



Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

8 класс

Учебник

(в 3 частях)

Часть 2

Рекомендовано
к использованию при реализации имеющих государственную
аккредитацию образовательных программ начального общего,
основного общего, среднего общего образования



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

*Чтобы учебником было удобно пользоваться,
в нём введены следующие обозначения:*



– задачи по новой теме для работы в классе,



– задачи для домашней работы,



– повторение ранее пройденного,



– задачи на смекалку,



– задания базового уровня,



– более сложные задания по новым темам и темам повторения,



– задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,



– завершение доказательства теоремы,

*{ * * * – более сложный материал для тех, кому интересно,*



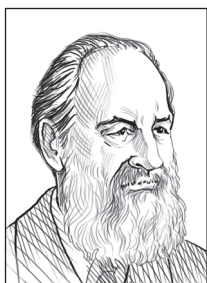
– тест для самостоятельной проверки своих знаний:
<http://metodist.lbz.ru/authors/matematika/6/>

Глава 3

Исследование нелинейных процессов

§ 2. Кусочно-заданные функции

3.2.1. Кусочно-заданные функции



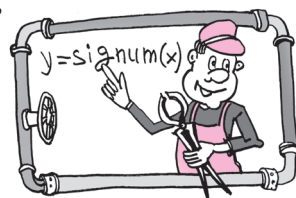
Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле.

Алексей Николаевич Крылов (1863–1945),
русский и советский кораблестроитель,
механик, математик

Бывает, что на практике важно отследить не значение некоторой величины, а только её знак. Так, для работы компаний мобильной связи в некоторых случаях достаточно отслеживать не значение текущей суммы на счёте пользователя, а лишь знак его баланса. Весной для спасения саженцев от ночных заморозков садовода часто волнует лишь плюсовая температура. Чтобы автоматизировать процессы предоставления услуг связи, включения отопления и пр., возникает необходимость описать на математическом языке правило, которое каждому числу ставит в соответствие его знак.

Функция, которая удовлетворяет этому требованию, была введена ещё в конце XIX века немецким математиком Леопольдом Кронекером. Областью определения этой функции является множество всех чисел, для обозначения положительных чисел выбрано число $(+1)$, для обозначения отрицательных чисел – число (-1) , а нулю соответствует 0:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



Эту функцию обозначают $y = \text{sign}(x)$, читают: «сигнум икс» (от латинского «signum» – «знак»). В наши дни функция **сигнум** используется в самых разных разделах математики, например, в математической статистике.

Областью определения данной функции является множество $X = (-\infty; +\infty)$, которое разбивается на три попарно непересекающихся подмножества $X_1 = (-\infty; 0)$, $X_2 = \{0\}$ и $X_3 = (0; +\infty)$:

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X; X_1 \cap X_2 = \emptyset; X_1 \cap X_3 = \emptyset; X_2 \cap X_3 = \emptyset$$

График функции сигнум состоит из двух лучей $y = 1$ и $y = -1$, а также отдельно расположенной точки $(0; 0)$ (рис. 1). Начало каждого из этих лучей не принадле-

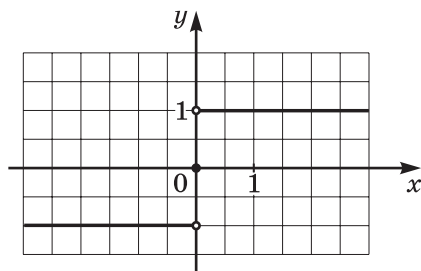


Рис. 1

жит графику, поэтому эти точки изображены «выколотыми» (иногда точки, не принадлежащие графику, обозначают стрелками).

Функция $y = \text{sign}(x)$ напоминает изученные нами в 7 классе кусочно-линейные функции. Однако в отличие от них у функции сигнум один из числовых промежутков, составляющих область определения, «сжался» в точку. Поэтому нам необходимо обобщить понятие кусочно-линейной функции и дополнить его случаями, когда в некоторых точках функция принимает «отдельные» значения. При таком понимании функция $y = \text{sign}(x)$ является кусочно-линейной. Попробуйте сами сформулировать новое, обобщённое определение этого понятия.

Вместе с тем в предыдущих пунктах мы выяснили, что многие реальные процессы могут описываться и нелинейными функциями. Поэтому нам необходимо продолжить обобщение понятия кусочно-линейной функции и ввести новую, так называемую **кусочно-заданную функцию**, где на каждом из промежутков функция может быть задана не только формулой $y = kx + b$, но и другими формулами самых разных видов – например, $y = x^n$, $y = \frac{1}{x}$ и т. д.

Ясно, что кусочно-линейные функции также являются кусочно-заданными (а вот обратное верно не всегда!). Поэтому начнём знакомство с кусочно-заданными функциями с уточнения особенностей более простого их случая кусочно-линейных функций.

Пример 1.

Вспомним одну из простейших кусочно-линейных функций $y = |x|$. Используя определение модуля, её можно записать в виде:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Отметим основные свойства функции $y = |x|$.

Свойство 1. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = |x|$ убывает, а на промежутке $[0; +\infty)$ – возрастает.

Свойство 2. Функция $y = |x|$ является чётной ($|-x| = |x|$), её график симметричен относительно оси ординат.

Свойство 3. Функция $y = |x|$ принимает только неотрицательные значения. Ее множество значений – промежуток $[0; +\infty)$.

График этой функции изображён на рис. 2. Её область определения разбита на два промежутка $X_1 = (-\infty; 0)$ и $X_2 = [0; +\infty)$, где $X_1 \cup X_2 = (-\infty; +\infty)$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Оба промежутка X_1 и X_2 имеют «общий конец» – точку 0, который принадлежит правому промежутку, но не принадлежит левому. При этом в точке 0 происходит «стыковка» значений функций, ведь по какой бы из формул мы бы ни вычисляли значение функции, для неё оно будет одним и тем же.

Однако подобная «стыковка» значений функций, заданных на разных промежутках, происходит далеко не всегда.

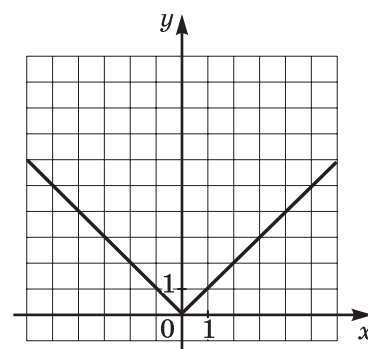


Рис. 2

Пример 2.

Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Область определения этой функции $X = (-\infty; +\infty)$ разбита на промежутки $X_1 = (-\infty; 0)$ и $X_2 = [0; +\infty)$. Правый конец X_1 совпадает с левым концом X_2 (точка 0), но значения функций на обоих промежутках в точке 0 не совпадают: при $x = 0$ значение $x + 1 = 0 + 1 = 1$, а значение $-x = -0 = 0$ ($1 \neq 0$).

График данной функции приведён на рис. 3. На левом участке графика точка 0 изображена «выколотой», так как концевая точка этому участку графика не принадлежит. Из-за отсутствия «стыковки» график не соединяется в единую ломаную.

Если определить функцию немного иначе:

$$y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x > 0; \\ -x, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$

то «выколотой» точкой будет отмечен уже не левый, а правый участок графика (рис. 4).

Во всех рассмотренных нами примерах область определения функции совпадала с числовой прямой $X = (-\infty; +\infty)$. Однако кусочно-заданные функции (и в том числе, кусочно-линейные) могут быть заданы на любом объединении числовых промежутков.

Пример 3.

Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq -1; \\ x-1, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$

Эта функция также является не только кусочно-заданной, но и кусочно-линейной. Её график изображён на рис. 5.

Область определения данной функции является объединением двух лучей: $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1 = (-\infty; -1]$, $X_2 \in [1; +\infty)$. При этом правый конец X_1 (точка -1) не совпадает с левым концом X_2 (точка 1), поэтому область определения этой функции не является числовым промежутком. Во всех точках интервала $(-1; 1)$ функция не определена.

Рассмотрим теперь кусочно-заданные функции более сложного вида.

Пример 4.

Построить график функции: $y = \begin{cases} 5, & \text{если } x > 1; \\ x, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ 2, & \text{если } x = -1; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

Решение:

Для построения графика кусочно-заданной функции воспользуемся алгоритмом построения кусочно-линейной функции с той лишь разницей, что на каждом из промежутков может быть получена часть не прямой, а кривой линии.

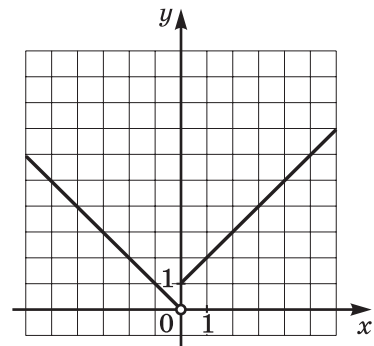


Рис. 3

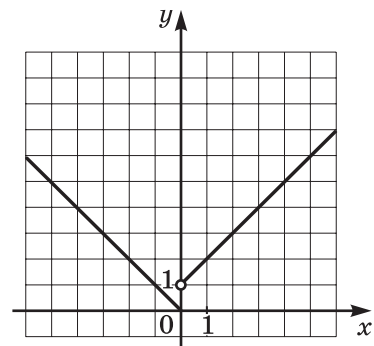


Рис. 4

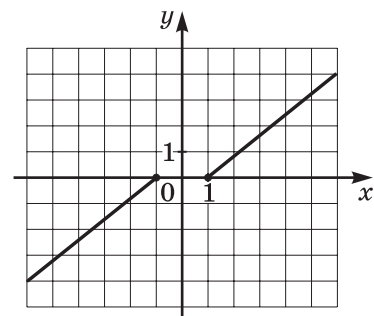


Рис. 5

Область определения функции $X = (-\infty; +\infty)$ разбита на четыре непересекающихся части. Пронумеруем их по мере движения по числовой прямой слева направо: $X_1 = (-\infty; -1)$; $X_2 = \{-1\}$; $X_3 = (-1; 1]$; $X_4 = (1; +\infty)$.

На каждом из выделенных промежутков и в точке $x = -1$ построим график, который задан соответствующей формулой.

Полученный график изображен на рис. 6. Он состоит из куска ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$ при $x < -1$; точки $(-1; 2)$; прямолинейного отрезка $y = x$ при $-1 < x \leq 1$; горизонтального луча $y = 5$ при $x > 1$. Концевые точки частей графика, не принадлежащие им, отмечены «выколотыми» точками.

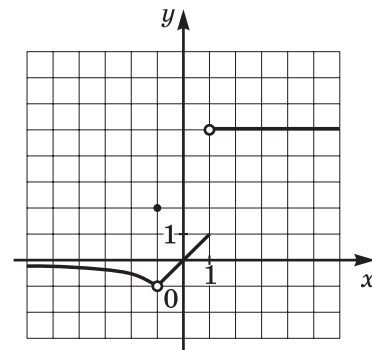
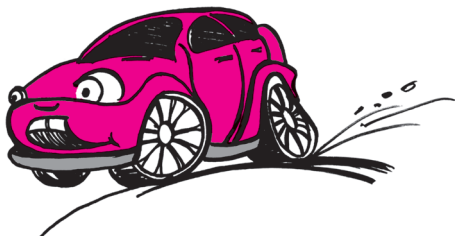


Рис. 6

* * *

Приведем примеры реальных ситуаций, которые описываются кусочно-заданными функциями.



Мы привыкли решать задачи на движение, упрощая реальный процесс. Для простоты мы обычно считаем, что объект сразу движется с постоянной скоростью, указанной в задаче. Однако в жизни это происходит иначе: сначала объект должен «набрать» эту заданную скорость. Попробуем описать прямолинейное движение объекта без подобных «математических» упрощений, используя законы, известные из курса физики.

Задача.

Автомобиль движется из состояния покоя (в момент $t = 0$) с ускорением $a = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Через 3 минуты движения он достигает некоторой скорости v_0 , после чего продолжает равномерно двигаться с этой скоростью. Какой путь проедет автомобиль из начальной точки через 1 минуту после начала движения? Через 2 минуты, 3 минуты, 5 минут, 10 минут? Постройте график зависимости $s(t)$, где время t от начала движения измеряется в минутах, s – в километрах.

Решение:

Если при прямолинейном движении скорость объекта прямо пропорционально зависит от времени ($v = at$, где коэффициент пропорциональности a называется *ускорением*), то путь, пройденный из точки начала движения ($t = 0, v = 0$), вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$.

1. Выразим ускорение в требуемых единицах измерения:

$$a = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0,1 \frac{\text{км} / 1000}{(\text{мин} / 60)^2} = 0,1 \cdot \frac{3600}{1000} \frac{\text{км}}{\text{мин}^2} = 0,36 \frac{\text{км}}{\text{мин}^2}.$$

2. Промежуток времени, за которое автомобиль наберет скорость v_0 , обозначим t_0 , а путь, который автомобиль пройдет за это время, – s_0 . По условию, $t_0 = 3$ мин. Выясним, до какой скорости разгонится автомобиль за эти 3 минуты.

$$v_0 = a \cdot t_0 = 0,36 \frac{\text{км}}{\text{мин}^2} \cdot 3 \text{ мин} = 1,08 \frac{\text{км}}{\text{мин}}.$$

3. Найдём зависимость $s(t)$, где t – время от начала движения, s – путь, пройденный с момента начала движения.

3.1. Если $t \leq 3$, то пройденный путь вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$. Подставим в нее соответствующее значение a :

$$s(t) = \frac{at^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0,36 \cdot t^2 = 0,18t^2$$

Таким образом, при $t \leq 3$ функция $s(t)$ является нелинейной функцией от t , графиком её будет часть параболы.

3.2. При $t > 3$, пройдя путь s_0 , автомобиль далее двигался равномерно со скоростью $v_0 = 1,08 \frac{\text{км}}{\text{мин}}$ в течение времени $(t - 3)$ мин. Значит, зависимость $s(t)$ на этом участке задаётся формулой:

$$s(t) = s_0 + v_0(t - 3) = 0,18 \cdot 3^2 + 1,08 \cdot (t - 3) = 1,62 + 1,08t - 3,24 = 1,08t - 1,62.$$

Таким образом, при $t > 3$ пройденный с начала движения путь является линейной функцией от t , графиком этой функции будет открытый луч.

4. Итак,

$$s(t) = \begin{cases} 0,18t^2, & \text{если } t \leq 3; \\ 1,08t - 1,62, & \text{если } t > 3 \end{cases}$$

Пройденный путь $s(t)$ – кусочно-заданная функция с областью определения $X = [0; +\infty)$. Эта область определения разбивается на два непересекающихся промежутка $X_1 = [0; 3]$ и $X_2 = (3; +\infty)$.

5. Пользуясь полученной формулой, вычислим, какой путь проедет автомобиль из начальной точки через 1 мин, 2 мин, 3 мин, 5 мин, 10 мин после начала движения.

Если $t = 1$ мин, $s = 0,18 \cdot 1^2 = 0,18$ км;

если $t = 2$ мин, $s = 0,18 \cdot 2^2 = 0,72$ км;

если $t = 3$ мин, $s = 0,18 \cdot 3^2 = 1,62$ км.

Здесь же проверим, состыкуются ли концевые точки частей графика, вычислив $s(3)$ по другой формуле:

$$s(3) = 1,08t - 1,62 = 1,08 \cdot 3 - 1,62 = 1,62.$$

Значения одинаковые, значит, части графика состыкуются.

Если $t = 5$ мин, $s = 1,08 \cdot 5 - 1,62 = 3,78$ км;

если $t = 10$ мин, $s = 1,08 \cdot 10 - 1,62 = 9,18$ км.

Построим теперь график функции $s(t)$, используя полученные координаты точек $(t; s)$ и учитывая, что $s(0) = 0$.

График изображён на рис. 7. Первый участок графика – часть параболы, отличающейся от параболы $s = t^2$ лишь постоянным коэффициентом 0,18. Вторая часть графика – участок прямой, для построения которой достаточно значений функции в двух точках (например, $t = 3$ и $t = 5$).

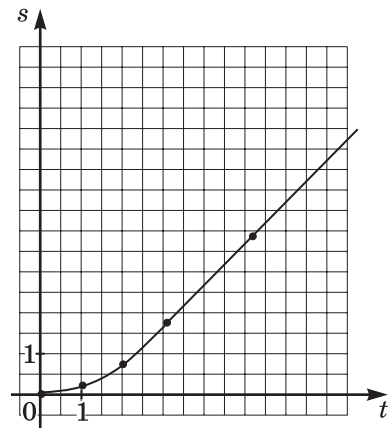


Рис. 7



1

Турист в течение первых 3 часов шёл со скоростью 4 км/ч. После этого он отдыхал в течение получаса. Следующие 2 часа он шёл со скоростью 3 км/ч. Запишите формулу зависимости пути s от времени движения t в часах.

Как называется полученная функция? Постройте её график на координатной плоскости Ost .

2

1) Постройте графики кусочно-линейных функций:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x \geq 2; \\ -x+2, & \text{если } x < 2 \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x \geq 0; \\ -x+2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Чем отличаются эти функции? Какой из построенных графиков не является ломаной? На последнем графике найдите луч, начало которого не принадлежит графику функции.

2) Постройте график функции $y = \begin{cases} x-2, & \text{если } x > 0; \\ 1, & \text{если } x = 0; \\ -x+2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Чем отличается эта функция от предыдущей? Найдите на графике этой функции лучи, начало которых не принадлежит графику.

3) Предложите, каким способом можно показать, что начало луча не принадлежит графику. Сравните свой способ с общепринятым способом, познакомившись с ещё одним примером кусочно-линейной функции на с. 3 учебника.

4) Перечислите новые особенности кусочно-линейных функций, которые вы выявили с помощью этого задания.

3

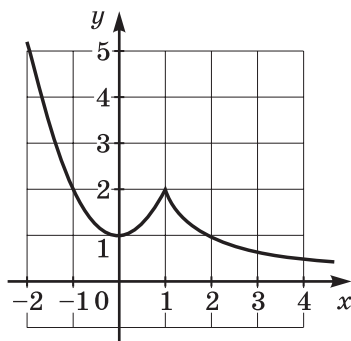
1) Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 1; \\ x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$. Является ли эта функция кусочно-линейной?

2) Предложите название для этой функции. Сравните его с общепринятым названием, указанным на с. 4 учебника. Приведите пример величин, связанных аналогичной зависимостью.

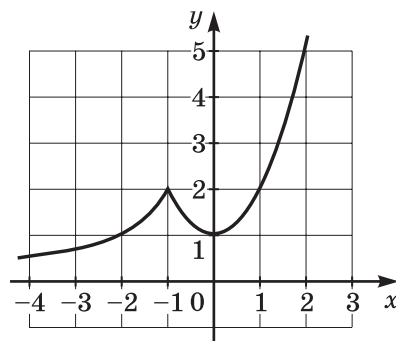
4

Укажите, какой из графиков задаётся функцией $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 1; \\ x^2, & \text{если } x < 1 \end{cases}$

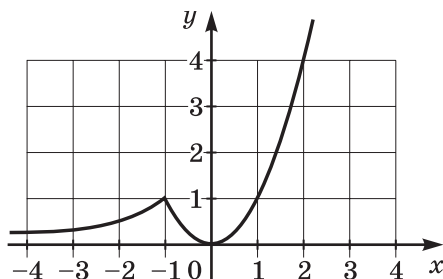
1)



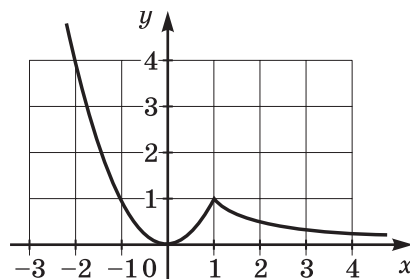
3)



2)



4)



5 Постройте графики кусочно-линейных функций:

$$a) y = \begin{cases} 2x-3, & \text{если } x > 4; \\ -x+9, & \text{если } x \leq 4 \end{cases}$$

$$б) y = \begin{cases} 2x-3, & \text{если } x > -1; \\ -x+9, & \text{если } x \leq -1 \end{cases}$$

6 Постройте графики кусочно-линейных функций:

$$a) y = \begin{cases} 2x-3, & \text{если } x > 1; \\ 1, & \text{если } x = 1; \\ -2x+1, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

$$б) y = \begin{cases} 3x-2, & \text{если } x > 0; \\ 1, & \text{если } x = 0; \\ x+2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

7 Постройте графики кусочно-линейных функций:

$$a) y = \begin{cases} 2x-1, & \text{если } x > 1; \\ 1, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ -2x-1, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$

$$б) y = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } x > 2; \\ 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ -x+1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

8 Постройте графики функций:

$$a) y = \begin{cases} 3x-4, & \text{если } x > 2; \\ x, & \text{если } -1 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$

$$б) y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 1; \\ 2x, & \text{если } 0 \leq x < 1; \\ -x+3, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

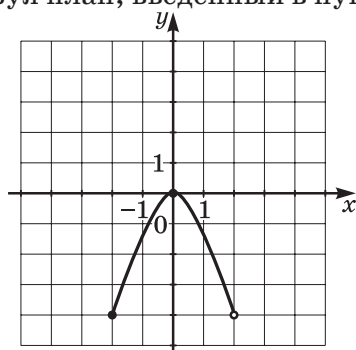
9 Постройте график функции:

$$a) y = \frac{24}{|x|};$$

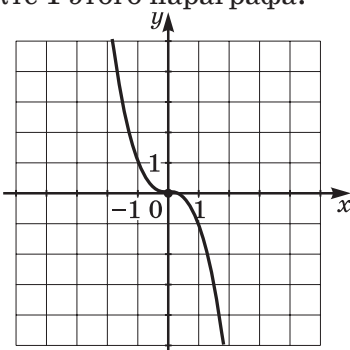
$$б) y = -\frac{8}{|x|}.$$

10

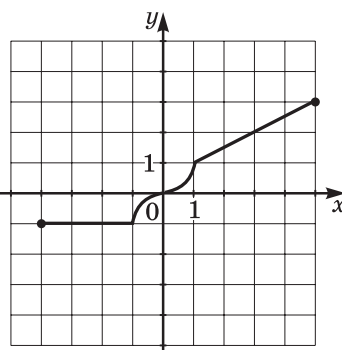
На рисунках изображены графики функций. Прочитайте каждый график, используя план, введенный в пункте 1 этого параграфа:



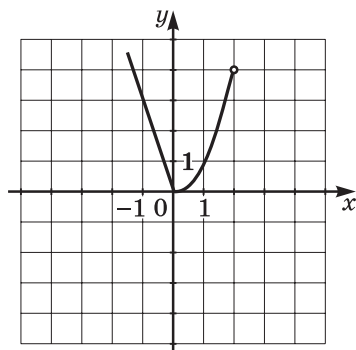
a)



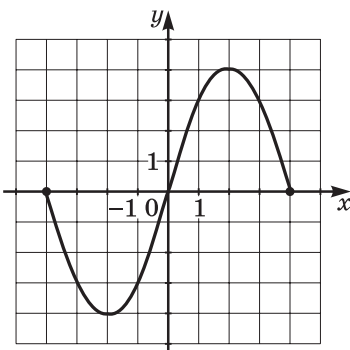
б)



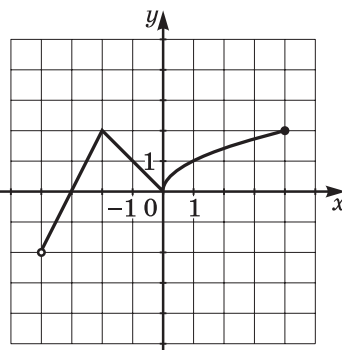
в)



г)



д)



е)

- 11** Постройте график функции с заданной областью определения и «прочитайте» его:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x < 3; \\ -x^2, & \text{если } -3 < x < 0 \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} x, & \text{если } 1 \leq x \leq 5; \\ x^6, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- 12** Дана функция $y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq -2; \\ \frac{2}{x}, & \text{если } x < -2 \end{cases}$

Найдите $y(-8)$, $y(-4)$, $y(-1)$, $y(-\frac{1}{2})$, $y(0)$, $y(24)$. Постройте график функции и «прочитайте» его.

- 13** Дана функция $y = \begin{cases} -2x+2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2; \\ -\frac{12}{x}, & \text{если } -6 \leq x < -2 \end{cases}$

Найдите $y(-12)$, $y(-3)$, $y(-2)$, $y(-0,6)$, $y(0)$, $y(4)$.
Постройте график функции $y(x)$ и «прочитайте» его.

- 14** Постройте график кусочно-заданной функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} -x+4, & \text{если } x \geq 2; \\ \frac{4}{x}, & \text{если } \frac{1}{2} \leq x < 2; \\ 8, & \text{если } x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} 5, & \text{если } -1 \leq x \leq 5; \\ -\frac{5}{x}, & \text{если } -5 \leq x < -1; \\ -x-4, & \text{если } -6 < x < -5 \end{cases}$$

- 15** Постройте график функции и исследуйте её на четность:

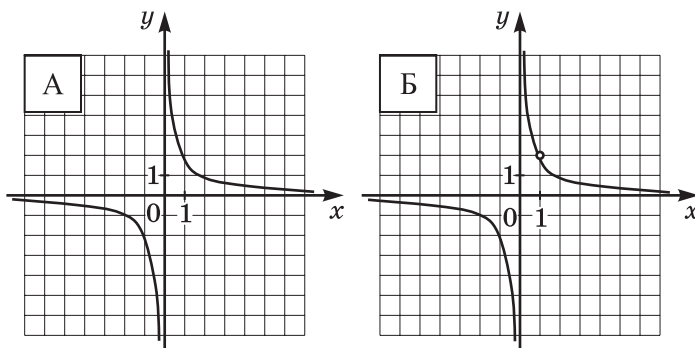
$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x+1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

- 16** На рис. А изображён график функции $y = \frac{2}{x}$. Чем отличается от него график, изображенный на рис. Б?

Укажите область определения для каждой из функций.

Какой из этих графиков совпадает с графиком функции $y = \frac{2(x-1)}{x(x-1)}$?

Объясните, как построить график функции $y = \frac{2x-2}{x^2-x}$.



17 Постройте график функции $y = \frac{2x^2 - 2}{x + 1}$.

π 18 Представьте каждое из чисел в виде отношения целого числа к натуральному:

$$2\frac{3}{5}; -6; 0,37; 0; -\frac{4}{7}; 0,06; -15\frac{1}{6}.$$

19 Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{3}{9}$; б) $\frac{8}{37}$; в) $\frac{7}{15}$; г) 3;
 д) $-15,15$; е) $\frac{22}{9}$; ж) $-6\frac{5}{12}$; з) $\frac{89}{11}$.

20 Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) 12,(3); б) 1,(23); в) 15,3(1); г) $-14,0(14)$; д) 8,14(8).

21 Назовите три числа, заключённых между числами:

а) 2,002 и 2,011; б) $-3,009$ и $-3,09$;
 в) $-1\frac{3}{4}$ и $-1,7(5)$; г) $\frac{1}{9}$ и $0,(2)$.

22 Решите неравенство $2|x - 3| + x \geq 3$.

23 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ 7 - 5x \leq 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases}$$

$\mathcal{D}$ 24 Как называются данные функции? Постройте их графики.

а) $y = \begin{cases} 0,5x + 0,5, & \text{если } x \geq 1; \\ x^8, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -0,5x + 0,5, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 1; \\ x^5, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -x - 2, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

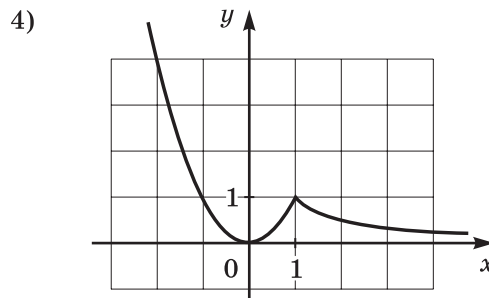
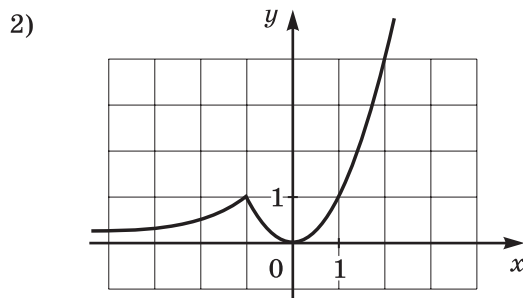
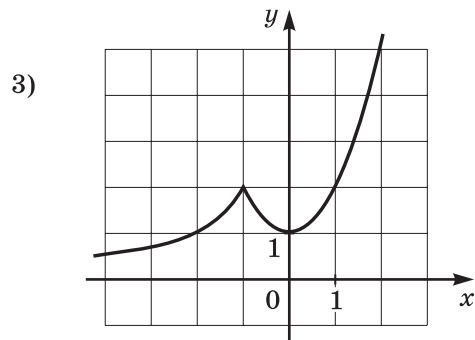
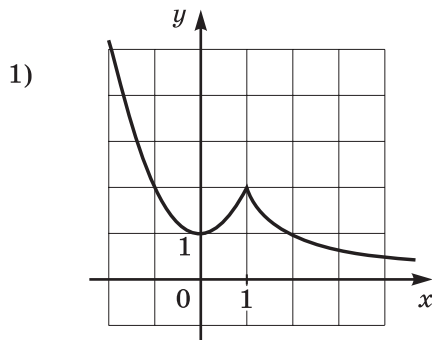


25 Дана функция $y = \begin{cases} \frac{3}{x}, & \text{если } x > 0; \\ x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Найдите $y(-9)$, $y(-6)$, $y(-1)$, $y(-\frac{3}{5})$, $y(0)$, $y(15)$, $y(30)$. Постройте график функции $y(x)$ и «прочитайте» его.

26

Укажите, какой из графиков задаётся функцией $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq -1; \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x < -1. \end{cases}$



27

Дана функция $y = \begin{cases} -9x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ -\frac{9}{x}, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

Найдите $y(-9)$, $y(-4,5)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(0,5)$, $y(3)$. Постройте график функции $y(x)$ и «прочитайте» его.

28

Постройте график функции $y = \frac{x+1}{x^2+x}$.

29

Назовите пять целых чисел из интервала $(-1,6; 3,2)$.

30

Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{22}{6}$; г) 8,09; д) $-\frac{5}{3}$; е) $-8\frac{7}{11}$.

31

Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) 1,(1); б) 2,0(9); в) -6,(12); г) 9,8(76); д) -0,13(52).

32

Решите неравенство $|5-x| + x \leq 5$.

33

Решите систему неравенств: $\begin{cases} 7-48x \leq -5 \\ 15x-1 \geq 2 \\ 3x < 1 \end{cases}$.

34

Произведение трех натуральных чисел оканчивается на 2002. Может ли их сумма равняться 9999?

35

В компании 100 акционеров, и любые 66 из них владеют не менее чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?

§ 3. Квадратный корень

3.3.1. Арифметический квадратный корень и его свойства



Математика должна помогать философу углубляться в понятие числа, пространства и времени. Люди, посвящённые в её тайны, вкушают наслаждения, подобные тем, которые даёт нам живопись и музыка.

Жюль Анри Пуанкаре (1854–1912), французский математик, физик, философ

«Открыть» – «закрыть», «взять» – «положить на место»... Мы записали пары, состоящие из обратных операций, последовательное выполнение которых возвращает её объект к исходному состоянию. Таким же образом мы можем указать и пары математических операций: «сложить» – «вычесть», «умножить» – «разделить».

Вспомним ещё одну известную нам операцию – возведение во вторую степень. А какая операция будет обратной для неё? В данном пункте мы будем искать ответ на этот вопрос, чтобы расширить свои возможности в решении практических задач.

Возведение в квадрат мы встречаем, например, при нахождении площади квадрата x по длине его стороны a (рис. 1). Для решения этой задачи нужно длину стороны a умножить саму на себя, то есть возвести в квадрат: $x = a^2$.

Поставим и решим обратную задачу (рис. 2).

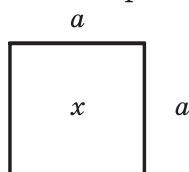


Рис. 1

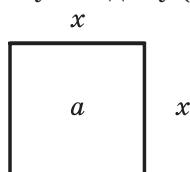


Рис. 2

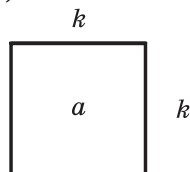
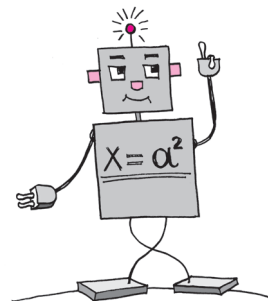


Рис. 3



Задача.

Площадь квадрата a см². Найти длину его стороны (в сантиметрах).

Для решения этой задачи нужно решить уравнение $x^2 = a$, где a – некоторое заданное неотрицательное число ($a \geq 0$). Требование $a > 0$ следует как из геометрических соображений, так и из свойства степени с чётным показателем. Если же $a = 0$, то единственным корнем уравнения является число 0. Но геометрического смысла такое решение не имеет, так как при $a = 0$ квадрат вырождается в точку.

Итак, будем искать решение уравнения $x^2 = a$ при $a > 0$. Ясно, что если число a является квадратом некоторого рационального числа k ($a = k^2$, где $k \in \mathbb{Q}$), то уравнение $x^2 = a$ имеет ровно два корня: $x = k$ и $x = -k$ (рис. 3). Из этих корней только положительный станет решением задачи. Например, корнями уравнения $x^2 = 9$ являются числа $x = 3$ и $x = -3$, но геометрический смысл имеет только решение $x = 3$.

А как найти решение, если число a не является точным квадратом? С такими примерами мы также уже встречались в 6 классе. Исследуя с помощью теоремы Пифагора длину диагонали ква-

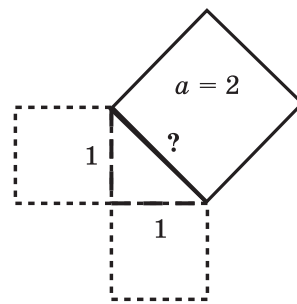


Рис. 4

драта со стороной 1 см, мы получили, что она равна длине стороны квадрата, площадь которого равна 2 см^2 (рис. 4).

Мы доказали также, что искомое число (то есть положительное число, квадрат которого равен 2) не является рациональным, так как не может быть записано конечной либо бесконечной периодической десятичной дробью. Оно представляет собой **иррациональное** число, которое записывается бесконечной непериодической дробью 1,414213561...

Можно доказать, что такое число существует не только для числа 2, но и для любого неотрицательного числа a . Возникает вопрос, как назвать и как записать это число. Неужели так длинно: «*неотрицательное число, квадрат которого равен a* »?

Естественно, что математики придумали таким числам свое название и обозначили специальным символом.

Определение. Пусть a – неотрицательное число. Тогда **арифметическим квадратным корнем** из числа a называется такое неотрицательное число x , что $x^2 = a$.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$.

Иными словами, $\sqrt{a}$ – это неотрицательное решение уравнения $x^2 = a$. Тогда ответ к задаче будет иметь вид: $\sqrt{a}$ см. Так, например, при $a = 16$ в ответе мы получим рациональное число $\sqrt{16} = 4$ см, а при $a = 6$ мы получим иррациональное число $\sqrt{6}$ см.

Замечание 1. В ходе решения задачи мы ещё раз убедились в том, что, помимо известных нам рациональных чисел, существуют и иррациональные числа. Все рациональные и иррациональные числа мы будем называть **действительными числами**. Множество действительных чисел обозначается $\mathbf{R}$. Действительные числа представляются десятичными дробями – конечными или бесконечными (периодическими или непериодическими). В 7 классе было показано, что любое рациональное число может быть представлено в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, и наоборот. А иррациональным числам соответствуют бесконечные непериодические дроби.

Таким образом, мы последовательно расширяли множества изучаемых нами чисел: натуральные, целые, рациональные, действительные.

Сформулируем теоремы о существовании и единственности арифметического квадратного корня на множестве новых для нас действительных чисел.

Теорема 1. Арифметический квадратный корень из любого неотрицательного действительного числа существует и является действительным числом (то есть для $\forall a \geq 0, \exists x \geq 0: \sqrt{a} = x$, где $a, x \in \mathbf{R}$).

Доказательство теоремы о существовании корня мы не приводим в данном курсе, а вот его единственность нам уже под силу доказать.

Теорема 2. Арифметический корень из неотрицательного действительного числа имеет единственное значение.

Доказательство (метод от противного):

1. Пусть $a \geq 0$. Предположим, что существует два различных арифметических корня из числа a – неотрицательные действительные числа x и y , для которых, по определению корня, верно $x^2 = a$ и $y^2 = a$.

2. Так как $x^2 = y^2$, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$.

По предположению, $x \neq y$, значит, и $x - y \neq 0$. Поэтому произведение $(x + y)(x - y)$ может равняться нулю только при $x + y = 0$, то есть при $x = -y$. Но в то же время, по условию, эти числа неотрицательны. Следовательно, $x = y = 0$.

3. Предположив, что $x \neq y$, мы получили, что $x = y = 0$. Полученное противоречие означает, что предположение неверно. Значит, $x = y$. Равенство любых двух значений $\sqrt{a}$ означает единственность значения $\sqrt{a}$, что и требовалось доказать.

Итак, мы познакомились с операцией нахождения арифметического квадратного корня из некоторого числа. Ее называют *извлечением квадратного корня*.

Из определения арифметического квадратного корня следует, что $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geq 0$. Это означает, что если из неотрицательного числа a извлечь квадратный корень, а затем результат возвести в квадрат, то получим исходное число a . Значит, операции извлечения квадратного корня и возведения в квадрат являются взаимно обратными на множестве неотрицательных чисел.

Систематизируем установленные нами в ходе рассуждений и выведем некоторые новые свойства арифметического квадратного корня.

Свойство 1. $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geq 0$

Это свойство непосредственно следует из определения квадратного корня и используется для доказательства ряда других его свойств. Поэтому его считают *основным тождеством квадратного корня*.

Свойство 2. $\sqrt{a^2} = |a|$, где $a \in \mathbb{R}$

Доказательство:

Пусть $x = |a|$, тогда x – неотрицательное число и $x^2 = (|a|)^2 = a^2$. Следовательно, число x удовлетворяет определению арифметического квадратного корня из a^2 , и, в силу единственности корня, $\sqrt{a^2} = |a|$, что и требовалось доказать.

Данное равенство называют *основным свойством квадратного корня*.

Свойство 3. $(\sqrt{a})^{2n} = a^n$, где $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$

Доказательство:

Применяя свойство возведения степени в степень и основное тождество, имеем: $(\sqrt{a})^{2n} = \left((\sqrt{a})^2\right)^n = a^n$, что и требовалось доказать.

Свойство 4. $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$, где $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Доказательство:

Применяя свойство возведения степени в степень и основное свойство корня, имеем: $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = |a^n|$, что и требовалось доказать.

Свойство 5. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$

Доказательство:

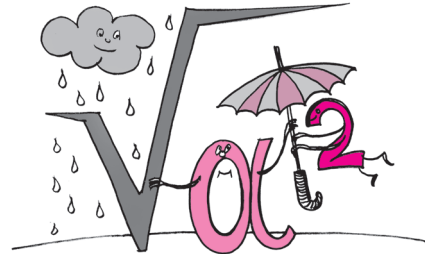
Пусть $x = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Тогда $x^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Неотрицательное число x удовлетворяет определению арифметического квадратного корня из числа ab , и, в силу единственности корня $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, что и требовалось доказать.

Свойство 6. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geq 0$ и $b > 0$

Доказательство:

Пусть $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Тогда $x^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$.

Поэтому неотрицательное число x удовлетворяет определению арифметического корня из числа $\frac{a}{b}$, и, в силу единственности корня $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, что и требовалось доказать.



Свойство 7.

Если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, где¹ $a > 0$ и $b \geq 0$.
 Если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, где $a \geq 0$ и $b > 0$.

Доказательство:

Пусть $a > b$. Так как $a = (\sqrt{a})^2$, $b = (\sqrt{b})^2$, разность $a - b$ можно разложить по формуле разности квадратов:

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad (1)$$

В полученном произведении второй множитель $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$, так как $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} \geq 0$. Вместе с тем $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ не может равняться нулю, так как это означало бы, что $\sqrt{a} = \sqrt{b} = 0$, но тогда и $a = b = 0$, что противоречит условию $a > b$. Следовательно, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.

Так как $a > b$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$, из (1) следует, что $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 0$. Значит, $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Данное свойство верно и для нестрогих неравенств, так как при $a \geq 0$, $b \geq 0$ равенства $a = b$ и $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ равносильны. Таким образом, мы можем записать:

Если $a \geq b$, то $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$.
 Если $a \leq b$, то $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$.

Свойства арифметического квадратного корня позволяют производить преобразования выражений, содержащих корни.

Пример 1.

Упростить: а) $\sqrt{36 \cdot 64}$; б) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$; в) $\sqrt{2^8}$; г) $\sqrt{2^7}$; д) $\sqrt{\frac{1}{2^9}}$.

Решение:

Воспользуемся свойствами корня из произведения и корня из частного:

$$\text{а) } \sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = 48. \quad \text{б) } \sqrt{11\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

$$\text{в) Из свойства 4 квадратного корня следует, что } \sqrt{2^8} = \sqrt{2^{2 \cdot 4}} = |2^4| = 2^4 = 16.$$

г) Воспользуемся 4 и 5 свойствами корней:

$$\sqrt{2^7} = \sqrt{2^6 \cdot 2} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2^{2 \cdot 3}} \cdot \sqrt{2} = |2^3| \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

д) Воспользуемся 4, 5 и 6 свойствами корней:

$$\sqrt{\frac{1}{2^9}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^4\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{16\sqrt{2}}.$$

Пример 2.

