а сумма 60% первого числа и 23% второго числа равна 572. Найти эти числа.

794 Корней и Пантелей вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через полчаса. С какой скоростью они шли, если скорость Корнея была на 20 м/мин больше скорости Пантелея, а первоначальное расстояние между ними было равно 3 км 600 м?

795 Вырази:

- а) в кубических сантиметрах: $5\text{ дм}^3\ 270\text{ см}^3$, $8\text{ дм}^3\ 53\text{ см}^3$, 29 мм^3 ;
- б) в кубических метрах и дециметрах: 4750 дм^3 , $68\ 000\ 000\text{ см}^3$.

796 Длина аквариума 8 дм, ширина 5 дм, а высота 45 см. Сколько литров воды надо налить в пустой аквариум, чтобы уровень воды был ниже верхнего края на 8 см?

797 Выполни действия:

1) $6^3 - 2^5$; 2) $64 + 2 \cdot 9^2$; 3) $(2^2 + 2^3) \cdot 1^{43}$; 4) $3^2 - 2^3 + 3^4 \cdot 6$.

с **798*** Прекрасная принцесса Турандот дала принцу Калафу такое задание: разложить все 28 косточек домино в 4 кучки так, чтобы суммы очков в кучках были четыремя последовательными простыми числами. Если принц выполнит задание, то прекрасная Турандот станет его женой, а если нет – ему отрубят голову. Помогите принцу справиться с заданием!

799* Докажи или опровергни утверждение: «Разность между трёхзначным числом и суммой его цифр всегда делится на 9».

800* Задача из арабских сказок «1001 ночь» (ночь 458-я)

Стая голубей подлетела к высокому дереву. Часть голубей села на ветвях, а другая расположилась под деревом. Сидевшие на ветвях голуби говорят расположившимся внизу: «Если бы один из вас взлетел к нам, то вас стало бы втрое меньше, чем нас, сидящих тогда на ветвях, а если бы один из нас слетел к вам, то нас с вами стало бы поровну». Сколько голубей сидело на ветвях и сколько под деревом?



Задачи для самопроверки.

801 Найди частное:

1) $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7) : (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5)$;

2) $(16 \cdot 21) : 7$.

802 Найди НОД и НОК чисел 8, 12, 28 методом перебора.

803 Найди НОД и НОК чисел 180 и 396 методом разложения на простые множители.

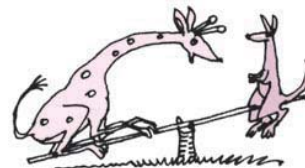
804 Вычисли устно:

1) НОД (99, 100);

3) НОД (9, 207 207 207);

2) НОК (99, 100);

4) НОК (9, 207 207 207).



805 Найди значение выражения:

1) 21^2 ; 2) 4^3 ; 3) $(3 \cdot 5)^2$; 4) $3 \cdot 5^2$; 5) $(3 + 5)^2$; 6) $3 + 5^2$.

806 Представь число 24 392 в виде суммы разрядных слагаемых, записывая разрядные единицы как степени числа 10.

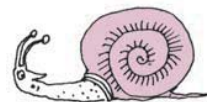
807 Выполни действия:

1) $18 \text{ мин } 36 \text{ с} + 24 \text{ мин } 58 \text{ с}$;

3) $3 \text{ ч } 25 \text{ мин} \cdot 7$;

2) $5 \text{ ч } 17 \text{ мин} - 3 \text{ ч } 45 \text{ мин}$;

4) $42 \text{ мин } 48 \text{ с} : 24$.



808 Два катера плывут навстречу друг другу со скоростями соответственно 28 км/ч и 36 км/ч. Сейчас между ними 192 км. Какое расстояние будет между катерами через 2 ч?

809 Мужчина и мальчик вышли одновременно из деревни в город. Скорость мальчика 60 м/мин, а скорость мужчины – 80 м/мин. Какое расстояние будет между ними через 12 мин после выхода?

810 Скорость автобуса равна 45 км/ч, что составляет $\frac{5}{8}$ скорости движущегося вслед за ним автомобиля. Через сколько времени автомобиль догонит автобус, если сейчас между ними 108 км?

§ 5. Ещё немного логики

1. Равносильность предложений.

В математическом языке кроме знаков арифметических действий и знаков сравнения есть и другие знаки, помогающие легче и проще записывать предложения из обычного языка. К таким знакам относится знак равносильности, который мы использовали для краткой записи свойств делимости.

Действительно, понятие **равносильности предложений** относится не только к математике, но и к обычному языку. Как в обычном, так и в математическом языке одну и ту же мысль можно выразить несколькими разными способами, в том числе и на разных языках. Например:

1) Вася – родной брат Кати, Катя – родная сестра Васи, Вася и Катя имеют одних и тех же родителей.

2) Андрей живет в Москве, Andrei lives in Moscow, Andrei habite Moscou, Andrei wohnt in Moskau.

3) 2 меньше 5, 5 больше 2, $2 < 5$, $5 > 2$.

4) Число x на 2 больше числа y , число y на 2 меньше числа x , $x - 2 = y$, $y = x - 2$, $x = y + 2$, $x - y = 2$.

5) Натуральное число a делится на натуральное число b ; натуральное число a кратно натуральному числу b ; натуральное число b является делителем натурального числа a .

В каждом отдельном из этих примеров все предложения означают одно и то же, только выражены разными способами. Знак \Leftrightarrow и употребляется для краткой записи утверждения, что **два предложения означают одно и то же**. Пишут: $2 < 5 \Leftrightarrow 5 > 2$.

Обратим внимание на написание знака равносильности \Leftrightarrow : если убрать из него «стрелки» слева и справа, то останется знак равенства. Это не случайно. Знак равенства между двумя числовыми выражениями показывает, что эти выражения имеют одно и то же значение, то есть означают одно и то же: например, $2 \cdot 2 = 4$. Знак равносильности имеет такой же смысл, но применяется не для числовых выражений, а для предложений – высказываний или высказывательных форм (предложений с переменной). И точно так же, как пишут цепочку равенств при преобразованиях числовых выражений, например:

$$7 \cdot 8 - 20 = 56 - 20 = 36,$$

можно записывать цепочки равносильных предложений, например:

$$(2x - 3) : 5 + 3 = 6 \Leftrightarrow (2x - 3) : 5 = 3 \Leftrightarrow 2x - 3 = 15 \Leftrightarrow 2x = 18 \Leftrightarrow x = 9.$$

Полученная цепочка «равносильностей» есть, как мы видим, просто запись решения уравнения $(2x - 3) : 5 + 3 = 6$.



Отметим, что для правильного вывода о равносильности двух предложений у человека может не хватать знаний. Скажем, в нашем примере 2 для такого вывода надо знать смысл предложений на каждом из четырёх языков, а для написания предыдущей цепочки равносильностей нужно знать свойства арифметических действий.

Точно так же для человека, недостаточно знакомого с математикой, предложения «Число k делится на 3» и «Сумма цифр числа k делится на 3» вовсе не означают одно и то же. Однако нам уже известен признак делимости натурального числа k на 3:

Число k делится на 3 **в том и только в том случае**, когда
сумма цифр числа k делится на 3.

Поэтому для нас эти два предложения означают одно и то же: сказать о натуральном числе k , что оно делится на 3, – это то же самое, что сказать, что сумма его цифр делится на 3.

И вообще, знак равносильности имеет тот же самый смысл, что и слова «**в том и только в том случае**», часто употребляющиеся в математическом языке. Поэтому мы и записывали признаки делимости с помощью этого знака:

Число k делится на 3 \Leftrightarrow Сумма цифр числа k делится на 3.

Кстати, вместо слов «**в том и только в том случае**» в математике употребляют и некоторые другие выражения такого типа, – например, «**тогда и только тогда**», «**если и только если**» и другие.

К

811 Запиши с помощью знака равносильности признаки делимости на 9 и на 5. Прочитай полученные утверждения разными способами.

812 Докажи с помощью *контрпримера*, что следующие утверждения не являются равносильными:

- а) «Все кошки четвероногие» и «Все четвероногие – кошки».
- б) «Число x делится на 2» и «Число x оканчивается на 2».
- в) «Число x оканчивается на 7» и «Число x делится на 7».
- г) «Число a делится на b » и «Число b делится на a ».
- д) «Сумма чисел a и b делится на c » и «Одно из чисел a и b делится на c ».
- е) «Произведение ab делится на c » и «Одно из чисел a и b делится на c ».
- ж) « $x^2 - 1 = 8$ » и « $x + 2 = 7$ ».
- з) « $y - 3 < 1$ » и « $y \leq 4$ ».

813 Какие из следующих утверждений верны?

- 1) $a - b = c \Leftrightarrow c + a = b$.
- 2) $a - b = c \Leftrightarrow c + b = a$.
- 3) Число x в 2 раза больше $y \Leftrightarrow x = y + 2$.
- 4) Число x в 2 раза больше $y \Leftrightarrow x = 2y$.
- 5) Число d составляет $\frac{2}{7}$ числа $k \Leftrightarrow d = k : 2 \cdot 7$.
- 6) Число m составляет 30% числа $n \Leftrightarrow m = n : 100 \cdot 30$.



- 7) $5 \in A \cap B \Leftrightarrow 5 \in A$ и $5 \in B$.
 8) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$.
 9) Прямые l и p параллельны \Leftrightarrow Прямые l и p не имеют общих точек.
 10) Прямые l и p перпендикулярны \Leftrightarrow Прямые l и p пересекаются.
 11) $3(x + 1) = 2x + 5 \Leftrightarrow 3x + 3 = 2x + 5$.
 12) $4x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 1$.