Упростить выражения: а) $\sqrt{3+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2}}$; б) $3\sqrt{2}(5+\sqrt{6})$.

$$\text{а) } \sqrt{3+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{9-2} = \sqrt{7}.$$

В этом примере, помимо 5 свойства корней, мы использовали формулу сокращённого умножения и основное тождество $(\sqrt{a})^2 = a$.

$$\text{б) } 3\sqrt{2}(5+\sqrt{6}) = 15\sqrt{2} + 3\sqrt{12} = 15\sqrt{2} + 3 \cdot 2\sqrt{3} = 15\sqrt{2} + 6\sqrt{3}.$$

Замечание 2. В этом примере при преобразовании $\sqrt{12}$ мы применили приём, называемый *вынесением множителя из-под знака корня*. Этот приём основан на тождественном равенстве: $\sqrt{a^2 b} = |a| \cdot \sqrt{b}$, где $b \geq 0$.

¹ Условие $a > b$, $a > 0$, $b \geq 0$ часто записывают кратко $a > b \geq 0$.

Равенство $\sqrt{a^2b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ следует из 2 и 5 свойств арифметического корня. В самом деле, так как $\sqrt{a^2b}$ определен, то $a^2b \geq 0$. Так как $a^2 \geq 0$ и по условию $b \geq 0$, $\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \sqrt{b} = |a| \cdot \sqrt{b}$. Если ещё и $a \geq 0$, то наше равенство приобретет вид

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}, \text{ где } a \geq 0, b \geq 0.$$

$$\text{Поэтому } \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = |2| \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Обратное преобразование называется *внесением множителя под знак корня*: $2\sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12}$ и т.д.

Пример 3.

Вынести множитель из-под знака корня в выражениях:

а) $\sqrt{45}$; б) $\sqrt{\frac{5}{32}}$; в) $\sqrt{a^4b^7}$, $a \neq 0$; г) $\sqrt{\frac{a^9}{b^5}}$.

Решение:

а) $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$; б) $\sqrt{\frac{5}{32}} = \sqrt{\frac{5}{4^2 \cdot 2}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}}$;

в) Так как $a \neq 0$, то из неравенства $a^4b^7 \geq 0$ следует, что $b \geq 0$. Значит,

$$\sqrt{a^4b^7} = \sqrt{(a^2)^2(b^3)^2b} = |a^2| \cdot |b^3| \cdot \sqrt{b} = a^2b^3\sqrt{b};$$

г) $\sqrt{\frac{a^9}{b^5}} = \sqrt{\frac{(a^4)^2 \cdot a}{(b^2)^2 b}} = \frac{|a^4|}{|b^2|} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a^4}{b^2} \sqrt{\frac{a}{b}}.$

Заметим, что начальное и конечное выражения определены при $\frac{a}{b} \geq 0$ ($b \neq 0$, числа a и b имеют одинаковый знак или $a = 0$). Ошибкой было бы написать в ответе $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ вместо $\sqrt{\frac{a}{b}}$, так как числа a и b могут быть в отдельности и отрицательными.

К

36

Заполните таблицу:

a	0	0,5	-0,5	1	-1	2	-2	3	-3
a^2									

Почему в нижней строке таблицы не может быть отрицательных чисел?

37

Заполните таблицу:

k							
k^2	0	1	9	36	64	100	144

Сколько значений переменной k вы нашли для $k^2 = 0$, для остальных случаев? Подчеркните неотрицательные значения переменной k .

38

Заполните таблицу, указав неотрицательные значения переменной x :

x									
x^2	2	3	5	6	7	8	10	11	a

1) Докажите методом от противного, что нет такого рационального числа, квадрат которого равен двум.

2) Удастся ли найти остальные рациональные значения переменной x ? Как вы думаете, каким образом можно устранить возникшую проблему?

3) Прочитайте на с. 14 об иррациональных числах и заполните таблицу.

39 Докажите, что число не является рациональным:

а) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

40 Выберите верные равенства и обоснуйте свой ответ:

а) $\sqrt{100} = 10$; в) $\sqrt{16} = -4$; д) $\sqrt{(-3)^2} = -3$; ж) $(\sqrt{m})^2 = m$, где $m \geq 0$;
 б) $\sqrt{2,5} = 0,5$; г) $\sqrt{0} = 0$; е) $(\sqrt{3})^2 = 3$; з) $\sqrt{(n)^2} = -n$, где $n < 0$.

41 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{900}$; д) $(\sqrt{10})^2$; и) $\sqrt{225} \cdot \sqrt{81}$; н) $8\sqrt{64}$;
 б) $\sqrt{0,36}$; е) $(5\sqrt{3})^2$; к) $\sqrt{0,04} : \sqrt{0,000001}$; о) $0,1\sqrt{2\frac{1}{4}} + 0,2\sqrt{1\frac{9}{16}}$;
 в) $-\sqrt{1,69}$; ж) $(-7\sqrt{0,1})^2$; л) $\sqrt{0,09} + \sqrt{0,0049}$; п) $0,2 - \frac{1}{6}\sqrt{1,44}$;
 г) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; з) $\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2$; м) $\sqrt{0,04} - \sqrt{0,36}$; р) $\sqrt{\frac{4}{9}} - \sqrt{\frac{121}{169}}$.

42 Укажите, при каких значениях переменной выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{d}$; б) $\sqrt{|d|}$; в) $\sqrt{-d}$; г) $\sqrt{3d-12}$; д) $\sqrt{d^2}$; е) $\sqrt{-d^2}$.

43 Вычислите:

а) $(\sqrt{2})^2$; б) $(-2\sqrt{2})^2$; в) $-2(\sqrt{2})^2$; г) $-2\sqrt{(-2)^2}$; д) $(2\sqrt{2})^4$; е) $(-2\sqrt{2})^4$.

44 Вычислите:

а) $\sqrt{4 \cdot 9}$; $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$; б) $\sqrt{25 \cdot 4}$; $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$; в) $\sqrt{16 \cdot 9}$; $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$.

1) Что интересного вы наблюдаете? Сформулируйте гипотезу о свойстве корня из произведения и доказите ее.

2) Сопоставьте свой вывод со свойством 5 на с. 15 учебника и примените его для нахождения значения произведения $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$.

45 Вычислите:

а) $\sqrt{\frac{81}{9}}$; $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$; б) $\sqrt{\frac{16}{4}}$; $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{36}}$; $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}}$.

1) Что интересного вы наблюдаете? Сформулируйте гипотезу о свойстве корня из частного и доказите ее.

2) Сопоставьте свой вывод со свойством 6 на с. 15 учебника и примените его для нахождения значения частного $\sqrt{24} : \sqrt{6}$.

46 Упростите:

а) $\sqrt{49 \cdot 25}$; б) $\sqrt{0,36 \cdot 0,04}$; в) $\sqrt{75 \cdot 108}$; г) $\sqrt{\frac{36}{121}}$; д) $\sqrt{14\frac{1}{16}}$.

47 Чем отличаются выражения в первой и во второй строке? Упростите их.

а) $\sqrt{5^2}$; в) $\sqrt{(-6)^2}$; д) $\sqrt{6^4}$; ж) $\sqrt{9^5}$; и) $\sqrt{(-3)^{2n}}$, $n \in N$;
 б) $(\sqrt{5})^2$; г) $(\sqrt{6})^2$; е) $(\sqrt{6})^4$; з) $(\sqrt{9})^5$; к) $(\sqrt{3})^{2n}$, $n \in N$.

48 Упростите:

а) $\sqrt{c^2}$; б) $\sqrt{c^2}$, $c < 0$; в) $\sqrt{c^2}$, $c > 0$;

- г) $\sqrt{d^{100}}$; д) $\sqrt{a^{4n}}$; е) $\sqrt{50t^8}$;
 ж) $-\frac{3}{0,7t^5}\sqrt{1,96b^{16}t^{14}}$; з) $-\frac{2}{5a^4}\sqrt{a^{10}m^6}$, $m < 0$.

49 Вынесите множитель из-под знака корня: $\sqrt{a^2b}$, $a \neq 0$. Какие свойства корня вы использовали?

50 Вынесите множитель из-под знака корня:

- а) $\sqrt{18}$; б) $\sqrt{128}$; в) $\sqrt{\frac{27}{125}}$; г) $\sqrt{16a}$; д) $\sqrt{x^6y^{13}}$, $x \neq 0$; е) $\sqrt{\frac{x^{11}}{y^4}}$.

51 Внесите множитель под знак корня:

- а) $3\sqrt{3}$; б) $-5\sqrt{2}$; в) $11b\sqrt{b}$; г) $4a^2\sqrt{5a}$.

52 Сравните числа:

- а) $\sqrt{25}$ и $\sqrt{49}$; г) $\sqrt{2^2}$ и $\sqrt{5^2}$; ж) $\sqrt{20}$ и 4,5;
 б) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$; д) $\sqrt{36}$ и 6; з) $-1,7$ и $-\sqrt{3}$;
 в) $-\sqrt{2}$ и $-\sqrt{5}$; е) $\sqrt{2,25}$ и 1,(5); и) $-1,44$ и $-\sqrt{2}$.

53 Сравните:

- а) $\sqrt{2a}$ и $\sqrt{2b}$, если $a < b$ ($a \geq 0$ и $b \geq 0$);
 б) $\sqrt{-2a}$ и $\sqrt{-2b}$, если $a < b$ ($a \leq 0$ и $b \leq 0$);
 в) $-\sqrt{-2a}$ и $-\sqrt{-2b}$, если $a \geq b$ ($a \leq 0$ и $b \leq 0$).

54 Что больше:

- а) $3\sqrt{2}$ или $2\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3}$ или $3\sqrt{6}$; в) $6\sqrt{2}$ или $5\sqrt{3}$; г) $5\sqrt{19}$ или $3\sqrt{53}$?

55 Упростите:

- а) $\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{7}}$; б) $2\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{27})$.

56 Решите уравнение, используя определение арифметического квадратного корня:

- а) $\sqrt{x}=5$; г) $9\sqrt{x}=9$; ж) $\sqrt{y-2}=2$;
 б) $\sqrt{x}=12$; д) $\sqrt{x}=0$; з) $\sqrt{x+2}=-2$;
 в) $2\sqrt{x}=28$; е) $\sqrt{x}=-5$; и) $\sqrt{y+1}=\sqrt{5}$.

57 Докажите, что значение выражения есть число рациональное:

- а) $(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})$; в) $\frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}}$;
 б) $(7+2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-7)$; г) $\frac{1}{2\sqrt{7}+7} - \frac{1}{2\sqrt{7}-7}$.

58 Докажите, что значение выражения есть число иррациональное:

- а) $(3+\sqrt{3})^2$; в) $\frac{2}{1+\sqrt{6}} + \frac{3}{1+\sqrt{6}}$;
 б) $(1-\sqrt{11})^2$; г) $\frac{1}{1+\sqrt{6}} - \frac{1}{1-\sqrt{6}}$.

π

59 Выясните, сколько решений имеют данные системы в зависимости от значения параметра a , и решите их.

- а) $\begin{cases} x+2y=a \\ 2x+3y=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x+6y=2+a \\ 2x+3y=3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} ax+y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.

60 Постройте график кусочно-линейной функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} 3x-1, & \text{если } x \geq 2; \\ 1-3x, & \text{если } x < 2 \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \geq -2; \\ -4, & \text{если } x < -2 \end{cases}$$

61 Разложите на множители:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } x^2 - 2x; & \text{г) } 4y^2 - 49z^2; & \text{ж) } d^2 + 6dh^2 + 9h^4; & \text{к) } s^3 + 27; \\ \text{б) } a^3b^2 - a^2b + ab; & \text{д) } 25m^4 - n^6; & \text{з) } a^6 - 3a^3b^4 + 2,25b^8; & \text{л) } z^9 - 125; \\ \text{в) } 4kt - 6t^2 + 6k - 9t; & \text{е) } 32p^2q^8 - 2r^{10}; & \text{и) } 9 - 4p^2 + 4px - x^2; & \text{м) } a^3c^3 + 8b^9. \end{array}$$

62 Выполните действия, применяя формулы сокращённого умножения:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } (2a + 3s)(2a - 3s); & \text{в) } (8t^2 - 5r)^2; & \text{д) } (v - 1)(v^2 + v + 1); \\ \text{б) } (y + 0,1x^2)(0,1x^2 - y); & \text{г) } (0,3d + \frac{2}{15}q^3)^2; & \text{е) } (2w + 3c^2)(4w^2 - 6wc^2 + 9c^4). \end{array}$$

63 Упростите выражение:

$$\text{а) } |t|, \text{ если } t \geq 0; \quad \text{б) } |2 - b|, \text{ если } b > 2; \quad \text{в) } |6 - 0,5x|, \text{ если } x < 12.$$

2

64 Составьте таблицу квадратов чисел от 10 до 20 и, используя её, найдите значение выражения:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sqrt{144} + \sqrt{256}; & \text{в) } \sqrt{289} \cdot \sqrt{361}; & \text{д) } \left(\sqrt{1\frac{64}{225}} \right) : \frac{2}{3}; \\ \text{б) } \sqrt{324} - \sqrt{625}; & \text{г) } 12\sqrt{1\frac{25}{144}}; & \text{е) } -2\sqrt{4,41} + \sqrt{3,24}. \end{array}$$

65 Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ не является рациональным.

66 Сравните числа:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sqrt{81} \text{ и } \sqrt{64}; & \text{г) } 2,5 \text{ и } \sqrt{6,25}; & \text{ж) } -1,5 \text{ и } -\sqrt{2}; \\ \text{б) } -\sqrt{3} \text{ и } -\sqrt{2}; & \text{д) } \sqrt{1,69} \text{ и } 1,(3); & \text{з) } -\sqrt{5} \text{ и } -2,5; \\ \text{в) } \sqrt{3^2} \text{ и } \sqrt{2,5^2}; & \text{е) } \sqrt{121} \text{ и } 3,3; & \text{и) } 4\sqrt{5} \text{ и } 3\sqrt{9}. \end{array}$$

67 Упростите:

$$\text{а) } \sqrt{81 \cdot 16}; \quad \text{б) } \sqrt{125 \cdot 245}; \quad \text{в) } \sqrt{27\frac{1}{25}}; \quad \text{г) } \sqrt{2 \cdot 8^5}; \quad \text{д) } \sqrt{27^3}.$$

68 Упростите:

$$\text{а) } \sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{6}}; \quad \text{б) } 3\sqrt{2}(\sqrt{18} + \sqrt{32}).$$

69 Вынесите множитель из-под знака корня:

$$\text{а) } \sqrt{162}; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{50}{98}}.$$

70 Вынесите множитель из-под знака корня:

$$\text{а) } \sqrt{u^7v^{12}}, v \neq 0; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{u^3}{v^8}}.$$

71 Внесите множитель под знак корня:

$$\text{а) } 6\sqrt{6}; \quad \text{б) } -9\sqrt{5}; \quad \text{в) } 1,2d\sqrt{d}; \quad \text{г) } 13z^2\sqrt{z}.$$

72 Решите уравнение:

$$\text{а) } \sqrt{y} = 11; \quad \text{б) } \sqrt{x+2} = 3; \quad \text{в) } \sqrt{y-1} = -3; \quad \text{г) } \sqrt{x-2} = \sqrt{7}.$$

73

Разложите на множители:

- а) $m^5 - 4m^4$; в) $196y^2 - 49z^2$; д) $49s^2 + 14sc + c^2$; ж) $m^3 - 512$;
 б) $24n^4k^3 + 72n^2k^2$; г) $d^3 - 9d$; е) $16x^4 - x^2y^2 + \frac{1}{64}y^4$; з) $27p^{15} - q^3$.

74

Выполните действия, применяя формулы сокращённого умножения:

- а) $(0,2d + p)(0,2d - p)$; б) $(\frac{1}{3}h^3 - 15k)^2$; в) $(n - 4)(n^2 + 4n + 16)$.

75

Упростите выражение:

- а) $|x|$, если $x < 0$; б) $|8 - y|$, если $y < 8$; в) $|9 - 1,8a|$, если $a \leq 5$.

с

76*

Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ не является рациональным.

77*

У крестьянина были коза, корова и кобыла, а ещё стог сена и сын. Сын подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу один месяц, или козу и корову $\frac{3}{4}$ месяца, или же корову и кобылу $\frac{1}{3}$ месяца. Отец сказал, что сын плохо учится в школе. Объясните, почему он был вправе так сказать.

78*

Назовём натуральное число *особым*, если оно представимо в виде $m^2 + 2n^2$, где m и n – целые числа. Докажите, что произведение двух особых чисел также особое число.

3.3.2. Преобразование выражений с корнями



Математика – это наука о хитроумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями. Ясно, что особенно важная роль при этом отводится придумыванию новых понятий.

Юджин Пол Вигнер (1902–1995),
венгерский физик и математик

Свойства арифметического квадратного корня, с которыми мы познакомились, позволяют производить и более сложные преобразования выражений, содержащих корни. Разберем некоторые способы проведения таких преобразований с помощью следующих примеров.

Пример 1.

Упростить выражение: $\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{48}$.

Решение:

Вынесем множители из-под знака корня, где это возможно:

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{48} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}.$$

В полученном выражении все слагаемые содержат корни с одинаковыми подкоренными выражениями. Вынесем общий множитель $\sqrt{3}$ за скобки.

$$\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (1 + 2 + 4)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}.$$

Как мы видим, такие выражения можно упрощать по аналогии с приведением подобных слагаемых: сложить коэффициенты и приписать «общий» корень.

Пример 2.

Упростить выражения: а) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$; б) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

Решение:

а) Упростим выражение $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$.

Из основного свойства квадратного корня следует, что $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}|$. Чтобы раскрыть модуль, оценим знак выражения $2-\sqrt{5}$. Так как $2=\sqrt{4}$, а $4 < 5$, то из свойства 7 следует, что $\sqrt{4} < \sqrt{5}$, поэтому $2-\sqrt{5} < 0$.

Значит, $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-2$.

Ответ: $\sqrt{5}-2$.

б) Упростим выражение $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

Представим подкоренное выражение в виде квадрата:

$$11+6\sqrt{2} = 11+2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 9+2+2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 3^2 + (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = (3+\sqrt{2})^2.$$

Значит, $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = |3+\sqrt{2}| = 3+\sqrt{2}$, так как $3+\sqrt{2} > 0$.

Ответ: $3+\sqrt{2}$.

в) Упростим выражение $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}} &= \sqrt{17-4\sqrt{5+4+4\sqrt{5}}} = \sqrt{17-4\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2+4\sqrt{5}}} = \\ &= \sqrt{17-4\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2+2 \cdot 2\sqrt{5}}} = \sqrt{17-4\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}} = \sqrt{17-4|2+\sqrt{5}|} = \sqrt{17-4(2+\sqrt{5})} = \\ &= \sqrt{17-8-4\sqrt{5}} = \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2-2 \cdot 2\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2 \end{aligned}$$

При раскрытии модуля мы использовали то, что $2+\sqrt{5} > 0$; $\sqrt{5}-2 > 0$.

Ответ: $\sqrt{5}-2$.

Пример 3.

Упростить выражения:

а) $\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-4)^2}$ при $2 \leq a \leq 4$;

б) $\sqrt{x^2-10x+25} + \sqrt{x^2-8x+16}$ при $x \leq 4$;

в) $\sqrt{a^2+a+4} + \sqrt{a^2-6a+9}$ при $a \geq 3$.

Решение:

а) Упростим выражение $\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-4)^2}$ при $2 \leq a \leq 4$.

По основному свойству корня можно записать:

$$\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-4)^2} = |a-2| + |4-a|.$$

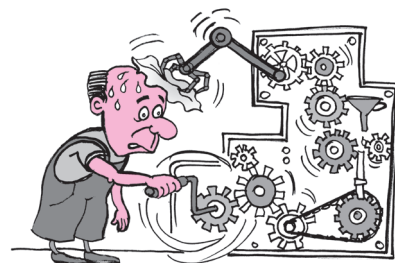
Раскрывая модули на заданном промежутке $2 \leq a \leq 4$, получим:

$|a-2| = a-2$, так как $a-2 \geq 0$;

$|a-4| = 4-a$, так как $a-4 \leq 0$.

Значит, $|a-2| + |4-a| = a-2+4-a = 2$.

Ответ: 2.



б) Упростим выражение $\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{x^2-8x+16}$ при $x \leq 4$.

Выполним преобразования, используя формулу квадрата разности:

$$\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{x^2-8x+16}=\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x-4)^2}.$$

Продолжим преобразование, используя основное свойство корня:

$$\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x-4)^2}=|x-5|+|x-4|.$$

По условию $x \leq 4$, значит, $x-4 \leq 0$ и $x-5 \leq 0$. Поэтому

$$|x-5|+|x-4|=5-x+4-x=9-2x.$$

Ответ: $9-2x$.

в) Упростим выражение $\sqrt{a^2+a+4}+\sqrt{a^2-6a+9}$ при $a \geq 3$.

Выполним преобразования, используя формулы сокращённого умножения, основное свойство корня и правила раскрытия модуля:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+a+4}+\sqrt{a^2-6a+9} &= \sqrt{a^2+a+4}+\sqrt{(a-3)^2} = \sqrt{a^2+a+4}+|a-3| = \\ &= \sqrt{a^2+a+4+a-3} = \sqrt{a^2+2a+1} = \sqrt{(a+1)^2} = |a+1| = a+1.\end{aligned}$$

При раскрытии модулей мы использовали то, что $a \geq 3$, значит, $a-3 \geq 0$ и $a+1 \geq 0$.

Ответ: $a+1$.

Иногда выражение, содержащее в знаменателе квадратные корни, требуется привести к виду, содержащему квадратные корни только в числителе. О таком преобразовании говорят – *избавиться от иррациональности в знаменателе дроби*.

Пример 4.

Избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$\text{а) } \frac{5}{\sqrt{3}}; \quad \text{б) } \frac{7}{\sqrt{2}+1}; \quad \text{в) } \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}; \quad \text{г) } \frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7}}.$$

Решение:

$$\text{а) } \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{б) } \frac{7}{\sqrt{2}+1} = \frac{7 \cdot (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{7\sqrt{2}-7}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{7\sqrt{2}-7}{2-1} = 7\sqrt{2}-7;$$

$$\text{в) } \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{5-3} = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2}.$$

В двух последних примерах мы домножили числитель и знаменатель на выражение, «сопряжённое» знаменателю (т. е. на разность соответствующих корней, если в знаменателе стоит сумма, или на сумму корней, если в знаменателе стоит разность). Мы воспользовались тем, что произведение суммы двух корней на их разность равно разности квадратов этих корней, т. е. рациональному числу.

г) Для выражения $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ применим этот же приём дважды:

$$\begin{aligned}\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7}} &= \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{7})} = \frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{3+2\sqrt{6}+2-7} = \\ &= \frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{2(\sqrt{6}-1)} = \frac{(5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7})(\sqrt{6}+1)}{2(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)} = \frac{5\sqrt{18}+5\sqrt{12}-5\sqrt{42}+5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{2((\sqrt{6})^2-1^2)} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5\sqrt{9 \cdot 2} + 5\sqrt{4 \cdot 3} - 5\sqrt{42} + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 5\sqrt{7}}{2(6-1)} = \frac{5 \cdot 3\sqrt{2} + 5 \cdot 2\sqrt{3} - 5\sqrt{42} + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 5\sqrt{7}}{2 \cdot 5} = \\
&= \frac{20\sqrt{2} + 15\sqrt{3} - 5\sqrt{42} - 5\sqrt{7}}{10} = \frac{4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \sqrt{42} - \sqrt{7}}{2}.
\end{aligned}$$

Пример 5.Упростить выражение: $\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}}$.*Решение:*

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}} &= \sqrt{\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}} = \sqrt{\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2}{18-12}} = \\
&= \frac{|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{12}-2\sqrt{18}}{6} = \frac{6\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

При раскрытии модуля мы использовали то, что $3\sqrt{2} = \sqrt{18} > \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.**Пример 6.**

Сравнить числа:

а) $3\sqrt{5}$ и $4\sqrt{3}$; б) $1+\sqrt{13}$ и $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ и $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

Основное тождество $(\sqrt{a})^2 = a$ даёт нам идею для выполнения этого задания: возведение в квадрат позволяет перейти от иррационального числа к рациональному, а рациональные числа сравнивать мы умеем. Осталось проверить, будет ли возведение в квадрат обеих частей неравенства равносильным преобразованием. Нам известно, что если для положительных чисел a и b имеет место неравенство $a > b$, то $a^2 > b^2$; если $a < b$, то $a^2 < b^2$; если $a = b$, то $a^2 = b^2$. Поэтому для положительных чисел a и b : $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$; $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Обозначим неизвестный пока знак неравенства ($>$ или $<$) символом $\vee$ и будем проводить равносильные преобразования неравенства до тех пор, пока этот знак не станет для нас очевидным. Ясно, что полученный в итоге знак будет совпадать со знаком исходного неравенства.

*Решение:*а) $3\sqrt{5} \vee 4\sqrt{3}$.

Возведём обе части неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство

 $(3\sqrt{5})^2 \vee (4\sqrt{3})^2$, т.е. $45 \vee 48$. Так как $45 < 48$, то $3\sqrt{5} < 4\sqrt{3}$.б) $1+\sqrt{13} \vee \sqrt{21} \Leftrightarrow (1+\sqrt{13})^2 \vee (\sqrt{21})^2 \Leftrightarrow 1+13+2\sqrt{13} \vee 21$.

Вычтем из обеих частей неравенства число 14, получим

 $1+13+2\sqrt{13}-14 \vee 21-14$.Тогда $2\sqrt{13} \vee 7 \Leftrightarrow (2\sqrt{13})^2 \vee 7^2 \Leftrightarrow 52 \vee 49$. Так как $52 > 49$, то $1+\sqrt{13} > \sqrt{21}$.в) $\sqrt{3}-\sqrt{2} \vee \sqrt{6}-\sqrt{5}$.

Так как обе части неравенства положительны, можно их возвести в квадрат, и знак неравенства не изменится. Но в общем случае требуется проверка положительности или отрицательности обоих выражений. Чтобы не проводить эту проверку, можно просто перенести отрицательные члены выражений в другую часть неравенства с противоположным знаком. Полученное неравенство будет иметь тот же знак, и все его члены станут положительными:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} + \sqrt{5} \vee \sqrt{6} + \sqrt{2} &\Leftrightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \vee (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 3 + 5 + 2\sqrt{15} \vee 6 + 2 + 2\sqrt{12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8 + 2\sqrt{15} \vee 8 + 2\sqrt{12} \Leftrightarrow 2\sqrt{15} \vee 2\sqrt{12}. \end{aligned}$$

После деления обеих частей неравенства на 2 получим равносильное неравенство $\sqrt{15} \vee \sqrt{12}$. $\sqrt{15} > \sqrt{12}$, т.к. $15 > 12$. Значит, $\sqrt{3} - \sqrt{2} > \sqrt{6} - \sqrt{5}$.

* * *

Пример 7.

Доказать, что для любых a и b верно $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Доказательство:

Пусть $x = |a + b|$; $y = |a| + |b|$.

Для любого числа c имеет место неравенство $c \leq |c|$. Действительно, если $c \geq 0$, то $c = |c|$; а если $c < 0$, то $|c| > 0$ и, значит, $c < |c|$.

Возведём в квадрат число x и используем установленное соотношение $c \leq |c|$. Получим:

$$x^2 = |a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2 = (|a| + |b|)^2 = y^2.$$

Значение модуля – число неотрицательное, поэтому $x = |a + b| \geq 0$, $y = |a| + |b| \geq 0$. Следовательно, по основному свойству корня, $x = \sqrt{x^2}$, $y = \sqrt{y^2}$. Поэтому из неравенства $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{y^2}$ следует $x = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{y^2} = y$. Значит, $x \leq y$, что и требовалось доказать.

Приведённый пример показал, что квадратный корень помогает и при доказательстве даже тех тождеств, которые, казалось бы, никак не связаны с квадратными корнями.

Аналогичным образом, используя определение арифметического квадратного корня, можно доказать и другие свойства модулей, такие как $|ab| = |a| \cdot |b|$; $|a^n| = |a|^n$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, и др.

K**79**

Какие из данных утверждений являются верными?

- а) Если $a \geq 0$, то $(\sqrt{a})^2 = a$; д) Если $a > b$, то $a^2 > b^2$;
 б) $\forall a \in \mathbf{R}: \sqrt{a^2} = a$; е) $\forall a \in \mathbf{R}: (\sqrt{a})^2 = a$;
 в) $\forall a \in \mathbf{R}: \sqrt{a^2} = |a|$; ж) $(a + b) \cdot c = ac + bc$;
 г) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$; з) Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$.

80

Представьте число в виде квадрата:

- а) 4; б) 7; в) -9; г) b , где $b \geq 0$; д) $9d$, где $d \geq 0$.

81

Выполните действия, используя формулы сокращённого умножения:

- а) $(5 + \sqrt{a})(5 - \sqrt{a})$; г) $(1 + \sqrt{m})^2$; ж) $(2\sqrt{x} - 7\sqrt{y})^2$;
 б) $(\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$; д) $(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$; з) $(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)$;
 в) $(3\sqrt{t} - 4\sqrt{s})(3\sqrt{t} + 4\sqrt{s})$; е) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$; и) $(\sqrt{m} + \sqrt{n})(m - \sqrt{mn} + n)$.

82

Разложите на множители:

- а) $36 + 6b$; г) $x^2 - 9$; ж) $z^2 - 12zt + 36t^2$;
 б) $10 + b\sqrt{10}$; д) $x^2 - 5$; з) $n + 2\sqrt{nk} + k$, $n, k \geq 0$;
 в) $a\sqrt{14} - \sqrt{7a}$; е) $64y - 7$, $y \geq 0$; и) $225a - 120\sqrt{ab} + 16b$, $a, b \geq 0$.

На какие группы можно разбить эти задания?

83

а) Подчеркните общий множитель в выражениях: $2\sqrt{5}$; $6\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$. Назовите множители, которыми они отличаются.

б) Прочитайте выражение: $2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$. Какое из верных утверждений задания № 79 потребуется для упрощения этого выражения с корнями?

в) Проанализируйте выражения: $\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$; $4\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$; $2\sqrt{7} - 6\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$. Сформулируйте способ, с помощью которого можно упрощать подобные выражения. Выполните преобразования.

84

Упростите выражение:

а) $3\sqrt{3} + \sqrt{27}$;

в) $4\sqrt{a} + 5\sqrt{b} - 3\sqrt{a} + \sqrt{b}$;

б) $\sqrt{20} - \sqrt{5}$;

г) $\sqrt{28} + \sqrt{5} - \sqrt{45} + \sqrt{63}$.

85

а) Прочитайте выражение: $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2}$. Какие из верных утверждений задания № 79 нужно использовать для упрощения этого выражения? Как упростить выражение $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$?

б) Проанализируйте выражения: $\sqrt{4a^2 + 4a + 1}$; $\sqrt{9 - 6a + a^2}$; $\sqrt{1 - 2a + a^2}$. Сформулируйте способ, с помощью которого можно упрощать подобные выражения. Выполните преобразования. Раскройте модуль, если $1 < a < 3$.

86

Упростите: $\sqrt{(x^2 + 4)^2 - 16x^2}$ при $-2 \leq x \leq 2$.

87

Упростите выражение:

а) $\sqrt{(\sqrt{6} - 6)^2} + \sqrt{6}$;

б) $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} + \sqrt{(4 - \sqrt{10})^2}$;

в) $\sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} - (1 - \sqrt{5})^2$.

88

Проанализируйте выражения. Какие из них имеют одинаковые значения:

а) $\sqrt{(2 + \sqrt{7})^2}$;

б) $\sqrt{2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2}$;

в) $\sqrt{4 + 4\sqrt{7} + 7}$;

г) $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$?

Как можно использовать эти равенства для упрощения последнего выражения?

89

Упростите:

а) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$;

в) $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}}$.

90

Упростите:

а) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} \cdot (3 - \sqrt{2})$;

б) $\sqrt{7 + \sqrt{24}} + 6 - \sqrt{6}$;

в) $\frac{\sqrt{5 + \sqrt{24}} + \sqrt{5 - \sqrt{24}}}{\sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{5 - \sqrt{24}}}$.

91

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;

б) $\frac{3}{3 + \sqrt{3}}$;

в) $\frac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

92

Сравните числа:

а) $4\sqrt{5}$ и 9;

б) $2 + \sqrt{10}$ и $\sqrt{26}$;

в) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ и $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$.

93

Выпишите числа в порядке возрастания:

9; 10; $7\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; $3\sqrt{11}$; $2\sqrt{26}$; $\sqrt{95}$.

94

Вычислите устно, разложив на множители подкоренное выражение:

а) $\sqrt{66^2 + 88^2}$;

б) $\sqrt{36^2 + 48^2}$.

95

Расположите числа в порядке возрастания: $\frac{1}{3}$; $\sqrt{\frac{25}{49}}$; $\sqrt{0,01}$; $\frac{3}{8}$; 0,6.

π

96 При каких значениях параметра a функция $y = (2a + 3)x^3 + (5 - 3a)x^{10}$ является:

а) чётной; б) нечётной?

97

1) Постройте график функции $y = x^2$ для $x \in [0; +\infty)$. Используя построенный график, выполните следующие задания:

а) Найдите значения функции при $x = 1$; $x = 4$. Отметьте точку графика с абсциссой, равной 2.

б) Найдите значения аргумента при $y = 1$; $y = 4$; $y = 9$. Отметьте точку графика с ординатой, равной 2.

2) Постройте график функции $y = x^3$ для $x \in (-\infty; 0]$. Используя построенный график, выполните следующие задания:

а) Найдите значения функции при $x = -1$; $x = -2$. Отметьте точку графика с абсциссой, равной $-1,5$.

б) Найдите значения аргумента при $y = 0$; $y = -8$. Отметьте точку графика с ординатой, равной $-1,5$.

3) Можно ли назвать функции, рассмотренные в этом задании, чётными или нечётными. Почему?

 d

98 Упростите:

а) $\sqrt{(4 - \sqrt{13})^2}$;

в) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$;

д) $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$, при $x > 1$;

б) $\sqrt{(10 - \sqrt{101})^2}$;

г) $\sqrt{32 + 10\sqrt{7}}$;

е) $x + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, при $x < 1$.

99

Упростите:

а) $4\sqrt{2} - 3\sqrt{8} + 2\sqrt{32}$;

в) $(\sqrt{3} - \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3}$;

б) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{45} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{10}$;

г) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + 1)(1 - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{5})$.

100

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{7}{\sqrt{11}}$;

в) $\frac{5}{3 - \sqrt{14}}$;

д) $\frac{3}{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}$;

ж) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}$;

б) $-\frac{2}{\sqrt{12}}$;

г) $\frac{7}{3 + \sqrt{17}}$;

е) $\frac{5}{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}$;

з) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{10}}$.

101

Сравните числа:

а) $4\sqrt{14}$ и 15;

в) $\sqrt{17} - \sqrt{15}$ и $\sqrt{19} - \sqrt{17}$;

б) $1 + \sqrt{20}$ и $\sqrt{30}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ и $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

102

Выпишите числа в порядке возрастания:

12; 11; $8\sqrt{2}$; $6\sqrt{3}$; $5\sqrt{5}$; $4\sqrt{7}$; $\sqrt{130}$.

 c

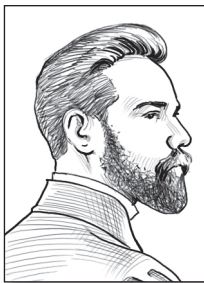
103* Найдите все значения a , для которых выражения $a + \sqrt{15}$ и $\frac{1}{a} - \sqrt{15}$ принимают целые значения.

104*

Упростите $2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$.

105*

Упростите $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$.

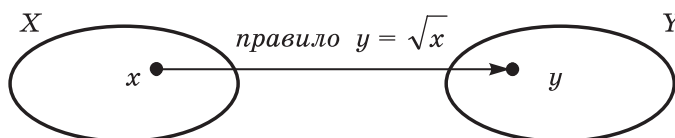
3.3.3. График функции $y = \sqrt{x}$ 

*Есть тонкие властительные связи
Меж контуром и запахом цветка.*

Валерий Яковлевич Брюсов (1873–1924),
русский поэт, драматург

В предыдущем пункте мы узнали новую операцию – извлечение арифметического квадратного корня из числа. Чтобы квадратный корень помогал нам описывать реальные процессы окружающего мира, познакомимся с соответствующей функцией и выявим её свойства.

Рассмотрим правило, устанавливающее соответствие между множествами неотрицательных чисел X и Y следующим образом: любому неотрицательному числу x поставим в соответствие арифметический квадратный корень из этого числа x .



Теоремы о существовании и единственности арифметического квадратного корня позволяют утверждать, что для каждого элемента из X существует единственный элемент из Y . Значит, мы говорим о функции.

Исходя из определения арифметического квадратного корня, ясно, что извлекать корень можно только из неотрицательных чисел, поэтому областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является множество $[0; +\infty)$. Значением арифметического корня также является неотрицательное число, следовательно, областью значений также является множество $[0; +\infty)$.

Задавая произвольные значения x и вычисляя по формуле $y = \sqrt{x}$, построим таблицу.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5

Воспользовавшись таблицей, изобразим график этой функции. Полученная кривая изображена на рис. 1.

Отметим свойства функции и её графика.

Свойство 1. При неограниченном возрастании x значение y также неограниченно возрастает, но значительно медленнее значения x .

Так, пока значения x выросли от 0 до 4, значения y увеличились только от 0 до 2.

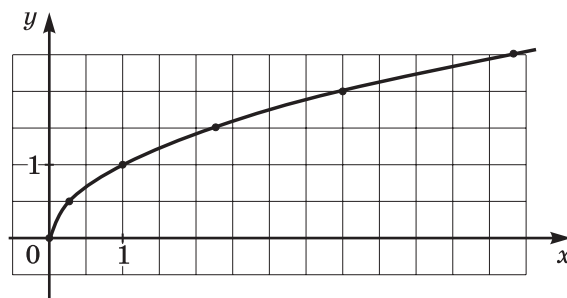


Рис. 1

Свойство 2. При уменьшении значений x до нуля значения y , оставаясь положительными, также уменьшаются до нуля, но опять-таки значительно медленнее значений x .

Вследствие свойства 2 кривая при приближении к нулю «прижимается» к оси ординат. Поэтому можно выделить ещё одно важное свойство функции $y = \sqrt{x}$.

Свойство 3. График $y = \sqrt{x}$ касается оси ординат в точке $(0; 0)$.

Можно доказать, что график $y = \sqrt{x}$ является правой ветвью параболы, которую симметрично отображали относительно прямой $y = x$.

* * *

Действительно равенство $y = \sqrt{x}$ означает, что $x = y^2$, причём $y \geq 0$. Поэтому, если поменять местами x и y ($x \leftrightarrow y$), получим $y = x^2$, $x \geq 0$. Эти соотношения задают правую половину параболы $y = x^2$. Так как замена $x \leftrightarrow y$ соответствует симметричному отображению координатной плоскости относительно биссектрисы I и III координатных углов (прямой $y = x$), график $y = \sqrt{x}$ получается из правой половины параболы $y = x^2$, $x \geq 0$, при помощи такого симметричного отображения (рис. 2).

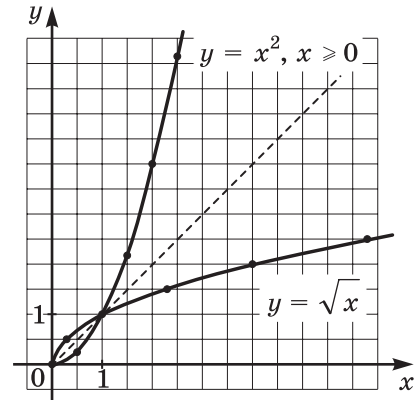


Рис. 2

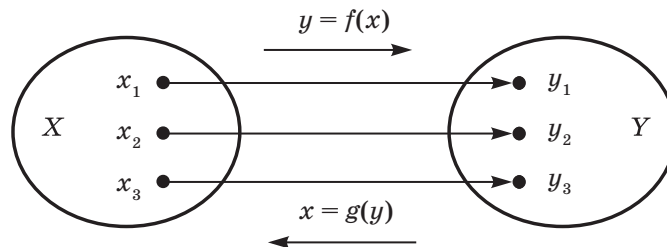
Как мы уже отмечали, операция нахождения арифметического квадратного корня является обратной по отношению к операции возведения в квадрат неотрицательного числа.

Введём понятие обратной функции. Это позволит рассматривать квадратный корень как функцию, обратную к квадратичной. Приведём краткую схему такого рассуждения.

Определение. Пусть функция f осуществляет взаимно однозначное соответствие между множеством X и множеством Y , то есть каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$ ($y = f(x)$), и наоборот, каждому элементу $y \in Y$ соответствует единственный элемент $x \in X$. Тогда обратное соответствие между Y и X также является взаимно однозначным, оно определяет функцию g , называемую *обратной* к функции f .

Если $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, то $x = g(y)$;

наоборот, если $x = g(y)$, $y \in Y$, $x \in X$, то $y = f(x)$.



Пример 1. Пусть $X = [0; +\infty)$, $Y = [0; +\infty)$, $y = f(x) = x^2$. Тогда обратное соответствие является функцией $x = g(y) = \sqrt{y}$ — арифметический квадратный корень.

Пример 2. Пусть $X = (-\infty; +\infty)$, $Y = [0; +\infty)$, $y = f(x) = x^2$. Соответствие между X и Y не является взаимно однозначным, так как существует пара различных значений x (например, 2 и -2), которым ставится в соответствие одно и то же значение y . Говорить об обратной функции нельзя.

Пример 3.

Пусть $X = (-\infty; 0]$, $Y = [0; +\infty)$, $y = f(x) = x^2$. Тогда обратное соответствие является функцией $x = g(y) = -\sqrt{y}$.

Пример 4.

Пусть $X = (-\infty; +\infty)$, $Y = (-\infty; +\infty)$, $y = f(x) = 2x - 1$. Так как $y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$ и соответствие между X и Y является взаимно однозначным, то существует обратная функция $x = g(y) = \frac{y+1}{2}$.

Из определения следует, что если функция g является обратной к функции f , то функция f является обратной к функции g . Поэтому такие функции принято называть *взаимно обратными*.

Можно показать, что если функции f и g взаимно обратны, то графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Таким образом, три выявленных нами свойства графика $y = \sqrt{x}$ можно было вывести из известных нам свойств графика $y = x^2$. Вместе с тем функция $y = \sqrt{x}$ имеет и целый ряд существенных отличий от функции $y = x^2$.

Например, в формулу $y = \sqrt{x}$ нельзя вместо x подставить $-x$, так как её область определения состоит из неотрицательных чисел, среди которых нет противоположных друг другу. А значит, график $y = \sqrt{x}$ не обладает симметричностью ни относительно оси абсцисс, ни относительно начала координат.

Свойство 4. Функция $y = \sqrt{x}$ не является ни чётной, ни нечётной.

Свойство 5. Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на всей своей области определения.

Анализируя выявленные нами свойства графика функции $y = \sqrt{x}$, мы можем записать следующий *алгоритм построения графика* $y = \sqrt{x}$.

Алгоритм построения графика $y = \sqrt{x}$

1. Заполнить таблицу, задав несколько «удобных» неотрицательных значений x и вычислив соответствующие им значения y по формуле $y = \sqrt{x}$.

x	0	1			
y	0	1			

2. Отметить на координатной плоскости точки с координатами $(x; y)$, полученными в таблице.
3. Соединить полученные точки плавной линией, учитывая, что при малых x график «прижимается» к оси ординат и касается ее в точке $(0; 0)$.

Рассмотренная нами функция $y = \sqrt{x}$ позволяет описывать реальные процессы и помогает решать практические задачи.

Пример 5.

Тело начинает свободное падение с нулевой начальной скоростью и в течение времени t секунд преодолевает расстояние s м. Написать формулу и построить график зависимости t от s . За какое время свободно падающее тело пройдёт путь, равный 10 см?

Решение:

1. При свободном падении тела с нулевой начальной скоростью пройденный путь вычисляется по формуле $s = \frac{gt^2}{2}$, где s измеряется в метрах, время t в секундах, ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

$$2. s = \frac{gt^2}{2} \Leftrightarrow 2s = gt^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2s}{g}. \text{ Так как } t^2 = \frac{2s}{g} \text{ и } t \geq 0, \text{ то } t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2s}{9,8}} = \sqrt{\frac{s}{4,9}}.$$

3. Заполним таблицу по формуле $t = \sqrt{\frac{s}{4,9}}$ и построим график этой функции (рис. 3).

s	1	5	10	15
t	0,45	1,01	1,42	1,74

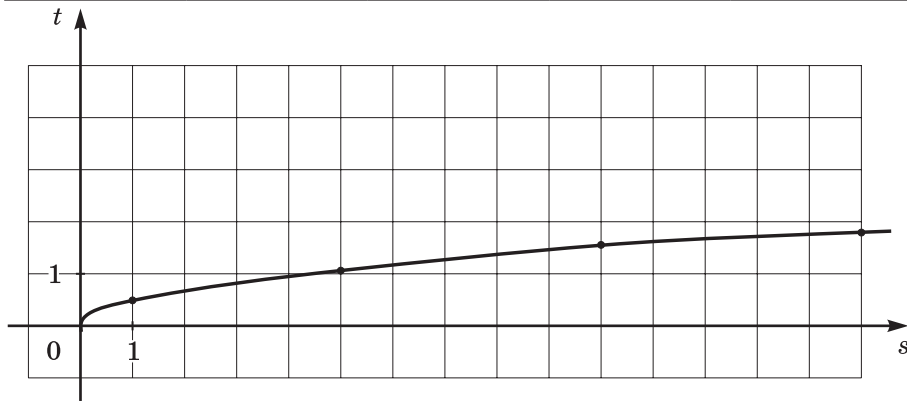


Рис. 3

4. Выразим заданный путь в метрах и вычислим искомое значение t :

$$s = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}, \quad t = \sqrt{\frac{0,1}{4,9}} = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7} \text{ (с)}.$$

* * *

Пример 6.

Построить график функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Решение:

Областью определения функции является множество $X = (0; +\infty)$, областью значений $Y = (0; +\infty)$.

Построим таблицу и график этой функции (рис. 4).

x	0,25	1	2,25	4	6,25
y	2	1	0,67	0,5	0,4

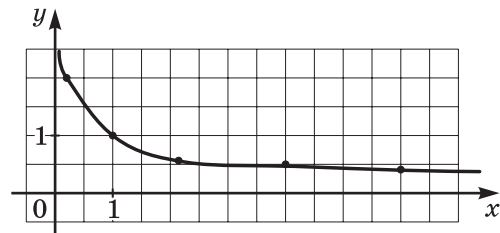


Рис. 4

Пример 7.

Электрические заряды q_1 и q_2 , равные 1 кулону, находятся на расстоянии r метров и взаимодействуют с силой F ньютонов. Написать формулу и построить график зависимости r от F . На каком расстоянии находятся друг от друга эти заряды, если сила взаимодействия между ними равна 1 ньютону?

Решение:

1. Сила взаимодействия между двумя электрическими зарядами в системе СИ выражается формулой $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$, где $k = 9 \cdot 10^9$, сила F измеряется в ньютонах, расстояние между зарядами

r – в метрах, величины зарядов q_1, q_2 – в кулонах. Если $q_1 = q_2 = 1$ (в системе СИ), то $F = \frac{k}{r^2} \Leftrightarrow r^2 = \frac{k}{F}$.

2. Так как $r^2 = \frac{k}{F}$ и $r \geq 0$, то $r = \sqrt{\frac{k}{F}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9}{F}} = \sqrt{\frac{90 \cdot 10^8}{F}} = 10^4 \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{F}}$.

3. $\sqrt{90} = 9,4868\dots$, поэтому будем считать, что $\sqrt{90} \approx 9,5$, тогда $r = 10^4 \frac{9,5}{\sqrt{F}} = \frac{95 \cdot 10^3}{\sqrt{F}}$.

4. Построим таблицу по формуле $r = \frac{95}{\sqrt{F}}$ (значения F – в ньютонах, значения r перевели в километры) и изобразим график зависимости r от F (рис. 5).

F	0,25	1	2,25	4	6,25
r	190	95	63,3	47,5	20,1

5. Найдём расстояние, на котором находятся друг от друга заряды, сила взаимодействия F между которыми равна 1 ньютому.

Если $F = 1$ ньютон, то $r = \frac{95 \cdot 10^3}{\sqrt{1}} = 95 \cdot 10^3$.

Как мы видим, 1 кулон – это большой заряд: два заряда в 1 кулон на расстоянии почти 100 км взаимодействуют с ощутимой силой 1 ньютон (таков, например, вес тела массой примерно в 100 г).

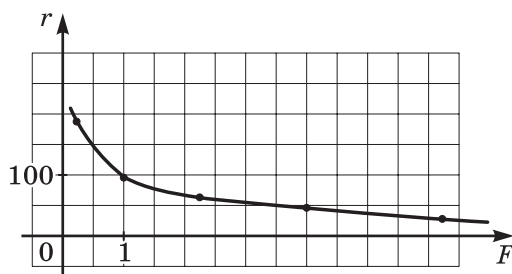


Рис. 5



106

Вычислите устно: $\frac{\sqrt{16} + \sqrt{0,25} + \sqrt{4} - \sqrt{2,25}}{\sqrt{25}}$.

Сформулируйте определение, которым нужно пользоваться, чтобы вычислить значение арифметического квадратного корня.

107

- Площадь квадрата со стороной a см составляет S см². Запишите формулу зависимости a в см от S в см².
- Можно ли вычислить неотрицательное число, если известен его квадрат? Запишите формулу, с помощью которой можно это сделать, обозначив искомое число буквой k , а его квадрат – c .
- Какой единой обобщённой формулой можно записать две предыдущие зависимости? Докажите, что эта зависимость является функциональной.
- Задайте эту функцию таблично:

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y							

- Постройте график функции, используя полученную таблицу. Сравните его с графиком $y = \sqrt{x}$, изображенным на с. 29 учебника.
- Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на с. 29–30 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

108

Пользуясь графиком функции $y = \sqrt{x}$, найдите значение:

- x , при котором $\sqrt{x} = 0$; 1; 2; 2,5;
- $\sqrt{x}$, при $x = 0$; 1; 2; 2,5.

109 Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Пользуясь графиком, найдите приближенные значения корней и выполните сравнение:

- а) $\sqrt{2}$ и 1,1; б) $\sqrt{3}$ и 1,5; в) $\sqrt{5}$ и 2,1; г) $\sqrt{6}$ и 2,5.

Какой масштаб целесообразно выбрать для построения графика?

110 Начертите графики функций $y = x$ и $y = \sqrt{x}$ и, пользуясь построенными графиками, сравните числа:

- а) b и $\sqrt{b}$, если $0 < b < 1$;
б) b и $\sqrt{b}$, если $b > 1$.

Что можно сказать про значения чисел в точках пересечения графиков?

π

111 Вычислите устно:

- а) $\frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{0,16} \cdot \sqrt{0,016}}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{3,6} \cdot \sqrt{0,36} \cdot \sqrt{0,036}}$; б) $\frac{\sqrt{17} \cdot \sqrt{1,7} \cdot \sqrt{0,17} \cdot \sqrt{0,017}}{\sqrt{0,0017} \cdot \sqrt{0,00017} \cdot \sqrt{0,000017} \cdot \sqrt{0,0000017}}$.

112 Решите устно. Сколько множителей в числителе, если

$$\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \dots \cdot \sqrt{5}}{5^5} = 5.$$

113 Решите устно. При каких значениях a справедливо равенство $13\sqrt{a} = a\sqrt{13}$?

114 Период T колебаний маятника равен $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l – длина маятника, g – ускорение свободного падения. Сравните периоды качания маятников, длины которых относятся как 9 : 4.

115 Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

- а) Для того чтобы натуральное число a оканчивалось на чётную цифру, ..., чтобы натуральное число a делилось на 4.
б) Для того чтобы натуральное число a было составным, ..., чтобы натуральное число a делилось на 6.
в) Для того чтобы натуральное число n делилось на 9, ..., чтобы натуральное число n делилось на 3.
г) Для того чтобы натуральные числа a и b были равны, ..., чтобы квадраты натуральных чисел a и b были равны.

116 Решите уравнение:

- а) $5x(x - 7) = 0$; б) $(x^2 - 4)(2x + 3) = 0$; в) $x^2 - 12x + 20 = 0$.

$\mathcal{D}$

117 Постройте график функции $y = \sqrt{x}$ и, пользуясь им, найдите приближённое значение:

- а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$.

118 1) Сосулька отваливается и падает с крыши. Постройте график зависимости скорости, с которой сосулька упадёт на землю, от высоты крыши. Скорость и перемещение сосульки зависят от времени следующим образом: $v = gt$, $s = \frac{gt^2}{2}$, где g – ускорение свободного падения, которое можно считать равным 10 м/с^2 .

2) Какая будет скорость сосульки у поверхности земли, если высота крыши равна 20 метрам?

3) Во сколько раз увеличится скорость, если высота увеличится в 2 раза?

119 Вычислите: $\frac{\sqrt{10,24} - \sqrt{0,25} - \sqrt{441} + \sqrt{1,69}}{\sqrt{289}}$.

120 Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{400} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{0,4}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{0,002} \cdot \sqrt{0,002}}$;

б) $\frac{\sqrt{23} \cdot \sqrt{2,3} \cdot \sqrt{0,23} \cdot \sqrt{0,023}}{\sqrt{0,002} \cdot \sqrt{0,0002} \cdot \sqrt{0,00002} \cdot \sqrt{0,000002}}$.

121 Сколько множителей в числителе, если

$$\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \dots \cdot \sqrt{7}}{49^7} = 7^{49}?$$

122 Решите уравнение:

а) $x(x^2 - 9)(-3x + 15) = 0$;

б) $x^2 - 6x + 7 = 0$.

с 123* Две крестьянки принесли на рынок вместе 100 одинаковых яиц, одна больше, чем другая, но обе выручили одинаковую сумму денег. Первая сказала тогда второй: «Будь у меня столько яиц, сколько у тебя, я выручила бы за них 270 рублей». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я получила бы за них всего 120 рублей». Сколько яиц было у каждой?

124* Найдите какие-нибудь два последовательных 100-значных числа, такие что сумма цифр каждого из них – точный квадрат.

125* Из произведения всех натуральных чисел от 1 до 1812 вычеркнули все числа, делящиеся на 5. Какой цифрой будет оканчиваться произведение оставшихся чисел?

3.3.4.* Приближённое вычисление квадратного корня



В природе существует много такого, что не может быть ни достаточно глубоко понято, ни достаточно убедительно доказано, ни достаточно умело и надёжно использовано на практике без помощи вмешательства математики.

Френсис Бэкон (1561–1626),
английский философ и мыслитель

Как мы уже видели, квадратные корни из рациональных чисел часто являются иррациональными числами, то есть представляются бесконечными непериодическими десятичными дробями. Поэтому их значение можно вычислить лишь приближённо. Как правило, для этого обычно используют технику. Микрокалькулятор, рассчитывающий девять знаков после запятой, даст значение $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

Вопрос об алгоритмах приближенного вычисления квадратного корня сегодня может показаться не имеющим смысла. Какой там алгоритм – нажмём на кнопку, вот тебе результат! Нужна бóльшая точность – бери более мощный калькулятор или садись за компьютер.

Но так было не всегда. Ещё лет 30 тому назад микрокалькуляторы, не говоря уже о компьютерах, только входили в широкое употребление и далеко не всегда были доступны. Лет 50 назад о вычислительной технике, размеры которой были сравнимы с большой комнатой, знали лишь специалисты-профессионалы.

А в XVI–XVIII веках математики тратили годы, а то и всю жизнь на создание всё более совершенных вычислительных приборов и алгоритмов, которые позволяли им найти всё более точные приближённые значения иррациональных чисел, иногда – всего лишь несколько новых десятичных знаков. А лучшие математики древности вплоть до V века до н. э. даже представлений не имели об иррациональных числах и том, что сегодня знает любой восьмиклассник: $\pi \approx 3,14159265358\dots$ – непериодическая дробь.

История поиска приближенных значений иррационального числа π , которая идёт от математиков Древней Греции, Вавилона, Египта, Индии, Китая, полна легенд, драматических событий, разочарований и побед. Зачем нужны были эти усилия, если даже в простом калькуляторе можно посмотреть любое нужное для работы число знаков после запятой?

Ответ простой – для того, чтобы *создать эту возможность*. Любой калькулятор, любой язык программирования, используемый в компьютерах, не считает эти десятичные знаки сам по себе. В электронных устройствах заложены программы, использующие некоторые вычислительные алгоритмы. Так что алгоритмы эти существуют, только они стали невидимыми для обычных пользователей вычислительной техники. Однако для того, чтобы совершенствовать эту технику, алгоритмы надо знать.

Некоторые из этих алгоритмов полезны и для обычных пользователей – ведь бывают ситуации, когда калькулятора под рукой нет, а прикинуть значение корня нужно. Для этого существуют способы приближённого вычисления квадратного корня, с которыми мы и познакомимся в данном пункте.

Первый самый простой способ – это способ прикидки. Идея его создания опирается на известное нам свойство 7 корней: если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ и если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (где $a \geq 0, b \geq 0$).

Отсюда для тройки неотрицательных чисел выполняется: если $a < x < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{x} < \sqrt{b}$. Это неравенство можно использовать для оценки значения корня с помощью поиска пограничных рациональных чисел, между которыми будет располагаться искомый корень. Ясно, что для этого a и b должны быть квадратами рациональных чисел.

Воспользуемся этой идеей и найдём приближённое значение, например $\sqrt{2}$. Мы можем подобрать два точных квадрата, между которыми располагается число 2. Выберем ближайшие к числу 2 натуральные числа – 1 и 4.

$$1 < 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2.$$

Значит, $\sqrt{2} = 1, \dots$

Чтобы получить значение первой цифры после запятой, увеличим точность оценки и рассмотрим неравенство $\sqrt{a} < \sqrt{2,00} < \sqrt{b}$. Учтем, что для получения одного знака после запятой под корнем должно быть после запятой вдвое больше знаков. Теперь подберём два квадрата рациональных чисел с двумя знаками после запятой, наиболее близких к числу 2,00.



$$1,96 < 2,00 < 2,25 \Rightarrow \sqrt{1,96} < \sqrt{2,00} < \sqrt{2,25} \Rightarrow 1,4 < \sqrt{2} < 1,5.$$

Значит, $\sqrt{2} = 1,4\dots$

Аналогично, чтобы получить значение второй цифры после запятой, нужно подобрать два точных квадрата, наиболее близких к числу 2,0000.

$$19\,881 < 20\,000 < 20\,164 \Rightarrow \sqrt{1,9881} < \sqrt{2,0000} < \sqrt{2,0164} \Rightarrow 1,41 < \sqrt{2} < 1,42.$$

Значит, $\sqrt{2} = 1,41\dots \approx 1,4$.

Для получения следующей цифры после запятой нужно подобрать два точных квадрата, наиболее близких к числу 2,000000, и т. д. Если у нас под рукой есть таблица квадратов любых чисел, то данный способ позволяет определить приблизительное значение любого корня.

Этот способ удобен, когда достаточно извлечь корень с точностью до целых или десятых. Однако для извлечения корня с более высокой точностью он становится неудобным. Познакомимся с другим, более эффективным способом приближённого вычисления квадратного корня.

Будем считать, что мы свободно можем выполнять деление натуральных чисел с любым нужным числом знаков после запятой. Тогда в извлечении квадратного корня из некоторого положительного числа x нам поможет последовательность чисел $x_1; x_2; x_3 \dots$, где x_1 – произвольное положительное число,

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{x}{x_1} \right); \quad x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{x}{x_2} \right); \quad x_4 = \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{x}{x_3} \right) \text{ и т. д.}$$

Как говорят, мы имеем *рекуррентно заданную* числовую последовательность: (от латинского «*recurrens*» – «возвращающийся»), когда задаются несколько первых членов последовательности и правило, позволяющее вычислять каждый следующий член через предыдущие. В нашем случае последовательность задаётся формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{x}{x_n} \right), \text{ где } x_1 - \text{произвольное положительное число, близкое по значению к } \sqrt{x}.$$

Можно показать, что каждое следующее число в этом ряду всё больше и больше приближается к значению $\sqrt{x}$.

* * *

Строгое доказательство этого факта может быть получено лишь методами математического анализа, но смысл предложенного подхода можно проиллюстрировать следующим рассуждением.

Рассмотрим разницу между некоторым числом данного ряда и значением $\sqrt{x}$:

$$x_{n+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{x}{x_n} - 2\sqrt{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_n^2 - 2\sqrt{x}x_n + x}{x_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_n - \sqrt{x})^2}{x_n}, \text{ где } n = 1, 2, 3\dots$$

$$\text{Поэтому} \quad x_2 - \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_1 - \sqrt{x})^2}{x_1}; \quad x_3 - \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2 - \sqrt{x})^2}{x_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{(x_1 - \sqrt{x})^2}{2x_1} \right)^2}{x_2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(x_1 - \sqrt{x})^4}{x_1^2 x_2};$$

$$x_4 - \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{8} \frac{(x_1 - \sqrt{x})^4}{x_1^2 x_2} \right)^2}{x_3} = \frac{1}{128} \cdot \frac{(x_1 - \sqrt{x})^8}{x_1^4 x_2^2 x_3} \text{ и т. д.}$$

Мы видим, что разница между $\sqrt{x}$ и каждым последующим числом этого ряда сокращается. Если, например, выбрать x_1 так, что $|x_1 - \sqrt{x}| < 0,1$, то есть x_1 приближает $\sqrt{x}$ с одним десятичным знаком после запятой, то x_2 уже приближает $\sqrt{x}$ не менее чем с двумя знаками, x_3 – не менее чем с четырьмя, x_4 – не менее чем с 8 знаками и т.д. (на самом деле точных знаков будет больше благодаря быстро растущему множителю в знаменателе: 2, 8, 128 и т. д.).

Рассмотрим пример использования этой последовательности чисел для приближённого вычисления квадратного корня. Найдём опять значение $\sqrt{2}$, тогда $x = 2$. Возьмем для простоты $x_1 = 1$. Тогда $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2} + 1 = 1,5$.

Полученное значение x_2 отличается от найденного с помощью калькулятора значения $\sqrt{2}$ меньше чем на 0,1. Верной оказалась только цифра целой части.

$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{17}{12} = 1,416666667\dots$ Два знака после запятой совпали со значением, найденным с помощью калькулятора.

$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{2}{x_3}\right) = \frac{577}{408} = 1,414215686\dots$ Уже пять знаков после запятой верны.

$x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{2}{x_4}\right) = \frac{665857}{470832} = 1,414213562\dots$ Теперь все 9 знаков верны, они совпали с вычислениями на микрокалькуляторе.

Чтобы быстрее выходить на более точное значение корня, можно подбирать x_1 , которое как можно ближе к значению корня. Так в рассмотренном нами примере целые части $x_1 = 1$ и значения $\sqrt{2}$ одинаковы, они отличались друг от друга только дробной частью (приблизительно на 0,4).

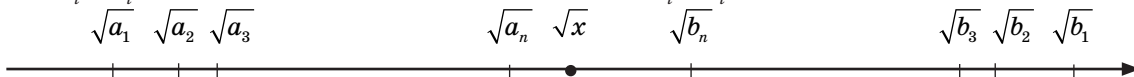
Итак, мы выявили следующие *способы приближённого вычисления значения $\sqrt{x}$* .

Способы приближённого вычисления значения $\sqrt{x}$

1. Оценка значения корня путем постепенного сужения границ a_i и b_i :

$$a_i < x < b_i \Rightarrow \sqrt{a_i} < \sqrt{x} < \sqrt{b_i},$$

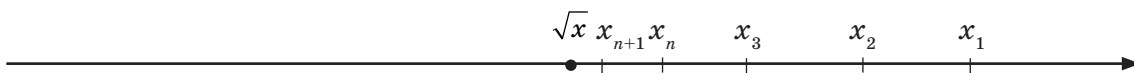
где a_i и b_i – ближайшие к x точные квадраты, a_i и $b_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, \dots n$.



Тогда каждая последующая цифра числа $\sqrt{x}$ определяется пошагово в процессе вычисления цифр числа $\sqrt{a_i}$.

2. Использование последовательности чисел x_n :

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{x}{x_n}\right)$, где x_1 – произвольное положительное число, близкое по значению к $\sqrt{x}$.

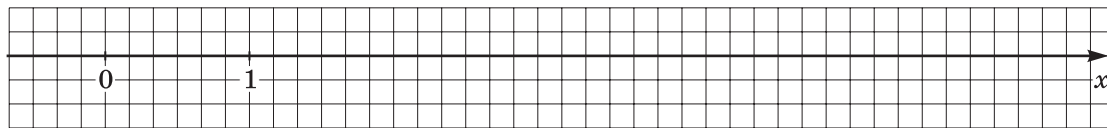


Тогда значение $\sqrt{x} \approx x_{n+1}$

Последний способ редко используется на практике ввиду его трудоёмкости. Оценить его значимость сможет тот, кто решит всерьёз заняться изучением высшей математики.

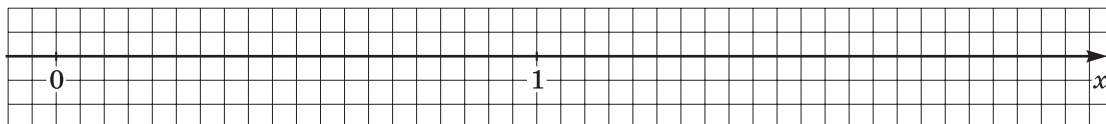


126 а) Отметьте на числовой прямой числа: $\sqrt{1}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$.



Между какими соседними целыми числами будут располагаться числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$? Отметьте эти иррациональные числа на числовой прямой.

б) Отметьте на числовой прямой числа: $\sqrt{1,21}$; $\sqrt{1,44}$; $\sqrt{1,69}$; $\sqrt{1,96}$; $\sqrt{2,25}$; $\sqrt{2,56}$; $\sqrt{2,89}$; $\sqrt{3,24}$; $\sqrt{3,61}$.



Между какими отмеченными числами будут располагаться числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$? Отметьте эти иррациональные числа на числовой прямой.

в) Увеличилась ли точность определения расположения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ на второй числовой прямой? Как отметить на числовой прямой число $\sqrt{5}$ с такой же точностью?

127 Пользуясь результатом выполнения предыдущего задания, определите:

а) целую часть числа $\sqrt{3}$;

б) цифру, стоящую в разряде десятых числа $\sqrt{3}$.

Как найти цифру, стоящую в разряде сотых числа $\sqrt{3}$?

128 Найдите приближённое значение $\sqrt{3}$ с помощью калькулятора. Сравните цифры $\sqrt{3}$, найденные в предыдущем задании, с его значением, полученным с помощью калькулятора. Сформулируйте способ приближённого вычисления квадратного корня и сопоставьте его со способом 1, описанным на с. 37 учебника.

129 Определите без калькулятора, между какими целыми числами лежит число:

а) $\sqrt{5}$; ж) $\sqrt{7 \cdot 11 \cdot 13}$;

б) $\sqrt{17}$; з) $\sqrt{9 \cdot 10 \cdot 11}$;

в) $\sqrt{301}$; и) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$;

г) $\sqrt{1000}$; к) $\sqrt{7} + \sqrt{11}$;

д) $\sqrt{5 \cdot 7}$; л) $\sqrt{24} + \sqrt{26}$;

е) $\sqrt{17 \cdot 19}$; м) $\sqrt{1025} + \sqrt{1027}$.

130 Какое число является более точным приближением $\sqrt{11}$:

- а) 3 или 4; в) 3,31 или 3,32;
б) 3,3 или 3,4; г) 3,316 или 3,317?

Ответьте на вопрос, не используя калькулятор.

131 Вычислите приближённое значение числа $\sqrt{7}$ с точностью до сотых:

- 1) используя способ «сужения границ»;

2) с помощью последовательности чисел $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{x}{x_n} \right)$.

Сколько членов последовательности вам пришлось вычислить, чтобы найти две верные цифры числа после запятой?

  Вычислите: $\frac{\sqrt{6,25} - \sqrt{0,0036} - \sqrt{4,41} - \sqrt{0,0196}}{\sqrt{0,25}}$.

133 Каким числом можно заменить A , чтобы полученный в результате замены многочлен можно было представить в виде квадрата суммы или разности:

- а) $x^2 - 6x + A$; б) $x^2 - 8x + A$; в) $x^2 + 2x + A$; г) $x^2 + x + A$.

134 Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

- а) $x^2 + 2x - 15$; б) $a^2 + 4a - 5$; в) $x^2 + x - 3,75$.

135 Определите *без* калькулятора, между какими целыми числами лежит число:

- | | | |
|--------------------|---|----------------------------------|
| а) $\sqrt{7}$; | д) $\sqrt{20 \cdot 50}$; | и) $\sqrt{15} + \sqrt{17}$; |
| б) $\sqrt{77}$; | е) $\sqrt{29 \cdot 31}$; | к) $\sqrt{17} + \sqrt{19}$; |
| в) $\sqrt{777}$; | ж) $\sqrt{7 \cdot 77}$; | л) $\sqrt{500} + \sqrt{501}$; |
| г) $\sqrt{7777}$; | з) $\sqrt{19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22}$; | м) $\sqrt{1000} + \sqrt{1001}$. |

136 Какое число является более точным приближением $\sqrt{19}$:

- а) 4 или 5; б) 4,3 или 4,4; в) 4,35 или 4,36; г) 4,358 или 4,359?

Ответьте на вопрос, не используя калькулятор.

137 Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

- а) $x^2 - 2x - 24$; б) $a^2 + 12a + 20$; в) $x^2 + x - 0,75$.

 **138**^{*} На доске выписаны числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$. Разрешается дописать на доске сумму, разность или произведение любых двух различных чисел, уже выписанных на доске. Докажите, что можно написать на доске число 1.

 Выполните тест № 4 для самостоятельной проверки знаний.

Задачи для самоконтроля к главе 3

139 Постройте график функции: А) $y = x^4$; Б) $y = x^5$.

1) Сравните: а) $f(-9)$ и $f(-3,2)$; б) $f(-2)$ и $f(1)$; в) $f(-100)$ и $f(100)$.

2) Определите, какое минимальное и максимальное значение функции на отрезках: а) $[-2; 2]$; б) $[-1; 0]$; в) $[0; 1]$?

3) Укажите, на каких промежутках из области определения функция положительна, отрицательна, равна нулю.

140 На рис. 1 построена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения: $[-5; 5]$. Дополните график, если известно, что $y = f(x)$ – чётная функция.

1) Найдите $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.

2) Выделите красным цветом часть кривой, на которой функция возрастает. Укажите, при каких значениях x функция возрастает.

3) Выделите зелёным цветом часть кривой, на которой функция постоянна. Укажите, при каких значениях x функция постоянна.

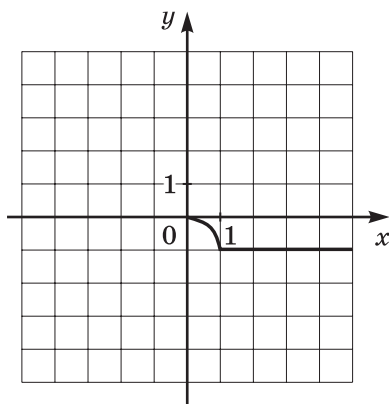


Рис. 1

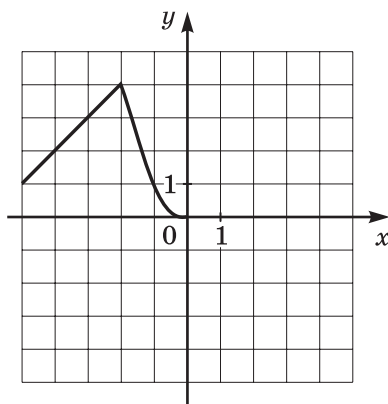


Рис. 2

141 На рис. 2 построена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения $[-5; 5]$. Дополните график, если известно, что $y = f(x)$ – нечётная функция.

1) Найдите $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$.

2) Выделите красным цветом часть кривой, на которой функция убывает. Укажите, при каких значениях x функция убывает.

3) Выделите синим цветом часть кривой, на которой функция возрастает. Укажите, при каких значениях x функция возрастает.

142 Постройте график функции с заданной областью определения. «Прочитайте» график по известному плану:

а) $y = x^{10}$, $x \in (-\infty; 1]$;

в) $y = x^7$, $x \in [-1; 1]$;

б) $y = x^2$, $x \in (-3; 3)$;

г) $y = x^3$, $x \in [-2; +\infty)$.

143 Решите графически уравнение:

а) $x^5 = -1$;

б) $x^{10} = -x - 7$;

в) $x^7 = |x|$.

144 Обратная пропорциональность задана формулой $y = -\frac{18}{x}$.

Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному:
 $-0,06$; $-1,2$; $0,9$; 50 ; 300 ; -5400 .

Определите, принадлежит ли графику функции точка:

$A(-3; 6)$; $B(-0,5; -36)$; $C\left(\frac{6}{7}; -21\right)$; $D\left(-3\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$; $F(0,03; -600)$.

145 Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что график функции проходит через точку:

а) $D(-5; -0,8)$; б) $H(3; -19)$; в) $K\left(\frac{12}{13}; 26\right)$; г) $Q(-4; 14)$; д) $R\left(\frac{5}{14}; -3\frac{1}{2}\right)$.

146 С помощью графика функции $y = \frac{6}{x}$ найдите три значения аргумента, при которых значения функции:

а) больше 1; в) меньше -3 ;
 б) больше 0; г) меньше 0.

147 Дана функция $f(x) = \frac{0,9}{x}$. Найдите:

а) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; б) $f(-0,03)$; в) $f(0,5)$; г) $f\left(-\frac{3}{5}\right)$; д) $10 \cdot f(-0,001)$; е) $f(m)$.

148 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ x + y = 4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = -\frac{7}{x} \\ 7x + y = 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ 3x + y = -10 \end{cases}$.

149 Определите количество решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y = \frac{0,5}{x} \\ y = x^8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = -\frac{6}{x} \\ y = x^9 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y = x^6 \\ y = x^{11} \end{cases}$.

150 Докажите, что функция $y = f(x)$, заданная формулой $y = 2x^4 - 0,2x^2$, является чётной.

151 Докажите, что функция $y = f(x)$, заданная формулой $y = -\frac{3}{x} + x$, является нечётной.

152 Дана функция $y = \begin{cases} x^4, & \text{если } x \geq -1; \\ -\frac{4}{x}, & \text{если } -4 < x < -1 \end{cases}$

Найдите $y(-4)$, $y(-2)$, $y(-1)$, $y\left(-\frac{1}{2}\right)$, $y(0)$, $y(2)$.

Постройте график функции и «прочитайте» его.

153 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{400}$; в) $(\sqrt{8})^2$; д) $\sqrt{121} \cdot \sqrt{36}$; ж) $\sqrt{0,25} - \sqrt{0,09}$; и) $\sqrt{91 + \sqrt{81}}$;
 б) $\sqrt{0,49}$; г) $(5\sqrt{5})^2$; е) $\sqrt{0,64} : \sqrt{0,0004}$; з) $0,3\sqrt{44\frac{4}{9}} + 2,6 : \sqrt{6\frac{19}{25}}$; к) $16 \cdot \sqrt{14\frac{1}{16}}$.

154 Упростите:

а) $\sqrt{324 \cdot 25}$; б) $\sqrt{147} \cdot \sqrt{75}$; в) $\sqrt{\frac{289}{900}}$; г) $\frac{\sqrt{405}}{\sqrt{5}}$; д) $15 \cdot \sqrt{(-7)^2}$; е) $1,2 \cdot \sqrt{2^6}$.

Задачи для самоконтроля к главе 3

155 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{200}$; б) $\sqrt{450}$; в) $\sqrt{\frac{128}{147}}$; г) $\sqrt{100m}$; д) $\sqrt{4d^{10}k^{11}}$, $d \neq 0$; е) $\sqrt{\frac{z^9}{n^8}}$.

156 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{x^2 - 14x + 49}$, если $x < 7$; б) $\sqrt{5x^2 - 4x + 0,8}$, если $x < 0,4$.

157 Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{2}$; б) $-3\sqrt{3}$; в) $13m\sqrt{m}$; г) $2d^3\sqrt{4d}$.

158 Упростите:

а) $(\sqrt{6} - \sqrt{108}) \cdot \sqrt{6}$; б) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + \sqrt{48}$; в) $m\sqrt{9m^2}$, $m < 0$; г) $\sqrt{7 + \sqrt{13}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{13}}$.

159 Решите уравнение, используя определение арифметического квадратного корня:

а) $\sqrt{x} = 7$; г) $3\sqrt{x} = 3$; ж) $\sqrt{x-1} = 3$;
 б) $\sqrt{x} = 25$; д) $\sqrt{x} = -1$; з) $\sqrt{x-1} = -3$;
 в) $3\sqrt{x} = 105$; е) $\sqrt{x} = 0$; и) $\sqrt{x+8} = \sqrt{18}$.

160 Выполните действия, используя формулы сокращённого умножения:

а) $(1 + \sqrt{m})(1 - \sqrt{m})$; в) $(2 + 2\sqrt{q})^2$; д) $(5\sqrt{b} + 0,4)^2$;
 б) $(\sqrt{c} + \sqrt{d})(\sqrt{d} - \sqrt{c})$; г) $(\sqrt{k} - \sqrt{z})^2$; е) $(2 - \sqrt{s})(4 + 2\sqrt{s} + s)$.

161 Докажите, что значение выражения есть число рациональное:

а) $(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$; в) $\frac{3}{3 - \sqrt{3}} + \frac{3}{3 + \sqrt{3}}$;
 б) $(10 + 3\sqrt{5})(3\sqrt{5} - 10)$; г) $\frac{0,5}{4\sqrt{6} + 6} - \frac{0,5}{4\sqrt{6} - 6}$.

162 Докажите, что значение выражения есть число иррациональное:

а) $(1 + \sqrt{10})^2$; в) $\frac{5}{4 - \sqrt{7}} + \frac{6}{\sqrt{7} - 4}$;
 б) $(3\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$; г) $\frac{2}{\sqrt{8} - \sqrt{7}} - \frac{2}{\sqrt{8} + \sqrt{7}}$.

163 Разложите на множители:

а) $11 + m\sqrt{11}$; в) $x^2 - 13$; д) $c + 2\sqrt{cs} + s$, $c, s \geq 0$;
 б) $m\sqrt{6} - \sqrt{3m}$; г) $x - 5$, $x \geq 0$; е) $a - 28\sqrt{ab} + 196b$, $a, b \geq 0$.

164 Упростите выражение:

а) $\sqrt{27} - \sqrt{3}$; в) $7\sqrt{n} + 3\sqrt{v} - 8\sqrt{n} + 8\sqrt{v}$;
 б) $4\sqrt{8} + \sqrt{72}$; г) $\sqrt{98} - \sqrt{75} - \sqrt{32} + \sqrt{243}$.

165 Упростите выражение:

а) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} + \sqrt{2}$; в) $\sqrt{(3 - \sqrt{12})^2} + (\sqrt{12} - 3)^2$;
 б) $\sqrt{(5 - \sqrt{11})^2} + \sqrt{(2 + \sqrt{11})^2}$; г) $(3\sqrt{15} + 2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{15} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{15} + 2\sqrt{3})$.

166 Упростите:

а) $\sqrt{10+4\sqrt{6}}$;

б) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$;

в) $\sqrt{51-12\sqrt{15}}$.

167 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{17}{\sqrt{2}}$;

в) $\frac{4}{5+\sqrt{5}}$;

д) $\frac{48}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$;

ж) $\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{2}-\sqrt{12}}$;

б) $\frac{5}{7\sqrt{13}}$;

г) $\frac{9}{6-2\sqrt{6}}$;

е) $\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{13}}$;

з) $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{3}+1}$.

168 Выпишите числа в порядке убывания:

$5\sqrt{5}$, $3\sqrt{7}$, $7\sqrt{3}$, 12, $\sqrt{65}$, $2\sqrt{15}$, $9\sqrt{2}$.

169 Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Пользуясь графиком, найдите приближённые значения корней и выполните сравнение:

а) $\sqrt{2}$ и 1,2;

б) $\sqrt{3}$ и 1,4;

в) $\sqrt{5}$ и 2,5.

г) $\sqrt{6}$ и 3.

170 Определите без калькулятора, между какими целыми числами лежит число:

а) $\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{10}$;

в) $\sqrt{300}$;

г) $\sqrt{500}$;

171 Решите графически уравнение:

а) $\sqrt{x} = x$;

б) $\sqrt{x} = x^2$;

в) $x^2 = -x + 2$;

г) $-\frac{5}{x} = 0$;

д) $\frac{4}{x} = \frac{x}{4}$.

172 Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 4x, & \text{если } x \geq 2; \\ x^3, & \text{если } 1 \leq x < 2; \\ x^2, & \text{если } x < 1 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{если } 4 < x \leq 8; \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \leq 4; \\ x^2, & \text{если } -2 < x \leq 0; \\ -2x, & \text{если } -4 \leq x < -2 \end{cases}$

173 Дана функция:

$$y = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{если } 2 < x \leq 4; \\ \frac{x}{2}, & \text{если } 0 < x \leq 2; \\ x^4, & \text{если } -1 < x \leq 0; \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } -4 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

а) найдите $y(-4)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(1)$, $y(1,4)$, $y(2)$, $y(4)$;

б) постройте график кусочно-заданной функции;

в) найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

Глава 4

Квадратичная функция

§ 1. Квадратные уравнения

4.1.1. Квадратные уравнения в реальных процессах. Неполные квадратные уравнения и их решение



Для того чтобы усовершенствовать ум, надо больше размышлять, чем заучивать.