814 Используя знак равносильности, запиши решения уравнений:

- 1) $2a - 3 = 25$; 4) $k + 4k + 6k = 55$; 7) $8 + 5x + x = 32$;
 2) $34 + 18 : b = 43$; 5) $8m - 3m - 2m = 72$; 8) $12y - 3y - 6 = 21$;
 3) $(80 - c) : 8 = 7$; 6) $9n - n + 4n = 60$; 9) $7z + 8 + z = 48$.

815 Запиши в виде равенств утверждения, равносильные следующим:

- 1) Число a на 3 больше числа b .
 2) Число c на 9 меньше числа d .
 3) Число x в 4 раза больше числа y .
 4) Число z в 5 раз меньше числа k .
 5) При делении числа a на число b получается в частном c и в остатке r .
 6) При делении числа n на число 4 получается в частном q и в остатке 1.

816 В следующих предложениях поменяй местами *тему* и *рему* и определи, получится ли после этого равносильное предложение:

- а) Все деревья имеют корни.
 б) Всякое натуральное число, делящееся на 2, является четным.
 в) Всякое натуральное число, оканчивающееся на 5, делится на 5.
 г) Дробь является неправильной, если она больше или равна 1.

Д **817** Запиши с помощью знака равносильности признаки делимости на 9 и на 10. Прочитай полученные утверждения разными способами.

818 Используя знак равносильности, запиши решения уравнений:

- 1) $45 - 72 : x = 9$; 2) $15y - 2y + y = 84$; 3) $4z - z - 7 = 20$.

819 Запиши в виде равенств утверждения, равносильные следующим:

- 1) Число b на 7 меньше числа c .
 2) Число x в 2 раза больше числа y .
 3) При делении числа d на 8 получается в частном q и в остатке 5.
 4) Число m составляет $\frac{3}{4}$ числа n .

С **820*** Из арифметики Л. Ф. Магницкого (1703 г.)

Спросил некто учителя: сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына? Учитель ответил: если придёт ещё учеников столько же, сколько имею, и полстолько и четвёртая часть и твой сын, тогда будет у меня учеников 100. Спрашивается: сколько было у учителя учеников?

821* Расшифруй ребус $(AP)^M = \text{МИР}$, если одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, а разными – разные.

822* При каких натуральных n число $8n + 3$ делится на 13?

2. Определения.

Рассматривая различные предложения в предыдущем пункте, мы делали вывод об их равносильности благодаря знанию значений слов русского языка («брат», «сестра», «родители» и т.д.) и слов иностранного языка («lives», «habite», «wohnt» и т.д.). Но когда человек изучает язык, каждое новое слово он узнает либо от другого человека, либо из словаря. Например, узнав из словаря, что «cat», «Katze», «chat» – кошка, в дальнейшем можно понимать и произносить на иностранном языке предложения, в которых речь идет о кошке.

Точно такая же ситуация в математике. Каждое новое слово математического языка специально разъясняется. Предложения, в которых разъясняется значение новых слов, в математике называют **определениями**.

Математических определений мы уже знаем довольно много. Обычно в них используется слово *называется*, например:

Разностью $a - b$ чисел a и b называется такое число c , которое при сложении с b дает a	– определение разности
Произведением $a \cdot b$ натуральных чисел a и b называется сумма b слагаемых, каждое из которых равно a	– определение произведения
Частным $a : b$ чисел a и b ($b \neq 0$) называется такое число c , которое при умножении на b дает a	– определение частного
Дробь называется правильной , если её числитель меньше знаменателя	– определение правильной дроби
Натуральные числа, которые имеют ровно два различных делителя, называются простыми	– определение простого числа
Натуральное число a называется кратным натуральному числу b , если существует натуральное число c такое, что $a = bc$	– определение кратного

В этих предложениях даются определения шести терминов «математикорусского» словаря, которые мы теперь хорошо знаем, но когда-то не знали. При этом каждый раз значение «нового», незнакомого термина разъясняется с помощью знакомых, уже известных. Это и есть главная черта определения: *смысл «нового» в нём объясняется через «старое»*.

Узнавая новое слово в повседневной жизни, мы также встречаемся с определениями. Например, что такое «год»? Отвечая на этот вопрос, обычно говорят, что год (астрономический) – это промежуток времени, за который Земля совершает один оборот вокруг Солнца. Но это и есть *определение* года, которое в стандартном виде звучало бы так:

Годом (астрономическим) называется промежуток времени, за который Земля совершает один оборот вокруг Солнца.

А что такое «сестра» (в простейшем смысле – родная сестра)? Как объяснить это слово иностранцу, который знает по-русски только слова «отец», «мать», «женщина»?

Так как сестра – это прежде всего *чья-то* сестра, то определение может выглядеть так:

x называется **сестрой** y , если x и y имеют одних и тех же отца и мать и x – женщина.



Таким образом, **определения могут даваться в разных формах**, иногда и без слова *называется*. Но всегда в определении есть слово, которое появляется впервые как «новое» и объясняется через уже известные «старые» слова.

Для записи определений часто бывает удобно использовать знак равносильности. Например:

$$a - b = c \Leftrightarrow c + b = a$$

$$a : b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a \quad (b \neq 0)$$

Дробь $\frac{x}{y}$ – **правильная** $\Leftrightarrow x < y \quad (x, y \in \mathbb{N})$

a – **простое** $\Leftrightarrow a$ имеет ровно два различных делителя b и $c \quad (a, b, c \in \mathbb{N})$

a **кратно** $b \Leftrightarrow$ существует c такое, что $a = bc \quad (a, b, c \in \mathbb{N})$

x – **сестра** $y \Leftrightarrow x$ и y имеют одних и тех же отца и мать и x – женщина



Наконец, длинное слово «*существует*» с обязательным продолжением «*такое, что*» иногда заменяют символом \exists . Поэтому приведённое определение кратного, например, может быть записано короче:

$$a \text{ кратно } b \Leftrightarrow \exists c: a = bc \quad (a, b, c \in \mathbb{N})$$

Заметим, что символа \exists нет ни в одном из алфавитов, он употребляется только в математическом языке.

К

823 1) Прочитай в тексте учебника примеры определений. Какие «новые» слова в них объясняются? Какие «старые», уже известные слова для этого используются?

2) Сформулируй определение «брата» (в простейшем смысле – «родного брата»), используя в качестве известных слов «родители» и «мужчина». Приведи различные формулировки.

3) Сформулируй разными способами определение «делителя» и запиши его с помощью знака равносильности и символа \exists .

824 Среди предложений, приведенных ниже, найди определения и сформулируй их с помощью слова «называется». Какие понятия в них определяются и какие понятия для этого используются?

1) Световой день – это время от восхода до заката солнца.

2) Световой день в Москве летом составляет больше половины суток.

3) Процент числа (величины) – это одна сотая часть этого числа (величины).

4) Лето – время года, продолжающееся в Северном полушарии Земли с 1 июня по 31 августа, а в Южном полушарии – с 1 декабря по 28 (в високосном году 29) февраля.

5) До XIX века в Московском государстве лето продолжалось от 24 июня до 23 сентября.

6) Слово «процент» происходит от лат. «*pro centum*», что означает в переводе «на сто» или «за сотню».



825 Прочитай определения и назови определяемые понятия. Какие «старые», известные понятия используются для определений? Сделай чертежи.

1) Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками. Эти точки принадлежат отрезку и называются его концами.

2) Ломаной называется фигура, которая состоит из точек плоскости и последовательно соединяющих их отрезков таких, что никакие два отрезка с общим концом не лежат на одной прямой и конец каждого предыдущего отрезка совпадает с началом следующего.

3) Каждый из отрезков, составляющих ломаную, называется звеном ломаной, а концы этих отрезков – вершинами ломаной.

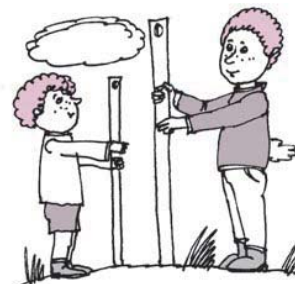
4) Замкнутая ломаная линия без самопересечений называется многоугольником, а её звенья – сторонами многоугольника.

5) Четырёхугольником называется многоугольник с четырьмя сторонами.

6) Прямоугольником называется четырёхугольник, у которого все углы прямые.

7) Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

8) Многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.



826 Ответить на вопрос «Что такое?» на математическом языке означает дать соответствующее определение. Что такое:

- 1) квадрат числа; 3) доля; 5) километр; 7) час;
 2) куб числа; 4) неправильная дробь; 6) метр; 8) минута?

827 Какие из следующих высказываний истинны:

- 1) $\exists x \in N: 3x - 5 = 14$; 4) $\exists m \in N: m^2 = 49$;
 2) $\exists x \in N: 3x - 5 = 1444$; 5) $\exists n \in N: n^2 = 32$;
 3) $\exists x \in N: 3x - 5 = 1445$; 6) $\exists m, n \in N: m^2 + n^2 = 25$?

828 Прочитай определение числа, кратного 3, используя слово «называется»:

$$a \text{ кратно } 3 \Leftrightarrow \exists n \in N: a = 3n.$$

По приведённому образцу запиши и прочитай определения: 1) числа, кратного 7; 2) числа, кратного 4; 3) чётного числа; 4) нечётного числа.

829 Число x называется **квадратным корнем** из числа y , если $x^2 = y$. Как называется в этом случае число y ?