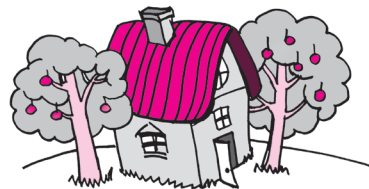
Рене Декарт (1596–1650),
французский математик, философ, физик

Мы уже знаем, что исследование новых видов уравнений, описывающих различные классы задач, расширяет возможности по их решению. В данном пункте мы познакомимся с новыми для нас *квадратными уравнениями*, имеющими важное значение в силу их широкого практического применения. Поиск способов их решения, вызванный потребностями земледелия, военного дела, астрономии, уходит в глубокую древность – более 2000 лет до н. э. А современная теория их решения оформилась сравнительно недавно – лишь в XVII веке, и связана с именами Декарта, Ньютона и других учёных.

Рассмотрим вначале несколько практических задач.

Задача 1.

Садовый участок имеет форму прямоугольника. Длина участка на 9,5 м больше его ширины, а его площадь составляет 2,1 сотки. Сколько метров сетки нужно приобрести для ограждения этого участка, если на калитку планируется отвести 1 м?



Решение:

Сначала установим соответствие единиц измерения величин: 2,1 сотки = 210 м².

Пусть ширина участка составляет x м, тогда его длина равна $(x + 9,5)$ м, где $x > 0$. Значит, площадь участка равна $x(x + 9,5)$ м², что по условию задачи составляет 210 м². Получим уравнение:

$$x(x + 9,5) = 210.$$

Раскроем скобки и перенесём все ненулевые члены уравнения влево:

$$x^2 + 9,5x - 210 = 0.$$

Решив это уравнение, нетрудно ответить на вопрос задачи.

* * *

Задача 2.

На прямой линии, проходящей через центр Земли и Луны, найти точку, в которой сила притяжения к Земле равна силе притяжения к Луне (то есть найти расстояния от искомой точки до центров Земли и Луны). Известно, что расстояние между центрами Земли и Луны равно $3,84 \cdot 10^5$ км, а масса Земли в 81 раз больше массы Луны.

Решение:

Для краткости оформления обозначим расстояние между центрами Земли и Луны d км, массу Луны M т, а массу Земли, соответственно, $81M$ т. Пусть расстояние от искомой точки до центра Земли равно x км ($x > 0$), тогда расстояние до центра Луны составит $(d - x)$ км.

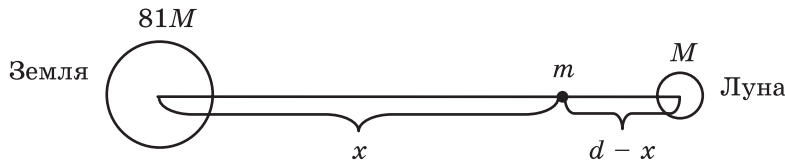


Рис. 1

Если в искомую точку поместить массу m т (рис. 1), то по закону всемирного тяготения, с которым вы скоро познакомитесь на уроках физики, $\gamma \frac{81Mm}{x^2} = \gamma \frac{Mm}{(d-x)^2}$, где γ – гравитационная постоянная. Отсюда $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{81(d-x)^2}$. Так как $x = 0$ и $x = d$ заведомо не являются решениями задачи, можем записать:

$$x^2 = 81(d-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 81(d-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 81(d^2 - 2dx + x^2) = 0 \Leftrightarrow 80x^2 - 162dx + 81d^2 = 0.$$

Мы помним, что d – известная величина, равная $384 \cdot 10^3$ км. Значит, для ответа на вопрос задачи нам надо решить уравнение:

$$80x^2 - 162 \cdot (384 \cdot 10^3)x + 81 \cdot (384 \cdot 10^3)^2 = 0.$$

Мы получили уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа. Если $a \neq 0$, то данное уравнение не сводится к линейному, и мы приходим к новому для нас типу уравнений – **квадратному уравнению**.

Определение. *Квадратным уравнением* с переменной x называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа, $a \neq 0$.

В первой задаче мы получили квадратное уравнение с коэффициентами $a = 1$; $b = 9,5$; $c = -210$; во второй $a = 80$; $b = 162 \cdot (384 \cdot 10^3)$; $c = 81 \cdot (384 \cdot 10^3)^2$. В обоих случаях все коэффициенты a, b и c были отличны от нуля. Такое уравнение называют **полным квадратным уравнением**. Но так бывает далеко не всегда. Рассмотрим ситуации, когда это не так.

Ясно, что при $a = 0$ уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ не является квадратным, оно сведётся к хорошо известному нам линейному уравнению.

Если же b или c (одновременно либо по отдельности) будут равны нулю, то уравнение останется квадратным, но мы получим так называемое **неполное квадратное уравнение**. Разберёмся с решением таких уравнений.

Если коэффициент при x равен нулю, то неполное квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$. Это уравнение приводится к виду $x^2 = -\frac{c}{a}$. Если числа a и c одного знака, то выражение $-\frac{c}{a}$ отрицательно, и уравнение не имеет решений. Если же числа a и c

разных знаков, то выражение $-\frac{c}{a}$ положительно, и уравнение имеет два решения:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}. \text{ Эти два решения обычно записывают в виде } x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}. \text{ Если}$$

$c = 0$, то выражение $-\frac{c}{a}$ равно нулю, и уравнение имеет единственное решение: $x = 0$.

Если коэффициент c (или, как его ещё называют, *свободный, или младший член*) равен нулю, то неполное квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$. Левая часть уравнения раскладывается на множители: $x(ax + b) = 0$. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из его множителей равен нулю. Поэтому уравнение распадается на два линейных уравнения: $x = 0$ и $ax + b = 0$, и оно имеет два решения: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$. Эти два решения совпадают, если $b = 0$, то есть если исходное уравнение имеет вид $ax^2 = 0$.

Итак, оказывается, имеющихся у нас знаний хватает, чтобы решать неполные квадратные уравнения.

Обобщим полученные случаи решения неполных квадратных уравнений в таблице.

Коэффициенты			Неполное квадратное уравнение	Решение
$a \neq 0$	$b \neq 0$	$c = 0$	$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$	$x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$
$a \neq 0$	$b = 0$	$c \neq 0$	$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$	1) Если числа a и c одного знака, то $\emptyset$. 2) Если числа a и c разных знаков, то $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$
		$c = 0$	$ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$	$x = 0$

Пример.

Решить уравнения:

а) $3x^2 = 0$; б) $4x^2 - 16 = 0$; в) $-5x^2 + 6 = 0$; г) $7x^2 + 1 = 0$; д) $6x^2 + 2x = 0$.

Решение:

а) $3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

б) $4x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ или $x = -2$.

Ответ: $\{-2; 2\}$.

в) $-5x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 1,2 \Leftrightarrow x = \sqrt{1,2}$ или $x = -\sqrt{1,2}$.

Ответ: $\{-\sqrt{1,2}; \sqrt{1,2}\}$.

г) $7x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{7}$.

Ответ: $\emptyset$.

д) $6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$ или $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\{0; -\frac{1}{3}\}$.

Итак, с решением неполных квадратных уравнений мы разобрались. Попробуем теперь решить полные квадратные уравнения, полученные нами ранее при решении задач.

Естественно попытаться свести их решение к известным нам способам действий. Так, в левой части уравнения $x^2 + 9,5x - 210 = 0$ можно выделить полный квадрат, и тогда решение данного уравнения сведётся к рассмотренным выше случаям неполных квадратных уравнений:

$$\begin{aligned} x^2 + 9,5x - 210 &= x^2 + 2 \cdot 4,75x + 4,75^2 - 4,75^2 - 210 = \\ &= (x^2 + 2 \cdot 4,75x + 22,5625) - 232,5625 = (x + 4,75)^2 - 15,25^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x^2 + 9,5x - 210 = 0 \Leftrightarrow (x + 4,75)^2 - 15,25^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 4,75)^2 = 15,25^2.$$

Квадраты чисел равны, если числа равны или противоположны, значит:

$$(x + 4,75)^2 = 15,25^2 \Leftrightarrow x + 4,75 = 15,25 \text{ или } x + 4,75 = -15,25 \Leftrightarrow x = -20 \text{ или } x = 10,5.$$

Эти же корни мы могли получить и другим известным нам способом, например раскладывая трёхчлен на множители методом группировки. В любом случае, первый корень не удовлетворяет условию задачи, поэтому ширина участка равна 10,5 м. Значит, его длина равна $10,5 + 9,5 = 20$ м, а периметр $2(10,5 + 20) = 61$ м.

По условию, на калитку выделен 1 м, значит, длина сетки составит $61 - 1 = 60$ м.

Ответ: нужно приобрести 60 м сетки.

* * *

Для решения уравнения $80x^2 - 162(384 \cdot 10^3)x + 81(384 \cdot 10^3)^2 = 0$ вернёмся к предыдущему его виду $x^2 = 81(d - x)^2$. Мы видим, что и в данном случае обе части уравнения представляются в виде полного квадрата, что позволяет нам, как и в предыдущем случае, упростить поиск его корней:

$$x^2 = 81(d - x)^2 \Leftrightarrow x^2 = [9(d - x)]^2 \Leftrightarrow x = 9d - 9x \text{ или } x = -9d + 9x \Leftrightarrow x = \frac{9}{10}d \text{ или } x = \frac{9}{8}d.$$

Таким образом, уравнение имеет два решения: $x_1 = \frac{9}{10}d$ и $x_2 = \frac{9}{8}d$, то есть $x_1 = 354,6 \cdot 10^3$ км, $x_2 = 432 \cdot 10^3$ км.

Возникает вопрос, откуда взялось второе решение – ведь из рис. 1 вроде бы ясно, что $x < d$. Оказывается, второе решение соответствует другой картинке (рис. 2).

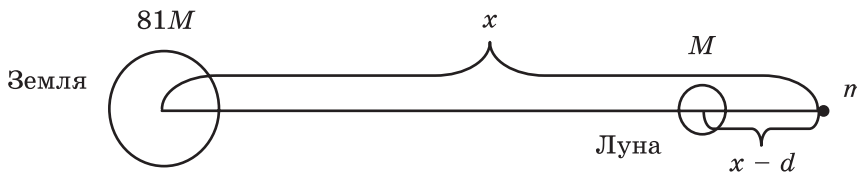


Рис. 2

Ситуацию, изображённую на рис. 2, мы сразу не предвидели, но «умные» формулы решили всё за нас (так, кстати, бывает довольно часто). Дело в том, что точка равного притяжения может находиться как *на отрезке*, соединяющем центры Земли и Луны, так и *вне отрезка*, на расстоянии $x = 432 \cdot 10^3$ км от центра Земли и на расстоянии $x - d = 48 \cdot 10^3$ км от центра Луны (то есть «по ту сторону Луны»). При этом $(x - d)^2 = (d - x)^2$, и эта точка является таким же полным решением уравнения $x^2 = 81(d - x)^2$, как и первая.

Найдём расстояние до Луны для двух установленных случаев, оно вычисляется по формулам: $d - x_1 = 38,4 \cdot 10^3$ км и $x_2 - d = 48 \cdot 10^3$ км.

Заметим, что в первом случае силы притяжения к Земле и Луне одинаковы и направлены в противоположные стороны. Поэтому если бы на тело в искомой точке не действовали бы никакие «третьи» силы, то оно «зависло» бы между Землей и Луной. Во втором случае силы притяжения Земли и Луны направлены в одну сторону, и поэтому такого «зависания» возникнуть не могло бы.

Ответ: расстояния от искомой точки до центров Земли и Луны равны, соответственно, $345,6 \cdot 10^3$ км и $38,4 \cdot 10^3$ км, или $432 \cdot 10^3$ км и $48 \cdot 10^3$ км.



Как видим, уже сегодня мы можем решить, вообще говоря, любое квадратное уравнение. Но пока наше решение полных квадратных уравнений достаточно трудоёмкое – например бывает не так просто выделить из трёхчлена полный квадрат, да и с удобными коэффициентами «везёт» далеко не всегда. Поэтому мы, вслед за математиками XVII века, займёмся в последующем поиском более надёжных и быстрых способов решения полных квадратных уравнений.

К

174 Расположите значения выражений в порядке возрастания:

Е	$(-1)^2$
---	----------

Н	$(\sqrt{2})^2$
---	----------------

И	$\sqrt{5}$
---	------------

У	-2^2
---	--------

Р	-1^2
---	--------

Е	$\sqrt{(-3)^2}$
---	-----------------

А	$-\left(\frac{1}{10}\right)^2$
---	--------------------------------

Н	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
---	------------------------------

В	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$
---	------------------------------

- 1) Сформулируйте определение получившегося понятия. Приведите примеры.
- 2) Сформулируйте определение корня уравнения. Выясните, какие числа из множества $A = \{-6; -\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}; 6; 8\}$ являются корнями уравнений:

а) $x(x-6)=0$; б) $x(x-8)=0$; в) $x^2=0$; г) $x^2=36$; д) $x^2=2$.

175

Представьте многочлен в виде произведения:

а) $16x-4$; б) $5x^2+x$; в) $2x^2-14x$.

Какой способ вы применили?

176

Даны уравнения:

а) $x^2+2x+7=0$,	б) $-x-3=0$,	в) $0,7x-14=0$,
$3x+1=0$,	$-x^2-x-1=0$,	$1,2x+60=0$,
$4+5x=0$;	$2-x=0$;	$0,2x^2-0,1x+32=0$.

- 1) Определите, какое уравнение в каждом столбике является «лишним».
- 2) Запишите эти уравнения в общем виде. Как бы вы предложили назвать уравнения данного вида? Почему? Дайте определение уравнений указанного вида.
- 3) Сравните свое определение с определением на с. 45 учебника.

177

Назовите коэффициенты квадратных уравнений:

а) $10x^2+x-0,2=0$; б) $2x^2+14x=0$; в) $0,2x^2-1=0$; г) $x^2=0$.

Что общего у всех этих квадратных уравнений? Чем отличаются три последних уравнения от первого? Как бы вы предложили назвать уравнения данного вида? Сопоставьте свой вариант с общепринятым названием, указанным на с. 45 учебника.

178

1) Назовите коэффициенты неполных квадратных уравнений:

а) $-2x^2=0$; б) $x^2-25=0$; в) $x^2-3=0$; г) $12x^2+48=0$; д) $-10-0,1x^2=0$.

Какое свойство является общим для всех уравнений? Какое уравнение отличается от всех остальных?

2) Предложите свой способ решения этих неполных квадратных уравнений. Сравните его со способом, предложенным на с. 46 учебника.

179 1) Назовите коэффициенты неполных квадратных уравнений:

а) $2x^2 - 14x = 0$; б) $-0,5x^2 + x = 0$.

2) Какое свойство является общим для всех уравнений?

3) Как нужно преобразовать левую часть уравнения, чтобы можно было применить известный способ решения?

4) Предложите свой способ решения этих неполных квадратных уравнений. Сравните его со способом, предложенным на с. 46 учебника.

180 Решите уравнение:

а) $4x^2 = 0$; б) $4x^2 + 4 = 0$; в) $4x^2 - 4 = 0$.

181 Решите уравнение:

а) $4x^2 + x = 0$; б) $x^2 + 4x = 0$; в) $x^2 - 9x = 0$.

182 Решите уравнение, используя подходящую замену неизвестного:

а) $x^4 - 3x^2 = 0$; б) $5x^4 + 3x^2 = 0$; в) $3x^2 - |x| = 0$; г) $2x^2 + 8|x| = 0$.

183 Решите уравнение:

а) $(-4x)^2 = 0$; б) $(3x + 3)^2 = 36$; в) $(1 - x)^2 = 2$; г) $(1 - 5x)^2 = -49$;

б) $(x - 4)^2 = 0$; г) $2(x - 7)^2 = 32$; е) $(2x + 4)^2 = 8$; з) $-4(1 - x)^2 = 3$.

На какие группы можно разбить эти уравнения?

π

184 Вынесите за скобки множитель a :

а) $2ax^2 + 3ax + 4a$; б) $ax^2 + ax + a$; в) $ax^2 + ax + 1$; г) $ax^2 + bx + c$.

Д

185 Решите уравнение:

а) $5x^2 = 0$; б) $5x^2 + 45 = 0$; в) $5x^2 - 45 = 0$.

186 Решите уравнение:

а) $5x^2 + x = 0$; б) $x^2 + 5x = 0$; в) $x^2 - 25x = 0$.

187 Решите уравнение, используя подходящую замену переменной:

а) $x^4 - 2x^2 = 0$; б) $2x^4 + 3x^2 = 0$; в) $x^2 - |x| = 0$; г) $3x^2 + 12|x| = 0$.

188 Решите уравнение:

а) $(3x)^2 = 81$; б) $(2x + 3)^2 = 25$; в) $(1 - x)^2 = 11$; г) $(1 - 5x)^2 = -9$.

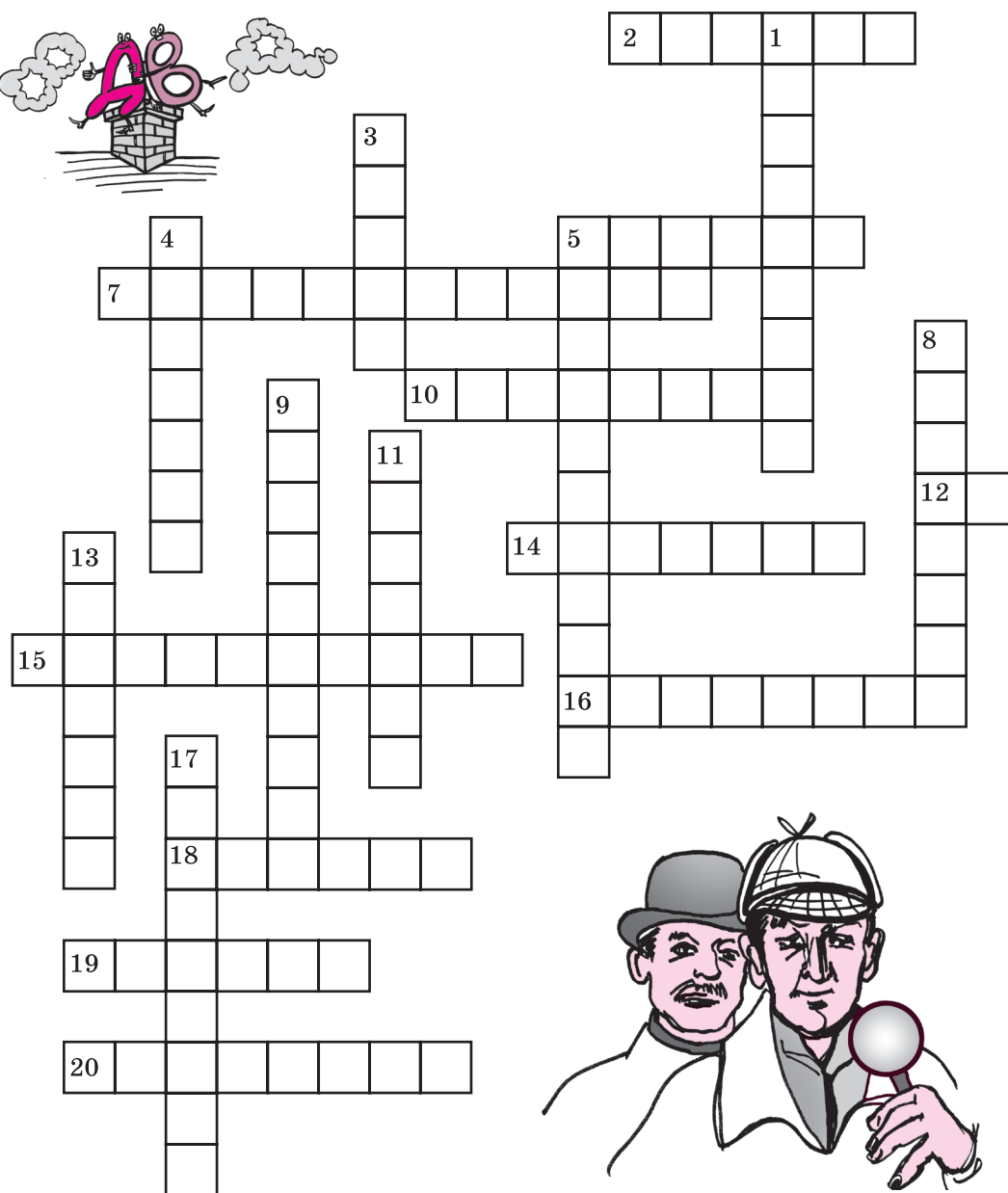
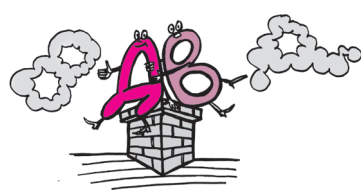
189 Разгадайте кроссворд:

По горизонтали:

2. Расстояние от начала отсчёта до точки, обозначающей данное число. 5. Двенадцать. 7. Название условия B , если высказывание $A \Rightarrow B$ истинно. 10. Утверждение: «Элемент m принадлежит множеству M в том и только в том случае, когда для m выполняется условие B , то есть $m \in M \Leftrightarrow B$ ». 12. 100 м^2 . 14. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. 15. Высказывание « A или B », которое истинно, когда хотя бы одно из высказываний A и B истинно, и ложно, когда A и B одновременно ложны. 16. Название одной из координат точки на координатной плоскости. 18. График уравнения $ax + by = c$. 19. Это есть у дерева и у уравнения. 20. Утверждение: «Для каждого элемента m из множества M выполняется утверждение B , то есть: $m \in M \Rightarrow B$ ».

По вертикали:

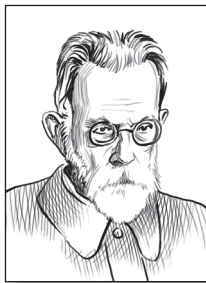
1. Равенство, верное при некоторых значениях букв. 3. 10^{100} . 4. Это есть у горы и параболы. 5. Название условия A , если высказывание « $A \Rightarrow B$ » истинно. 8. Название графика функции $y = x^2$. 9. Высказывание « A и B », которое истинно, когда A и B одновременно истинны, и ложно, когда хотя бы одно из высказываний A и B ложно. 11. Правило f , по которому каждому элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y . 13. Наименьшее натуральное число. 17. Название графика обратной пропорциональности.



190*

Один из корней уравнения $x^2 + ax + b = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найдите a и b , если известно, что они рациональны.

4.1.2. Формулы корней квадратного уравнения



Я вполне сознаю, что могу увлечься ложным, обманчивым, пойти по пути, который заведёт меня в дебри; но я не могу не идти по нему... И это искание, это стремление есть основа всякой научной деятельности.

В. И. Вернадский (1863–1945),
мыслитель, естествоиспытатель, минералог и кристаллограф,
основоположник геохимии, биогеохимии

При решении квадратных уравнений ранее мы использовали различные «ухищрения»: на множестве натуральных чисел пользовались методом перебора, на множестве рациональных чисел – использовали различные способы разложения на множители, замечали особенности коэффициентов, сводили решение полного квадратного уравнения к неполному, выделяя квадрат из трёхчлена и др. В данном пункте мы построим общие формулы, которые, как и любые универсальные способы действий, помогут нам быстрее и проще исследовать и решать любые квадратные уравнения независимо от их коэффициентов.

Для вывода общих формул корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) используем способ выделения полного квадрата так же, как мы делали это раньше для уравнений с числовыми коэффициентами. Тогда его решение сведётся к решению неполного квадратного уравнения, которое нам уже известно.

Выделим из трёхчлена $ax^2 + bx + c$ в левой части уравнения полный квадрат:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c = \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Таким образом, наше квадратное уравнение принимает вид неполного квадратного уравнения относительно $x + \frac{b}{2a}$:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0.$$

Перенесём свободный член полученного неполного квадратного уравнения вправо от знака равенства, а затем разделим обе его части на коэффициент a ($a \neq 0$):

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \Leftrightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Проанализируем полученное уравнение. Количество его корней зависит от знака числа, стоящего справа от знака равенства, то есть от дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Мы замечаем так-же, что знаменатель этой дроби всегда положителен, и значит, знак дроби совпадает со знаком числителя:

$$b^2 - 4ac$$

Таким образом, знак числа $b^2 - 4ac$ играет ключевую роль в исследовании количества корней квадратного уравнения. Поэтому ему дали специальное название – *дискриминант*, и обозначили буквой D .

Определение 1. Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом квадратного уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Сам термин «дискриминант» ввел английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр сравнительно недавно – в XIX веке, образовав его от латинского *discriminar*, что в переводе означает «разбирать», «различать». И действительно, знак дискриминанта D позволяет нам выделить все возможные случаи решения квадратного уравнения.

Вернёмся к полученному нами в результате равносильных преобразований уравнению $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. В зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ возможны три случая.

Случай 1. $D < 0$.

Если $D < 0$, то в правой части данного уравнения стоит отрицательное число, а в левой – неотрицательное. Поэтому равенство $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$, не выполняется ни при каких значениях x , и уравнение не имеет корней.

Случай 2. $D = 0$.

Если $D = 0$, то наше уравнение приобретает вид:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Значит, в данном случае уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Отметим, что $D = 0$ в том и только том случае, когда квадратный трёхчлен в левой части уравнения с точностью до числового множителя является полным квадратом линейного выражения вида $kx + m$.

Случай 3. $D > 0$

Если $D > 0$, то правую часть нашего уравнения можно записать в виде квадрата числа: $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2} = \frac{(\sqrt{D})^2}{(2a)^2} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$. Таким образом, мы имеем следующую цепочку равносильных преобразований:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

(запись $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$ означает, что $x + \frac{b}{2a} = +\frac{\sqrt{D}}{2a}$ или $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}$).

Итак, в случае $D > 0$ квадратное уравнение имеет два различных корня.

Общая формула корней квадратного уравнения

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Заметим, что эта формула верна и в случае $D = 0$, если считать, что $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. В этом случае говорят, что уравнение имеет один корень или два равных, совпавших корня. Их значения можно получить по общим формулам корней:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Зная общую формулу, при решении квадратного уравнения каждый имеет две возможности: либо запомнить формулу и получать корни простой подстановкой (при $D > 0$), либо каждый раз выделять полный квадрат. Естественно, разумнее первое, именно поэтому поиск формулы шёл в науке на протяжении многих столетий.

Попробуем по данной формуле решить уравнение $-123x^2 - 246x - 123 = 0$. Однако прежде чем его решать, заметим, что мы можем его упростить:

$$-123x^2 - 246x - 123 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Таким образом, мы смогли избежать громоздких вычислений. Поскольку в новом уравнении, равносильном исходному, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$,

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \text{ и } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1.$$

Поэтому мы можем сделать следующее *полезное замечание*: прежде чем решать квадратное уравнение, следует проверить, нельзя ли упростить его, разделив все его коэффициенты на общий числовой множитель. В частности, если старший коэффициент (то есть коэффициент при x^2) отрицателен, то целесообразно сменить знак у всех коэффициентов уравнения: вероятность вычислительных ошибок при $a > 0$ уменьшается.

Мы приходим к следующему *алгоритму решения квадратных уравнений*.

Алгоритм решения квадратных уравнений

1. Если можно, упростить уравнение, разделив все его коэффициенты на их общий числовой множитель.
2. Выписать значения коэффициентов a , b и c полученного уравнения.
3. Вычислить дискриминант уравнения по формуле $D = b^2 - 4ac$.
4. Сравнить значение дискриминанта с нулем.
5. Воспользоваться таблицей:

$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
Уравнение не имеет корней	Вычислить корень уравнения по формуле: $x = -\frac{b}{2a}$	Вычислить корни уравнения по формулам: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

6. Записать ответ.

Пример 1.

Решить уравнение $3x^2 - x + 1 = 0$.

Так как $a = 3$, $b = -1$, $c = 1$, то $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -11 < 0$. Уравнение не имеет корней.

Ответ: $\emptyset$.

Пример 2.

Решить уравнение $7x^2 - 28x + 28 = 0$.

Разделим обе части уравнения на 7, уравнение примет вид: $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Так как $D = 4^2 - 4 \cdot 3 = 0$, то уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$.

Ответ: $\{2\}$.

Пример 3.

Решить уравнения: а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $-2x^2 + 6x - 4 = 0$; в) $-x^2 + 7x - 5 = 0$.

$$a) x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$a = 1, b = -4, c = 4; D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0.$$

$$\text{Уравнение имеет два корня: } x_1 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3; x_2 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$

Ответ: {3; 1}.

$$б) -2x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = 2; D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0.$$

$$\text{Уравнение имеет два корня: } x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2; x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1.$$

Ответ: {2; 1}.

$$в) -x^2 + 7x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$a = 1, b = -7, c = 5; D = 49 - 4 \cdot 5 = 29 > 0.$$

$$\text{Уравнение имеет два корня: } x_1 = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}; x_2 = \frac{7 - \sqrt{29}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{7 + \sqrt{29}}{2}; \frac{7 - \sqrt{29}}{2} \right\}.$$

Договоримся для удобства такую пару чисел записывать так: $\left\{ \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2} \right\}$, понимая

под этим, естественно, запись, приведённую выше.

Мы видим, как использование построенных нами формул сократило трудоёмкость решения квадратных уравнений. В этом, по сути, и состоит предназначение математики: устанавливать общие законы, которые помогают быстрее и проще решать жизненно важные задачи, связанные с безопасностью, развитием, благополучием людей. А сам язык математики позволяет увидеть «лишние», бесполезные действия и исключить их из своего арсенала созидательных средств.

Такие «лишние» действия мы можем обнаружить в некоторых случаях даже при использовании формул корней квадратного уравнения. Так, если коэффициент b чётный, то есть $b = 2k$, то дискриминант равен: $D = b^2 - 4ac = (2k)^2 - 4ac = 4k^2 - 4ac$. Поэтому значение корней вычисляется так: $x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a}$.

Но это означает, что в случае чётного коэффициента b мы выполняем лишние действия, и вычисления можно упростить:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Значит, последняя формула позволяет оперировать меньшими числами и при этом избежать лишних операций: умножения ac на 4 и сокращения дроби на 2. Гораздо удобнее вычислить сразу «сокращённый» дискриминант $D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac$, а затем вести вычисления по последней формуле.

Поэтому для уравнений вида $ax^2 + 2kx + c = 0$ используются так называемые **формулы чётного коэффициента**.

**Формула корней квадратного уравнения
с чётным коэффициентом b**

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ где } b = 2k$$

Пример 4.

Решить уравнение $3x^2 - 16x + 5 = 0$.

$a = 3, k = -8, c = 5; D_1 = 64 - 3 \cdot 5 = 49 > 0$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{8 + \sqrt{49}}{3} = \frac{8+7}{3} = 5; x_2 = \frac{8 - \sqrt{49}}{3} = \frac{8-7}{3} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\{5; \frac{1}{3}\}$.

К

191 Выделите полный квадрат двучлена:

а) $x^2 - 6x + 8, x^2 + 18x - 19$;

б) $x^2 + x - \frac{3}{4}, 4x^2 + 3x - 1$;

в) $x^2 + 2bx + 1, ax^2 + x + 1, a \neq 0$.

Для чего можно использовать умение выделять полный квадрат?

192

Сколько корней имеет уравнение (a – некоторое заданное число)?

а) $x^2 = 0$; в) $x^2 = \frac{1}{25}$; д) $x^2 = \frac{1}{a^2}$;

б) $x^2 = 6$; г) $x^2 = -\frac{1}{25}$; е) $x^2 = \frac{-4}{|a|}$.

От чего зависит количество корней в этих уравнениях?

Какие случаи возможны?

193

Решите последовательно уравнения:

а) $x - 2 = -\frac{1}{2}$; б) $(x - 2)^2 = \frac{1}{4}$; в) $4(x - 2)^2 - 1 = 0$; г) $4x^2 - 16x + 15 = 0$.

Какое преобразование помогло свести последнее квадратное уравнение к известному случаю?

194

Используя результаты выполнения предыдущего задания, решите в общем виде уравнение $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$. При необходимости воспользуйтесь следующим планом:

1. Выделить полный квадрат двучлена в левой части.
2. После переноса дробного выражения вправо разделить обе части на старший коэффициент a . Выяснить, от чего будет зависеть количество корней полученного уравнения.
3. Предложить название для числа $b^2 - 4ac$. Сопоставить своё предложение с названием этого числа на с. 52.
4. Продолжить решение квадратного уравнения, рассмотрев три случая: дискриминант отрицателен ($D < 0$); дискриминант равен нулю ($D = 0$); дискриминант положителен ($D > 0$).

Сравните свои результаты с формулами на с. 52.

195

Определите, сколько корней имеет каждое из уравнений?

а) $3x^2 + 9x + 7 = 0$; в) $3x^2 + 9x - 7 = 0$; д) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; ж) $4x^2 + 4x - 1 = 0$;
 б) $3x^2 - 9x + 7 = 0$; г) $3x^2 - 9x - 7 = 0$; е) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; з) $4x^2 - 4x - 1 = 0$.

196 Решите уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$, используя новые формулы. Предложите свой алгоритм решения произвольного квадратного уравнения с помощью формул и сравните его с алгоритмом, приведённым на с. 53.

197 Решите уравнение $3x^2 + 5x - 2 = 0$ с помощью выделения полного квадрата, с помощью нового алгоритма. Какой из способов вам кажется более удобным?

198 Решите квадратное уравнение:

- а) $6x^2 - x - 1 = 0$; в) $3x^2 - 5x + 1 = 0$; д) $x^2 - x + 1 = 0$;
б) $-x^2 + 8x - 16 = 0$; г) $2x^2 - 12x + 12 = 0$; е) $2x - x^2 - 6 = 0$.

199 1) Сравните второй коэффициент данных уравнений, что в них общего?

- а) $x^2 - 2x - 8 = 0$; б) $x^2 + 8x + 7 = 0$; в) $3x^2 - 6x + 11 = 0$; г) $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

2) Запишите эти уравнения в общем виде. Выведите формулу корней квадратного уравнения с чётным коэффициентом b . Сопоставьте свои результаты с выводом формул на с. 54. Какие из указанных в учебнике преобразований вам удалось выполнить самостоятельно? Решите уравнения по этой формуле.

200 Какие из уравнений № 198 можно решить, применяя формулу корней квадратного уравнения с чётным коэффициентом b ? Решите их. При использовании какой из формул корней вам пришлось оперировать меньшими числами?

201 Решите уравнение:

- а) $y^2 + 1 = -2,5y$; в) $3(x^2 - 2x + 4) - 2 = 4(x + 2)$;
б) $x(x - 3) = 10$; г) $(2x - 2)(3 - x) + (x + 2)^2 = 5(x + 3)(3 - x) - 31$.

202 Решите уравнение:

- а) $3x^2 - 5\pi x + 6\pi^2 = 0$; б) $9x^2 - 6\sqrt{5}x + 2 = 0$; в) $x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$.

π 203 Запишите высказывания на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите истинные высказывания, для ложных – постройте их отрицания.

- а) Среди корней уравнения $6x^2 - 96 = 0$ есть отрицательное число.
б) Все корни уравнения $144 - x^2 = 0$ кратны 6.
в) Каждый корень уравнения $x^2 - 10 = 0$ имеет делитель, равный 5.
г) Некоторые корни уравнения $12x^2 - 108x = 0$ – составные числа.
д) Все решения уравнения $-5x^2 = 0$ являются элементами натурального ряда чисел.
е) Некоторые корни уравнения $2x^2 + 14 = 0$ при делении на 2 в остатке дают 1.
ж) Среди уравнений $x^2 - 121 = 0$; $5x^2 + 125 = 0$; $8x^2 - 64x = 0$; $36 - x^2 = 0$ есть такие, сумма корней которых равна нулю.
з) Каждый корень уравнения $3x^4 + 2x^2 = 0$ является рациональным числом.

204 Выясните, сколько решений имеет данная система в зависимости от значения параметра a , и решите её:

- а) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + ay = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x + ay = 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$.

205 Решите системы неравенств:

- а) $\begin{cases} 3x - 5 \geq 4 \\ 9 - 2x > -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3 - 3x \geq -2 \\ 4x - 3 > 2 \\ 6 + x \leq 4x + 2 \end{cases}$.

206 Решите совокупность неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ -5x-1 < 14 \end{cases}; & \text{б) } \begin{cases} 4x-4 > 8 \\ 5x-5 < 10 \\ -x+1 \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

207

а) Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0; \\ g(x), & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Задайте $g(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ являлась нечётной.

б) Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x > 0; \\ h(x), & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Задайте $h(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ являлась чётной.

Д

208 Решите уравнения:

$$\text{а) } 3x^2 - 5x + 2 = 0; \quad \text{б) } x^2 + 7x - 30 = 0; \quad \text{в) } 3x^2 - 20x - 52 = 0; \quad \text{г) } 5x^2 + 9x - 14 = 0.$$

209

Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x(x-10) = -24; & \text{в) } (3x-7)(x+2) = (x-3)(x+5); \\ \text{б) } 2(2x^2+5) = x; & \text{г) } (2y-2)(y-3) - 18 = (y-6)(y+3). \end{array}$$

210

Из неравенств $x(x+2) < x^2 - 4$ и $-2,1x + 3,3 < 2,1 - 1\frac{2}{5}x$ составьте и решите:

а) систему; б) совокупность.

С

211* Верно ли, что если квадратные уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ не имеют корней, то и уравнение $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = 0$ также не имеет корней?

212*

Даны действительные числа x, y, z . Докажите, что одно из чисел $x^2 + 2xy + z^2$, $y^2 + 2yz + x^2$, $z^2 + 2zx + y^2$ неотрицательно.

213*

На доске написали квадратное уравнение с положительным коэффициентом при x^2 . Каждую минуту на доске дописывают новое квадратное уравнение, причём у каждого следующего уравнения все три коэффициента на 1 больше соответствующих коэффициентов предыдущего. Докажите, что когда-нибудь на доске появится квадратное уравнение, не имеющее корней.

214*

Известно, что разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 2013. Сколько корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?

215*

Известно, что у каждого из уравнений $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$, $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$, $a_3x^2 + b_3x + c_3 = 0$ есть хотя бы один действительный корень. Может ли так оказаться, что ни у одного из уравнений $(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2 = 0$, $(a_2 + a_3)x^2 + (b_2 + b_3)x + c_2 + c_3 = 0$, $(a_3 + a_1)x^2 + (b_3 + b_1)x + c_3 + c_1 = 0$ нет действительных корней?

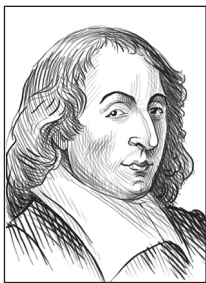
216*

Пусть $P(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что уравнение $P(x) = 0$ имеет два различных корня. Сколько корней может иметь уравнение $P(x) + P(x + \sqrt{D}) = 0$?

217*

Дискриминанты трёх квадратных уравнений с единичным коэффициентом при x^2 равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

4.1.3. Решение уравнений, сводящихся к квадратным



Доводы, до которых человек додумывается сам, обычно убеждают его больше, нежели те, которые пришли ему в голову другим путём.

Блез Паскаль (1623–1662), французский математик, физик, литератор, философ

Формулы корней квадратного уравнения, полученные нами в предыдущем пункте, можно применять для гораздо более широкого класса уравнений – для тех уравнений, которые сами по себе квадратными не являются, но могут быть сведены к квадратным с помощью замены переменных.

Решим, например, уравнение $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$. Оно напоминает нам квадратное уравнение, и после замены $x^2 = t$ мы получим квадратное уравнение $2t^2 - 3t + 1 = 0$.

Дискриминант полученного уравнения $D = 9 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$, значит, оно имеет два корня: $t_1 = \frac{3+1}{4} = 1$, $t_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$.

Теперь необходимо вернуться к «старой» переменной. Если $t = x^2 = 1$, то $x = \pm 1$; если $t = x^2 = \frac{1}{2}$, то $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Значит, исходное уравнение имеет четыре корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Уравнения, подобные этому, встречаются довольно часто и поэтому имеют свое название.

Определение 1. Уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называется **биквадратным уравнением**.

Этот термин образован с помощью латинской приставки bi, которая означает двойное, двукратное, его дословный перевод звучал бы как «дважды квадратное».

Пример 1.

Решить уравнения:

а) $x^4 - x^2 - 12 = 0$; б) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$; в) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.

Решение:

а) $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

Пусть $x^2 = t$, тогда $t^2 - t - 12 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 12 = 49 > 0$.

Уравнение имеет два корня: $t_1 = \frac{1+\sqrt{49}}{2} = 4$, $t_2 = \frac{1-\sqrt{49}}{2} = -3$.

Вернемся к переменной x . Так как $t = x^2 \geq 0$, корень $t = -3$ не подходит. Если $t = x^2 = 4$, то $x = \pm 2$.

Ответ: $\{2; -2\}$.

б) $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$.

Пусть $x^2 = t$, тогда $t^2 + 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Leftrightarrow x^2 = -2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-2}$.

Ответ: $\{\sqrt{-2}; -\sqrt{-2}\}$.

в) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.

Пусть $x^2 = t$, тогда $t^2 + 3t + 2 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$.

Уравнение имеет два корня:

$$t_1 = \frac{-3+1}{2} = -1, \quad t_2 = \frac{-3-1}{2} = -2.$$

Так как $t = x^2 \geq 0$, исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: $\emptyset$.

Пример 2.

Решить уравнение $5x^2 - 6|x| + 1 = 0$.

Решение:

Пусть $|x| = t$, при этом $|x|^2 = x^2 = t^2$. Тогда $5t^2 - 6t + 1 = 0$, $D_1 = 9 - 5 = 4 > 0$.

Уравнение имеет два корня:

$$t_1 = \frac{3+2}{5} = 1, \quad t_2 = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Вернемся к переменной x . Если $t = |x| = 1$, то $x = \pm 1$; если $t = |x| = \frac{1}{5}$, то $x = \pm \frac{1}{5}$.

Ответ: $\{1; -1; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\}$.

Пример 3.

Решить уравнение $(x^2 + x + 1)^2 - 2(x^2 + x + 1) - 3 = 0$.

Решение:

Пусть $x^2 + x + 1 = y$, тогда $y^2 - 2y - 3 = 0$, $D_1 = 1 - (-3) = 4 > 0$.

Уравнение имеет два корня:

$$y_1 = \frac{1+2}{1} = 3, \quad y_2 = \frac{1-2}{1} = -1.$$

Вернемся к переменной x . Возможны два варианта:

1) Если $y = x^2 + x + 1 = 3$, то $x^2 + x + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$.

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9 > 0, \quad x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2.$$

2) Если $y = x^2 + x + 1 = -1$, то $x^2 + x + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0$.

$D = 1 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$, уравнение не имеет корней.

Ответ: $\{1; -2\}$.

Сформулируем теперь в общем виде *метод замены переменной* для решения уравнений, сводящихся к квадратным.

Метод замены переменной

для решения уравнений, сводящихся к квадратным

1. Определить, какое выражение нужно обозначить новой переменной, чтобы получить квадратное уравнение.
2. Решить полученное уравнение относительно новой переменной.
3. Вернуться к «старой» переменной, приравнявая выражение, выбранное в пункте 1, к найденным значениям новой переменной.
4. Решить полученное уравнение (уравнения) относительно «старой» переменной.

Опыт решения предыдущих уравнений в рассмотренных примерах позволяет нам сформулировать несколько полезных подсказок.

Подсказки

- Любое биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$ при помощи замены $x^2 = t$ (при этом $t \geq 0$).
- Уравнение вида $ax^2 + b|x| + c = 0$ сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$ при помощи замены $|x| = t$ (при этом $t \geq 0$).
- Часто помогает замена новой переменной повторяющегося выражения.

Несмотря на высокую абстрактность математических теорий, они удивительным образом оказываются полезными в практической деятельности для людей самых разных специальностей – от учёных, инженеров, исследователей до художников, поэтов, музыкантов. Например, строителю, геологу, альпинисту может потребоваться приблизительно узнать глубину ущелья или шахты, непосредственное измерение которой недоступно. И тогда на помощь придут знания из школьного курса физики и умение решать квадратные уравнения.

Пример 4.

Камень падает без начальной скорости на дно вертикальной шахты. Определить глубину шахты, если звук от удара камня о её дно слышен через 6 секунд. Скорость звука в воздухе считать равной 330 м/с, сопротивлением воздуха при падении камня пренебречь.

Решение:

1) Обозначим глубину шахты h метров, $h > 0$.

2) Если время падения камня равно t_1 секунд, то из курса физики известно, что $h = \frac{gt_1^2}{2}$, где g – ускорение свободного падения. Выразим из этого равенства t_1 .

$$h = \frac{gt_1^2}{2} \Leftrightarrow 2h = gt_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_1 = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Так как время не может быть отрицательным, выберем $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

3) Пусть время, в течение которого звук от удара дойдёт до наблюдателя, равно t_2 секунд. Тогда $t_2 = \frac{h}{v}$, где v – скорость звука.

4) По условию $t_1 + t_2$ составляет 6 секунд, то есть $\frac{h}{v} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6$.

Подставим в полученное равенство известные данные $v = 330$ м/с, $g = 9,8$ м/с², получим уравнение с переменной h :

$$\frac{h}{330} + \sqrt{\frac{2h}{9,8}} = 6.$$

5) Для решения полученного уравнения используем способ введения нового неизвестного. Пусть $\sqrt{h} = x$, тогда $h = x^2$ и наше уравнение примет вид квадратного:

$$\frac{x^2}{330} + \sqrt{\frac{2}{9,8}}x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{\frac{2}{9,8}} \cdot 330x - 330 \cdot 6 = 0$$

Последнее уравнение приближенно можно записать: $x^2 + 149x - 1980 = 0$.

$D = 149^2 + 1980 \cdot 4 = 30121 > 0$, $\sqrt{D} \approx 173,6$.

Уравнение имеет два решения: $x_1 \approx \frac{-149 + 173,6}{2} = 12,3$; $x_2 \approx \frac{-149 - 173,6}{2} = -161,3$.

Вернемся к переменной h . Так как $x = \sqrt{h}$, то получим два уравнения:

$$\sqrt{h} = 12,3 \text{ и } \sqrt{h} = -161,3.$$

1) $\sqrt{h} = 12,3 \Leftrightarrow h = (12,3)^2 \approx 151$ метр.

2) $\sqrt{h} = -161,3$. Уравнение не имеет решения, так как значение арифметического квадратного корня по определению не может быть отрицательным.

Ответ: глубина шахты приблизительно равна 151 м.

Уточним, что эта задача решена нами на «физическом уровне строгости». Если же требуется найти «математически точное решение», то никакие округления не допустимы.

К

218 Представьте в виде квадрата: а) 9; б) 5; в) m^4 ; г) n^8 ; д) a^6 . Какие определения, свойства вы использовали?

219

Решите устно:

а) $x^2 = 16$;

б) $x^2 = 10$;

в) $x^2 = 0$;

г) $x^2 = -4$.

Корни какого из этих уравнений: 1) противоположны друг другу; 2) отсутствуют; 3) иррациональны?

220

Составьте пары из равносильных уравнений:

1) $(x^2)^2 = 81$; $x^4 = 81$; $x = 3$; $x = \pm 3$.

2) $|x|^2 = 2$; $x^2 = 2$; $|x| = 2$; $x = 2$.

3) $|x|^2 - 2|x| + 1 = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $x^2 - 2|x| + 1 = 0$.

221

1) Сопоставьте уравнения $x^4 - x^2 - 12 = 0$ и $t^2 - t - 12 = 0$. Что интересного вы замечаете? Алгоритм решения какого из этих уравнений вам уже известен? Предположите, как второе уравнение может помочь найти корни первого.

2) Предложите замену, которая приводит первое уравнение ко второму.

3) Попробуйте решить уравнение $x^4 - x^2 - 12 = 0$. Сравните свое решение с решением этого уравнения на с. 58.

222

Запишите эти уравнения в общем виде:

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0; \quad 3x^4 + 8x^2 - 11 = 0; \quad \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{12} = 0; \quad x^4 - 3x^2 = 0.$$

Как бы вы предложили назвать уравнения данного вида? Почему? Дайте определение уравнений указанного вида. Сравните свое определение с определением на с. 58 учебника.

223

1) Сопоставьте уравнения $5x^2 - 6|x| + 1 = 0$ и $5t^2 - 6t + 1 = 0$. Что интересного вы замечаете? Алгоритм решения какого из этих уравнений вам уже известен? Предположите, как второе уравнение может помочь найти корни первого.

2) Какой приём поможет перейти от первого уравнения ко второму?

3) Попробуйте решить уравнение $5x^2 - 6|x| + 1 = 0$. Сравните свое решение с решением этого уравнения на с. 61.

224

Решите уравнение: $(2x^2 - x + 2)^2 - 15(2x^2 - x + 2) + 36 = 0$.

1) Что интересного вы замечаете в записи этого уравнения?

2) Какой приём поможет привести данное уравнение к квадратному. Попробуйте решить это уравнение.

225 Какой приём объединяет решение уравнений № 221, № 223, № 224? Предложите свой метод решения уравнений, сводящихся к квадратным, а затем сравните его с методом, предложенным в учебнике на с. 59.

226 Решите биквадратное уравнение:

а) $5x^4 - 8x^2 + 3 = 0$; б) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$; в) $x^4 - 2x^2 + 8 = 0$; г) $2x^4 + 9x^2 - 5 = 0$.

227 Решите уравнение:

а) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$; б) $2x^2 + 3|x| - 9 = 0$; в) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$.

228 Сколько корней может быть у уравнения

$x^2 + p|x| + q = 0$?

229 Решите уравнение:

а) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$;

б) $(x^2 - 2x)^2 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$;

в) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$.

230 Решите уравнение:

$(x - 1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$.

231 Решите уравнение $(x^2 - x + 1)^2 - 10(x + 3)(x - 4) = 109$.

232 Решите уравнение $4x^4 + 3x^3 + 32x + 24 = 0$.

π

233 Решите уравнения. Вычислите сумму или произведение корней уравнения.

а) $(x - 3)(2x + 5) = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{П}$ н) $(x + 6)(3x - 5) = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{М}$

б) $(x + 3)^2 - 9 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{У}$ о) $(x - 5)^2 - 17 = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{К}$

в) $x^2 - 15 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{С}$ п) $x^2 - 8 = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{Р}$

г) $x^2 - 7x + 6 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{О}$ р) $2x^2 - x - 1 = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{Х}$

д) $x^2 + 5x - 6 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{Ж}$ с) $0,1x^2 + 0,6x + 0,5 = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{Т}$

е) $-x^2 - 2x + 8 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{Е}$ т) $x^2 - 6x + 2 = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{Ы}$

ж) $5x^2 - 11x + 2 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{З}$ у) $x^2 + 3\sqrt{5}x - 9 = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{Л}$

з) $3x^2 - 7x + 4 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{Б}$ ф) $2x^2 + 6x - 3 = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{Г}$

и) $42 - x^2 - x = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{Я}$ х) $x^2 - 10x + 12 = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{Д}$

к) $-3x^2 + 5x - 2 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{Й}$ ц) $4x^2 - \sqrt{7}x - 1 = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{Н}$

л) $-6x + x^2 - 16 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{Б}$ ч) $\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{5} = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{Ш}$

м) $4 - x^2 + 3x = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{И}$ ш) $\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{1}{3} = 0$; $x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{В}$

щ) $x^2 - 9x - 1 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow \text{А}$.

Сопоставив каждому результату букву, прочитайте обращение немецкого поэта Готхольда Лессинга (XVIII в.) к своим ученикам. А у вас есть свой девиз в учебной работе?

0	0,5	7	-8	$2\frac{1}{3}$	5	-2	7	0,6	3	6	9	$1\frac{2}{3}$	5	-2	0	$2\frac{1}{3}$

,

2,2	9	6	-9	-6	-5	12	9	$1\frac{2}{3}$	5	-2	0	$2\frac{1}{3}$	-0,25	7

,

-8	9	12	3	6	7	-1,5	9

,

-8	9	2,2	-10	2	0,6	-9	-1	$1\frac{2}{3}$	5	-2	3

,

-0,5	7	5	-1	8	-8	3	$-1\frac{1}{3}$	7	12	9	0	9	-10	3

!

234 Постройте график функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} 3x, & \text{если } x > 3; \\ 2x, & \text{если } -1 \leq x \leq 3; \\ \frac{2}{x}, & \text{если } x < -1 \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x \geq 2; \\ x, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ x+2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Д

235 Решите уравнение:

а) $3x^4 - 5x^2 - 2 = 0$; б) $x^4 + 7x^2 + 6 = 0$; в) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

236

Решите уравнение:

а) $9x^2 - 6|x| + 1 = 0$; в) $7x^2 + 2|x| - 5 = 0$;
 б) $3x^2 + 5|x| + 7 = 0$; г) $2x^2 - 5|x| + 2 = 0$.

237

Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x^2} - \frac{8}{x} - 4 = 0$; б) $\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{|x+1|} - 15 = 0$;
 в) $(x^2 - 3x)^2 - 13x^2 + 39x + 36 = 0$; г) $(x+2)^4 - 2x^2 - 8x - 32 = 0$.

с

238*

Найдите отношение двух положительных чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно 25: 24. (Средним арифметическим неотрицательных чисел a и b называется $\frac{a+b}{2}$, а средним геометрическим — $\sqrt{ab}$.)

4.1.4. Теорема Виета и обратная к ней теорема



То, что вы были вынуждены открыть сами, оставляет в вашем уме дорожку, которой вы можете снова воспользоваться, когда в этом возникнет необходимость.

Г.К. Лихтенберг (1742–1799),
выдающийся немецкий учёный и публицист

Мы владеем общими формулами корней квадратного уравнения, разобрались в том, когда и для чего они были созданы. Но в общих математических теориях иногда удаётся установить правила, которые позволяют при определённых условиях действовать быстрее и эффективнее. Так, разность $100\,255 - 99\,999$ можно вычислить по общему правилу письменно в столбик, а можно – моментально устно, выполнив действия $100\,255 - 100\,000 + 1 = 256$. Такие короткие и остроумные решения в математике называют *красивыми*, потому что они доставляют эстетическую радость тем, кто их использует, и особенно тем, кто придумывает. Вспомните, как бывает приятно сокращать «длинные» и «многоэтажные» дроби, заменяя их простыми и удобными.

В XVI веке французский математик Франсуа Виет открыл закономерности, которые нередко сокращают не только поиск корней квадратного уравнения, но и решение разнообразных алгебраических задач. Идея открытия, прославившего его имя, очень проста: выразить в общем виде сумму и произведение корней квадратного уравнения. Попробуйте повторить его открытие и сравните свой результат с формулировкой и доказательством теоремы, приведённой ниже.

Теорема Виета.

Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доказательство:

По общим формулам корней квадратного уравнения $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$.

Составим сумму и произведение корней x_1 и x_2 .

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} - \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) = \frac{(-b + \sqrt{D})(-b - \sqrt{D})}{2a \cdot 2a} = \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}, \quad \text{что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

Итак, *сумма корней квадратного уравнения равна отношению коэффициента при x к старшему коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение этих корней равно отношению свободного члена к старшему коэффициенту.*

Замечание. Обратим внимание, что в формулировке теоремы условие « x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ » подразумевает, что это уравнение имеет два корня (которые, в частности, могут быть совпадшими). Следовательно, $D \geq 0$, и поэтому специально оговаривать условие $D \geq 0$ не нужно.

Доказанная нами теорема существенно облегчает выполнение некоторых заданий.

Пример 1.

Найти сумму и произведение корней уравнения $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение:

Убедимся в том, что уравнение имеет корни, для этого вычислим его дискриминант. $D = 25 - 4 \cdot 3 = 13$, $D > 0$, значит, уравнение имеет корни.

$$a = 3, b = -5, c = 1, \text{ поэтому по теореме Виета } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}.$$

Отметим, что непосредственное вычисление корней уравнения потребовало бы от нас гораздо больших усилий: надо было бы найти корни $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$ и $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$, затем сложить и перемножить иррациональные числа. Теорема Виета позволила получить ответ практически сразу.

Использование теоремы Виета часто оказывается полезным и при работе с более сложными выражениями, составленными из корней квадратного уравнения.

Пример 2.

Для корней x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - 9x + 1 = 0$ найти значения выражений:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$.

Решение:

По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{9}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$. Поэтому:

$$\text{а) } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{4} - 1 = \frac{77}{4} = 19\frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right] = \\ &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \left(\frac{9}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{729}{8} - \frac{27}{4} = \frac{675}{8} = 84\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Теорема Виета применяется и во многих других заданиях. Например, она позволяет быстро находить второй корень квадратного уравнения, если первый легко угадывается или известен по каким-либо причинам. В самом деле, пусть x_1 – известный корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), тогда второй корень x_2 удобно найти из соотношений $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ или $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Пример 3.

Решить уравнения: а) $17x^2 - 23x + 6 = 0$; б) $35x^2 + 18x - 17 = 0$.

Решение:

а) $17x^2 - 23x + 6 = 0$.

Так как $17 - 23 + 6 = 0$, корнем данного уравнения является число $x_1 = 1$. Тогда из соотношения $x_1 x_2 = \frac{6}{17}$ находим: $x_2 = \frac{6}{17} : x_1 = \frac{6}{17} : 1 = \frac{6}{17}$.

$$б) 35x^2 + 18x - 17 = 0.$$

Так как $35 - 18 - 17 = 0$, корнем данного уравнения является число $x_1 = -1$. Тогда из соотношения $x_1 x_2 = -\frac{17}{35}$ находим: $x_2 = -\frac{17}{35} : x_1 = -\frac{17}{35} : (-1) = \frac{17}{35}$.

Итак, теорема Виета, установленная с помощью простого сложения и умножения общих формул корней квадратного уравнения, даёт нам красивые, быстрые решения самых разнообразных задач. Естественно выяснить, выполняется ли обратная теорема. И если да, то в заданиях какого типа она может быть полезна?

Теорема, обратная к теореме Виета.

Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, то эти числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Доказательство:

Так как $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, то $a \neq 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$. Подставим это выражение для x_2 в равенство $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Получим:

$$x_1 \left(-\frac{b}{a} - x_1 \right) = \frac{c}{a} \Leftrightarrow -ax_1^2 - bx_1 = c \Leftrightarrow ax_1^2 + bx_1 + c = 0.$$

Значит, число x_1 является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что число x_2 является корнем этого уравнения.

Замечание. В формулировке обратной теоремы также не нужно оговаривать, что $D \geq 0$. Дело в том, что если числа x_1 и x_2 удовлетворяют указанным соотношениям, то они являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Следовательно, числа a, b, c таковы, что это уравнение имеет корни, а значит, $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

Среди квадратных уравнений выделяются уравнения со старшим коэффициентом a , равным 1. Они имеют вид $x^2 + px + q = 0$ и называются *приведёнными* квадратными уравнениями.

Определение. Квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$, где p, q – некоторые числа, называют *приведённым квадратным уравнением*.

Любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) можно *привести* к виду $x^2 + px + q = 0$, разделив обе его части на a . Отсюда и название – «приведённое» квадратное уравнение.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0, \text{ где } p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}.$$

Таким образом, на основании теоремы Виета сумма корней приведённого квадратного уравнения равна $(-p)$, а произведение равно q .

Сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна коэффициенту при x с противоположным знаком, а произведение – свободному члену:

$$x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = q.$$

А по теореме, обратной теореме Виета:

Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то эти числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Поэтому при использовании теоремы Виета и теоремы, обратной к ней, работать с приведенными квадратными уравнениями гораздо удобнее.

Рассмотрим примеры заданий, при выполнении которых используется теорема, обратная к теореме Виета.

Пример 4.

Составить квадратное уравнение, имеющее два заданных корня: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

Решение:

Вычислим сумму и произведение корней квадратного уравнения: $x_1 + x_2 = 8$ и $x_1 x_2 = 15$. Значит, $p = -8$, $q = 15$, и по теореме, обратной теореме Виета, x_1 и x_2 являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Пример 5.

Решить квадратное уравнение $x^2 - 19x + 34 = 0$ устно.

Решение:

При таких коэффициентах устно вычислить корни уравнения по общим формулам достаточно сложно. Но мы можем их подобрать из соотношений:

$$x_1 + x_2 = -p = 19, x_1 x_2 = q = 34.$$

Этим условиям, очевидно, удовлетворяют числа $x_1 = 17$, $x_2 = 2$. Значит, по теореме, обратной теореме Виета, эти числа и будут являться корнями уравнения.

Данный способ решения квадратных уравнений может применяться в любом подобном случае: если удастся подобрать числа x_1 и x_2 , такие, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$, то эти числа по теореме, обратной теореме Виета, являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$. Однако, к сожалению, он не является универсальным даже для приведённых уравнений с целыми коэффициентами (уравнение может вообще не иметь корней, либо они могут быть иррациональными).

Рассмотрим задания, которые требуют применения как прямой, так и обратной теорем Виета.

Пример 6.

Уравнение $x^2 + 8x - 3 = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Составить уравнение, корнями которого являются числа $2x_1 + 3$ и $2x_2 + 3$.

Решение:

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -8$, $x_1 x_2 = -3$.

Тогда:

$$(2x_1 + 3) + (2x_2 + 3) = 2(x_1 + x_2) + 6 = -16 + 6 = -10,$$

$$(2x_1 + 3)(2x_2 + 3) = 4x_1 x_2 + 6(x_1 + x_2) + 9 = -12 - 48 + 9 = -51.$$

По теореме, обратной теореме Виета, искомое уравнение $x^2 + 10x - 51 = 0$.

Пример 7.

Доказать, что уравнение $x^2 + px + q = 0$, где $q < 0$, обязательно имеет два корня разного знака.

Доказательство:

Сначала оценим знак дискриминанта уравнения.

$$D = p^2 - 4q > 0, \text{ так как } p^2 \geq 0, -4q > 0.$$

Значит, уравнение имеет два различных корня. Произведение этих корней по теореме Виета равно $x_1 x_2 = q$, где по условию $q < 0$. Поэтому корни x_1 и x_2 должны обязательно иметь различный знак.



239 Выпишите коэффициенты квадратных уравнений:

$$3x^2 + 2x - 5 = 0; \quad x^2 - 6x - 91 = 0.$$

- 1) Для какого из этих уравнений значение выражения $-\frac{b+c}{a}$ равно 1?
 2) Сумма корней $x_1 + x_2$ какого из этих уравнений равна 6?

240

- 1) Заполните таблицу для коэффициентов и корней уравнения $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$

Сравните полученные в таблице значения. Что интересного вы замечаете?

- 2) Проведите подобные вычисления для какого-нибудь произвольного квадратного уравнения.

- 3) Сформулируйте гипотезу о свойствах корней квадратного уравнения и докажите её в общем виде. При необходимости воспользуйтесь следующим планом:

- 1) Записать корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в общем виде.
- 2) Найти сумму его корней.
- 3) Найти произведение его корней.
- 4) Сопоставить полученные выражения с коэффициентами уравнения.
- 5) Сверить свой вывод с теоремой Виета на с. 64.

241

Найдите сумму и произведение корней квадратного уравнения, если они существуют.

- а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $-x^2 - 7x + 8 = 0$; в) $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

242

Для корней x_1 и x_2 уравнения $5x^2 + 10x - 1 = 0$ найти значения выражений:

- а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$.

243

Запишите уравнения:

$x^2 - 3x - 10 = 0$; $x^2 + 4x - 12 = 0$; $x^2 - 11x + 28 = 0$; $x^2 + 16x + 15 = 0$
 в общем виде. Какое определение вы бы дали такому квадратному уравнению?
 Сопоставьте свой вариант с определением, предложенным на с. 66.

244

Представьте в виде приведённого квадратного уравнения:

- а) $2x^2 - 8x + 14 = 0$; б) $0,2x^2 + 4x - 1 = 0$; в) $2\frac{2}{3}x^2 - x - 10 = 0$.

245

Сформулируйте теорему Виета и теорему, обратную к ней, для приведённых квадратных уравнений. Сопоставьте свою формулировку с предложенной в учебнике на с. 66.

Решите уравнения из задания № 243, применяя теорему, обратную теореме Виета.

246

- 1) Решите устно уравнения:

- а) $x^2 + 99x - 100 = 0$; в) $-x^2 + 6x - 5 = 0$;
 б) $x^2 + 548x - 549 = 0$; г) $-x^2 - 7x + 8 = 0$.

- 2) Чему равна сумма коэффициентов в этих уравнениях? Проанализируйте корни, полученные вами в этих уравнениях. Сформулируйте гипотезу, исходя из своих наблюдений.

247 1) Решите устно уравнения:

а) $x^2 + 12x + 11 = 0$;

б) $3x^2 + x - 2 = 0$;

в) $x^2 + 7x + 6 = 0$.

2) Найдите сумму первого коэффициента и свободного члена и сопоставьте её со вторым коэффициентом. Что интересного вы замечаете? Проанализируйте корни, полученные вами в этих уравнениях. Сформулируйте гипотезу, исходя из своих наблюдений.

248 а) Докажите, что если для коэффициентов уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ выполняется равенство $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, а $x_2 = -\frac{c}{a}$.

б) Докажите, что если для коэффициентов уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ выполняется равенство $a + c = b$, то $x_1 = -1$, а $x_2 = -\frac{c}{a}$.

249 Используя, результаты выполнения предыдущего задания, решите устно уравнения:

а) $2x^2 + 3x - 5 = 0$;

в) $-35x^2 - 13x + 22 = 0$;

б) $1021x^2 - 2x - 1019 = 0$;

г) $\frac{6}{7}x^2 + x + \frac{1}{7} = 0$.

250 Найдите рациональный корень уравнения $x^2 + 2(1 + \sqrt{8})x + 8\sqrt{2} = 0$.

251 Можно ли число 15 представить в виде суммы двух чисел так, чтобы их произведение было равно а) 50; б) 60; в) 70?

252 При каких значениях x выражение $(x - 1)(x + 5)$ равно $(a - 1)(a + 5)$?

253 Не решая уравнений, определите знаки их корней, если они существуют:

а) $x^2 - 4x + 3 = 0$;

в) $-20x^2 - 3x + 2 = 0$;

д) $-3x^2 + 17 = 0$;

б) $6x^2 - x - 1 = 0$;

г) $x^2 - x - 6 = 0$;

е) $x^2 + x + 1 = 0$.

254 Составьте квадратное уравнение, корнями которого были бы числа:

а) 2 и -3;

б) -1 и -5;

в) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$;

г) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$.

255 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами так, чтобы его корни были равны:

а) $-\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{3}$;

б) $\frac{4}{7}$ и 5;

в) $-1\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{9}$;

г) -0,3 и -0,4.

256 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны $1 - \sqrt{5}$ и $1 + \sqrt{5}$.

257 Могут ли корнями квадратного уравнения с натуральными коэффициентами быть числа $\frac{3}{2}$ и $-\frac{2}{3}$?

258 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если известно, что один из его корней равен:

а) $2 + \sqrt{3}$;

б) $3 - \sqrt{2}$.

259 Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Найдите значение выражения $x_1x_2^3 + x_1^3x_2$.

260 Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $3x^2 - 13x - 5 = 0$. Найдите значение выражения $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

261 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 - 17x + 52 = 0$. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right)$.

π

262 Для следующих теорем сформулируйте обратные теоремы. Верны ли получившиеся обратные теоремы?

- а) Если натуральное число оканчивается на 5, то это число делится на 5.
 б) Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то это число делится на 3.
 в) Если коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ таковы, что $ac < 0$, то это уравнение имеет два различных корня.
 г) Если числа a и b положительны, то их сумма $a + b$ положительна.

263 Решите уравнения. Найдите разность большего (x_6) и меньшего (x_m) корней каждого из уравнений:

- а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; $x_6 - x_m \rightarrow \Phi$ е) $4x^2 + 3|x| - 1 = 0$; $x_6 - x_m \rightarrow \mathbf{B}$
 б) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$; $x_6 - x_m \rightarrow \mathbf{A}$ ж) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$; $x_6 - x_m \rightarrow \mathbf{O}$
 в) $24x^4 - 2x^2 - 1 = 0$; $x_6 - x_m \rightarrow \mathbf{H}$ з) $21x^2 + |x| - 2 = 0$; $x_6 - x_m \rightarrow \mathbf{T}$
 г) $2x^4 + 7x^2 - 9 = 0$; $x_6 - x_m \rightarrow \mathbf{E}$ и) $\sqrt{10}x^2 - 3|x| - \sqrt{10} = 0$; $x_6 - x_m \rightarrow \mathbf{X}$
 д) $5x^4 - 11x^2 + 2 = 0$; $x_6 - x_m \rightarrow \mathbf{И}$ к) $2x^2 + 9|x| + 7 = 0$. $x_6 - x_m \rightarrow \mathbf{У}$

Сопоставив результат с буквой, расшифруйте слово. Относится ли данный вид спорта к олимпийским?

6	2	$\sqrt{10}$	$\frac{4}{7}$	4	0,5	$\frac{2}{3}$	1	$2\sqrt{2}$	2

Д

264 Решите устно уравнение:

- а) $-x^2 + 3x - 2 = 0$; в) $x^2 + 999x - 1000 = 0$;
 б) $x^2 + 7x - 8 = 0$; г) $13x^2 + 25x + 12 = 0$.

265 Не решая уравнения, определите знаки корней, если они существуют:

- а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; б) $x^2 - x - 42 = 0$; в) $x^2 + 3x - 10 = 0$ г) $x^2 - x + 6 = 0$.

266 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2 + 3x - 4 = 0$. Найдите значение выражения $16(x_1^4 + x_2^4)$.

267 Составьте квадратное уравнение, корнями которого были бы числа:

- а) 5 и 3; б) 1 и -3; в) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{2}$.

268 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами так, чтобы его корни были равны:

- а) 2 и $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{2}$; в) 0,75 и -0,2.

269 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если известно, что один из его корней равен:

- а) $1 - \sqrt{5}$; б) $2 + \sqrt{2}$.

270 Для следующих теорем сформулируйте обратные теоремы. Верны ли получившиеся обратные теоремы?

а) Если две последние цифры числа образуют число, кратное 4, то это число делится на 4.

б) Если числа a и b положительны, то их произведение ab положительно.

в) Если дискриминант квадратного уравнения меньше нуля, то это уравнение не имеет решения.

271* Произведение четырёх чисел – корней уравнений $x^2 + 2bx + c = 0$ и $x^2 + 2cx + b = 0$, где b и c положительны, – равно единице. Найдите b и c .

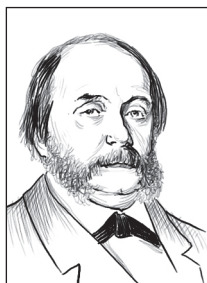
272* Найдите все такие простые p и q , что уравнение $px^2 + pqx + q = 0$ имеет целые корни.

273* Трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c – целые, c – нечётное) таков, что квадратное уравнение $P(x) = 0$ имеет целые корни. Может ли $P(111)$ быть нечётным числом?

274* Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ – целые числа, а p и q – простые числа. Найдите p и q .

275* Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ (a, b, c – отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его.

4.1.5. Квадратный трёхчлен и его разложение на множители



Источник знания неистощим: какие успехи ни приобретает человечество на этом пути, ... всё людям будет оставаться искать, открывать и познавать.

И. А. Гончаров (1812–1891),
русский писатель; член-корреспондент Петербургской
академии наук по разряду русского языка и словесности

В предыдущих пунктах мы убедились в том, как важно уметь преобразовывать и раскладывать на множители выражение $ax^2 + bx + c$, стоящее в левой части квадратного уравнения. В данном пункте мы научимся делать это быстрее и проще, чем раньше. В этом нам поможет открытие Виета, которое на протяжении нескольких веков вызывает восхищение математиков своими возможностями упрощать решение задач. Прежде чем познакомиться с новым следствием теоремы Виета, введём несколько определений.

Определение 1. *Квадратным трёхчленом с переменной x* называется выражение $ax^2 + bx + c$, где a, b, c – некоторые числа, $a \neq 0$.

Так, квадратными трёхчленами являются выражения $x^2 + x - 12$ и $3x^2 - x - 4$. Интересно, что выражения $2x^2 - 5x$, $4x^2 + 1$ и даже $7x^2$ тоже будут квадратными трёхчленами – это менее очевидно, однако полностью соответствует определению 1.

Как и любое выражение с переменной, квадратный трёхчлен при разных значениях переменной x принимает некоторые значения. Значения переменной, при которых он обращается в нуль, называют, по аналогии с уравнениями, *корнями* квадратного трёхчлена.

Определение 2. *Корнем квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ называется значение переменной x , которое обращает квадратный трёхчлен в нуль.*

Например, число $x = 3$ является корнем квадратного трёхчлена $x^2 + x - 12$, так как $3^2 + 3 - 12 = 0$. Аналогично, число $x = -1$ – корень квадратного трёхчлена $3x^2 - x - 4$, поскольку $3 \cdot (-1)^2 + 1 - 4 = 0$.

Из приведённых определений следует, что корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ совпадают с корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Поэтому число корней квадратного трёхчлена определяется знаком дискриминанта квадратного уравнения. Поэтому дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ мы будем называть также **дискриминантом квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$** .

Чтобы найти корни квадратного трёхчлена, достаточно решить соответствующее квадратное уравнение. При этом можно использовать как общие формулы корней, так и теорему, обратную теореме Виета.

Пример 1.

Найдите корни квадратного трёхчлена $x^2 - 2x - 24$.

Решение:

Решим квадратное уравнение $x^2 - 2x - 24 = 0$.

Подберём числа x_1 и x_2 , такие, что $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 x_2 = -24$.

Данным равенствам удовлетворяют числа 6 и -4. Значит, по теореме, обратной теореме Виета, корнями данного уравнения являются числа $x_1 = 6$ и $x_2 = -4$. Эти же числа являются одновременно и корнями квадратного трёхчлена.

Ответ: $x_1 = 6$, $x_2 = -4$.

Мы вновь убеждаемся в том, как полезно открытие Виета при решении квадратных уравнений. Оказывается, что оно позволяет также найти удобный **способ разложения квадратного трёхчлена на множители**.

Теорема 1.

Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ имеет два корня x_1 и x_2 , то он раскладывается на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Доказательство:

Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня x_1 и x_2 , то они являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

По теореме Виета, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Отсюда $b = -a(x_1 + x_2)$, $c = ax_1 x_2$.

Подставим полученные выражения в квадратный трёхчлен вместо b и c :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2 = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) = \\ &= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

Следствие из теоремы 1.

Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, имеет один корень x_1 , то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Доказательство:

Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет один корень x_1 , то один корень имеет и квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Значит, его дискриминант $D = 0$, и, как было показано в п. 4.1.2, речь фактически идёт не об одном корне, а о двух «совпавших»

корнях $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Тогда на основании теоремы 1:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.

Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, не раскладывается на линейные множители.

Доказательство (методом от противного):

Пусть квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней. Предположим, что он раскладывается на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – некоторые числа (вынесенный за скобки числовой множитель должен равняться коэффициенту при x^2 , то есть a). Тогда квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль при $x = x_1$ и $x = x_2$. Но тогда числа x_1 и x_2 по определению являются его корнями, что противоречит условию.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Итак, мы можем сделать общий вывод:

Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$:

- имеет два корня x_1 и x_2 , то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- имеет один корень x_1 , то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$;
- не имеет корней, то он не раскладывается на линейные множители.

Из рассуждений, проведённых в теоремах 1–2, следует, что:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}.$$

Значит, разложение на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ всегда показывает, что корнями квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ являются числа x_1 и x_2 . Аналогично, в случае разложения $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ квадратный трёхчлен имеет один корень x_1 и, с точностью до постоянного множителя, является полным квадратом линейного выражения.

Пример 2.

Разложить на множители квадратные трёхчлены: а) $2x^2 - 5x + 2$; б) $6x^2 - 11x + 5$; в) $3x^2 - 7x + 3$; г) $2x^2 - 12x + 18$; д) $3x^2 - 15x + 18$; е) $x^2 + x + 2$.

Решение:

а) $2x^2 - 5x + 2$.

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 > 0$, поэтому квадратный трёхчлен имеет два корня x_1 и x_2 .

По формуле корней квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = \frac{5 + 3}{4} = 2; \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Значит, } 2x^2 - 5x + 2 = 2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(2x - 1).$$

Замечание. При $k \neq 0$ линейный множитель $kx + m$ может быть представлен как $k\left(x + \frac{m}{k}\right)$, и наоборот, множитель $k\left(x + \frac{m}{k}\right)$ можно представить в виде $kx + m$.

б) $6x^2 - 11x + 5$.

Одним из корней трёхчлена, очевидно, является число 1, так как $6 - 11 + 5 = 0$.

Так как по теореме Виета произведение корней равно $\frac{5}{6}$, другим корнем является число $\frac{5}{6}$. Поэтому $6x^2 - 11x + 5 = 6(x-1)\left(x - \frac{5}{6}\right) = (x-1)(6x-5)$.

в) $3x^2 - 7x + 3$.

$D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 13 > 0$, поэтому квадратный трёхчлен имеет два корня x_1 и x_2 .

По формуле корней квадратного уравнения: $x_1 = \frac{7+\sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{6}$. Значит,

$$3x^2 - 7x + 3 = 3\left(x - \frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \frac{7-\sqrt{13}}{6}\right).$$

В данном случае корни иррациональны, поэтому более «красивого» разложения здесь не получится.

г) $2x^2 - 12x + 18$.

Для упрощения дальнейших выкладок вынесем за скобки число 2. Тогда:

$$2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x-3)^2.$$

Такое разложение получилось потому, что данный квадратный трёхчлен имеет единственный корень $x_1 = 3$; $D = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 0$.

д) $3x^2 - 15x + 18$.

Для упрощения дальнейших выкладок вынесем за скобки число 3. Тогда:

$$3x^2 - 15x + 18 = 3(x^2 - 5x + 6)$$

По теореме, обратной теореме Виета, числа $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$ являются корнями данного квадратного трёхчлена ($x_1 + x_2 = 5$, $x_1 x_2 = 6$). Поэтому $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$, и значит, $3x^2 - 15x + 18 = 3(x^2 - 5x + 6) = 3(x-3)(x-2)$.

е) $x^2 + x + 2$.

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$, значит, квадратный трёхчлен $x^2 + x + 2$ нельзя разложить на линейные множители.

К

276 1) Назовите степени многочленов:

а) $5a + 3b - c$;

б) $2m^5n - 0,1m^2n^2 + 6m^3$;

в) $x^2 + 9x + 18$.

2) Каким одним термином можно назвать все три многочлена?

3) Как можно назвать третий многочлен? Сравните свое определение с тем, которое приведено на с. 71.

277 Какие многочлены:

а) $2x^2 - 3x + 1$;

б) $4x^2 + 15$;

в) $0,6x^2 - 5x$;

г) $10x^2$;

д) $x^2 + 3x^2 + 18 - 6x$

являются квадратными трёхчленами? Обоснуйте свой выбор.

278 1) При каких значениях переменной x квадратный трёхчлен $3x^2 - 5x + 2$ равен 0?

2) Какое название вы бы дали тем значениям x , при которых трёхчлен становится равным нулю? Сопоставьте свой вариант с предложенным на с. 72.

279 Найдите корни квадратных трёхчленов:

а) $3x^2 - 5x + 2$;

б) $4x^2 - 9$;

в) $2x^2 - 7x + 5$.

280 1) Попробуйте разложить на множители квадратный трёхчлен $5x^2 + 5x + 1$. Удобны ли в этом случае известные вам способы?

2) Разложите на множители квадратный трёхчлен $2x^2 - 16x + 30$ известными вам способами. Решите квадратное уравнение $2x^2 - 16x + 30 = 0$. Что интересного вы заметили? Сформулируйте гипотезу о новом способе разложения квадратного трёхчлена на множители.

3) Попробуйте доказать свою гипотезу в общем виде или познакомьтесь с ее доказательством, приведённым на с. 72–73.

4) Разложите на множители $5x^2 + 5x + 1$, применив новый способ.

281 1) Решите квадратные уравнения:

а) $-x^2 - 0,5x + 1,5 = 0$; б) $9x^2 + 12x + 4 = 0$; в) $5x^2 - x + 1 = 0$.

2) Разложите на множители трёхчлены $-x^2 - 0,5x + 1,5$; $9x^2 + 12x + 4$. Что интересного вы наблюдаете?

3) Предположите, как решение третьего уравнения отразится на разложении на множители трёхчлена $5x^2 - x + 1$?

4) Сравните свое предположение с утверждениями на с. 73.

282 Разложите на множители квадратные трёхчлены:

а) $x^2 - 5x + 6$; б) $3x^2 - 5$; в) $-2x^2 + 5x - 3$.

283 Докажите, что данные трёхчлены нельзя представить в виде произведения двух двучленов:

а) $2x^2 + 5x + 6$; б) $2x^2 + 5$; в) $-x^2 + x - 3$.

π **284** Прочитайте высказывания. Как они называются? Сформулируйте высказывания, обратные данным. Определите истинность первоначальных высказываний и обратных к ним. Для ложных высказываний постройте отрицания:

а) $(-4 + 1 = -3 \text{ и } -4 \cdot 1 = -4) \Rightarrow$ (числа -4 и 1 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$);

б) $(x^2 + 3x + 2 = 0) \Rightarrow (x = -2 \text{ или } x = -1)$;

в) $(4 + 3 = 7 \text{ и } 4 \cdot 3 = 12) \Rightarrow$ (числа 4 и 3 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + 7x + 12 = 0$);

г) $(x^2 + 6x - 135 = 0) \Rightarrow (x = -15 \text{ или } x = 9)$;

д) $(x^2 - 3x + 10 = 0) \Rightarrow (x = 5)$;

е) $(-5 + (-3) = -8 \text{ и } -5 \cdot (-3) = 15) \Rightarrow$ (числа -5 и -3 являются корнями квадратного уравнения $0,2x^2 + 8x + 15 = 0$).

285 Упростите выражения:

а) $\sqrt{7+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{6}}$; б) $2\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{27})$.

286 Определите без калькулятора, между какими целыми числами лежит число

а) $\sqrt{55}$; б) $-\sqrt{190}$; в) $-\sqrt{19 \cdot 21}$; г) $\sqrt{30 \cdot 40}$.

д **287** Разложите на множители квадратные трёхчлены:

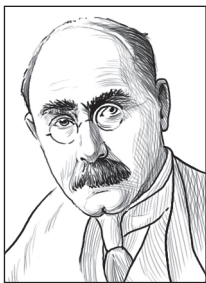
а) $x^2 + 3x - 10$; б) $2x^2 - 7$; в) $3x^2 - 5x - 2$;

г) $-3x^2 + 7x - 4$; д) $2x^2 + 3x - 4$.

288 Упростите выражение $\sqrt{19+8\sqrt{3}} \cdot (4-\sqrt{3})$.

с **289*** Квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.