830 Какие из следующих высказываний верны?

- а) 3 – квадратный корень из 9;
 б) 9 – квадратный корень из 3;
 в) 15 – квадратный корень из 225;
 г) 482 – квадратный корень из 252 324;
 д) 491 – квадратный корень из 241 081;
 е) 632 – квадратный корень из 399 423;
 ж) 1236 – квадратный корень из 1 524 636;
 з) 999 – квадратный корень из 999 999;
 и) 999 – квадратный корень из 999 981.



831 Натуральное число a называется **точным квадратом**, если существует квадратный корень из числа a , являющийся натуральным числом.

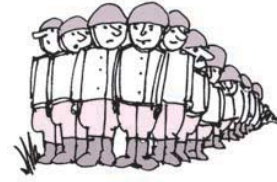
- а) Приведи несколько примеров точных квадратов и примеров чисел, не являющихся точными квадратами.
 б) Перечисли все точные квадраты среди первых 100 натуральных чисел.

832* Какие из следующих чисел являются точными квадратами?

- 1) 169, 625, 1024, 9801, 10 201;
 2) 42 235, 354 913, 8 977 834;
 3) 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 миллион, 1 миллиард, 9 миллиардов;
 4) 1000 ... 0 (100 нулей, 2007 нулей, 2008 нулей, n нулей);
 5) 121, 12 321, 1 234 321, 123 454 321, ..., 12 345 678 987 654 321.

833 Запиши определения квадратного корня и точного квадрата числа с помощью знаков \Leftrightarrow и \exists .

834 Можно ли поставить батальон из 256 солдат в строй из нескольких шеренг таким образом, чтобы число солдат в каждой шеренге было равно числу шеренг?



835 Может ли квадратный корень из числа быть равен самому числу?

836 Прочитай определения. Назови определяемые понятия и понятия, на которых основываются эти определения. Сделай чертежи.

1) Лучом называется часть прямой, ограниченная только одной точкой. Эта точка принадлежит лучу и называется его началом.

2) Углом называется геометрическая фигура, образованная двумя лучами с общим началом.

3) Лучи, образующие угол, называются сторонами угла, а их общее начало – вершиной угла.

4) Два луча с общим началом, составляющие прямую, называются дополнительными лучами.

5) Угол называется развёрнутым, если его стороны являются дополнительными лучами.

6) Градус – это угол, равный $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла.

7) Угол называется прямым, если он равен 90° .

8) Угол называется острым, если он меньше 90° , а тупым, если он больше 90° , но меньше 180° .

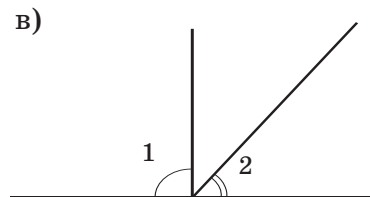
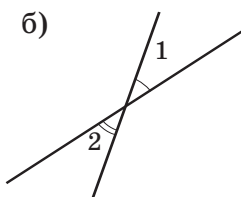
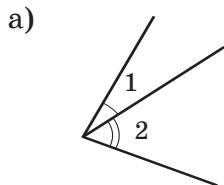
9) Два угла называются вертикальными, если стороны одного из них являются дополнительными лучами для сторон другого.

10) Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.



837 Начерти два луча OA и OB , исходящие из точки O . На сколько частей разделил плоскость угол AOB ? Раскрась их разными цветами.

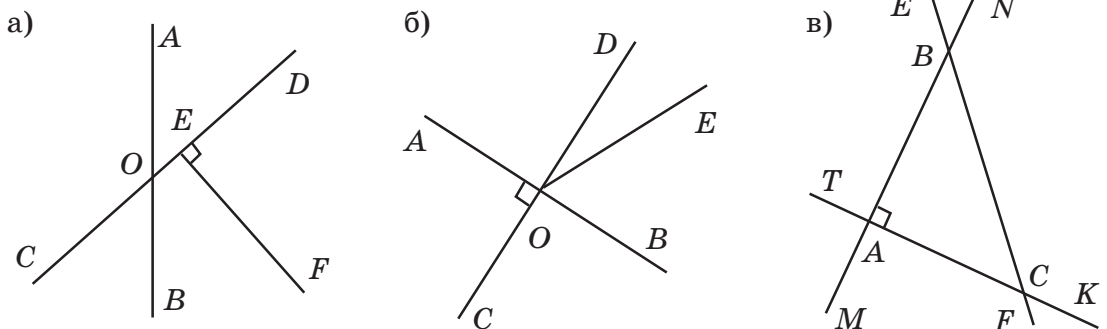
838 Пользуясь определением смежных углов, докажи, что углы 1 и 2 на рисунках не являются смежными. Есть ли на этих рисунках вертикальные углы?



839 1) Начерти угол, равный 30° . Построй угол, смежный данному, и измерь его величину. Что ты замечаешь? Повтори эксперимент ещё 2 раза для углов другой величины и сформулируй гипотезу.

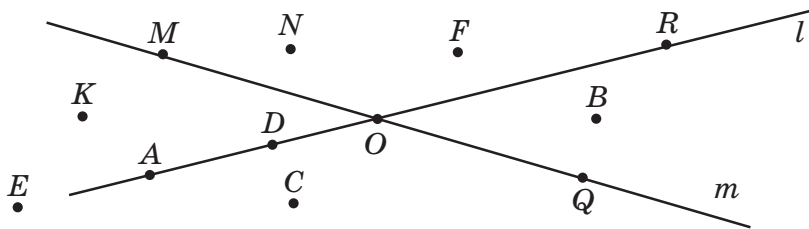
2) Выполни то же задание для вертикальных углов.

840 Сколько ты видишь на рисунке острых углов, прямых углов, тупых углов, развёрнутых углов, пар смежных углов, вертикальных углов? Назови углы и найди сумму полученных чисел.



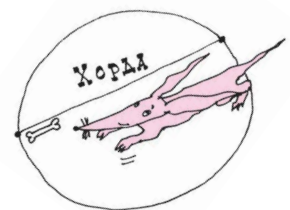
841 Введём следующее определение: $A \in a \Leftrightarrow$ Точка A лежит на прямой a

Составь по рисунку и запиши все истинные утверждения такого вида.



842 Прочитай определения и назови определяемые понятия. Начерти фигуры, о которых идет речь в этих определениях.

- 1) Две прямые пересекаются, если эти прямые имеют ровно одну общую точку.
- 2) Две прямые называются параллельными, если они не имеют общих точек.
- 3) Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными, если они образуют четыре прямых угла.
- 4) Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки. Эта точка называется центром окружности.
- 5) Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо её точкой, называется радиусом окружности.
- 6) Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется её хордой.
- 7) Диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр этой окружности.
- 8) Дугой окружности называется каждая из частей, на которые делят окружность любые две её точки.
- 9) Угол с вершиной в центре окружности называется её центральным углом.
- 10) Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется вписанным углом.



843 Прочитай утверждения. Основываясь на приведённых определениях и на своем опыте, выскажи гипотезу – верны ли эти утверждения.

- А** Через любые две различные точки можно провести только одну прямую.
- Б** Через любую точку плоскости можно провести прямую, параллельную данной прямой.
- В** Через любую точку плоскости, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую.
- Г** Через любую точку плоскости, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну параллельную ей прямую.
- Д** Через любую точку плоскости можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой, и притом только одну.
- Е** Две прямые на плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны друг другу.
- Ж** Две прямые на плоскости, параллельные третьей, параллельны друг другу.
- З** Пересекающиеся прямые на плоскости не могут иметь двух общих точек.
- И** Любые две прямые на плоскости или параллельны, или перпендикулярны.
- К** Пересекающиеся прямые обязательно перпендикулярны.
- Л** Любые две прямые на плоскости или параллельны, или пересекаются.
- М** Любой острый угол меньше любого тупого угла.
- Н** Вертикальные углы равны.
- О** Сумма смежных углов равна 180° .
- П** Длина диаметра окружности в два раза больше длины радиуса той же окружности.
- Р** Все диаметры окружности имеют одну и ту же длину.
- С** Угол, вписанный в окружность, всегда острый.
- Т** Длина стороны треугольника всегда меньше суммы длин двух других его сторон.



844 Проведи две параллельные друг другу прямые AB и CD и прямую KL , пересекающую их под острым углом в некоторых точках P и Q . Какие из углов, образовавшихся на чертеже, могут быть равны? Запиши свои гипотезы в виде равенств. Чем гипотезы отличаются от определений?

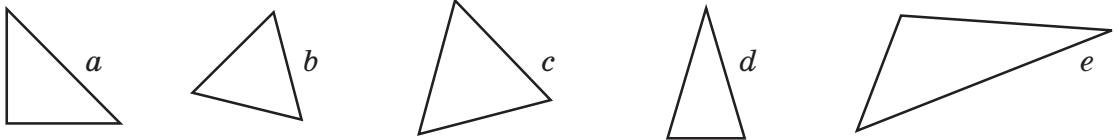
Образец: $\angle APK = \dots$, $\angle APB = \dots$

845 Математическое исследование

Прочитай и осмысли определения. Пользуясь ими, выполни задания.

I Треугольник называется **равносторонним**, если все его стороны имеют одинаковую длину.

1) Укажи все равносторонние треугольники на рисунке:

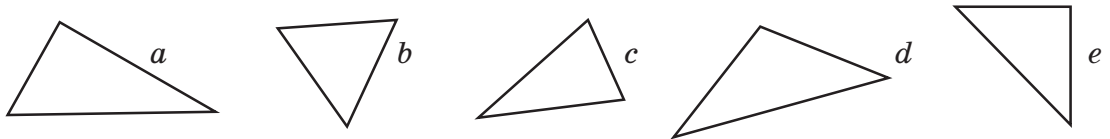


2) Всякий ли треугольник является равносторонним? Начерти несколько равносторонних треугольников и измерь их углы. Сформулируй гипотезу.

3) Начерти равносторонний треугольник и соедини отрезками середины его сторон. Что ты наблюдаешь? Повтори эксперимент ещё несколько раз. Сформулируй гипотезу.

II Треугольник называется **равнобедренным**, если хотя бы две из его сторон имеют одинаковую длину.

1) Укажи на рисунке все равнобедренные треугольники:

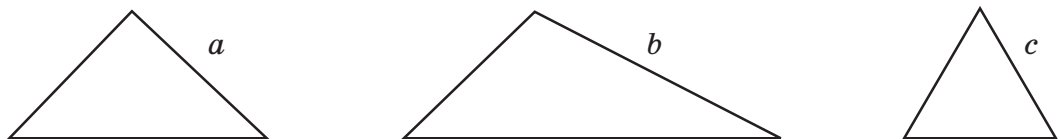


2) Является ли равнобедренный треугольник равносторонним? Является ли равносторонний треугольник равнобедренным?

3) Построй диаграмму Эйлера–Венна для множеств A , B и C , где A – множество всех треугольников, B – множество равнобедренных треугольников и C – множество равносторонних треугольников.

III S красивее $T \Leftrightarrow T$, так, чтобы одна часть полностью наложилась на другую (S и T – треугольники)

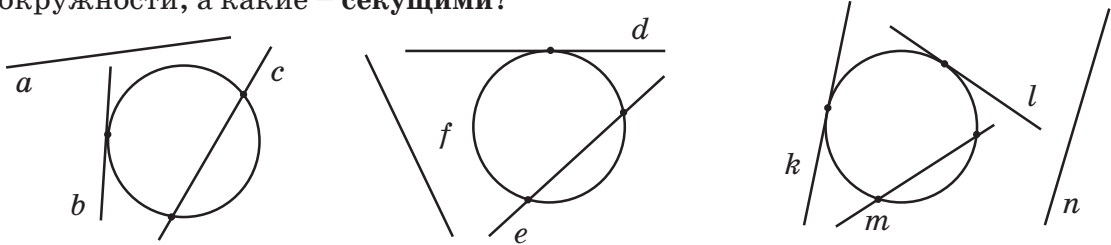
1) Какой из треугольников на рисунке самый красивый? Самый некрасивый? Какие треугольники красивее – равнобедренные или равносторонние?



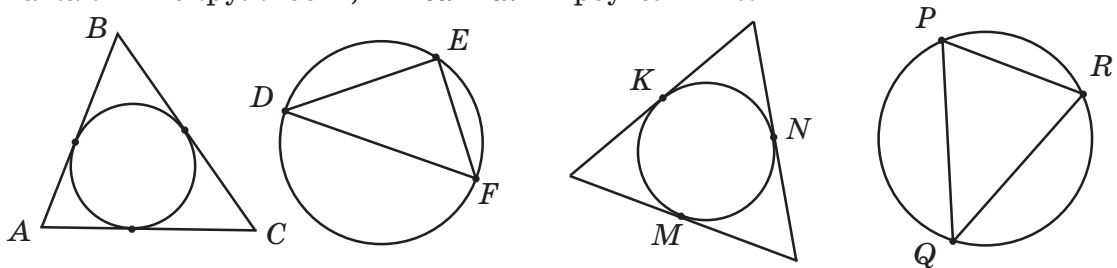
2) Дай аналогичное определение для четырёхугольников. Нарисуй четыре четырёхугольника, расположив их по возрастанию красоты.

846 Исходя из значений слов в русском языке, отгадай по рисункам значения математических терминов и сформулируй свои варианты соответствующих определений.

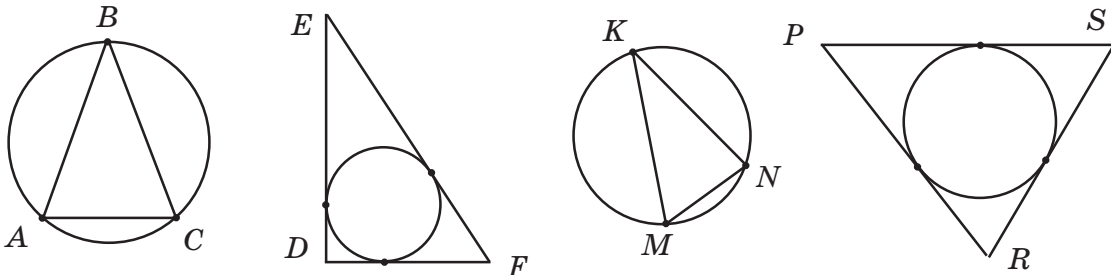
а) Какие из прямых, изображенных на рисунке, являются **касательными** к окружности, а какие – **секущими**?



б) На каких рисунках изображен треугольник, **вписанный** в окружность, а на каких – окружность, **вписанная** в треугольник?



в) На каких рисунках изображен треугольник, **описанный** вокруг окружности, а на каких – окружность, **описанная** вокруг треугольника?



847 Опираясь на определение «Среднее арифметическое нескольких чисел – это результат деления суммы этих чисел на число слагаемых», выполни задания.

1) Определи, верно ли найдено среднее арифметическое чисел 100, 200 и 300: $(100 + 200 + 300) : 3 = 200$.

2) Найди среднее арифметическое чисел 2, 7, 11 и 16.

3) Может ли среднее арифметическое нескольких чисел равняться одному из них?

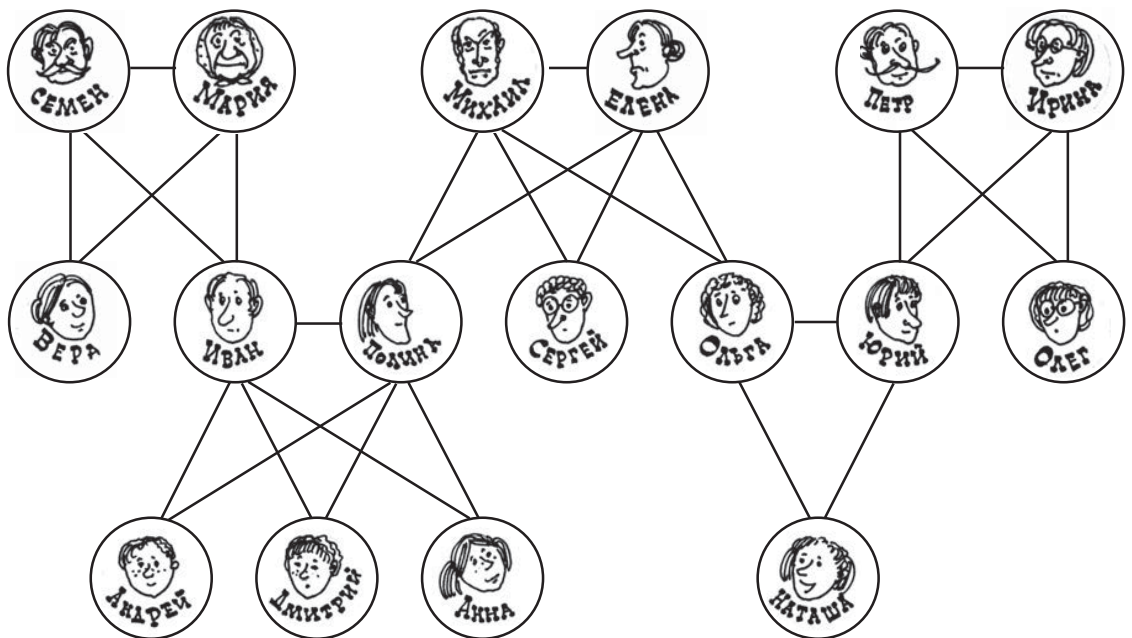
4) Найди сумму четырёх чисел, если их среднее арифметическое равно 10.

5) В течение суток термометр показывал 9° , 11° , 12° , 19° , 13° , 12° , 8° . Найди среднее арифметическое этих значений.

6) Дан ряд чисел: 10, 20, 30, 40. Не производя вычислений, выбери возможное значение их среднего арифметического: а) 10; б) 25; в) 100.

848 На рисунке изображена группа людей, связанных семейными отношениями. Горизонтальные отрезки обозначают отношение «муж – жена», а все остальные отрезки – отношение «дети – родители». Заполни пропуски в предложениях:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1) Полина – мать ... | 9) Юрий – муж ... | 17) Ирина – свекровь ... |
| 2) Юрий – отец ... | 10) Ирина – жена ... | 18) Семен – свёкор ... |
| 3) Иван – сын ... | 11) Петр – дедушка ... | 19) Иван – зять ... |
| 4) Ольга – дочь ... | 12) Мария – бабушка ... | 20) Полина – невестка ... |
| 5) Дмитрий – внук ... | 13) Олег – дядя ... | 21) Олег – деверь ... |
| 6) Наташа – внучка ... | 14) Вера – тётя ... | 22) Сергей – шурин ... |
| 7) Сергей – брат ... | 15) Михаил – тесть ... | 23) Вера – золовка ... |
| 8) Анна – сестра ... | 16) Елена – тёща ... | 24) Ольга – свояченица... |



Составь по рисунку истинные высказывания о родственных отношениях в этой семье.