4.1.6. Квадратные уравнения с параметром



*Есть у меня шестёрка слуг, проворных, удалых.
И всё, что вижу я вокруг, – всё знаю я от них.
Они по знаку моему являются в нужде.
Зовут их: Как и Почему, Кто, Что, Когда и Где.*

Д. Р. Киплинг (1865–1936),
английский писатель, поэт

Каждый раз при знакомстве с новым видом уравнений – линейных, квадратных – мы заменяли их числовые коэффициенты буквами и рассматривали уравнение в общем виде. Уравнения, где некоторые коэффициенты заданы не конкретным числом, а буквой или буквенным выражением, встречаются и при решении практических задач. Поэтому им дали специальное название – *уравнения с параметрами*. С решением некоторых видов таких уравнений мы познакомимся в данном пункте.

Определение 1. Уравнение, в котором некоторые коэффициенты заданы буквами или буквенными выражениями, называется *уравнением с параметрами*.

Так, уравнение $2ax - 5 = 0$ является линейным уравнением с параметром a , а уравнение $bx^2 + x - 6 = 0$ – квадратным уравнением с параметром b (при условии, что a и b не равны нулю).

Уравнение с параметром в зависимости от значения параметра может изменять свой вид, количество решений и, естественно, сами решения. Например, уравнение $bx^2 + x - 6 = 0$ при $b = 0$ становится линейным уравнением $x - 6 = 0$ и имеет единственное решение $x = 6$. При $b = 1$ оно преобразуется в уравнение $x^2 + x - 6 = 0$ с двумя корнями $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$. А при $b = -1$ это же уравнение принимает вид $-x^2 + x - 6 = 0$ с отрицательным дискриминантом $D = 1 - 4(-1)(-6) = -23 < 0$, а значит, не имеет корней.

В уравнениях с параметрами, которые встречаются в практических задачах физики, химии, биологии, обычно приходится исследовать, как уравнение зависит от значения параметра, и находить решения для всех возможных случаев. Но учиться их решать важно не только тем, кому они потребуются в будущей профессии, а каждому, поскольку, как и многие другие математические задания, они развивают умение понимать информацию, анализировать и систематизировать её, что в современном мире нужно всем без исключения людям.

Вначале рассмотрим более простые виды заданий, в которых требуется выяснить, при каких значениях параметров уравнение обладает тем или иным свойством. Например, уравнение имеет одно решение, не имеет решений и т. д. В таких заданиях мы должны четко указывать, при каком значении параметра требуемое условие выполняется.

Пример 1.

При каких значениях параметра k уравнение $x^2 - 2x + k = 0$ не имеет корней?

Решение:

Так как при старшем коэффициенте данного квадратного уравнения параметр не содержится, при любом значении параметра k оно будет оставаться квадратным.

Квадратное уравнение не имеет корней, если его дискриминант меньше нуля. Поэтому определим дискриминант D и найдём значения k , при которых $D < 0$.

$D = (-2)^2 - 4k = 4 - 4k$, значит:

$$D < 0 \Leftrightarrow 4 - 4k < 0 \Leftrightarrow -4k < -4 \Leftrightarrow k > 1.$$

Ответ: уравнение не имеет корней при $k \in (1; +\infty)$.

Пример 2.

При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$ имеет ровно один корень?

Решение:

Данное уравнение при $a = 0$ является линейным, а при $a \neq 0$ – квадратным. Поскольку и линейное, и квадратное уравнения могут иметь один корень, нам нужно исследовать оба случая.

1) Если $a = 0$, то уравнение преобразуется в линейное уравнение $-x - 1 = 0$. Оно имеет один корень. Значит, при $a = 0$ требуемое условие выполняется.

2) Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным (по определению квадратного уравнения). Квадратное уравнение может иметь один корень, если его дискриминант равен нулю. Исследуем этот случай:

$$D = (a+1)^2 - 4a(2a-1) = a^2 + 2a + 1 - 8a^2 + 4a = -7a^2 + 6a + 1.$$

$$D = 0 \Leftrightarrow -7a^2 + 6a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ и } a = -\frac{1}{7}.$$

Ответ: уравнение имеет единственный корень при $a = 0$, $a = 1$, $a = -\frac{1}{7}$.

Пример 3.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a^2 - 3a + 2)x^2 + (a^2 - 1)x + (9a^2 - 8a - 1) = 0$$

Решение:

Известно, что квадратное уравнение не может иметь более двух корней, а линейное уравнение имеет более двух корней только в случае, когда оно приводится к виду $0x = 0$. Поэтому найдем значения a , при которых данное уравнение становится линейным (то есть коэффициент при x^2 равен 0), и исследуем его:

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2 \text{ и } a_2 = 1.$$

Если $a = 2$, то коэффициент при x полученного линейного уравнения отличен от нуля, и, следовательно, уравнение имеет один корень. Значит, $a = 2$ не подходит.

Если $a = 1$, то исходное уравнение превращается в уравнение $0x = 0$, которое имеет бесконечно много (а значит, более двух) корней.

Ответ: уравнение имеет более двух корней при $a = 1$.

Пример 4.

При каких значениях параметра a уравнение $7x^2 - 4x + a = 0$ имеет общий корень с уравнением $x^2 - 2x - 8 = 0$?

Решение:

По теореме, обратной теореме Виета, уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$ имеет корни $x_1 = 4$ и $x_2 = -2$. Найдем значения a , при которых числа 4 и -2 являются также корнями данного уравнения $7x^2 - 4x + a = 0$.

Если $x = 4$, то $7 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + a = 0$, то есть $a = -96$.

Если $x = -2$, то $7 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + a = 0$, то есть $a = -36$.

Ответ: $a = -96$ или $a = -36$.

* * *

Более общая задача при решении уравнений с параметрами звучит так: *решить уравнение*.

Определение 2. *Решить уравнение с переменной x и параметром a* – это значит, для всех возможных допустимых значений параметра a найти множество значений x , удовлетворяющих этому уравнению.

Из этого определения следует, что каждое уравнение с параметром «порождает» целое семейство обычных уравнений. И, решая одно уравнение с параметром, мы тем самым решаем все «спрятанные» в нем уравнения определённого вида. Поэтому если хотя бы одно из допустимых значений a останется неисследованным, признать такое решение верным нельзя.

Выведем сначала общий алгоритм решения *линейных уравнений с параметром*. Для этого рассмотрим вначале несколько конкретных примеров.

Пример 5.

Решить уравнение $2x - a = 0$ с параметром a .

Решение:

Параметр – это некоторое число, конкретное значение которого в задании не указано. Поэтому мы можем выполнить следующую цепочку преобразований, равносильных при любом значении a :

$$2x - a = 0 \Leftrightarrow 2x = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Значит, при любом значении параметра a корень уравнения равен $\frac{a}{2}$.

Определение решения уравнения с параметром требует указать в ответе не только полученный корень, но и множество значений параметра a , при которых уравнение имеет этот корень.

Ответ: при любом $a \in \mathbf{R}$ уравнение имеет единственный корень $x = \frac{a}{2}$.

Пример 6.

Решить уравнение $(a - 2)x = 0$ с параметром a .

Решение:

В данном уравнении буквенным выражением является коэффициент при x , от которого зависит количество решений. Поэтому начнем решение с нахождения «особенных» значений параметров, при которых уравнение либо вообще не имеет корней, либо имеет бесконечное множество корней:

$$a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Таким образом, выделяются два случая: $a = 2$ и $a \neq 2$.

- 1) Если $a = 2$, то уравнение принимает вид $0x = 0$. Тогда x – любое число.
- 2) Если $a \neq 2$, то обе части уравнения можно разделить на число $a - 2 \neq 0$:

$$(a - 2)x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{a - 2} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: при $a \neq 2$ уравнение имеет корень $x = 0$, при $a = 2$ корнем уравнения является любое число.

Заметим, что при необходимости решение линейного уравнения с параметрами начинают с приведения уравнения к удобному для исследования виду $kx + b = 0$, где k и b – некоторые числа или выражения с параметром. В рассмотренных примерах в этом не было необходимости, так как уравнения сразу были даны в указанном виде.

Итак,

Алгоритм решения линейного уравнения с параметром

1. Представить, если нужно, уравнение в виде $kx + b = 0$, где k и b – некоторые числа или выражения с параметром.
2. Если есть «особенные» значения параметра (когда коэффициент при x равен 0), найти их и решить уравнение при этих значениях параметра.
3. Решить уравнение для оставшихся значений параметра.
4. В ответе указать все возможные значения параметра и соответствующие им решения.

Аналогичным образом исследуем решение *квадратных уравнений с параметрами*.

Пример 7.

Решить уравнение $dx^2 = 6x - 3$ с параметром d .

Решение:

Запишем уравнение в виде $dx^2 - 6x + 3 = 0$. «Особенным» значением параметра в данном случае является нулевое значение коэффициента d при x^2 , от которого зависит вид уравнения. Рассмотрим два случая: $d = 0$ и $d \neq 0$.

Если $d = 0$, то уравнение линейное: $-6x + 3 = 0$. Оно имеет один корень $x = 0,5$.

Если $d \neq 0$, то уравнение квадратное, количество его корней определяется знаком дискриминанта $D_1 = 9 - d \cdot 3 = 9 - 3d$. Рассмотрим отдельно случаи $D_1 > 0$, $D_1 = 0$ и $D_1 < 0$, при которых уравнение имеет, соответственно, два корня, один корень и не имеет корней.

- $D_1 > 0 \Leftrightarrow 9 - 3d > 0 \Leftrightarrow d < 3$ (при этом $d \neq 0$).

Значит, при $d \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$ уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-3d}}{d}$.

- $D_1 = 0 \Leftrightarrow 9 - 3d = 0 \Leftrightarrow d = 3$.

Значит, при $d = 3$ уравнение имеет один корень $x = \frac{3}{d} = 1$.

- $D_1 < 0 \Leftrightarrow 9 - 3d < 0 \Leftrightarrow d > 3$.

Значит, при $d \in (3; +\infty)$ уравнение не имеет корней.

Ответ: При $d \in (3; +\infty)$ корней нет; при $d = 3$ корень $x = 1$; при $d = 0$ корень $x = 0,5$; при

$d \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$ два корня $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-3d}}{d}$.

Итак,

Алгоритм решения квадратного² уравнения с параметром

1. Представить, если нужно, уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, где a , b и c – некоторые числа или выражения с параметром.
2. Если есть «особенные» значения параметра (когда коэффициент при x^2 равен 0), найти их и решить уравнение при этих значениях параметра.
3. Для оставшихся значений параметра определить дискриминант.
4. Найти значения параметра, при которых:
 - $D > 0$, найти два корня уравнения при этих значениях параметра;
 - $D = 0$, найти один корень уравнения при этих значениях параметра;
 - $D < 0$, записать, что при данных значениях параметра корней нет.
5. В ответе указать все возможные значения параметра и соответствующие им решения.

² Строго говоря, оно является уравнением с параметром не выше второй степени.



290 Разбейте уравнения на две группы:

- а) $3x^2 + x + p = 0$; в) $7x^2 + 0,1x - 10 = 0$; д) $2x^2 + sx + 2s = 0$;
 б) $-4x^2 + x - 9 = 0$; г) $5x^2 + 12x + 1 = 0$; е) $rx^2 + rx + (r + 1) = 0$.

Какое название вы предложили бы для уравнений, в которых коэффициенты заданы буквенными выражениями? Сравните свой вариант с общепринятым на с. 76.

291 Прочитайте данные уравнения и ответьте на следующие вопросы:

- а) $x^2 - 2x + 1 = 0$; б) $x^2 - 2x + 0,75 = 0$; в) $x^2 - 2x + 3 = 0$; г) $x^2 - 2x + k = 0$.

1) Чем отличаются данные уравнения? Какое из этих уравнений является уравнением с параметром?

2) Сколько решений корней имеет каждое из этих уравнений. Как вы сформулировали ответ в последнем случае? Почему?

3) При каких значениях параметра k уравнение $x^2 - 2x + k = 0$ не имеет корней? Сопоставьте свой ответ с образцом, данным в учебнике на с. 77.

4) Найдите значения параметра, при котором уравнение $x^2 - 2x + k = 0$ имеет ровно один корень. Найдите значения параметра, при котором это уравнение имеет два корня.

5) Сделайте вывод о нахождении значений параметра, при котором квадратное уравнение с параметром имеет ровно один корень, имеет два корня, не имеет корней.

292 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2ax + a(1 + a) = 0$:

- а) имеет два различных корня;
 б) имеет ровно один корень;
 в) не имеет корней?

293 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + 1 = 0$ имеет единственный корень? Чему он равен?

294 При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

295 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 12x + a = 0$ имеет два действительных корня, один из которых больше другого на $2\sqrt{5}$.

296 Найдите все значения параметра a , при которых один из корней уравнения $ax^2 + (a + 3)x - 3a = 0$ больше 1, а другой меньше -1.

297 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + (1 - a)x - a = 0$ имеет два различных корня а) одного знака, б) разных знаков?

298 Один из корней уравнения $2x^2 + x - a = 0$ равен 2. Чему равно a ?

299 Определите, при каком целом k один из корней уравнения $4x^2 - (3k + 2)x + (k^2 - 1) = 0$ в три раза больше другого.

300 Решите уравнение с параметром a :

- а) $x^2 + 4x + 2a = 0$; б) $3x^2 - ax - 1 = 0$; в) $ax^2 + 2x - 3 = 0$.



301 Вычеркните буквы, соответствующие квадратным трёхчленам, которые нельзя представить в виде произведения двух двучленов. Из оставшихся букв составьте слово. Что обозначает это понятие?

Р	$x^2 + 12x + 36$
----------	------------------

П	$x^2 - 2x - 3$
----------	----------------

Г	$x^2 - 8x + 12$
----------	-----------------

Л	$x^2 + x - 30$
----------	----------------

Р	$5x^2 + 3x + 1$
----------	-----------------

А	$3x^2 - 6x + 7$
----------	-----------------

Б	$x^2 - 7x$
----------	------------

И	$x^2 - 6x + 9$
----------	----------------

Е	$-2x + 15 - x^2$
----------	------------------

О	$2x^2 - 24x$
----------	--------------

А	$2x^2 - 2x - 1$
----------	-----------------

А	$5x^2 + 7 + 3x$
----------	-----------------

302 Запишите периодические десятичные дроби в виде обыкновенной:
а) $-5,(3)$; б) $1,0(22)$.

303 Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным:

- а) Для того чтобы сумма цифр натурального числа n делилась на 3..., чтобы число n делилось на 3.
- б) Для того чтобы число n делилось на 5..., чтобы число n оканчивалось на 5.
- в) Для того чтобы натуральное число n делилось на 12 и на 9..., чтобы число n делилось на 3.



304 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2ax + a(a + 3) = 0$:

- а) имеет два различных корня; б) имеет ровно один корень; в) не имеет корней?

305 При каких значениях параметра a уравнение $(1 - a)x^2 - 4ax + 4(1 - a) = 0$

- а) не имеет корней; б) имеет не более одного корня; в) имеет не менее одного корня?

306 При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + x - a = 0$ имеют одинаковое число корней?

307 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 4x + a = 0$ имеет:

- а) хотя бы один действительный корень;
- б) два различных действительных корня одного знака;
- в) два действительных корня разных знаков;
- г) один корень нулевой, а другой – положительный;
- д) один корень нулевой, а другой – отрицательный?

308 Решите уравнения с параметром k :

- а) $-x^2 - 4x + 4k = 0$; б) $5x^2 - 2kx - 1 = 0$; в) $kx^2 + 8x - 3 = 0$.

309 Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным:

- а) Для того чтобы число n делилось на 2..., чтобы число n оканчивалось на 2.
- б) Для того чтобы натуральное число n делилось на 15 ..., чтобы число n делилось на 3.

в) Для того чтобы квадратный трёхчлен раскладывался на множители ..., чтобы он имел два корня.

г) Для того чтобы квадратный трёхчлен раскладывался на множители ..., чтобы он имел хотя бы один корень.



310* Докажите, что при любых a и b уравнение $(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$ имеет решение.



311* При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ является квадратом другого?

4.1.7. Задачи, сводящиеся к решению квадратных уравнений



Вместо того чтобы «пробовать и ошибаться» на реальных объектах, люди предпочитают делать это на математических моделях. Построение таких моделей, их анализ и вывод рекомендаций – одна из важнейших задач прикладной математики.

Е. С. Вентцель (1907–2002),
советский математик, автор учебников

К необходимости изучения квадратных уравнений нас привели практические задачи. Теперь, когда алгоритм решения квадратных уравнений найден, этап работы с полученной при решении задачи математической моделью сводится к применению формул корней квадратного уравнения и является, как говорится, «делом техники».

Однако некоторые другие этапы решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, приобретают новые черты, которые нам и надо теперь установить.

Рассмотрим вначале несколько конкретных примеров.

Задача 1.

Площадь прямоугольника составляет 10 дм^2 . Найдите длины сторон прямоугольника, если одна из них на 15 см больше другой.

Решение:

1. Определим, какие величины известны и какие надо найти.

В задаче известны взаимосвязи между двумя неравными сторонами прямоугольника, известна его площадь. Требуется найти длины сторон прямоугольника.

2. Проверим соответствие единиц измерения величин.

Единицы измерения не согласованы. Выразим площадь в квадратных сантиметрах: $10 \text{ дм}^2 = 1000 \text{ см}^2$.

3. Выберем неизвестные величины и введём для них буквенные обозначения.

Обозначим длину меньшей стороны прямоугольника $x \text{ см}$.

4. Определим множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.

Так как x – длина стороны (в сантиметрах), $x > 0$.

5. Установим взаимосвязи между величинами.

По условию, длина одной стороны на 15 см больше другой, значит, её длина составляет $(x + 15) \text{ см}$. Площадь прямоугольника равна $x(x + 15) \text{ см}^2$.

6. Составим уравнение или неравенство (одно или несколько) и обоснуем их.

Площадь прямоугольника равна $x(x + 15)$, что по условию составляет 1000 см^2 , значит:

$$x(x + 15) = 1000.$$

Запишем все установленные соотношения и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x(x+15)=1000 \\ x>0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline x-? \\ x+15-? \\ \hline \end{array}$$

7. Найдём все решения, удовлетворяющие построенной модели.

Искомое значение x должно удовлетворять каждому из составленных соотношений. Сначала решим уравнение:

$$x(x + 15) = 1000 \Leftrightarrow x^2 + 15x - 1000 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет дискриминант $D = 15^2 + 4000 = 4225 = 65^2 > 0$,

поэтому оно имеет два корня: $x_1 = \frac{-15+65}{2} = 25$, $x_2 = \frac{-15-65}{2} = -40$.

Так как по условию $x > 0$, отрицательный корень не подходит, и $x = 25$. Значит, одна сторона прямоугольника равна 25 см , а вторая — $25 + 15 = 40 \text{ см}$.

8. Проверим соответствие полученного ответа вопросу задачи.

Найденные ответы соответствуют вопросу задачи.

9. Убедимся, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

Полученные ответы являются положительными числами, они соответствуют смыслу задачи.

Ответ: стороны прямоугольника 25 см и 40 см .

Задача 2.

Задумано натуральное число. Если это число увеличить в 10 раз, то полученный результат станет на 9 больше квадрата задуманного числа. Какое число могли задумать?

Решение:

В задаче известны взаимосвязи между задуманным числом и его квадратом. Требуется найти задуманное число.

Обозначим задуманное число x . По условию, $x \in \mathbb{N}$. Результат увеличения задуманного числа в 10 раз запишем как $10x$, а квадрат задуманного числа как x^2 .

По условию, $10x$ на 9 больше, чем x^2 , значит: $10x = x^2 + 9$.

Запишем все установленные соотношения и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} 10x = x^2 + 9 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline x-? \\ \hline \end{array}$$

Искомое значение x должно удовлетворять каждому из составленных соотношений. Сначала решим уравнение:

$$10x = x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 1$ и $x_2 = 9$.

Оба корня являются натуральными числами, то есть удовлетворяют условию $x \in \mathbb{N}$. Каждое из них соответствует вопросу и смыслу задачи. Значит, задача имеет два решения.

Ответ: задумали число 1 или число 9 .

Рассмотренные примеры показывают, что математической модели задачи могут соответствовать как оба корня квадратного уравнения, так и один (и даже ни одного). Поэтому при решении задач, сводящихся к квадратному уравнению, следует

особое внимание уделять определению, во-первых, множества значений, которые может принимать неизвестная величина, а во-вторых, – проверке каждого корня на принадлежность этому множеству. Иначе ответ задачи будет определён неверно.

Проверка решений на соответствие смыслу задачи, которая проводится на последнем этапе решения, помогает выявить и устранить возможные ошибки. Так, если бы в задаче 1 по какой-либо причине (ошибка при построении математической модели, при проверке полученных корней на соответствие второму соотношению модели и др.) корень (-40) не был отсеян, то мы бы отбросили его на последнем шаге, так как отрицательное число не может выражать длину стороны прямоугольника.

Итак,

при решении задач, сводящихся к квадратным уравнениям, следует уделять особое внимание:

- 1) определению множества значений, которые может принимать неизвестная величина x ;
- 2) проверке полученных корней уравнения x_1 и x_2 на принадлежность этому множеству.

Если один или оба корня квадратного уравнения не принадлежат множеству допустимых значений x , то они являются *посторонними* и не рассматриваются в ходе дальнейшего решения задачи.

Если же оба корня квадратного уравнения принадлежат множеству допустимых значений x , то оба корня рассматриваются в ходе дальнейшего решения задачи.

Для контроля на последнем шаге решения задачи следует убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

Рассмотрим пример задачи, математическая модель которой хотя и не содержит квадратного уравнения, но её можно свести к квадратному уравнению.

Задача 3.

Катер прошел 18 км по течению реки, а затем 20 км против течения, затратив на весь путь 2 часа. Найти скорость течения реки, если собственная скорость катера 20 км/ч.

Решение:

В задаче известна собственная скорость катера, путь по течению и путь против течения реки, а также общее время движения. Нужно найти скорость течения реки.

Обозначим скорость течения реки x км/ч. Скорость течения реки положительна, но меньше 20 км/ч (иначе катер не смог бы двигаться против течения), значит, $0 < x < 20$.

Скорость катера при движении по течению равна $(20 + x)$ км/ч, против течения $(20 - x)$ км/ч.

Тогда на движение по течению реки катер затратит $\frac{18}{20 + x}$ ч, а против течения $\frac{20}{20 - x}$ ч. По условию задачи, общее время движения катера равно 2 ч, то есть $\frac{18}{20 + x} + \frac{20}{20 - x} = 2$.

Составим математическую модель:

$$\begin{cases} \frac{18}{20 + x} + \frac{20}{20 - x} = 2 \\ 0 < x < 20 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x - ?}$$

Решим уравнение. Вначале заметим, что выражение $(20 + x)(20 - x) \neq 0$, так как $0 < x < 20$. По правилу равносильных преобразований обе части уравнения можно умножить или

разделить на одно и то же число (выражение), отличное от нуля. В нашем случае, чтобы избавиться от дробных выражений, мы можем умножить обе части уравнения на $(20+x)(20-x) = 400 - x^2 \neq 0$.

$$\frac{18}{20+x} + \frac{20}{20-x} = 2 \Leftrightarrow 18(20-x) + 20(20+x) = 2(400-x^2).$$

Разделим обе части полученного уравнения на 2, раскроем скобки и выполним дальнейшие равносильные преобразования:

$$9(20-x) + 10(20+x) = 400 - x^2 \Leftrightarrow 180 - 9x + 200 + 10x = 400 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения $D = 1^2 + 4 \cdot 20 = 81 > 0$, поэтому оно имеет два корня: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{81}}{2} = 4$; $x_2 = \frac{-1-\sqrt{81}}{2} = -5$.

Так как $0 < x < 20$, математической модели удовлетворяет только первый корень.

Найденный ответ соответствует вопросу задачи. Скорость течения реки 4 км/ч не противоречит реальному смыслу задачи.

Ответ: 4 км/ч.

К

312 Решите задачи и ответьте на вопросы к ним:

«Одно действительное число в 4 раза больше другого, а их сумма равна 221. Найдите эти числа».

«Одно действительное число на 4 больше другого, а их произведение равно 221. Найдите эти числа».

«Одно положительное число на 4 больше другого, а их произведение равно 221. Найдите эти числа».

1) Какую из построенных моделей можно считать «лишней»? Почему?

2) Сколько корней получено в линейном уравнении, в квадратном уравнении? Все ли из полученных корней соответствовали условию задачи?

3) На какие этапы решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, следует обращать особое внимание?

Сравните свои выводы с особыми замечаниями к решению задач, сводящихся к квадратным уравнениям на с. 84.

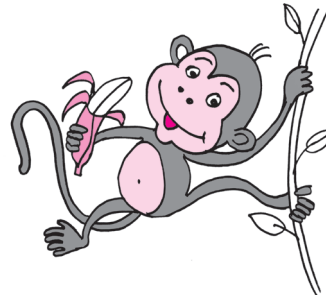
313 Одна из сторон прямоугольника на 9 см меньше другой. Найдите стороны этого прямоугольника, если его площадь равна 630 см^2 .

314 Известно, что один из катетов прямоугольного треугольника на 4 см меньше другого, а его гипотенуза равна 20 см. Найдите длины катетов.

315 Решите задачу знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары:

«Обезьянок резвых стая,
Всласть наевшись, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.

А двенадцать по лианам
Стали прыгать, повисая...
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»



316 Найдите два последовательных числа, кратных трём, если их произведение равно 648.

317 Футболист послал мяч вертикально вверх. Пока мяч не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h = -5t^2 + 16t + 1$ (h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента удара). Найдите, сколько секунд мяч находился на высоте не менее 4 метров.

318 Зависимость объема спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 85 - 5p$. Выручка предприятия за месяц, r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = qp$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 300 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

319 Задумано два числа, удвоенная сумма которых равна трем. Найдите их, если известно, что при сложении квадратов этих чисел получается два.

320 Катер спустился по течению реки на расстояние 56 километров и сразу вернулся назад. На это ему потребовалось 7 часов. Найти скорость движения катера в стоячей воде, если известно, что вода в реке движется со скоростью 3 км/ч.

π

321 Проверьте, истинно или ложно утверждение:

а) Два квадратных трёхчлена $x^2 - a$ и $x^2 + 5x$ имеют общий корень как при $a = 0$, так и при $a = 25$.

б) Квадратное уравнение $2x^2 + ax + 8 = 0$ имеет один корень при $a = 8$.

в) Существует два рациональных значения параметра a , при которых уравнение $ax^2 + ax + a + 1 = 0$ имеет один корень.

г) Уравнение $ax^2 + (3 + a)x - a - 3 = 0$ имеет один корень при $a \in \{0; -0,6; -3\}$.

д) Квадратное уравнение $x^2 + ax - a - 1 = 0$ имеет два корня при всех действительных значениях a .

е) Квадратное уравнение $x^2 + ax - 2 = 0$ не имеет корней при всех действительных значениях a .

322 Выполните действия:

а) $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{12} + \frac{1}{4}$; в) $\frac{5}{9} - \frac{7}{12}$; г) $\frac{12}{33} - \frac{5}{44}$; д) $\frac{29}{30} + 1\frac{11}{42} - 2\frac{31}{35}$.

323 Выполните действия:

а) $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{12} : \frac{1}{4}$; в) $\frac{5}{33} \cdot \frac{11}{15}$; г) $\frac{12}{35} : 8$; д) $12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{1}{8} : \frac{1}{5}$.

324 Расположите числовые выражения в порядке возрастания их значений:

$-\frac{5}{6} \cdot (-0,2)$; $-\frac{1}{4} : \frac{3}{8}$; $0,6 - \frac{11}{15}$.

325 Вычислите рациональным способом:

а) $12\frac{3}{7} : \left(1\frac{8}{15} + 0,25 - 3\frac{1}{30} - 1\frac{3}{4}\right)$; б) $\left(3\frac{13}{15} - 12\frac{3}{20} - 5\frac{4}{45} - 0,85\right) \cdot 3$.

326 Найдите значение выражения:

а) $\frac{13}{15} \cdot \frac{9}{26} - 3\frac{3}{10} + \left(3\frac{1}{4} - 3\frac{1}{20}\right) : \frac{1}{5}$; б) $\frac{3\frac{2}{5} \cdot 5 - 14}{\left(\frac{1}{8} - 1\frac{1}{4}\right) : \frac{3}{4} + 2\frac{1}{4}}$.

327 Найдите значение выражения:

а) $a^2 - \frac{a(a-2)^2 + (2a-1)^2}{a+1}$ при $a = 2\,000$.

б) $\frac{x\sqrt{x-y}\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}+y} + \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + 1$ при $x = 1\,000\,000$ и $y = 1001$.

Д

328 Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел больше произведения этих чисел на 43. Найдите эти числа.

329 Если одну из сторон квадрата увеличить на 1 дм, а другую на 6 дм, то получится прямоугольник, площадь которого в 4 раза больше площади квадрата. Найдите длину стороны квадрата.

330 Длины сторон прямоугольного треугольника являются последовательными чётными числами. Найдите площадь треугольника.

331 При розыгрыше чемпионата города по футболу было проведено 28 игр. Сколько команд участвовало в розыгрыше, если каждая команда сыграла с каждой из остальных команд ровно по одному разу?

332 Задумано два числа. Известно, что одно из них на 3 меньше второго, а сумма квадратов этих чисел равна 13. Найдите эти числа.

333 Один из заводов выполняет некоторый заказ на восемь дней быстрее, чем другой. За какое время может выполнить заказ каждый завод, работая отдельно, если известно, что при совместной работе за 24 дня они выполнили заказ в четыре раза больший?

334 Выполните действия:

а) $\frac{1}{7} + \frac{2}{9}$; в) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; д) $\frac{1}{42} \cdot 7$;
 б) $\frac{23}{42} - \frac{8}{63}$; г) $\frac{5}{9} : \frac{10}{63}$; е) $\frac{8}{35} : 20$.

335 Расположите числовые выражения в порядке возрастания их значений:

$\frac{5}{18} \cdot (-0,6)$; $-\frac{3}{8} : \frac{5}{6}$; $0,2 - \frac{8}{15}$.

336 Вычислите рациональным способом:

а) $16\frac{8}{15} : \left(1\frac{11}{18} - 0,3 - 4\frac{1}{9} - 5\frac{1}{5}\right)$; б) $\left(1\frac{23}{45} + 16\frac{7}{20} - 6\frac{1}{15} + 0,65\right) \cdot \frac{1}{3}$.

С

337* Найдите три последовательных натуральных числа, если известно, что их сумма в 5 раз меньше их произведения.

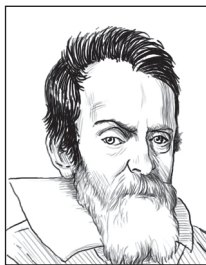
338* Произведение четырёх последовательных нечётных положительных чисел равно 9009. Найдите эти числа.

π

Выполните тест № 5 для самостоятельной проверки знаний.

§ 2. Квадратичная функция

4.2.1. Функции $y = ax^2$; $y = ax^2 + h$; $y = a(x - d)^2$ и их графики



*...природа формулирует свои законы
языком математики.*

Галилео Галилей (1564–1642),
итальянский физик, механик, астроном,
философ и математик

В предыдущей главе, обобщая зависимость между площадью квадрата и его стороной, мы получили функцию $y = x^2$, графиком которой является парабола. Оказывается, подобной кривой описываются и многие другие зависимости между величинами окружающего мира. В данном пункте мы выявим некоторые такие зависимости, исследуем их свойства и составим описывающие их формулы.

Проанализируем, например, как зависит площадь круга S от длины его радиуса r . Нам уже известна формула $S = \pi r^2$ ($\pi \approx 3,14$), которая *каждому* положительному числу r ставит в соответствие *единственное* число S . Аналогично, площадь прямоугольника, длина которого в 2 раза больше его ширины b , описывается зависимостью $S = 2b^2$. Обобщая эти и многие другие подобные зависимости, приходим к функции $y = ax^2$, где x – независимая переменная, y – зависимая переменная, a – некоторое число ($a \neq 0$). Естественно расширить область определения функции $y = ax^2$ до множества всех чисел: $X = (-\infty; +\infty)$.

Выявим основные свойства графика функции $y = ax^2$. Для этого рассмотрим конкретные примеры этой функции: $y = 2x^2$ и $y = -0,5x^2$. Заполним таблицы данных зависимостей y от x и отметим на координатной плоскости точки с полученными координатами.

Функция $y = ax^2$ чётна, так как $ax^2 = a(-x)^2$. Поэтому при построении графика можем воспользоваться его симметрией относительно оси ординат.

$$y = 2x^2$$

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	0,5	2	4,5	8

$$y = -0,5x^2$$

x	0	0,5	1	1,5	2	3
y	0	-0,125	-0,5	-1,125	-2	-4,5

Соединяя точки плавной линией, получим две параболы (рис. 1). Сравним полученные графики. Как и парабола $y = x^2$ (на рисунке она изображена пунктиром) оба графика касаются оси абсцисс в точке $(0; 0)$, которая называется *вершиной параболы*.

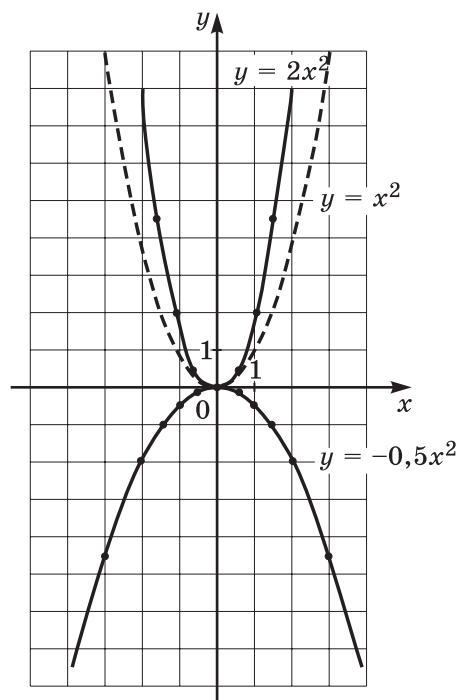


Рис. 1

Однако между этими параболой есть и различия: при $a = 2$ ветви параболы направлены вверх, а при $a = -0,5$ – вниз. Общее правило расположения ветвей параболы легко увидеть из формулы $y = ax^2$: при $a > 0$ они направлены вверх, а при $a < 0$ – вниз.

Из этой же формулы следует, что «крутизна» ветвей тем больше, чем больше $|a|$. В силу этого ветви параболы $y = 2x^2$ более тесно прижаты к оси Oy , чем ветви $y = x^2$, а ветви параболы $y = -0,5x^2$, наоборот, более пологие.

Обобщим установленные нами свойства функции $y = ax^2$ и её графика.

1. Графиком функции $y = ax^2$ является парабола с вершиной в точке $(0; 0)$. Парабола касается оси Ox в вершине.

2. Осью симметрии параболы является ось Oy .

3. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ – вниз. Параболы $y = ax^2$ и $y = -ax^2$ симметричны относительно оси Ox .

4. С увеличением $|a|$ крутизна ветвей параболы увеличивается, а с уменьшением – уменьшается.

5. Функция $y = ax^2$ является чётной.

6. При $a > 0$ функция $y = ax^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. При $a < 0$ функция $y = ax^2$, наоборот, возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

Теперь, познакомившись со свойствами функции $y = ax^2$ и её графика, мы сможем исследовать более сложные функции.

Рассмотрим функцию $y = ax^2 + h$ ($a \neq 0$). Построим по точкам, например, график $y = 2x^2 + 3$ и сравним его с графиком функции $y = 2x^2$.

$$y = 2x^2 + 3$$

x	0	0,5	1	1,5	2
y	3	3,5	5	7,5	11

Функция $y = ax^2 + h$ чётна, так как $ax^2 + h = a(-x)^2 + h$. Поэтому при построении графика воспользуемся его симметрией относительно оси ординат (рис. 2).

Мы видим, что все ординаты точек графика $y = 2x^2 + 3$ на 3 больше ординат точек графика $y = 2x^2$ с теми же абсциссами. Аналогично, ординаты точек графика $y = 2x^2 - 9$ на 9 меньше ординат соответствующих точек графика $y = 2x^2$. Поэтому оба данных графика $y = 2x^2 + 3$ и $y = 2x^2 - 9$ также являются параболками, которые можно получить путем простого сдвига параболы $y = 2x^2$ вдоль оси Oy .

Обобщим наши наблюдения. Если $h > 0$, то точки графика $y = 2x^2 + h$ выше соответствующих точек графика $y = 2x^2$ на h , а если $h < 0$, то ниже на $|h|$.

Таким образом, график $y = ax^2 + h$ – это парабола, которую можно строить путём параллельного переноса параболы $y = ax^2$ вдоль оси ординат вверх или вниз в зависимости от знака h .

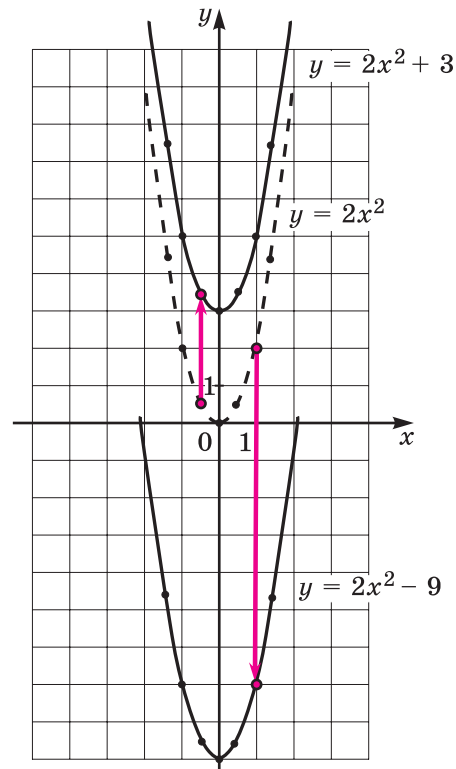


Рис. 2

Рассмотрим теперь график функции $y = a(x - d)^2$, $a \neq 0$. Построим по точкам, например, график $y = 2(x - 3)^2$ и сравним его с графиком функции $y = 2x^2$.

$$y = 2(x - 3)^2$$

x	1	1,5	2	3	4	4,5	5
y	8	4,5	2	0	2	4,5	8

Все абсциссы точек графика $y = 2(x - 3)^2$ на три больше абсцисс точек графика $y = 2x^2$ с теми же ординатами. Значит, график $y = 2(x - 3)^2$ также является параболой, которую можно получить путем сдвига параболы $y = 2x^2$ вдоль оси Ox на 3 единицы вправо (рис. 3).

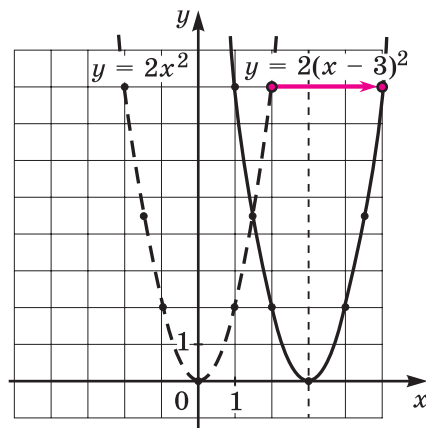


Рис. 3

Итак, если $d > 0$, то точки графика $y = a(x - d)^2$ на d единиц правее соответствующих точек графика $y = ax^2$, а если $d < 0$, — то на $|d|$ единиц левее. Поэтому *график $y = a(x - d)^2$ можно строить путём параллельного переноса параболы $y = ax^2$ вдоль оси абсцисс вправо или влево в зависимости от знака d .*

Следовательно, построение графиков функций $y = ax^2 + h$ и $y = a(x - d)^2$ можно упростить: не приводить каждый раз таблицу зависимости y от x с большим числом точек, а просто указать, как искомый график получается из графика $y = ax^2$, свойства которого нам уже известны.

Ясно, что вершина $(0; h)$ параболы $y = ax^2 + h$ лежит на оси ординат, а вершина $(d; 0)$ параболы $y = a(x - d)^2$ — на оси абсцисс. Зная координаты вершины и направление ветвей «смещённой» параболы, легко построить и саму параболу.

Для более точных построений можно вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат, а также, с учётом симметрии параболы, координаты нескольких дополнительных точек.

Чтобы найти точки пересечения графика с осью абсцисс ($y = 0$), нужно решить уравнение $ax^2 + h = 0$, либо уравнение $a(x - d)^2 = 0$. Чтобы найти точку пересечения с осью ординат, нужно вычислить значение функции при $x = 0$. Дополнительные точки обычно выбираются с абсциссами, отличающимися на 1 и 2 от абсциссы вершины параболы.

Пример 1.

Построить график функции $y = x^2 - 4$.

Решение:

График $y = x^2 - 4$ получается из графика $y = x^2$ сдвигом вниз на 4 единицы вдоль оси ординат (рис. 4).

Вершина параболы — точка $B(0; -4)$ оси ординат, ось симметрии — ось ординат Oy .

Ветви параболы направлены вверх ($1 > 0$).

Если $y = 0$, то $x^2 - 4 = 0$, $x = \pm 2$. Значит, график пересекает ось Ox в точках $A_1(2; 0)$ и $A_2(-2; 0)$.

Отметим дополнительные точки $(1; -3)$ и $(3; 5)$, симметричные к ним $(-1; -3)$ и $(-3; 5)$, и построим параболу.