Определения:

- Тесть** – это отец жены.
- Тёща** – это мать жены.
- Свёкор** – это отец мужа.
- Свекровь** – это мать мужа.
- Деверь** – это брат мужа.
- Шурин** – это брат жены.
- Золовка** – это сестра мужа.
- Свояченица** – это сестра жены.
- Зять** – это муж дочери или муж сестры.
- Невестка** – это жена сына или жена брата.



849 Будем считать слова «мужчина», «женщина», «родитель», «муж», «жена» основными и объяснять с их помощью все остальные слова, обозначающие родственные связи. Запиши с помощью знаков \Leftrightarrow и \exists определения следующих членов семьи:

- | | | | |
|----------|-------------|-----------------|-----------------|
| 1) мать; | 5) бабушка; | 9) племянник; | 13) свёкор; |
| 2) дочь; | 6) бабушка; | 10) племянница; | 14) свекровь; |
| 3) брат; | 7) внук; | 11) дядя; | 15) прабабушка; |
| 4) тёща; | 8) внучка; | 12) тётя; | 16) прадед. |

Образцы:

x – отец $y \Leftrightarrow x$ – родитель y и x – мужчина
 x – сын $y \Leftrightarrow y$ – родитель x и x – мужчина
 x – сестра $y \Leftrightarrow x$ – женщина и $\exists z, t: z$ и t – родители x и родители y
 x – золовка $y \Leftrightarrow \exists z: z$ – муж y и x – сестра z

Обрати внимание на то, что в последнем образце использовано слово «сестра», которое не входит в перечень основных, то есть неопределяемых понятий. Этим следует пользоваться и дальше – в каждом определении можно употреблять ранее определённые, то есть уже известные слова.

Д

850 Найди в учебнике определения следующих понятий: 1) делитель; 2) кратное; 3) простое число; 4) составное число; 5) взаимно простые числа; 6) степень числа; 7) среднее арифметическое чисел; 8) куб числа. Сформулируй их с помощью слова «называется» и выпиши в тетрадь.

851 Выбери истинные высказывания и запиши соответствующие им буквы подряд в виде буквенного кода:

- | | |
|--|--|
| А $\exists x \in N: x - 5 > 1;$ | Г $\exists m \in N: m^2 = m^3;$ |
| Б $\exists y \in N: 2 < y < 3;$ | Д $\exists n \in N: n$ – делитель любого числа; |
| В $\exists z \in N: z^2 + 29 < 24;$ | Е $\exists k \in N: k$ кратно любому числу. |

852 Запиши с помощью знаков \Leftrightarrow и \exists определения чисел, кратных 5, 9, 24.

853 Математическое исследование

1) Построй произвольную окружность. Проведи её диаметр AB и хорду MN , перпендикулярную диаметру. Какую закономерность ты наблюдаешь? Повтори эксперимент ещё 2 раза. Сформулируй гипотезу.

2) Построй произвольную окружность и проведи две параллельные хорды AB и CD этой окружности. Проведи и сравни хорды AC и BD . Что ты наблюдаешь? Повтори эксперимент ещё 2 раза. Сформулируй гипотезу.

854 Построй рисунок, отражающий отношения родства в твоей семье (аналогично № 848, с. 172). Составь по нему истинные высказывания.

Ответы

Глава 1, § 1. 4. 3) $135 - 105 : 7$; 4) $(43 + 3) : (140 - 117)$. 6. 4) $10 + 20 + \dots + 90$. 11. 2) $3b - b$; 4) $5(c + d)$, или $5c + 5d$; 6) $x + 3x + (3x - y)$. 13. 4) $10\,000d$ дм. 16. 3) $c - 2d$ км; 7) в $(a : 3) : (c : 3)$, или $a : c$ раз; лишнее условие $- 3$ ч; 8) первый в $(360 : y) : (360 : x)$, или $x : y$ раз; лишнее условие $- 360$ страниц. 23. 4) 254 245 059. 25. в) 1 км 159 м; г) 24 км 18 м. 26. 2) 6 м. 27. 4) $(10 - n) : m$. 28. в) $d - 3n - 6$ сольдо; г) на $(x + 12) : 4 - x : 4$ писем в час. 29. в) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$. 30. г) 8 050 002 916. 33. 1) 20 способов; $7 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 4$. 2) 4 совета. 34. 2) 90. 36. 1) 75; 2) 136. 38. 2) 78 р.; 4) 6 уч. 39. 4) 160. 40. 5) $(m + n + 3) : (m + 3)$; в 3 раза. 46. 4) 66 870. 47. 1) $m^2 = 10\,000\text{ см}^2$; 1 км² = 1 000 000 м². 48. 2) $10\,000b$ дм². 49. б) 45 га 86 а; г) 7 м² 99 дм² 61 см². 50. 2) $m(n - y) + y(m - x)$, или $n(m - x) + x(n - y)$, или $mn - xy$. 51. 2) 25 см, 48 см. 52. 2) На 416 дм². 53. 2) 3 км. 54. 1) 28; 2) 26. 55. 1) 120; 2) 5. 56. 1) $(a + b) : a$; в 5 раз; 2) $c : 4 - c : 5$; на 5 км/ч. 57. 27 а; 60 м. 58. в) 47 204. 59. 2) 2 га 70 а; 3) 8 см² 19 мм². 61. 1) 97 463; 2) 24 063. 62. 4. 63. 1) $28 \cdot (12 - 7) = 140$; 2) $(97 + 43) : (5 \cdot 4) = 7$. 64. 1) 160 км; 2) 116 кг. 65. 1) 124; 2) 238. 66. 1) $4n$; 100 книг; 2) $(a + 8) : b - a : b$, или $8 : b$; на 4 м меньше; a м² – лишнее данное. 67. 148. 68. 2) 8 027 400; 3) 20 836 009; 4) 4 560 002 300; 5) 809 000 095 715. 69. 543, 3045, 5340, 5403, 30 045, 400 503, 405 003, 435 000, 30 000 045. 70. а) 2623; б) 59 476; в) 10 195. 71. 1) 7 м 78 см; 2) 15 км 714 м; 3) 20 дм² 50 см²; 4) 4 га 9 а.

§ 2. 72. Одинаковые математические модели: $x : 2 - x : 3$. 74. Задачи 1, 3 и 4. 75. а) 2; б) 1; в) 4. 78. 1) 72 350; 2) 408 017; 3) 9 040 350; 4) 80 000 203. 80. 2) 14 522 872; 4) 898 989. 83. 3) $(n + m) \cdot ((a - b) : 2)$ кг. 85. 49 чисел. 87. 3) $(x + 4) \cdot 5 - 16 = (4x + 9) - 2$; 4) $(x - 3) : 2 - 5 = x : 3$. 96. 6) 7 220 510; 8) 220 608 000. 98. $2x - 25 = x : 3$, где x – задуманное число. 99. $3x + x + (x + 5) = 20$, где x – количество выступивших во втором отделении. 103. 4) $x : 4 - x : 6 = 2$, где x – количество спортсменов. 104. д) Ув. в 3 раза; е) ум. в 2 раза; ж) ум. в $2n$ раз; з) ум. в $3m$ раз. 111. 4) $50 - 6x = 40 - 4x$, где x – искомое количество месяцев. 113. 1) 7006; 2) 547 820; 3) 2070. 114. б) {139, 193, 319, 391, 913, 931}. 115. Окно разбил Миша; дядя Вася с ним мало знаком. 116. 5) 1-й способ: $8x = 7(x + 2)$; 2-й способ: $8x = y$ и $7(x + 2) = y$, где x дет./ч – производительность по плану, y дет. – дневная норма. 119. 3) $458 \cdot 81 = 37\,098$. 120. 3) $b - a = 9$, $b = a + 9$, $a = b - 9$; 4) $x : y = 3$, $x = 3y$, $y = x : 3$. 124. 1-й способ: $1200 : x - 1200 : (x + 5) = 8$; 2-й способ: $xy = 1200$ и $(x + 5)(y - 8) = 1200$, где x – число стульев в ряду, y – число рядов. 125. а) 178 299 000; б) 20 926 731. 129. 2) $10x + y = xy + 26$; 4) $10x + y = (10y + x) + 27$. 130. 2) $x - y = 1$ и $2(x + y) = 70$, где x м – длина, y м – ширина. 132. 6) 1 000 000 m г. 133. 1) 3 т 1 ц; 2) 15 кг 547 г; 3) 58 кг 400 г; 4) 85 кг. 134. 1) 300 г; 2) 250 г. 135. 1) 660 р; 2) 10 т 80 кг. 136. 1) $(10x + y) : (xy) = 3$; 2) $10x + y = (10y + x) + 72$. 137. 2) $xy = 288$ и $2(x + y) = 72$, где x см – длина, y см – ширина. 138. 2) 3 га 95 а; 4) 1 т 4 ц. 139. $9 - 720 : (720 : 9 + 10) = 1$ (м.). 140. А – 2, Б – 3, В – 1. 142. 4) $(x - 7y) : 4$; 58 р.; 6) $(b : 2 - c) \cdot c$; 80 а. 143. 7) 45; 8) 60. 144. в) $(80 : x + 13) \cdot 4 = 72$; $x = 16$; г) $70 - (3 + x) \cdot 5 = 15$; $x = 8$. 145. 8) $90 plm$; 12) $5n$. 146. 1) $8 + (x + 5) = 17$, где x дм – длина третьего куска; 4 дм; 2 м 1 дм; 6) $4x - x = 72$, где x ц – масса отходов; 120 ц. 150. 2) $40b$; 1000; 6) $9y + 19$; 82. 153. {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}. 157. 1) 1 856 705; 2) 180 000. 158. 1) $2a + 3b$; 111 км; 2) $2(c : b + b)$; 38 м. 159. 1) 16. 161. 1) $12x + 14$; 2) $30yz$; 4) $2d$. 162. 1) 39 яблок; 2) 800 г, 1 кг 600 г, 2 кг 400 г. 164. 1) 49; 2) 11 405. 165. 929, 20, 2. 166. 45 км. 167. 100 яблок. 168. 4) 40 дм; 6) 64 м². 169. д) Ув. в 35 раз; з) ум. в $8m$ раз. 177. 1) 3 м и 8 м; 2) 6 дм. 179. 2) 320; 3) 4. 181. 2) $xy = 60$ и $(x + 1)(y - 3) = 60$; 4 группы по 15 человек. 182. 2) $10x + y = xy + 25$; 45, 67. 186. 5) 380; 6) 610. 187. 1) 6070; 2) 406 904. 189. 4) $1\,000\,000d$ см³. 190. 4) 1 дм³ 926 см³; 7) 1 дм³ 125 см³. 191. в) Все утверждения верны; г) 1. 196. 12 дет./ч. 197. 72. 198. 1) 553 020; 2) 394 800. 199. 1) 8 м³ 12 дм³; 3) 74 дм³. 205. 9. 206. 1) $4a + 16$; 2) $72mn$; 3) $7x$. 207. 1) $y : (x : 5)$; 12 банок; 2) $(n : 7) \cdot 4$; 160 батонов; 3) $40a - (a + 2)b$; 10 м. 208. $x + 2x + 4x = 35$; 5, 10 и 20 стаканов. 209. $x(x + 4) = 32$; 24 см. 210. 1) 42, 54, 76, 97; 2) 4 ученика, 12 гирлянд. 211. 1) 295 707; 3) 7 682 880; 4) 9070; 5) 608; 6) 450. 212. 220.

§ 3. 216. а) $3 < 5$; б) $3 > 5$; в) $3 \leq 5$; г) $3 \leq 5$. 217. Истинные высказывания: 1, 6, 7, 9, 10, 11. 225. $\frac{9}{64}$ книги. 240. 2) 40. 241. 1) 3. 245. 2) $\frac{1}{4}$ часть. 246. 1) $(a + b) : 2 \cdot 3$ стр.; 2) $(c : 9 \cdot 5) : 3 - c : 8$ м/мин; 3) $\frac{d - n}{d}$. 247. 1) 47 670; 2) 2195. 250. На $\frac{1}{12}$ часть. 251. 8 кг. 262. к) 6; м) $1\frac{7}{10}$. 264. 1) 150 000 р.; 2) 128 р. 267. 1) 60 м; 142 м²; 105 м³. 268. 26 дм²; 12 дм³. 269. 1) $50x$; 35 000; 2) $120y$; 10 800. 270. $20\frac{38}{40} < 2\frac{39}{40}$; ложно. 274. 1) 660 мальчиков; 2) 208 билетов. 275. 1) $3\frac{1}{9}$; 2) $10\frac{2}{11}$. 276. 2) 64 м²; 7 рулонов. 277. На 6 голов. 278. 1) 27 597 418;

2) 508. **279.** 172 страницы. **283.** 5555. **284.** Нет. **285.** 1) $53 = 8 \cdot 6 + 5$, $5 < 8$; 2) $135 = 15 \cdot 9 + 0$, $0 < 15$. **286.** 6) $c = 306$, $r = 16$. **287.** 3) 8 (ост. 2000). **288.** $2\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{8}$, $4\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{5}$. **289.** $\frac{11}{4}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{23}{5}$. **290.** 1) $a : 100 \cdot 3$; 3) $c : 8 \cdot 100$. **291.** 3) На $b : 2 \cdot 5 - b$ кг; 4) $d - d : 100 \cdot (15 + 20)$ пассажиров. **295.** 110 га. **296.** 3) 205; 4) 240. **312.** 2) 7; 3) 3992; 4) 17 373. **313.** 1) $s : (s + 4 - 5)$ ч; 5) $(n - k - 3(k : 2)) : 5$ руб. 6) $(x - y - 2y) : 3 : 4$, или $(x - 3y) : 12$ пирожков. **314.** 2) 13; 4) 26. **315.** 2) 5; 4) $1\frac{7}{11}$. **316.** 1) $57\frac{4}{5}$ км; 2) $35\frac{1}{4}$ км. **320.** 1) $x = 6 + 9t$; 33; 2) $x = 90 - 10t$; 60. **325.** 2) 12 см^2 ; 3) 42 м^2 . **332.** 2) 16. **335.** $2\frac{1}{12} \geq 2\frac{1}{5}$; ложно. **336.** 1) 7 пальто; 1 м 90 см; 2) 10 ч. **338.** 1) $2\frac{6}{11}$; 2) $2\frac{8}{11}$. **343.** 480 м. **344.** 60 тетрадей. **345.** 28 учеников. **347.** $x = 9$. **350.** $c = 20$, $r = 18$. **351.** $D(3\frac{1}{4})$; $E(4\frac{2}{4})$, или $E(4\frac{1}{2})$. **352.** 2) $\frac{4}{11} > \frac{4}{39}$; 3) $\frac{3}{19} < \frac{8}{5}$. **353.** 1) 6; 2) $2\frac{5}{9}$. **354.** $4\frac{12}{23}$. **355.** 5 м^3 . **356.** Ув. на 45 р. **357.** (6; 4). **358.** $40\frac{19}{32} \geq 40\frac{19}{32}$; истинно.

Глава 2, § 1. **361.** а) 12 делителей; б) 8 делителей. **375.** Да. **376.** Да. **378.** а) 0; б) 0 или 5; в) четная цифра; г) любая цифра. **381.** а) 240; 375; 6 частей. **388.** 15 ч 20 мин. **389.** 6) 9 ч; д) 5 мин 52 с; е) 10 ч. **390.** В 3 раза; в 2 раза. **391.** 1) $v_{\text{обл.}} = 21 \text{ км/ч}$; 63 км; 2) $v_{\text{уд.}} = 164 \text{ км/ч}$; 492 км; 3) $v_{\text{обл.}} = 54 \text{ км/ч}$; 162 км; 4) $v_{\text{уд.}} = 27 \text{ км/ч}$; 81 км. **396.** $7\frac{1}{43} \leq 7\frac{5}{43} < 7\frac{5}{43}$; ложно. **397.** 1) {1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56}; 2) НОД(12, 32, 48) = 4; 3) 7. **398.** 2) НОК(4, 6, 15) = 60; 3) 770. **402.** 1) 17 ч 27 мин. **403.** 2) 236 м/мин; 4) 4 м/мин. **404.** Вторая больше на 570 м. **405.** а) 8; б) 9. **406.** 105 070. **407.** 5 лет. **409.** 180 овец. **420.** Нет. **427.** 1) $d_9 = c - 9(b + b : 78 \cdot 100)$ м; 4) $d_9 = c + 9(b : 78 \cdot 100 - b)$ м. **430.** 3) $y = 10x - 1$; 4) $y = x \cdot x$. **432.** 10 см, 30 см. **434.** 8, 32, 40 карандашей. **436.** 15 732 189 120. **440.** 2) $d_3 = s + 3(c + d)$ м; 3) $d_3 = s - 3(x - y)$ см. **441.** 3) 434 км. **442.** а) 152; б) 16. **445.** $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. **446.** 2 357 111 317 192 329; а) 11 111 229; б) 77 192 329.

§ 2. **470.** 1) 100; 2) 560. **478.** 2) 22 536. **481.** А. - 5, В. - 4, С. - 3. **486.** а) 1; б) 1; в) 2. **495.** 5) {45}; 6) {5, 6, 12, 24, 45}. **506.** 3) 410; 4) 1420. **507.** 2120 км. **508.** 4) $3bc + 19$. **512.** в) 1. **513.** б) 27. **514.** 1) 405; 2) 129. **515.** 80 км/ч. **519.** 26 чисел. **520.** а) $459 \cdot 459 = 210\,681$; б) $628\,750 \cdot 5 = 3\,143\,750$, $682\,750 \cdot 5 = 3\,413\,750$. **521.** 2) 2000 р. **522.** АВЕ. **523.** НОД(15, 20) = 5; НОК(15, 20) = 60. **526.** 2) 3 ч 30 мин 50 с. **528.** 500.

§ 3. **531.** 1) 10 290; 2) 9 600 000. **536.** а) 12 чисел; б) 6 чисел. **545.** 126 чисел. **550.** а) 8; б) 7. **555.** 64 кг. **556.** а) 4 ч; г) 232 м. **557.** 2) Успеют. **558.** 2) 40 мин; 32 км 400 м. **559.** 75 рыб; 15 тарелок ухи. **560.** Ложно. **564.** {150, 250, 350, ... 950}. **565.** 1) 68 дуэлей; 3) нет; 4) 56 км. **566.** 1) 12; 2) $14\frac{4}{9}$. **568.** 100 000. **569.** $A = 3$; $B = 7$. **570.** 80 км. **573.** 1) 1, 4, 7; 2) 4. **576.** 1) 555 555 555; 2) Таких чисел нет. **590.** 1) 3; 4) 8; 5) 5. **591.** 1) 7; 2) 8. **592.** в) $(2d + 12) : 9 \cdot 4$ марок; д) $(y \cdot 2) \cdot 3$ или $6y$ учеников; е) $n + n : 35 \cdot 100$ рыб. **593.** Истинно. **596.** $4\frac{4}{5}$ м; на $\frac{2}{5}$ м. **597.** 2) $y = 5x - 1$; 4) $y = x \cdot x \cdot x$ или $y = x^3$. **598.** 3 варианта: 2, 5, 8. **599.** б) {522, 531, 540, 549}; в) \emptyset . **603.** $10\frac{7}{12}$ лет; 43 года. **604.** а) 9; б) 18. **605.** 1) $y = x + 25$; 2) $y = 9x$. **607.** 39 916 800. **610.** 2356. **611.** 2) 2 мин. **612.** 5050.