Замечание 1. Фактически мы «отложили» параболу $y = x^2$ от «новой вершины» $B(0; -4)$, уточнив расположение графика при помощи дополнительных точек.

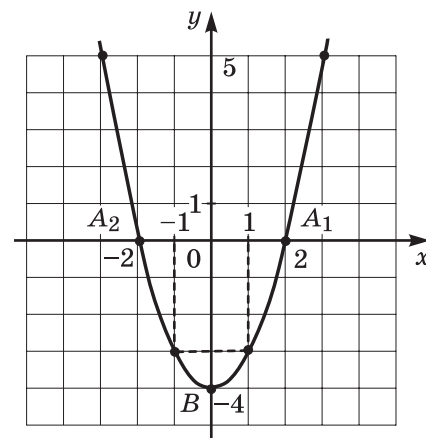


Рис. 4

Пример 2. Построить график функции $y = -(x + 3)^2$.

Решение:

График – парабола, полученная из параболы $y = -x^2$ сдвигом на 3 единицы влево вдоль оси абсцисс (рис. 5).

Вершина параболы – точка $B(-3; 0)$, ось симметрии – прямая $x = -3$. Ветви параболы направлены вниз ($-1 < 0$).

Если $x = 0$, то $y = -9$. Значит, график пересекает ось Oy в точке $C(0; -9)$. Ей симметрична точка $D(-6; -9)$.

Отмечаем дополнительные точки $(-1, -4)$, $(-2, -1)$, симметричные им $(-5, -4)$, $(-4, -1)$, и строим параболу.

Замечание 2. В данном случае искомый график мы получили, «отложив» параболу $y = -x^2$ от вершины $B(-3; 0)$.

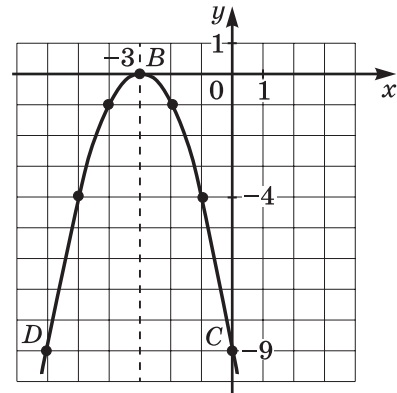


Рис. 5

Итак, график функции $y = a(x - d)^2 + h$ можно построить при помощи двух последовательных параллельных переносов – сдвига графика $y = ax^2$ на d единиц вдоль оси абсцисс и сдвига полученного графика $y = a(x - d)^2$ на h единиц вдоль оси ординат. При этом вершина параболы $y = a(x - d)^2 + h$ имеет координаты $(d; h)$.

Замечание 3. Если корни уравнения $a(x - d)^2 + h = 0$ – иррациональные числа, то дополнительные точки удобно выбирать с целочисленными абсциссами.

Мы приходим к следующему обобщённому алгоритму.

Алгоритм построения графика функции $y = a(x - d)^2 + h$

1. Описать, с помощью какого сдвига и вдоль каких осей искомый график получается из графика $y = ax^2$; указать направление ветвей параболы.
2. Найти и отметить на координатной плоскости вершину параболы ($x_v = d$; $y_v = h$), провести ось симметрии параболы.
3. Найти и отметить точки пересечения графика с осями координат:
 - с осью Oy : $(0; y_n)$, где y_n – значение функции $y = a(x - d)^2 + h$ при $x = 0$;
 - с осью Ox : $(x_n; 0)$, где x_n – корни уравнения $a(x - d)^2 + h = 0$.
 (Если координаты иррациональны, то этот шаг можно пропустить.)
4. При необходимости найти и отметить на координатной плоскости дополнительные точки и симметричные к ним относительно оси параболы.
5. Построить параболу, используя отмеченные точки.

Замечание. Параболу $y = a(x - d)^2 + h$ можно построить от вершины $B(d; h)$ с помощью соответствующего сдвига параболы $y = ax^2$.

Пример 3.

Построить график функции $y = 0,25(x - 2)^2 - 1$.

Решение:

График $y = 0,25(x - 2)^2 - 1$ – парабола, полученная из параболы $y = 0,25x^2$ смещением на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и 1 единицу вниз вдоль оси ординат (рис. 6).

Вершина параболы – точка $B(2; -1)$, ветви направлены вверх. Ось симметрии – прямая $x = 2$.

График пересекает ось Ox в точках $(0; 0)$ и $(4; 0)$, а ось Oy в точке $(0; 0)$. Отметим также дополнительную точку $(6; 3)$, симметричную к ней $(-2; 3)$ и проведём параболу.

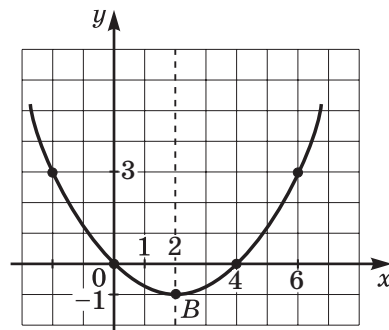


Рис. 6



339 Из приведённых ниже функций выберите ту, графиком которой является парабола:

$$y = 4x + 2; \quad y = x^3; \quad y = x^2; \quad y = \sqrt{x}; \quad y = \frac{2}{x}.$$

Постройте график выбранной вами функции и перечислите его свойства.

340 1) а) Одна сторона прямоугольника x дм, а другая в 2 раза больше. Запишите формулу зависимости площади прямоугольника y в дм² от длин его сторон.

б) Длина катета равнобедренного прямоугольного треугольника равна d см. Запишите формулу зависимости площади треугольника S в см² от длин его катетов.

в) Запишите формулу зависимости площади круга S в м² от длины его радиуса r в метрах (значение π считать равным 3,14).

г) В каждом ряду концертного зала n мест, а рядов в 1,5 раза больше. Запишите формулу зависимости общего количества мест в зале C от числа мест в ряду и количества рядов.

2) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их с помощью одной общей формулы. Является ли данная зависимость функциональной?

3) Постройте график функции, описанной под буквой а, заполнив таблицу. Сравните его с графиком, изображённым на рисунке 1 с. 88 учебника. Предположите, как называется полученная кривая.

4) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на с. 89 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

341 Если тело свободно падает на поверхность Земли, то расстояние, пройденное за t секунд, можно найти по формуле $S = \frac{g \cdot t^2}{2}$ (м), где $g = 9,8$ м/с² – ускорение свободного падения. Составьте таблицу и построьте график зависимости S от t . За какое время падающее тело пролетит расстояние 490 м (считая от точки начала падения)? Формула выведена при условии незначительности сопротивления воздуха.

342 1) Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = 2x^2$ и $y = 2x^2 + 3$. Что вы замечаете? Продолжите исследование, начертив график функции $y = 2x^2 - 9$.

2) Укажите способ построения графика функции $y = 2x^2 + h$ без использования таблицы. Примените его для построения графиков $y = 2x^2 - 5$ и $y = 2x^2 + 5$. Проверьте свое предположение, сопоставив его с выводами на с. 89 учебника.

343 1) Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = 2x^2$ и $y = 2(x - 3)^2$. Что вы замечаете? График какой функции вам нужно построить, чтобы продолжить исследование?

2) Укажите способ построения графика функции $y = 2(x - d)^2$ без использования таблицы. Примените его для построения графиков $y = 2(x - 1)^2$ и $y = 2(x + 1)^2$. Проверьте свое предположение, сопоставив его с выводами на с. 90 учебника.

344 1) Используя опыт построения графиков функций $y = 2x^2 + h$ и $y = 2(x - d)^2$, постройте график $y = 2(x - 1)^2 + 5$. Подумайте, как можно повысить точность построения этого графика.

2) Составьте общий алгоритм построения графика $y = a(x - d)^2 + h$ и сравните его с алгоритмом на с. 91 учебника.

345 Постройте график функции:

а) $y = 0,5x^2$; б) $y = 0,5x^2 + 3$; в) $y = 0,5x^2 - 2$.

346 Постройте график функции:

а) $y = (x - 2)^2$; б) $y = 3(x + 1)^2$; в) $y = -2(x - 1)^2 - 2$; г) $y = -(x + 3)^2 + 1$.

347 Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} (x-3)^2 - 3, & \text{если } x \geq 1; \\ |x|, & \text{если } -5 \leq x < 1 \end{cases}$$

«Прочитайте» полученный график по известному плану.

π

348 Решите задачу:

«Из квадратного полотна сетки для покрытия всходов вырезали прямоугольник со сторонами в два раза меньшей и на 3 м меньшей стороны квадрата. Площадь оставшейся сетки стала равной 20 м². Найдите периметр прямоугольника, с тем чтобы заказать декоративное плетение вокруг более ранней посадки цветов».

349 Найдите значения выражений и, расположив их в порядке убывания, узнайте имя французского математика XVI века:

Р	$5 + \sqrt{72}$	Е	$(-1)^2 - 2^4$	А	$(-1)^4 (1 - \sqrt{2})^2$
Т	$-3^2 + (-2)^3$	Ф	$(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$	В	$-1^2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2$
И	$(\sqrt{10} - \sqrt{13})(\sqrt{10} + \sqrt{13})$	Н	$\sqrt{2^6}$	А	$\sqrt{2}(\sqrt{50} + \sqrt{2})$
С	$\sqrt{10 \frac{9}{16}}$	У	$\sqrt{\left(3\frac{1}{5} - \sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{2}$		

350 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, зная его корень $5 + \sqrt{2}$. Как связано это задание с математиком из предыдущего задания?

351 Сравните числа:

а) $\sqrt{13} - \sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{50}-7} - \frac{1}{\sqrt{50}+7}$ и $\sqrt{190}$.

352 Постройте график функции $y = \begin{cases} 2x-1, & \text{если } x \geq 1; \\ x^2, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -2x-1, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

Д

353 Постройте график функции:

а) $y = 3x^2 - 2$; б) $y = 2(x - 6)^2$; в) $y = -2(x + 1)^2 + 5$.

354 Постройте график функции:

а) $y = (x - 3)^2 - 5$; б) $y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 1; \\ -(x+2)^2 + 8, & \text{если } x < 1. \end{cases}$

Обведите зелёным цветом ту часть графика, у которой значения функции положительны, синим цветом – значения функции отрицательны, красным цветом – значения функции равны нулю.

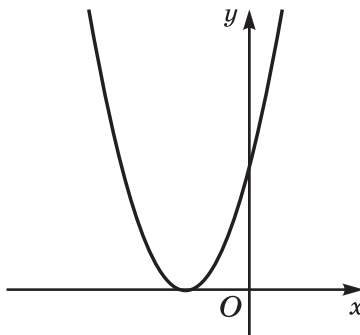
355 Сравните числа:

а) $\sqrt{17} - \sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$; б) $\frac{120}{\sqrt{45}-3} - \frac{120}{\sqrt{45}+3}$ и $\sqrt{201}$.



356*

Дан график функции $y = x^2 + ax + a$. Найдите a .



4.2.2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$



Познание подобно морю: тот, кто барахтается и плещется на поверхности, всегда больше шумит и потому привлекает к себе больше внимания, чем искатель жемчуга, без лишнего шума проникающий в поисках сокровищ до самого дна неизведанных глубин.

Вашингтон Ирвинг (1783–1859),
американский писатель

В предыдущем пункте мы познакомились с функциями $y = ax^2$, $y = ax^2 + h$, $y = a(x - d)^2$, $y = a(x - d)^2 + h$ и узнали, что их графиками являются параболы. Почему же функции, заданные различными формулами, имеют схожие графики? Дело в том, что все они являются частными случаями одной и той же функции.

Действительно, нетрудно заметить, что правые части всех функций являются квадратными трёхчленами вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ (либо могут быть приведены к нему с помощью несложных преобразований). И значит, все эти различные на первый взгляд функции могут быть заданы единой формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Функции данного вида называют *квадратичными* функциями. Изучением общего случая квадратичной функции мы и займёмся в этом пункте и, прежде всего, введём её определение.

Определение. Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратичной функцией*.

Попробуем построить график какой-нибудь квадратичной функции, например $y = x^2 - 4x + 3$. Естественно попытаться свести её к одному из известных нам случаев. Здесь это сделать просто: выделяя из правой части формулы полный квадрат, мы приведём функцию к уже изученному ранее виду $y = a(x - d)^2 + h$.

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4 - 4) + 3 = (x - 2)^2 - 1.$$

Итак, мы имеем параболу, полученную из параболы $y = x^2$ смещением на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вниз вдоль оси ординат.

Воспользуемся этой идеей для создания общего алгоритма построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. В правой её части стоит квадратный трёхчлен, из которого, как нам известно, всегда можно выделить полный квадрат.

Значит, чтобы построить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, можно:

- выделить полный квадрат из соответствующего квадратного трёхчлена;
- переписать функцию в виде $y = a(x - d)^2 + h$;
- построить график функции $y = a(x - d)^2 + h$ по уже известному нам алгоритму.

Пример 1. Построить график функции $y = 2x^2 + x + 2$.

Решение:

$$y = 2\left(x^2 + \frac{x}{2}\right) + 2 = 2\left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) + 2 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}.$$

Графиком функции $y = 2x^2 + x + 2$ будет парабола, полученная из параболы $y = 2x^2$ смещением на $\frac{1}{4}$ влево вдоль оси абсцисс и на $\frac{15}{8}$ вверх вдоль оси ординат. Вершина этой параболы – точка $B\left(-\frac{1}{4}; \frac{15}{8}\right)$.

При $y = 0$ получим уравнение $2x^2 + x + 2 = 0$, которое не имеет корней. Следовательно, график не имеет общих точек с осью абсцисс.

Если $x = 0$, то $y = 2$ и, значит, график пересекает ось ординат в точке $C(0; 2)$. В силу симметрии он проходит также через точку $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Найдём и отметим дополнительные точки параболы $(1; 5)$ и $(-1; 3)$, а также симметричные к ним относительно оси, и проведём параболу (рис. 1).

Выделение полного квадрата из трёхчлена, вообще говоря, может оказаться достаточно громоздкой процедурой (это видно хотя бы из приведенного примера). Чтобы упростить решение и сэкономить время, можно, как и раньше, выполнить преобразования *в общем виде один раз*, а затем в практических задачах просто использовать готовую общую формулу.

Выделяя полный квадрат из квадратного трёхчлена, получим:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - d)^2 + h,$$

$$\text{где } d = -\frac{b}{2a}, \quad h = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Значит, графиком квадратичной функции является парабола, полученная из параболы $y = ax^2$ при помощи двух последовательных параллельных переносов: сдвигом на d единиц вдоль оси абсцисс Ox и на h единиц вдоль оси ординат Oy .

Из полученной формулы следует, что координаты вершины $B(x_B; y_B)$ искомой параболы равны $x_B = d = -\frac{b}{2a}$, $y_B = h = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Поэтому данную функцию можно записать в виде $y = a(x - x_B)^2 + y_B$.

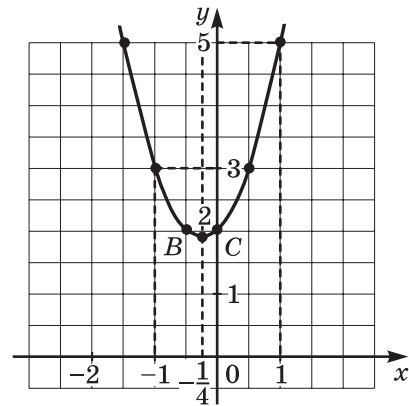


Рис. 1

Знание координат вершины $B(x_B; y_B)$ существенно облегчает построение графика: вершина подскажет, куда и на сколько нужно смещать параболу $y = ax^2$ вдоль осей. При этом формулу для x_B полезно запомнить, а y_B удобнее вычислить как значение функции в точке x_B , а именно: $y_B = y(x_B) = a(x_B)^2 + bx_B + c$. Следовательно,

$$x_B = -\frac{b}{2a}, \quad y_B = y(x_B).$$

Итак, мы приходим к новому способу построения графика квадратичной функции:

- вычислить координаты вершины параболы $B\left(x_B = -\frac{b}{2a}; y_B = y(x_B)\right)$;
- указать, как получить искомый график с помощью смещения графика $y = ax^2$;
- построить график функции $y = ax^2$ от вершины B .

По сути, этот способ отличается от предыдущего лишь первым шагом, но здесь уже не нужно выделять полный квадрат трёхчлена. Дополнительно можно записать функцию в виде $y = a(x - x_B)^2 + y_B$.

Пример 2.

Построить график функции $y = -x^2 + x - 1$.

Решение:

Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2};$$

$$y_B = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Вершина параболы – точка $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$. Значит, график функции $y = -x^2 + x - 1$ можно получить смещением параболы $y = -x^2$ на $\frac{1}{2}$ вправо вдоль оси Ox и на $\frac{3}{4}$ вниз вдоль оси Oy .

Ветви параболы направлены вниз. Осью симметрии является прямая $x = 0,5$.

При $y = 0$ получим уравнение $-x^2 + x - 1 = 0$, которое не имеет корней. Значит, график не имеет общих точек с осью абсцисс.

Если $x = 0$, то $y = -0^2 + 0 - 1 = -1$. Значит, график пересекает ось ординат в точке $C(0; -1)$ и проходит через симметричную ей точку $(1; -1)$.

Для более точного построения параболы отметим дополнительную точку $(2; -3)$ и симметричную ей точку $(-1; -3)$.

График функции $y = -x^2 + x - 1$ изображен на рис. 2.

Возможность преобразования квадратичной функции к виду $y = a(x - x_B)^2 + y_B$ позволяет сделать важный вывод о том, что *графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, является парабола*, которая может быть получена из графика $y = ax^2$ с помощью соответствующих сдвигов. Значит, графики этих функций обладают многими схожими свойствами. Так, сохраняется зависимость направления ветвей параболы от знака коэффициента a , зависимость крутизны ветвей от величины $|a|$. Вместе с тем, из-за сдвигов вдоль осей координат некоторые свойства графика $y = ax^2$ изменяются.

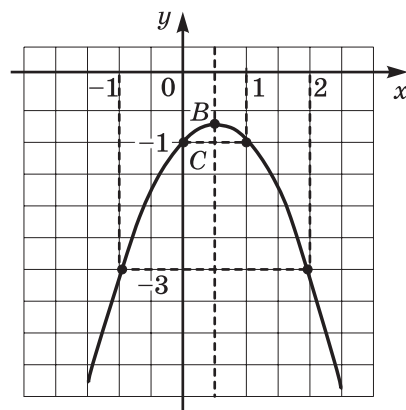


Рис. 2

Используя полученный вывод, перечислим *основные свойства квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, и её графика.

1. Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; y(x_v)\right)$.
2. Осью симметрии параболы является прямая $x = -\frac{b}{2a}$, проходящая через вершину и параллельная оси ординат.
3. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, а если $a < 0$, то вниз.
4. С увеличением $|a|$ крутизна ветвей параболы увеличивается, а с уменьшением — уменьшается.
5. При $b = 0$ квадратичная функция является чётной, а при $b \neq 0$ — ни чётной, ни нечётной.
6. При $a > 0$ функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, а при $a < 0$, наоборот, возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Всеми установленными свойствами можно пользоваться при построении графиков, чтобы упрощать свою работу. Так, в примерах 1 и 2 свойство симметрии параболы позволило сократить время на нахождение дополнительных точек.

Итак, мы приходим к следующему обобщённому *алгоритму построения графика квадратичной функции*.

Алгоритм построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$

1. Найти и отметить на координатной плоскости вершину параболы $B\left(x_v = -\frac{b}{2a}; y_v = y(x_v)\right)$.
2. Описать, с помощью какого сдвига и вдоль каких осей искомый график получается из графика $y = ax^2$, указать направление ветвей параболы.
3. Провести ось симметрии параболы.
4. Найти и отметить точки пересечения графика с осями координат. (Если координаты иррациональны, то этот шаг можно пропустить.)
5. При необходимости найти и отметить дополнительные точки и симметричные к ним относительно оси параболы.
6. Построить параболу, используя отмеченные точки.

К

357

Что общего в функциях? Найдите формулу, при помощи которой можно задать все эти функции, предварительно упростив правую часть двух последних функций:

$$y = \frac{1}{3}x^2; \quad y = 3x^2 + 4; \quad y = x^2 - 3x + 0,5; \quad y = 2(x - 6)^2; \quad y = (x - 2)^2 - 1.$$

Предположите, как называется полученная функция, и сопоставьте свой вариант с определением на стр. 94 в учебнике.

358

Запишите функцию $y = ax^2 + bx + c$ при $a = 1$, $b = 2$ и $c = 3$; при $a = 2$, $b = 0$ и $c = 3$; при $a = -1$, $b = 2$ и $c = 0$; при $a = 4$, $b = 0$ и $c = 0$. Графики каких из этих функций вы уже умеете строить?

359 Выделите полный квадрат трёхчлена $x^2 - 4x + 3$.

360 1) Постройте график функции $y = x^2 - 4x + 3$. Какое преобразование поможет свести данную функцию к известному случаю?

2) Подойдет ли способ, использованный при построении графика $y = x^2 - 4x + 3$, для построения всех функций вида $y = ax^2 + bx + c$? Сравните свои предположения со способом построения графика квадратичной функции, приведённым на с. 95.

361 Постройте график функции $y = 2x^2 + x - 3$. Является ли полученный вами способ удобным в этом случае? Познакомьтесь с ещё одним способом построения графика квадратичной функции в учебнике и выполните построение, используя формулу вершины параболы.

362 Найдите координаты вершины параболы $y = -3x^2 + 2x - 1$. На каких промежутках функция $y = -3x^2 + 2x - 1$ возрастает или убывает?

363 Найдите координаты вершины параболы:

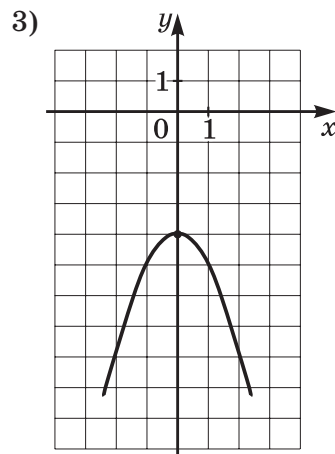
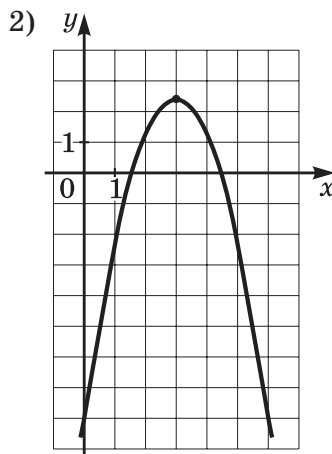
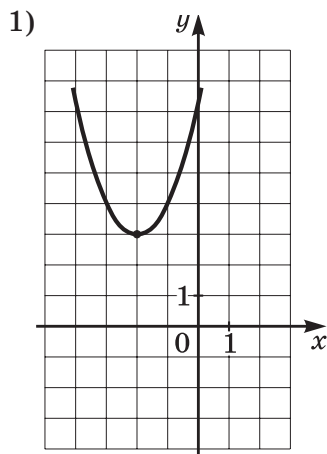
а) $y = x^2 + 8x - 3$; б) $y = 3x^2 - 4x$; в) $y = -2x^2 - x + 1$; г) $y = -x^2 - 5$.

364 Постройте график квадратичной функции:

а) $y = x^2 + x - 12$; в) $y = -x^2 - 2x - 1$; д) $y = 2x^2 - 6x$;
 б) $y = 3x^2 - 6x - 2$; г) $y = -x^2 + 4x + 4$; е) $y = -x^2 + 9$.

Обведите зелёным цветом ту часть графика, где значения функции положительны, а синим цветом – где значения функции отрицательны.

365 Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графически. Определите знаки коэффициентов a , b , c и дискриминанта D квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.



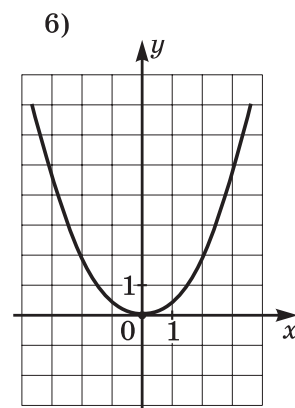
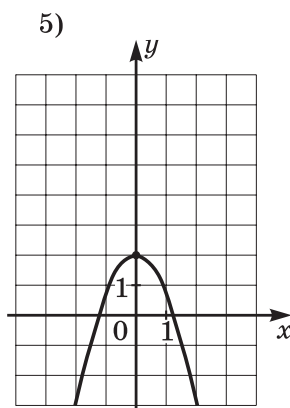
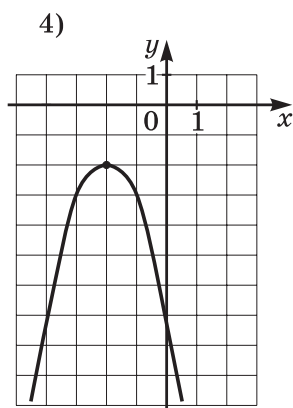
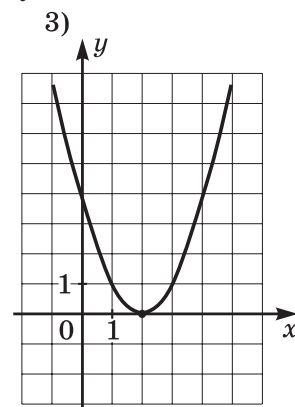
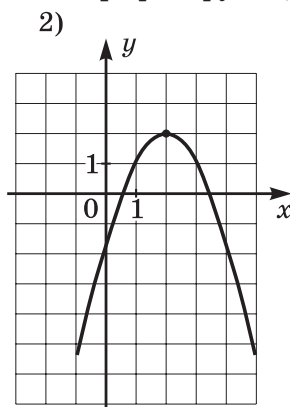
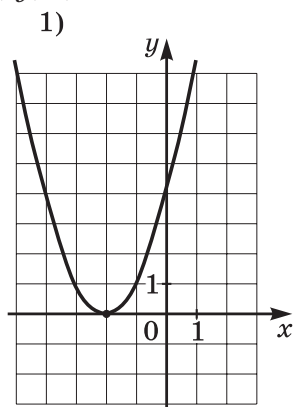
366 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x - 7 \geq 3 \\ 5 - 2x < -2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x - 2 \leq 1 \\ 13 - 4x < 1 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 1 - 2x \leq 3 \\ 3x + 2 < 1 \end{cases}$; ж) $\begin{cases} 6 - 3x \geq 7 \\ 3 + 5x > 1 \end{cases}$;
 б) $\begin{cases} 2 - 5x \leq -3 \\ 3x - 8 < 5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x - 2 \leq 4 \\ 3x - 12 > 5 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 2 - 4x > 3 \\ 3x + 2 \leq 1 \end{cases}$; з) $\begin{cases} 3 - 4x > 5 \\ 6 + 9x \leq 1 \end{cases}$.

367 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x - y \geq 0 \\ x + 3y \leq 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ -2x + y - 4 \leq 0 \end{cases}$.

368 Чтобы узнать имя учёного, который придумал обозначать неизвестные буквами x, y, z , сопоставьте последовательно график функции с формулой.



Р $y = -x^2 + 2$;

А $y = -(x + 2)^2 - 2$;

Д $y = (x + 2)^2$;

К $y = (x - 2)^2$;

Е $y = -(x - 2)^2 + 2$;

Т $y = \frac{x^2}{2}$.

1	2	3	4	5	6

Д

369 Выделите полный квадрат трёхчлена:

а) $x^2 + 6x - 7$;

в) $-x^2 - 4x + 1$;

б) $2x^2 - 4x + 5$;

г) $-3x^2 + 2x + 1$.

370 Постройте график квадратичной функции:

а) $y = x^2 + 2x - 3$;

в) $y = 2x^2 - 4x + 1$;

д) $y = -3x^2 - 6x + 5$.

б) $y = 3x^2 + 2x - 1$;

г) $y = 2x^2 + 4x$;

е) $y = -2x^2 - 5x + 1$.

371 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2-3x > 1 \\ 2x+3 < 2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 5x+4 \geq 2 \\ 3-2x < 4 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3+4x \leq 1 \\ 2-7x > 6 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 2+11x \leq -5 \\ 3-3x < 5 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} 12x-9,6 \geq 0 \\ 14-2\frac{1}{3}x < 0 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} -10,5-7x < 0 \\ 1,3x-11,7 \leq 0 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 2,4x+14,4 \geq 0 \\ -5,1+2x \leq 0 \end{cases}$;

з) $\begin{cases} 2,8x-14 \geq 0 \\ 6-1,2x \geq 0 \end{cases}$.

с

372*

На рисунке изображены графики трёх квадратных трёхчленов. Могут ли это быть трёхчлены $ax^2 + bx + c$, $cx^2 + ax + b$, $bx^2 + cx + a$?

373*

На рисунке изображены графики трёх квадратных трёхчленов. Могут ли это быть трёхчлены $ax^2 + bx + c$, $cx^2 + ax + b$, $bx^2 + cx + a$?

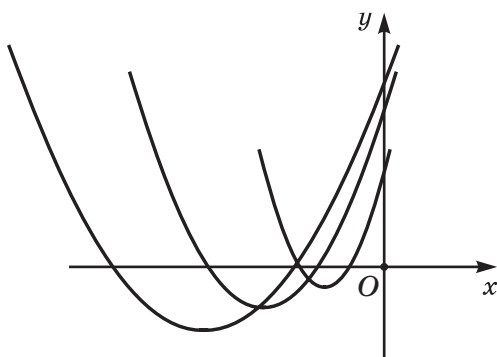


Рис. к задаче № 372

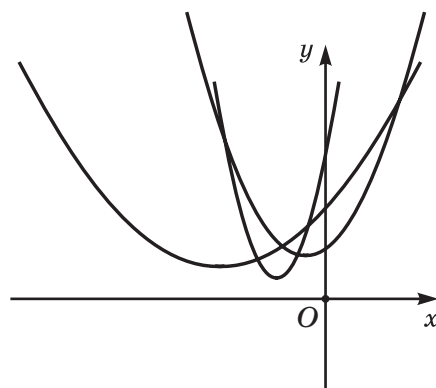


Рис. к задаче № 373

374*

На рисунке изображен график приведённого квадратного трёхчлена (ось ординат стерлась, расстояние между соседними отмеченными точками равно 1). Чему равен дискриминант этого трёхчлена?

375*

На рисунке изображены графики трёх квадратных трёхчленов. Можно ли подобрать такие числа a , b и c , чтобы это были графики трёхчленов $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ и $y = cx^2 + ax + b$?

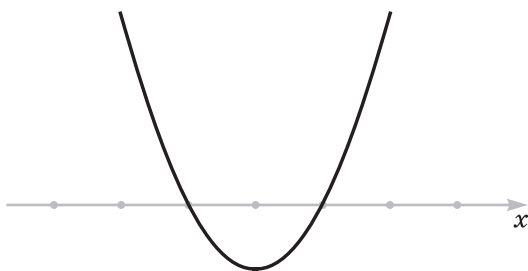


Рис. к задаче № 374

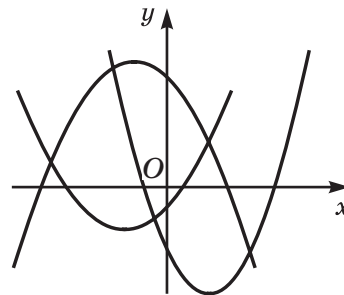


Рис. к задаче № 375

376*

Квадратный трёхчлен $y = ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + b + c > 0$. Найдите знак коэффициента c .

4.2.3.* Наибольшее и наименьшее значения квадратного трёхчлена



Жаден разум человеческий. Он не может ни остановиться, ни пребывать в покое, а порывается всё дальше.

Френсис Бэкон (1561–1626),
английский философ, историк, политический деятель

Практические задачи, которые приходится решать в жизни разным людям – исследователям, экономистам, бизнесменам, спортсменам, – часто бывают связаны с вопросами: как быстрее, выше, больше или меньше, удобнее и эффективнее... Другими словами, каким образом получить наилучший результат. Исследование математических моделей таких задач сводится к поиску наибольшего или наименьшего значения функции. В данном пункте мы будем учиться использовать график квадратичной функции для нахождения наибольшего и наименьшего значения квадратных трёхчленов.

Из графика общего случая квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ легко видеть, что в случае $a > 0$ квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ принимает **наименьшее значение** в вершине параболы, то есть при $x = -\frac{b}{2a}$; это наименьшее значение равно $\frac{4ac - b^2}{4a}$ (рис. 1а).

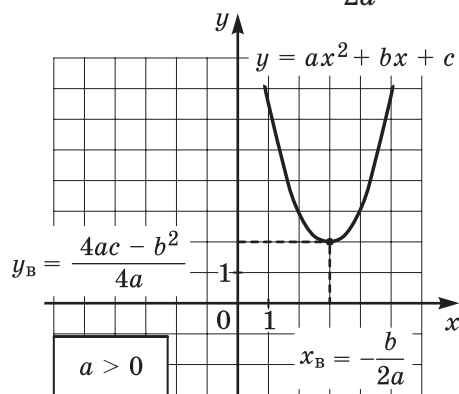


Рис. 1а

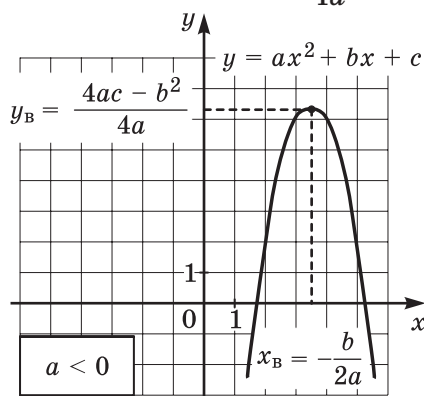


Рис. 1б

Если $a < 0$, то квадратный трёхчлен принимает **наибольшее значение** в вершине параболы, то есть при $x = -\frac{b}{2a}$; оно также равно $\frac{4ac - b^2}{4a}$ (рис. 1б). Помнить это наибольшее (наименьшее) значение в общем виде нет необходимости, важно лишь знать, что оно достигается в вершине параболы.

Итак, мы приходим к выводу:

Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ принимает наибольшее (наименьшее) значение в вершине параболы, то есть при $x = -\frac{b}{2a}$.

Пример 1.

Какое наименьшее значение принимает выражение $5x^2 - 10x + 1$?

Решение:

Вычислим абсциссу вершины параболы $y = 5x^2 - 10x + 1$: $x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2 \cdot 5} = 1$.

Так как $a > 0$, в точке x_B достигается *наименьшее* значение квадратного трёхчлена. Если $x = 1$, то $5x^2 - 10x + 1 = 5 - 10 + 1 = -4$.

Ответ: наименьшее значение выражения $5x^2 - 10x + 1$ равно -4 .

В практических задачах часто возникает необходимость найти наибольшее или наименьшее значение квадратного трёхчлена не при всех возможных значениях x , а лишь при x , принадлежащих некоторому отрезку $[A; B]$. Здесь возникает два различных случая: абсцисса вершины параболы может принадлежать отрезку $[A; B]$ и не принадлежать ему. Рассмотрим их.

Случай 1. Абсцисса вершины параболы (x_B) принадлежит отрезку $[A; B]$.

1) Пусть $a > 0$. Так как в этом случае функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наименьшее значение в своей вершине, а абсцисса вершины принадлежит отрезку $[A; B]$, квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение при x_B (рис. 2).

Для нахождения наибольшего значения нужно рассмотреть значения трёхчлена в концах отрезка – точках A и B . Большее из них и будет наибольшим значением квадратного трёхчлена на отрезке $[A; B]$.

2) Пусть $a < 0$. Так как в этом случае функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наибольшее значение в своей вершине, а абсцисса вершины принадлежит отрезку $[A; B]$, квадратный трёхчлен принимает наибольшее значение при x_B (рис. 3).

Для нахождения наименьшего значения нужно рассмотреть значения трёхчлена в концах отрезка – точках A и B . Меньшее из них и будет наименьшим значением квадратного трёхчлена на отрезке $[A; B]$

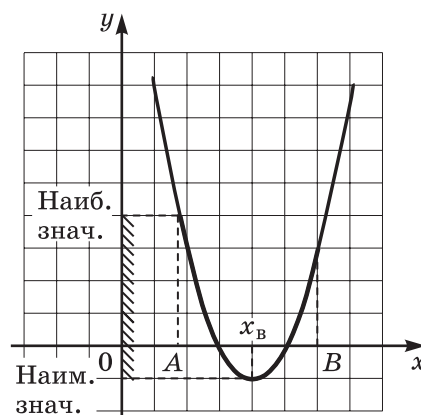


Рис. 2

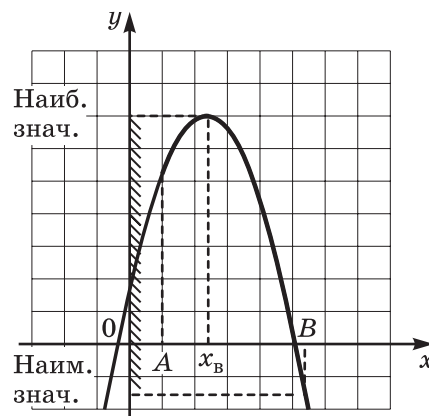


Рис. 3

* * *

На самом деле из симметричности графика относительно оси параболы можно понять, что наибольшее (при $a > 0$) или наименьшее (при $a < 0$) значение будет в той из точек A или B , которая дальше от x_B .

Случай 2. Абсцисса вершины параболы (x_B) не принадлежит отрезку $[A; B]$.

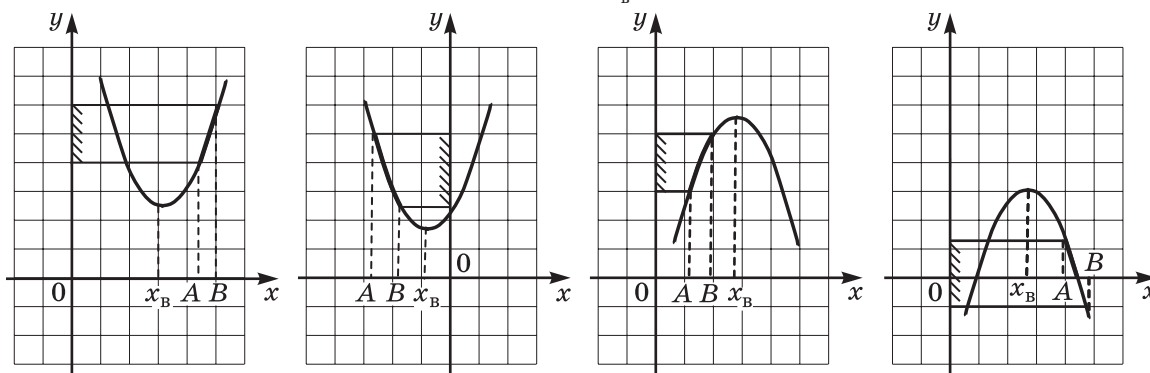


Рис. 4

Так как $x_v \notin [A; B]$, наименьшее и наибольшее значения функция принимает на концах этого отрезка. Поэтому для нахождения наибольшего и наименьшего значений трёхчлена рассмотрим его значения в концах отрезка – точках A и B . Больше из них будет наибольшим значением трёхчлена на отрезке $[A; B]$, а меньше – наименьшим значением.

Все возможные расположения параболы в случае 2 изображены на рис. 4.

* * *

Понять, в какой из точек A или B будет наибольшее, а в какой наименьшее значение, можно и не вычисляя этих значений. Для этого достаточно понять, на какую из ветвей параболы попадают точки с абсциссами A и B . Например, если $a > 0$, а точки A и B правее точки x_v , то они лежат на правой ветви параболы, там квадратичная функция возрастает. Поэтому в точке B значение будет больше, чем в точке A .

Из проведённых рассуждений можно сделать следующий вывод:

Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на отрезке $[A; B]$ либо при $x_v = -\frac{b}{2a}$, либо при $x = A$, либо при $x = B$.

Пример 2.

Найти наибольшее и наименьшее значения, которые принимает квадратный трёхчлен $2x^2 - 5x + 3$ при $x \in [1; 2]$.

Решение:

Сначала нужно установить, принадлежит ли абсцисса x_v вершины параболы $y = 2x^2 - 5x + 3$ отрезку $[1; 2]$. Для этого найдем её значение: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

Значит, $x_v \in [1; 2]$ и $a > 0$. Следовательно, в точке x_v достигается *наименьшее* значение квадратного трёхчлена. Вычислим его: $2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 3 = -\frac{1}{8}$.

Чтобы найти *наибольшее* значение, вычислим значения трёхчлена в концах отрезка, то есть при $x = 1$ и $x = 2$.

Если $x = 1$, то $2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot 1 - 5 + 3 = 0$.

Если $x = 2$, то $2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 3 = 1$.

Сравнивая полученные значения ($1 > 0$), делаем вывод, что наибольшее значение квадратного трёхчлена на отрезке $[1; 2]$ равно 1.

Ответ: наименьшее значение трёхчлена $2x^2 - 5x + 3$ на отрезке $[1; 2]$ равно $-\frac{1}{8}$, а наибольшее значение равно 1.