§ 4. **619.** 1) $2 \cdot 5$; 4) $2 \cdot 5 \cdot 23$; 6) $3 \cdot 5 \cdot 17$. **623.** 100 ножей и 260 вилок. **632.** На 1070 р. **638.** 2) $2 \cdot 3$; 3) $5 \cdot 11$; 4) $3 \cdot 19 \cdot 23$; 5) $2 \cdot 11 \cdot 13$. **639.** Пятерок на 8 больше. **640.** $9\frac{17}{18}$. **642.** 1520 р.; 80 р. **651.** 1) 15; 4) 72; 5) 39; 6) 34. **652.** 1) 14; 2) 1; 4) 42. **653.** 1) Нет. 2) 4 и 15, 4 и 77, 15 и 22, 15 и 77. **658.** 2) Нет. **659.** 24 набора по 14 предметов в каждом. **660.** 11, 12 и 13 вагонов. **663.** 3) {7, 8}; {3, 4, 5...}. **664.** 4) $n + (v + v : 8 \cdot 7) \cdot 4$ км. **666.** 2) 20; 4) 3. **670.** {2, 5, 8}. **673.** 1) 52; 3) 285. **674.** 135 подарков. **675.** 1 км. **676.** б) 72 ученика; г) 868 деталей. **682.** Среда. **683.** 6 собак и 4 кошки. **685.** 3) $(2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19) \cdot 2 \cdot 3$. **686.** 6) 6120; 8) 870. **694.** 60 яблок. **695.** 12 этапов. **700.** $a = (c + p) : 2$, $b = (c - p) : 2$; 3) 224 л, 256 л. **704.** 500 м; 350 м. **705.** 72 м. **706.** 1) 0; 2) 202 962 491; 3) 72 030; 4) 156. **708.** 640 дм^2 ; 512 дм^3 . **710.** 2) 144 900; 4) 25 200. **711.** 17 и 11 сосулек. **712.** 6 а. **715.** 10. **716.** 2519. **717.** б и в. **718.** 5) $4(a + b)$; 6) $(a + b)^4$; 7) $5x + 4y$; 8) $x^5 \cdot y^4$. **720.** 2) $2^7 = 128$; 6) $1^9 = 1$; 8) $0^{26} = 0$; 10) $10^6 = 1\,000\,000$. **727.** 8) 117; 9) 27; 10) 122; 12) 75. **729.** 3) НОД = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$; НОК = $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13$. **743.** 15 кор. **745.** 2) 3 ч; 4) 100 м 80 см; 5) 15 га 60 а; 6) 1 дм^3 . **746.** 4) $d : t - n$ м/с; 5) $(x - y) : 2$ бил.; 6) $(k + m) : 2$ тетр. **752.** 1150. **755.** 3) 3364; 4) 46. **761.** 3 дм; $s_{\text{нар.}} > s_{\text{к.}}$ на 18 дм^2 60 см^2 . **762.** 4) 10. **763.** 5555. **765.** Повторение через каждые 9 лет: в 47 лет, 56 лет... **766.** $19^3 = 6859$. **767.** 72. **774.** 3) 45; 4) 56. **787.** 276 г. **788.** 3) 32 см; 4) 27 дм^3 . **789.** 4) 375. **791.** 1) 96; 2) 14. **793.** 2) $x + y = 1200$ и $x : 100 \cdot 60 + y : 100 \cdot 23 = 572$, где x - I число, y - II число. **796.** 148 л. **798.** 37, 41, 43, 47. **803.** НОД = 36, НОК = 1980. **805.** 3) 225; 4) 75; 5) 64; 6) 28. **807.** 2) 1 ч 32 мин; 4) 1 мин 47 с. **808.** 64 км. **809.** 240 м. **810.** Через 4 ч.

§ 5. **813.** 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12. **815.** 4) $k : z = 5$, $k = 5z$, $k : 5 = z$; 6) $n = 4q + 1$. **819.** 1) $c - b = 7$, $c = b + 7$, $b = c - 7$; 4) $m = n : 4 \cdot 3$. **820.** 36 учеников. **821.** $16^2 = 256$. **827.** 2, 4, 6. **830.** а, в, д. **851.** АГД.

Оглавление

Глава 1. Математический язык

§ 1. Математические выражения

1. Запись, чтение и составление выражений 3
2. Значение выражения 10

§ 2. Математические модели

1. Перевод условия задачи на математический язык 17
2. Работа с математическими моделями 35
3. Метод проб и ошибок 42
4. Метод перебора 46

§ 3. Язык и логика

1. Высказывания 55
2. Общие утверждения 60
3. «Хотя бы один» 65
4. О доказательстве общих утверждений 69
5. Введение обозначений 74

Глава 2. Делимость натуральных чисел

§ 1. Основные понятия

1. Делители и кратные 87
2. Простые и составные числа 94

§ 2. Основные свойства делимости натуральных чисел

1. Делимость произведения 100
2. Делимость суммы и разности 105

§ 3. Признаки делимости натуральных чисел

1. Признаки делимости на 10, на 2 и на 5 113
2. Признаки делимости на 3 и на 9 121

§ 4. Простые числа и делимость

1. Разложение чисел на простые множители 128
2. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа 133
3. Наименьшее общее кратное 139
4. Степень числа 145
5. Дополнительные свойства умножения и деления 153

§ 5. Ещё немного логики

1. Равносильность предложений 160
2. Определения 163

Ответы 174

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа служат для счёта предметов: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $0 \notin N$

Таблица разрядов натуральных чисел

Классы	миллиарды			миллионы			тысячи			единицы		
	сот.	дес.	ед.	сот.	дес.	ед.	сот.	дес.	ед.	сот.	дес.	ед.
Разрядные единицы												1
											1	0
										1	0	0
									1	0	0	0
								1	0	0	0	0
							1	0	0	0	0	0
						1	0	0	0	0	0	0
			1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Алгоритм чтения многозначных чисел

1. Разбить на классы (справа налево)
2. Назвать число единиц каждого класса

* * * ' * * * ' * * * ' * * * ←

→

Свойства действий с 0 и 1

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a - 0 = a$$

$$a - a = 0$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$a : 1 = a \quad a : a = 1$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Делить на 0 нельзя! $0 : a = 0$

Основные свойства сложения и умножения

$a + b = b + a$	переместительное свойство сложения
$a \cdot b = b \cdot a$	переместительное свойство умножения
$(a + b) + c = a + (b + c)$	сочетательное свойство сложения
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	сочетательное свойство умножения
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	распределительное свойство умножения

Формула деления с остатком

$$a = b \cdot c + r,$$

где $r < b$

ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

Дробью называют одну или несколько равных долей целого: $\frac{m}{n}$, где $m, n \in N$

Проценты – это *сотые* доли величины: 84% – это $\frac{84}{100}$

Сравнение дробей

$$\frac{7}{8} > \frac{2}{8}, \text{ так как } 7 > 2$$

$$\frac{2}{4} > \frac{2}{8}, \text{ так как } 4 < 8$$

Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a + b}{n}$$

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a - b}{n}$$

Смешанные числа

$$2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$$

целая часть дробная часть

Сложение и вычитание смешанных чисел

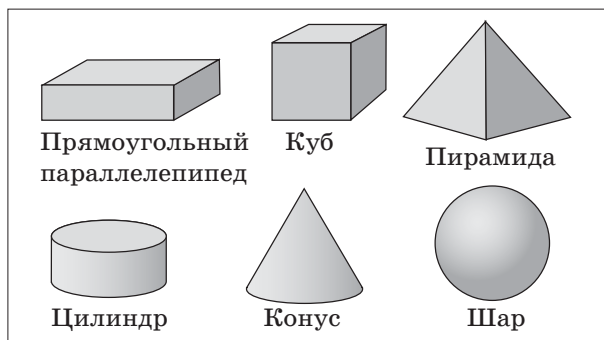
$$1\frac{3}{5} + 1\frac{4}{5} = 2\frac{7}{5} = 3\frac{2}{5}$$

$$3 - 1\frac{5}{6} = 2\frac{6}{6} - 1\frac{5}{6} = 1\frac{1}{6}$$

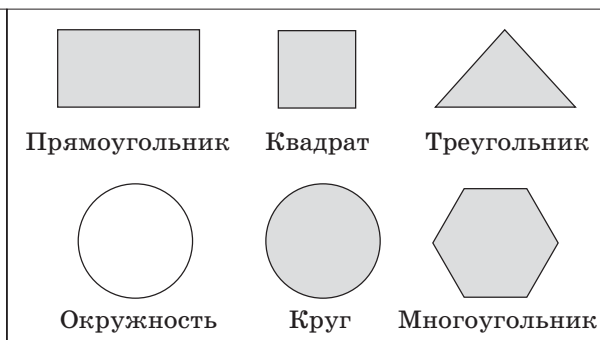
$$2\frac{1}{4} - 1\frac{3}{4} = 1\frac{5}{4} - 1\frac{3}{4} = \frac{2}{4}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Пространственные фигуры



Плоские фигуры



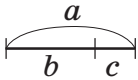
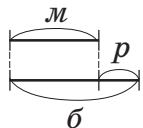
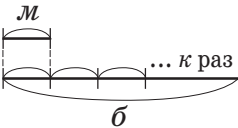
ФОРМУЛЫ

Периметр	Площадь	Объём
$P_{\text{пря.}} = 2 \cdot (a + b)$ $P_{\text{кв.}} = a \cdot 4$	$S_{\text{пря.}} = a \cdot b$ $S_{\text{кв.}} = a \cdot a$	$V_{\text{пр. пар.}} = a \cdot b \cdot c$ $V_{\text{куба}} = a \cdot a \cdot a$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Простые уравнения на сложение и вычитание			
$x + a = b$	$a + x = b$	$a - x = b$	$x - a = b$
$x = b - a$	$x = a - b$	$x = a + b$	$x = a + b$
Чтобы найти неизвестное слагаемое, можно из суммы вычесть известное слагаемое		Чтобы найти неизвестное вычитаемое, можно из уменьшаемого вычесть разность	
Чтобы найти неизвестное слагаемое, можно из суммы вычесть известное слагаемое		Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, можно к вычитаемому прибавить разность	
Простые уравнения на умножение и деление			
$x \cdot a = b$	$a \cdot x = b$	$a : x = b$	$x : a = b$
$x = b : a$	$x = a : b$	$x = a \cdot b$	$x = a \cdot b$
Чтобы найти неизвестный множитель, можно произведение разделить на известный множитель		Чтобы найти неизвестный делитель, можно делимое разделить на частное	
Чтобы найти неизвестный множитель, можно произведение разделить на известный множитель		Чтобы найти неизвестное делимое, можно делитель умножить на частное	

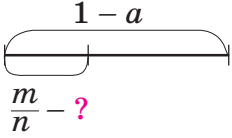
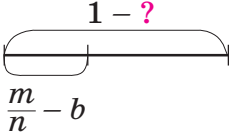
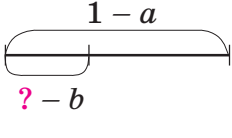
ТИПЫ ПРОСТЫХ ЗАДАЧ

<p>Части и целое</p> <p>$a = b + c$</p>  <p>$b = a - c$ $c = a - b$</p>	<p>Разностное сравнение</p> <p>На сколько? $p = b - m$</p>  <p>$b = m + p$ $m = b - p$</p>	<p>Кратное сравнение</p> <p>Во сколько раз? $k = b : m$</p>  <p>$b = m \cdot k$ $m = b : k$</p>	<p>Формула произведения</p> <p>$a = b \cdot c$ $b = a : c$ $c = a : b$</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">a</td> <td style="width: 33%;">b</td> <td style="width: 33%;">c</td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table> <p>$s = v \cdot t$ (расстояние, скорость, время) $S = a \cdot b$ (площадь прямоугольника, длина, ширина) $C = a \cdot n$ (стоимость, цена, количество товара) $A = w \cdot t$ (работа, производительность, время)</p>	a	b	c			
a	b	c							

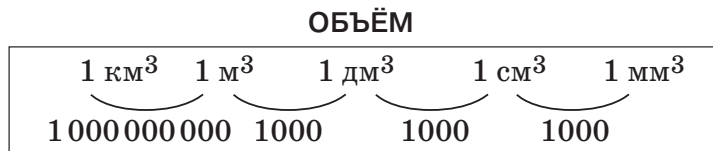
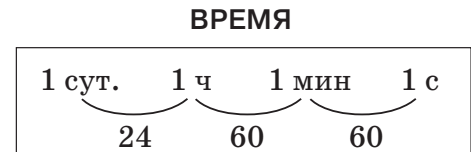
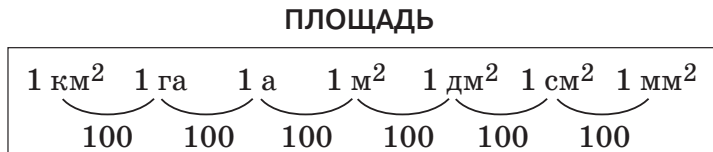
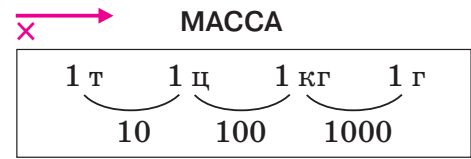
ЗАДАЧИ НА ОДНОВРЕМЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

	ДВИГАЮТСЯ В РАЗНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ	ДВИГАЮТСЯ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ
<i>Вид движения (схема)</i>	Встречное движение 	Движение вдогонку 
<i>Скорость сближения</i>	$v_{\text{сбл.}} = v_1 + v_2$	$v_{\text{сбл.}} = v_1 - v_2$
<i>Формула одновременного движения</i>	$s = v_{\text{сбл.}} \cdot t_{\text{встр.}}$	
<i>Расстояние через время t</i>	$d_t = s - (v_1 + v_2) \cdot t$	$d_t = s - (v_1 - v_2) \cdot t$
<i>Вид движения (схема)</i>	Движение в противоположных направлениях 	Движение с отставанием 
<i>Скорость удаления</i>	$v_{\text{уд.}} = v_1 + v_2$	$v_{\text{уд.}} = v_1 - v_2$
<i>Расстояние через время t</i>	$d_t = s + (v_1 + v_2) \cdot t$	$d_t = s + (v_1 - v_2) \cdot t$

ЗАДАЧИ НА ДРОБИ (ПРОЦЕНТЫ)

 <p>$\frac{m}{n} - ?$</p>	 <p>$\frac{m}{n} - b$</p>	 <p>$? - b$</p>
<p>Чтобы найти часть числа, выраженную дробью, можно это число разделить на знаменатель дроби и умножить на её числитель:</p> <p style="text-align: center;">$a : n \cdot m$</p>	<p>Чтобы найти число по его части, выраженной дробью, можно эту часть разделить на числитель дроби и умножить на её знаменатель:</p> <p style="text-align: center;">$b : m \cdot n$</p>	<p>Чтобы найти часть, которую первое число составляет от второго, можно первое число разделить на второе:</p> <p style="text-align: center;">$b : a = \frac{b}{a}$</p>

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЕДИНИЦАМИ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН

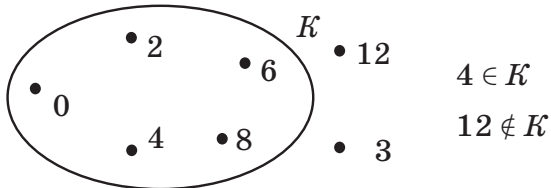


1 л = 1 дм³

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

МНОЖЕСТВО И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ

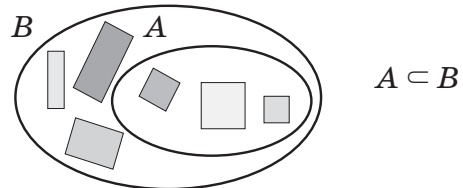
K – множество чётных однозначных чисел
 $K = \{0, 2, 4, 6, 8\}$



Множество называют **пустым**, если оно не содержит элементов. Обозначают: \emptyset

ПОДМНОЖЕСТВО

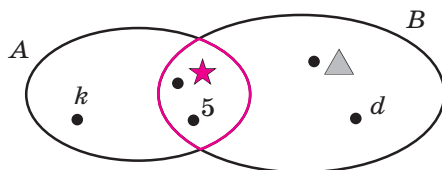
Множество A называют **подмножеством** множества B , если каждый элемент A является также элементом B



A – множество квадратов
 B – множество прямоугольников

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

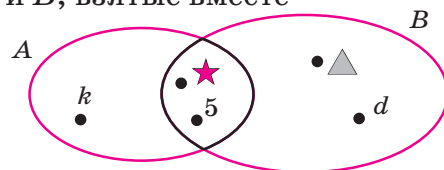
Пересечение множеств A и B – это их общая часть



$A = \{\star; \underline{5}; k\}$, $B = \{\star; \triangle; \underline{5}; d\}$
 $A \cap B = \{\star; \underline{5}\}$

ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Объединение множеств A и B составляют все элементы множеств A и B , взятые вместе



$A = \{\star; \underline{5}; k\}$, $B = \{\star; \triangle; \underline{5}; d\}$
 $A \cup B = \{\star; \underline{5}; k; \triangle; d\}$

Таблица простых чисел (до 1000)

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Учебное издание

Дорофеев Георгий Владимирович
Петерсон Людмила Георгиевна

МАТЕМАТИКА

5 класс

Учебник

В двух частях

Часть 1

Центр развития углублённого и профильного образования,
функциональной грамотности

Научный редактор *Д. Л. Абраров*. Ведущий редактор *Н. А. Шихова*
Художники *П. А. Северцов, С. Ю. Гаврилова*. Оформление *Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*. Компьютерная вёрстка *Р. Ю. Шаповалов*
Корректор *Е. Н. Клитина*

Подписано в печать 14.01.2022. Формат 84х108/16. Объем 11,0 печ. л.
Усл. печ. л. 18,48. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная.

Тираж экз. Заказ №

Акционерное общество «Издательство «Просвещение»

Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — vopros@prosv.ru.