Итак, мы приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм нахождения наименьшего (наибольшего) значения квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ на отрезке $[A; B]$

1. Вычислить значение абсциссы вершины параболы $x_v = -\frac{b}{2a}$ и определить принадлежность x_v отрезку $[A; B]$.
2. Если $x_v \in [A; B]$, вычислить значение трёхчлена при x_v . При $a > 0$ в точке x_v достигается *наименьшее* значение, при $a < 0$ – *наибольшее*.
3. Вычислить значения трёхчлена при $x = A$ и при $x = B$.
4. Сравнить полученные значения трёхчлена и сделать вывод о его *наибольшем* и *наименьшем* значениях.

Пример 3.

Найти наибольшее и наименьшее значения квадратного трёхчлена:

а) $7x^2 + x + 1$ на отрезке $[0; 1]$; б) $-2x^2 + 4x$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение:

а) $x_{\text{в}} = -\frac{1}{14}$, $x_{\text{в}} \notin [0; 1]$. Если $x = 0$, то $7x^2 + x + 1 = 1$; если $x = 1$, то $7x^2 + x + 1 = 9$.

Ответ: наибольшее значение выражения $7x^2 + x + 1$ на отрезке $[0; 1]$ равно 9, наименьшее – равно 1.

б) $x_{\text{в}} = 1$, $x_{\text{в}} \in [0; 2]$ и $a < 0$. Значит, наибольшее значение трёхчлена достигается при $x_{\text{в}} = 1$ и равно $-2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 2$. Если $x = 0$, то $-2x^2 + 4x = 0$; если $x = 2$, то $-2x^2 + 4x = 0$.

Значения на концах отрезка совпали, что объясняется симметрией графика.

Ответ: наибольшее значение выражения $-2x^2 + 4x$ на отрезке $[0; 2]$ равно 2, наименьшее – равно 0.

* * *

Пример 4.

Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v = 19,6$ м/с. На какую наибольшую высоту может подняться тело в течение: а) первой секунды после броска; б) трёх секунд после броска? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

В момент времени t после броска тело будет находиться на высоте $h = vt - \frac{gt^2}{2}$, где g – ускорение свободного падения. Так как $g = 9,8$ м/с² и $v = 19,6$ м/с, $h = 19,6t - 4,9t^2$ м. Нужно найти наибольшее значение трёхчлена $19,6t - 4,9t^2$ на отрезке: а) $[0; 1]$; б) $[0; 3]$.

Вершина параболы $h = -4,9t^2 + 19,6t$ имеет абсциссу $t_{\text{в}} = \frac{19,6}{2 \cdot 4,9} = 2$.

а) Так как $t_{\text{в}} \notin [0; 1]$, нужно найти значения трёхчлена в концах отрезка.

Если $t = 0$, то $19,6t - 4,9t^2 = 0$; если $t = 1$, то $19,6t - 4,9t^2 = 14,7$.

Наибольшее значение равно 14,7.

б) Так как $t_{\text{в}} \in [0; 3]$ и $-4,9 < 0$, наибольшее значение достигается в точке $t = 2$ и равно $19,6 \cdot 2 - 4,9 \cdot 4 = 19,6$.

Ответ: а) 14,7 м; б) 19,6 м.

К

377 Найдите абсциссу вершины параболы $y = -2x^2 - 4x + 1$.

Вычислите значение функции в вершине и при $x = 0$.

Сравните полученные значения.

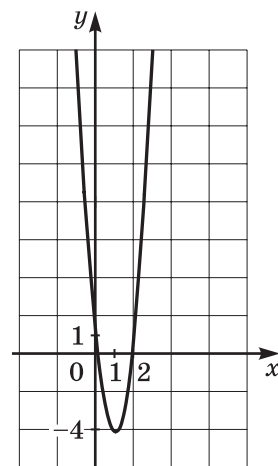
378

Вычислите, какие значения принимает функция $y = 0,5x^2 + x - 4$ на концах отрезка $x \in [2; 4]$. На каком конце этого отрезка функция принимает большее значение?

379

1) Определите с помощью графика, какое наименьшее значение принимает функция $y = 5x^2 - 10x + 1$. При каком значении аргумента это происходит? В какой точке графика трёхчлен $5x^2 - 10x + 1$ принимает наименьшее значение?

2) Как найти наименьшее значение квадратного трёхчлена $5x^2 - 10x + 1$, не выполняя построения графика? Сопоставьте свое решение со способом, предложенным на с. 101.



$$y = 5x^2 - 10x + 1$$

3) В какой точке трёхчлен $-5x^2 + 10x - 1$ принимает свое наибольшее значение? Как вычислить это значение, не выполняя построения графика?

4) Опираясь на проведенные рассуждения, предположите, как найти наименьшее (наибольшее) значение квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, не выполняя построения. Сопоставьте свой вывод с выводом на с. 101.

380

1) Определите с помощью графика, какое наименьшее и наибольшее значения принимает функция $y = 5x^2 - 10x + 1$ на отрезке $[0; 3]$. При каких значениях аргумента это происходит?

2) Определите с помощью графика, какое наименьшее и наибольшее значения принимает функция $y = 5x^2 - 10x + 1$ на отрезке $[2; 3]$. При каких значениях аргумента это происходит?

3) Как найти наименьшее значение квадратного трёхчлена $5x^2 - 10x + 1$ на отрезке $[A; B]$, не выполняя построения графика?

4) Опираясь на проведенные рассуждения, предположите, как вычислить наименьшее и наибольшее значения квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ на отрезке $[A; B]$. Сопоставьте свой способ с алгоритмом, предложенным на с. 103.

381

Найдите наибольшее и наименьшие значения квадратного трёхчлена:

а) $-x^2 + 5x + 7$ на отрезке $[3; 4]$;

г) $2x^2 - x - 3$ на отрезке $[-1; 1]$;

б) $-2x^2 + 7x + 1$ на отрезке $[1; 3]$;

д) $x^2 - 11x + 24$ на отрезке $[0; 5]$;

в) $-3x^2 + 2x$ на отрезке $[0; 2]$;

е) $5x^2 - 3x$ на отрезке $[0; 1]$.

382

Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v = 14,7$ м/с. На какую наибольшую высоту может подняться тело в течение: а) $\frac{1}{7}$ первой секунды после броска; б) двух секунд после броска? Сопротивлением воздуха пренебречь.

π

383 Для данных квадратичных функций найдите координаты вершин парабол $(x_B; y_B)$.

№	Квадратичная функция	$(x_B; y_B)$	Искомое слово
1	$y = x^2 - 9$		Ж
2	$y = x^2 - 4x + 3$		Д
3	$y = x^2 + 5x + 7$		А
4	$y = -x^2 + x$		Р
5	$y = -x^2 - 2x - 1$		Б
6	$y = -3x^2 + 2x - 6$		У

а) Заполните таблицу. Расположив абсциссы вершин в порядке убывания, прочитайте слово. Какие традиции помогают развивать это в вашем классном коллективе?

б) Найдите точки пересечения парабол с осью Ox и с осью Oy .

в) Постройте эскизы графиков и выделите зелёным цветом ту часть графика, где значения функции положительны, красным цветом – где значения функции отрицательны, синим цветом – те точки, в которых функция равна нулю.

384 Докажите, что значение выражения есть число рациональное:

а) $4\sqrt{3\frac{1}{2}} - 0,5\sqrt{56} - 3\sqrt{1\frac{5}{9}}$;

в) $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$;

б) $15\sqrt{\frac{3}{5}} - 0,5\sqrt{60} + 2\sqrt{3\frac{3}{4}} - 3\sqrt{15}$;

г) $(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})$.

385 Упростите выражение:

а) $10\sqrt{\frac{2}{5}} - 0,5\sqrt{160} + 3\sqrt{1\frac{1}{9}}$;

е) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{5}$;

б) $3\sqrt{2\frac{1}{3}} - \sqrt{84} - 4\sqrt{5\frac{1}{4}}$;

ж) $\sqrt{(\sqrt{6}-5)^2} - 5$;

в) $\sqrt{168} + 4\sqrt{10\frac{1}{2}} - 5\sqrt{1\frac{17}{25}}$;

з) $\sqrt{(\sqrt{7}-5)^2} + \sqrt{7}$;

г) $\sqrt{152} + 9\sqrt{4\frac{2}{9}} + 2\sqrt{9\frac{1}{2}}$;

и) $\sqrt{(2\sqrt{10}-6)^2} - \sqrt{10}$;

д) $4\sqrt{8\frac{1}{2}} - \sqrt{136} - 10\sqrt{1\frac{9}{25}}$;

к) $\sqrt{(5-\sqrt{30})^2} + \sqrt{(6-\sqrt{30})^2}$.

Д

386 Найдите наибольшее и наименьшее значения квадратного трёхчлена:

а) $x^2 + 2x + 5$ на отрезке $[0; 2]$;

б) $3x^2 + 2x + 1$ на отрезке $[-2; 2]$;

в) $2x^2 - 3x - 2$ на отрезке $[0; 1,5]$;

г) $-x^2 - 2x + 2$ на отрезке $[0; 3]$.

387 Упростите выражение:

а) $\sqrt{6} - \sqrt{(\sqrt{6}-2)^2}$;

в) $(\sqrt{14} + \sqrt{7})(\sqrt{7} - \sqrt{14})$;

б) $\sqrt{(\sqrt{15}-4)^2} + \sqrt{(\sqrt{15}-3)^2}$;

г) $(\sqrt{8}-5)^2 + 20\sqrt{2}$.

С

388* Набор, состоящий из целых чисел a, b, c , заменили на набор $a-1, b+1, c^2$. В результате получились те же числа a, b, c , но в другом порядке. Найдите числа a, b, c , если известно, что их сумма равна 1001.

389* Существует ли 30-значное число с ненулевыми цифрами, которое не делится на 9, но такое, что при вычёркивании любой одной его цифры получается 29-значное число, которое делится на 9?



§ 3. Квадратные неравенства

4.3.1. Решение квадратных неравенств



Много из математики не остаётся в памяти, но когда поймёшь её, тогда легко при случае вспомнить забытое.

М. В. Остроградский (1801–1861),
русский математик, педагог

Мы уже умеем решать задачи с помощью квадратных уравнений, однако, как мы помним, практические задачи могут сводиться и к решению неравенства. Естественно, что среди них могут быть и неравенства со второй степенью переменной. Поэтому в данном пункте мы научимся решать такие неравенства. А ключом к их решению станут уже имеющиеся у нас знания о квадратичной функции и ее графике.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

Одну сторону квадрата увеличили на 3,5 см, а вторую на 5 см. В результате получили прямоугольник, площадь которого составила менее 45 см². Укажите все возможные значения длины стороны квадрата.

Решение:

Пусть сторона квадрата составляет x см, $x > 0$. Тогда стороны полученного прямоугольника равны $(x + 3,5)$ см и $(x + 5)$ см. Значит, его площадь равна произведению $(x + 3,5)(x + 5)$ см², что по условию задачи составляет менее 45 см². Таким образом, мы приходим к неравенству: $(x + 3,5)(x + 5) < 45$.

Выполняя преобразования, получим неравенство, в левой части которого стоит квадратный трёхчлен, а в правой – нуль:

$$(x + 3,5)(x + 5) < 45 \Leftrightarrow x^2 + 3,5x + 5x + 17,5 - 45 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 8,5x - 27,5 < 0.$$

Данное неравенство не сводится к линейному, и мы приходим к необходимости изучить новый для нас тип неравенств – *квадратные неравенства*.

Определение. *Квадратным неравенством* называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, где a, b, c – некоторые числа, $a \neq 0$.

Решим полученное в задаче неравенство и применим проведенные рассуждения для построения общего алгоритма решения квадратных неравенств.

Чтобы решить неравенство, нам необходимо найти все значения x , при которых квадратный трёхчлен $x^2 + 8,5x - 27,5$ принимает отрицательные значения. Эту новую задачу переформулируем так, чтобы свести её к уже известным нам алгоритмам: указать все значения x , при которых квадратичная функция $y = x^2 + 8,5x - 27,5$ принимает отрицательные значения. А для ответа на этот вопрос мы можем воспользоваться графиком квадратичной функции, который строить уже умеем.

График функции $y = x^2 + 8,5x - 27,5$ изображён на рис. 1. Ясно, что функция равна нулю в точках пересечения с осью абсцисс, положительна в точках, лежащих выше оси абсцисс, и отрицательна в точках, лежащих ниже оси абсцисс.

Часть параболы, где значения функции меньше нуля, выделена на графике жирной линией. Нам осталось лишь указать соответствующие значения x . Мы видим, что абсциссы нужных нам точек графика принадлежат интервалу $(-11; 2,5)$.

Итак, решением неравенства является множество значений $x \in (-11; 2,5)$.

Найденный нами способ рассуждений даёт идею для создания *общего алгоритма решения квадратного неравенства*:

- построить график, соответствующий квадратичной функции;
- определить по графику, при каких значениях x функция положительна, равна нулю, отрицательна;
- выбрать и записать ответ, соответствующий знаку неравенства.

Можно ли упростить этот способ решения квадратных неравенств?

Очевидно, что самой трудоемкой частью данного алгоритма является построение графика квадратичной функции. Однако можно заметить, что для решения неравенства нужен, собственно, не сам график, а лишь направление ветвей параболы и точки её пересечения с осью абсцисс.

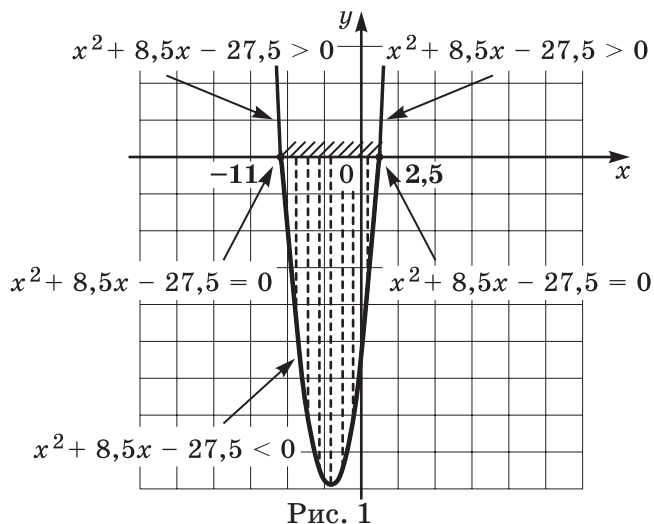
Между тем направление ветвей параболы легко определяется по знаку коэффициента при x^2 – график для этого строить не требуется. Более того, для простоты мы можем исследовать лишь случай $a > 0$, так как при $a < 0$ обе части неравенства можно умножить на (-1) и получить неравенство противоположного знака, равносильное исходному.

Для определения точек пересечения параболы с осью абсцисс график также не нужен: достаточно решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, корни которого (если они существуют) как раз и являются абсциссами искомых точек.

Поэтому для поиска решения неравенства нужен не график, а простая схема, показывающая расположение параболы относительно оси Ox . Все варианты таких схем в зависимости от знака дискриминанта D , а также решения соответствующих неравенств приведены в следующей таблице (при $a > 0$).

Схема Неравенство	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_B) \cup (x_B; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (x_1; x_2)$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in [x_1; x_2]$	$x = x_B$	$x \in \emptyset$

Мы можем записать алгоритм решения квадратных неравенств.



Алгоритм решения квадратного неравенства

1. Если коэффициент при x^2 отрицательный, нужно умножить обе части неравенства на (-1) и далее решать неравенство противоположного знака.
2. Определить знак дискриминанта квадратного трёхчлена, стоящего в левой части неравенства и найти его корни (если они существуют).
3. Изобразить схематически график соответствующей квадратичной функции.
4. Определить по схеме интервалы или точки, удовлетворяющие знаку неравенства (или то, что таких нет).
5. Записать ответ.

Пример 1.

Решите неравенство:

а) $5x^2 - 7x + 2 > 0$;

в) $x^2 - 4x + 4 > 0$;

д) $2x^2 + x + 1 \geq 0$;

б) $2x^2 - 7x - 1 < 0$;

г) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$;

е) $-3x^2 - x - 2 > 0$.

Решение:

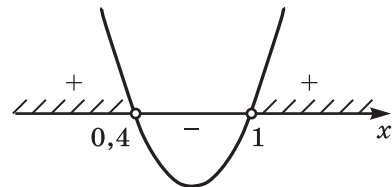
а) $5x^2 - 7x + 2 > 0$.

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9, D > 0$.

Найдем корни квадратного трёхчлена:

$x_1 = \frac{7-3}{10} = 0,4; \quad x_2 = \frac{7+3}{10} = 1.$

Ответ: $x \in (-\infty; 0,4) \cup (1; +\infty)$.



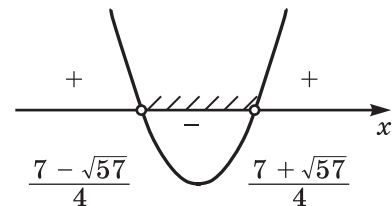
б) $2x^2 - 7x - 1 < 0$.

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 57, D > 0$.

Найдем корни квадратного трёхчлена:

$x_1 = \frac{7-\sqrt{57}}{4}; \quad x_2 = \frac{7+\sqrt{57}}{4}.$

Ответ: $x \in \left(\frac{7-\sqrt{57}}{4}; \frac{7+\sqrt{57}}{4} \right)$.

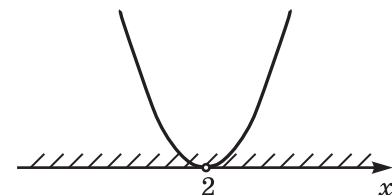


в) $x^2 - 4x + 4 > 0$.

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.

Найдем корень квадратного трёхчлена: $x = 2$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.



г) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$.

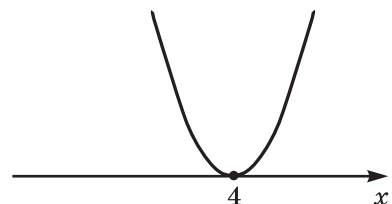
Умножим обе части неравенства на (-1) :

$-x^2 + 8x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 \leq 0$.

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$.

Найдем корень квадратного трёхчлена: $x = 4$.Неравенство нестрогое, поэтому ему удовлетворяет значение $x = 4$, при котором функция равна нулю.

Ответ: 4.



$$д) 2x^2 + x + 1 \geq 0.$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7, D < 0.$$

Все точки параболы лежат выше оси x , поэтому неравенству удовлетворяет любое действительное число.

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; +\infty).$$

$$е) -3x^2 - x - 2 > 0.$$

Умножим обе части неравенства на (-1) :

$$-3x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + x + 2 < 0.$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -23, D < 0.$$

Так как все точки параболы лежат выше оси x , то значений x , удовлетворяющих знаку неравенства, нет.

$$\text{Ответ: } \emptyset.$$

Примечание. Среди рассмотренных нами примеров было два неравенства с отрицательным старшим коэффициентом. Вообще говоря, такие неравенства можно решать и непосредственно, то есть изображая схематически параболу, ветви которой направлены вниз. Например, на рис. 2 изображен график, полученный при $D > 0$. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена ($x_1 < x_2$), то, например, решение неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$ будет иметь вид $x \in [x_1; x_2]$.

Вернёмся к нашей задаче 1. Помня, что по условию задачи $x > 0$, мы выбираем только положительную часть полученного интервала, то есть фактически решаем систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 17x - 55 < 0 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Решением системы будет являться пересечение множеств решений каждого из двух данных неравенств: $(-11; 2,5) \cap (0; +\infty) = (0; 2,5)$.

Ответ: длина стороны квадрата может быть равна любому числу, большему нуля, но меньшему 2,5 см.

Пример 2. Решить систему неравенств:

$$а) \begin{cases} 2x^2 - 3x > -1 \\ 5x - 1 \leq 2x + 8 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} x^2 + 4x - 3 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 \leq 0 \end{cases}.$$

Решение:

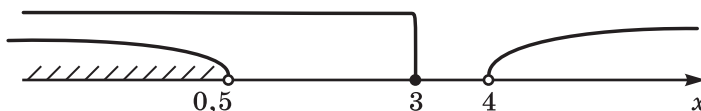
$$а) \begin{cases} 2x^2 - 3x > -1 \\ 5x - 1 \leq 2x + 8 \end{cases}.$$

Решим первое неравенство $2x^2 - 3x + 1 > 0$. $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$, $D > 0$.

Корни квадратного трёхчлена: $x_1 = 0,5$; $x_2 = 1$. Следовательно, решением данного неравенства является множество значений $x \in (-\infty; 0,5) \cup (1; +\infty)$.

Второе неравенство сводится к линейному: $3x \leq 9$. Его решением является $x \in (-\infty; 3]$.

Найдем пересечение множеств решений неравенств системы:



$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; 0,5).$$

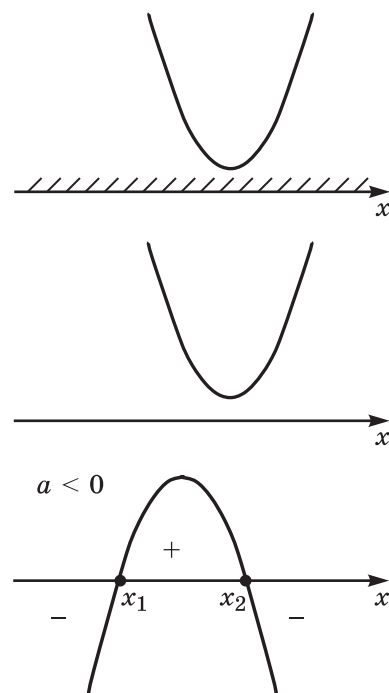


Рис. 2

$$б) \begin{cases} x^2 + 4x - 3 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 \leq 0 \end{cases}.$$

Решим первое неравенство $x^2 + 4x - 3 > 0$. $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 28$, $D > 0$.

Корни квадратного трёхчлена: $x_1 = -2 - \sqrt{7}$; $x_2 = -2 + \sqrt{7}$.

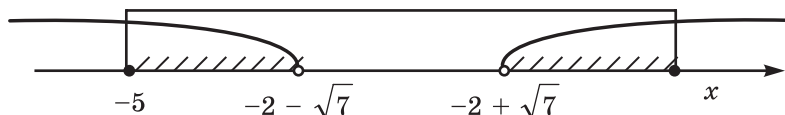
Множество решений данного неравенства: $x \in (-\infty; -2 - \sqrt{7}) \cup (-2 + \sqrt{7}; +\infty)$.

Решим второе неравенство $x^2 + 4x - 5 \leq 0$. $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36$, $D > 0$.

Корни квадратного трёхчлена $x_1 = -5$; $x_2 = 1$. Множество решений второго неравенства $x \in [-5; 1]$.

Так как $2 < \sqrt{7} < 3$, число $-2 - \sqrt{7} \in (-5; -4)$, а число $-2 + \sqrt{7} \in (0; 1)$.

Найдём пересечение множеств решений неравенств системы:



Ответ: $x \in [-5; -2 - \sqrt{7}) \cup (-2 + \sqrt{7}; 1]$.

* * *

Пример 3.

Решить систему неравенств:
$$\begin{cases} x^2 + 12 \geq 8|x| \\ x^2 + 7x - 8 < 0 \\ x^2 + 11x + 18 \leq 0 \end{cases}.$$

Решение:

1) Первое неравенство системы приводится к виду $x^2 - 8|x| + 12 \geq 0$.

После замены $|x| = t$ неравенство примет вид $t^2 - 8t + 12 \geq 0$. Корни квадратного трёхчлена $t_1 = 2$, $t_2 = 6$. Решение этого неравенства $t \in (-\infty; 2] \cup [6; +\infty)$.

Так как $t = |x|$, то t может принимать только неотрицательные значения. Отбрасывая из полученного множества отрицательные числа, получим, что $t \in [0; 2] \cup [6; +\infty)$.

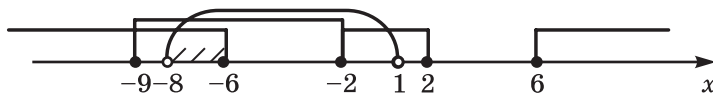
Вернемся к переменной x :

$|x| \in [0; 2] \cup [6; +\infty)$, значит, $x \in (-\infty; -6] \cup [-2; 2] \cup [6; +\infty)$.

2) Решим второе неравенство. Корни квадратного трёхчлена $x_1 = -8$; $x_2 = 1$. Множество решений второго неравенства $x \in (-8; 1)$.

3) Решим третье неравенство системы. Корни квадратного трёхчлена $x_1 = -9$; $x_2 = -2$. Множество решений третьего неравенства $x \in [-9; -2]$.

Найдём пересечение трёх полученных множеств и запишем множество решений системы:



Ответ: $x \in (-8; -6] \cup \{-2\}$.

К

390

Решите неравенства:

а) $7x + 14 > 0$;

б) $2x - 1 < 0$;

в) $-4x + 4 > 0$;

г) $-8x - 2 \geq 0$.

Вспомните, как называются данные неравенства.

Предположите, какие неравенства называют квадратными. Проверьте свое предположение по учебнику. Какое утверждение поможет это сделать?

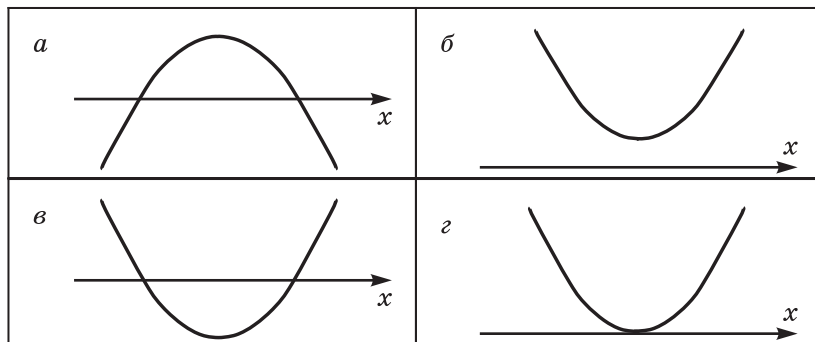
391 От чего зависит расположение параболы относительно оси абсцисс? Установите соответствие между квадратичными функциями и схематичными изображениями их графиков:

1) $y = x^2 - x + 3$;

2) $y = -x^2 - x + 2$;

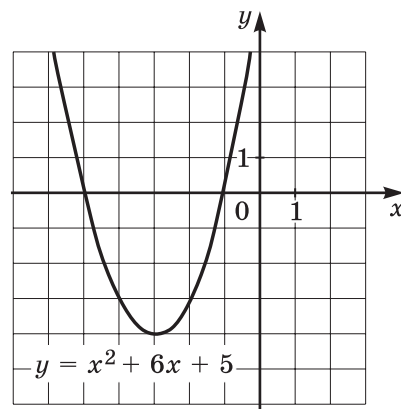
3) $y = x^2 - 8x + 15$;

4) $y = x^2 + 2x + 1$.



392 1) Вычислите абсциссы точек пересечения функции $y = x^2 + 6x + 5$ с осью абсцисс. Проверьте свой результат по графику данной функции, изображенному на рисунке.

2) Пользуясь графиком, укажите все значения x , при которых квадратичная функция $y = x^2 + 6x + 5$ принимает отрицательные значения, принимает положительные значения.



393 1) Решите квадратное неравенство $x^2 + 6x + 5 < 0$. Переформулируйте задание, сведя его к применению известного вам алгоритма.

2) Предложите свой способ решения квадратного неравенства $x^2 - 8x + 16 > 0$. Как можно его упростить?

3) Составьте алгоритм решения квадратных неравенств. Сопоставьте свой вариант с предложенным на с. 109.

394 Решите квадратные неравенства:

1. а) $3x^2 - 2x - 8 \geq 0$;

в) $5x^2 + x + 3 > 0$;

д) $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$;

б) $x^2 - 8x + 15 \leq 0$;

г) $11x^2 + 5x + 1 \leq 0$;

е) $x^2 - 6x + 9 < 0$.

2. а) $-3x^2 + 7x - 2 < 0$;

в) $-4x^2 - 4x - 1 > 0$;

д) $-5x^2 + 3x \geq 0$;

б) $-x^2 + 6x - 8 \leq 0$;

г) $-x^2 - x + 2 > 0$;

е) $-x^2 - x < 0$.

395 Решите неполные квадратные неравенства:

а) $-8x^2 \geq 0$;

в) $5x^2 + 2 \geq 0$;

д) $-12x^2 - 7 > 0$;

б) $4x^2 - 9 > 0$;

г) $-9x^2 + 1 \leq 0$;

е) $-15x^2 + 25 \geq 0$.

Каким ещё способом можно решить подобные неполные квадратные неравенства?

396 Найдите значения x , при которых данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{x^2 - 9x}$;

в) $\sqrt{x^2 - 16}$;

д) $\sqrt{x^2 + 8x + 7}$;

ж) $\sqrt{-x^2 - 16x - 64}$;

б) $\sqrt{7x - 2x^2}$;

г) $\sqrt{x^2 + 5}$;

е) $\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$;

з) $\sqrt{100x^2 - 60x + 9}$.

397 Найдите наибольшее целое значение аргумента области определения функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x^2 + 7x - 3}}$.

398 Составьте из неравенств: $2x^2 - 7x + 5 > 0$; $x^2 + 4x - 21 \leq 0$; $-3x^2 + 2x - 1 < 0$ и $x^2 + 9 \leq 0$ все возможные системы двух неравенств и решите их.

π 399 Найдите наибольшее и наименьшее значения квадратного трёхчлена на заданном числовом промежутке. Заполните таблицу.

№	Квадратный трёхчлен	Числовой промежуток	Наибольшее значение	Искомое слово	Наименьшее значение	Искомое слово
1	$-x^2 + 4$	$[-1; 1]$		Р		К
2	$x^2 + 6x - 7$	$[-7; -2]$		К		Т
3	$x^2 + x + 5$	$[0; 1]$		С		И
4	$-2x^2 - 8x$	$[-2; 2]$		Т		Б
5	$-3x^2 + 1,5x - 6$	$\left[\frac{1}{2}; 1\right]$		Б		О
6	$3 + x^2$	$\left[-5; -\frac{1}{2}\right]$		Е		С
7	$\frac{1}{2}x^2 - 3x - 3,5$	$[0; 8]$		Ы		С
8	$5x + x^2$	$[-4; -2]$		Е		Н
9	$25 - 10x + x^2$	$[1; 10]$		И		Р
10	$x^2 - 3x + 2$	$[1; 3]$		О		Е
11	$-4x^2 - 2x - 1$	$\left[0; \frac{1}{2}\right]$		С		Н

Расположив наибольшие значения квадратных трёхчленов в порядке возрастания, а наименьшие – в порядке убывания, прочитайте два понятия. Связаны ли они с понятием дружба?

400 Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x > 1; \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ h(x), & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Задайте $h(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ являлась нечётной, и постройте график функции $f(x)$.

401 Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{2x+9}$;

д) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{6-x}}$;

б) $f(x) = \sqrt{2x-14}$;

е) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{2x-4}}$;

в) $f(x) = \sqrt{8-0,5x}$;

ж) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x}$;

г) $f(x) = \sqrt{-12-5x}$;

з) $f(x) = \sqrt{-x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Д

402 Решите квадратные неравенства:

а) $4x^2 + 20x + 25 \leq 0$;

г) $5x^2 + 3x \geq 0$;

б) $2x^2 + x + 1 < 0$;

д) $2x^2 + 7x - 4 > 0$;

в) $3x^2 - 5x + 2 > 0$;

е) $x^2 - 3x + 9 > 0$.

403 Решите квадратные неравенства:

а) $-2x^2 + x - 1 < 0$;

г) $-5x^2 - 4x + 1 < 0$;

б) $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$;

д) $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$;

в) $-3x^2 + x > 0$;

е) $-x^2 - 5x - 7 > 0$.

404 Решите неполные квадратные неравенства:

а) $2x^2 > 0$;

в) $-63x^2 + 7 < 0$;

д) $11x^2 + 3 > 0$;

б) $6x^2 - 6 < 0$;

г) $3x^2 - 2 < 0$;

е) $-x^2 - 4 < 0$.

405 Найдите значения x , при которых данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{x^2 - x}$;

б) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$.

406 Найдите наименьшее целое значение аргумента области определения функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 15}}.$$

407 Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 2; \\ 2x+1, & \text{если } 0 \leq x < 2; \\ h(x), & \text{если } x < 0 \end{cases}$

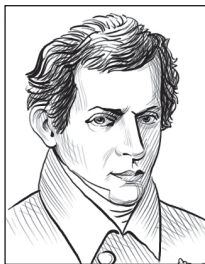
Задайте $h(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ являлась чётной, и постройте график функции $f(x)$.

С

408* Каких пятизначных чисел больше: тех, у которых цифры идут в строго возрастающем порядке, или тех, у которых цифры идут в строго убывающем порядке? (Например, в первую группу входит число 12459, но не входят числа 12495 и 12259.)

409* По кругу висят 250 лампочек. Вначале все лампочки включены. Разрешается либо переключить (из включённого состояния в выключенное, или наоборот) любые 4 последовательные лампочки, либо взять 5 последовательных лампочек и переключить все, кроме средней. Можно ли с помощью таких операций выключить все лампочки?

4.3.2*. Неравенства с параметром



Нет ни одной области математики, как бы она абстрактна ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира.

Н. И. Лобачевский (1792–1856),
русский математик

В этой главе мы уже научились решать *уравнения с параметрами*. Однако в ходе исследования различных процессов, описывающих реальный мир, встречаются и неравенства, в которых коэффициенты могут принимать различные значения. Обозначая эти коэффициенты буквами, мы будем получать *неравенства с параметрами*. Работать с такими неравенствами мы и будем учиться в данном пункте.

Определение 1. Неравенство, в котором некоторые коэффициенты заданы буквами или буквенными выражениями, называется *неравенством с параметрами*.

Так, неравенство $2ax - 4 \geq 0$ является линейным неравенством с параметром a , а неравенство $bx^2 + 2x + 1 < 0$ – квадратным³ неравенством с параметром b .

Как и уравнение, неравенство с параметром, в зависимости от значения параметра, может изменять свой вид и решение. Например, неравенство $2ax - 4 \geq 0$ при $a = 0$ не имеет решения (так как становится неверным числовым неравенством $-4 \geq 0$), при $a > 0$ имеет решение $x \in \left[\frac{2}{a}; +\infty\right)$, при $a < 0$ имеет решение $x \in \left(-\infty; \frac{2}{a}\right]$. А неравенство $bx^2 + 2x + 1 < 0$ при $b = 0$ становится линейным неравенством $2x + 1 < 0$, и имеет решение $x \in (-\infty; -0,5)$. При $b = 1$ оно преобразуется в неравенство $x^2 + 2x + 1 < 0$, множество решений которого пусто. А при $b = -3$ то же самое неравенство принимает вид $-3x^2 + 2x + 1 < 0$, и его решением служит уже объединение лучей $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Рассмотрим задания, в которых требуется выяснить, *при каких значениях параметров неравенство обладает тем или иным свойством*, например не имеет решений, имеет одно решение, его решением служит любое действительное число и т.д. Как и для уравнений с параметром, мы должны будем каждый раз четко указывать, при каком значении параметра требуемое условие выполняется. Вначале рассмотрим более простые виды таких заданий.

Пример 1.

При каких значениях параметра a решением неравенства $x^2 - 4x + a + 1 > 0$ является любое действительное число?

Решение:

Вычислим дискриминант трёхчлена: $D = (-4)^2 - 4(a + 1) = 16 - 4a - 4 = 12 - 4a$.

Мы знаем, что в зависимости от результата сравнения дискриминанта с нулем, возможны три случая расположения графика $y = x^2 - 4x + a + 1$.

$12 - 4a > 0$	$12 - 4a = 0$	$12 - 4a < 0$

³ Строго говоря, оно является неравенством с параметром не выше второй степени.

Нам нужно указать такие значения параметра a , при которых неравенство выполняется при всех x . Значит, нужно выбрать тот случай, где все точки параболы лежат выше x . Это происходит, если квадратный трёхчлен в левой части неравенства не имеет корней, то есть если его дискриминант отрицательный.

Таким образом, мы приходим к необходимости решить линейное неравенство относительно a :

$$12 - 4a < 0 \Leftrightarrow -4a < -12 \Leftrightarrow a > 3.$$

Ответ: при $a \in (3; +\infty)$.

Пример 2.

При каких значениях параметра a неравенство $-x^2 + (a+2)x - 8a - 1 > 0$ имеет хотя бы одно решение?

Решение:

Приведём данное неравенство к положительному коэффициенту при x^2 .

$$-x^2 + (a+2)x - 8a - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - (a+2)x + 8a + 1 < 0$$

Вычислим дискриминант: $D = (a+2)^2 - 4(8a+1) = a^2 + 4a + 4 - 32a - 4 = a^2 - 28a$.

Чтобы данное неравенство имело решение, необходимо, чтобы хотя бы одна точка параболы лежала ниже оси x . Так как ветви параболы направлены вверх, то для этого нужно, чтобы квадратный трёхчлен в левой части неравенства имел два корня, то есть его дискриминант был положительным.

Мы приходим к необходимости решить квадратное неравенство $a^2 - 28a > 0$.

Квадратный трёхчлен $a^2 - 28a$ имеет 2 корня: $a_1 = 0$, $a_2 = 28$. Поэтому неравенству $a^2 - 28a > 0$ удовлетворяют промежутки $(-\infty; 0) \cup (28; +\infty)$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0) \cup (28; +\infty)$.

Ясно, что при решении неравенств с параметром может ставиться и более общая задача: *решить неравенство при всех допустимых значениях параметра a* .

Определение 2. Решить неравенство с переменной x и параметром a — это значит, для всех возможных допустимых значений параметра a найти множество значений x , удовлетворяющих этому неравенству.

Пример 3.

Решить неравенство $x^2 - (2k+1)x + 4 \leq 0$ с параметром k .

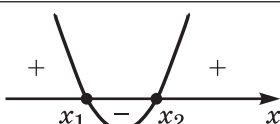
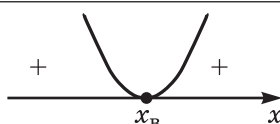
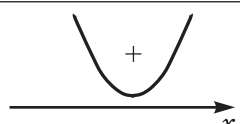
Решение:

Вычислим дискриминант квадратного трёхчлена в левой части неравенства

$$D = (2k+1)^2 - 4 \cdot 4 = 4k^2 + 4k + 1 - 16 = 4k^2 + 4k - 15.$$

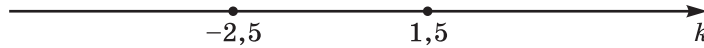
Полученный квадратный трёхчлен $4k^2 + 4k - 15$ имеет 2 корня: $k_2 = -2,5$, $k_2 = 1,5$.

Рассматривая отдельно случаи $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$, найдём значения параметра, при которых парабола $y = x^2 - (2k+1)x + 4$ пересекает ось x в двух точках, касается её в своей вершине или расположена выше оси x .

1. $D > 0$	2. $D = 0$	3. $D < 0$
$4k^2 + 4k - 15 > 0$ $k \in (-\infty; -2,5) \cup (1,5; +\infty)$	$4k^2 + 4k - 15 = 0$ $k = -2,5$ или $k = 1,5$	$4k^2 + 4k - 15 < 0$ $k \in (-2,5; 1,5)$.
		

Теперь решим неравенство $x^2 - (2k + 1)x + 4 \leq 0$ отдельно для всех найденных интервалов, а также при значениях $k = -2,5$ и $k = 1,5$.

Для удобства результаты, полученные для каждого случая, будем отмечать на числовой прямой по параметру k :



1. $k \in (-\infty; -2,5) \cup (1,5; +\infty)$.

Так как $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня:

$$x_1 = \frac{2k+1-\sqrt{4k^2+4k-15}}{2}, \quad x_2 = \frac{2k+1+\sqrt{4k^2+4k-15}}{2}.$$

Знаку неравенства удовлетворяет отрезок, на котором функция неположительна:

$$x \in \left[\frac{2k+1-\sqrt{4k^2+4k-15}}{2}; \frac{2k+1+\sqrt{4k^2+4k-15}}{2} \right]$$

2. $k = -2,5$ или $k = 1,5$.

Так как $D = 0$, квадратный трёхчлен имеет единственный корень x_* , который является единственным решением неравенства.

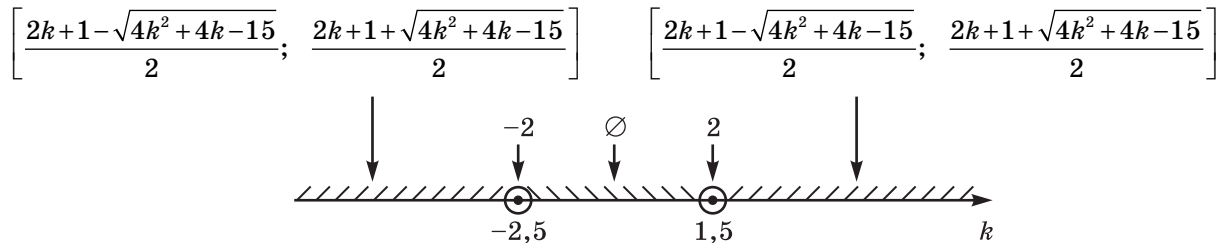
Если $k = -2,5$, то квадратный трёхчлен имеет вид $x^2 + 4x + 4$ и $x = -\frac{b}{2a} = -2$.

Если $k = 1,5$, то квадратный трёхчлен имеет вид $x^2 - 4x + 4$ и $x = \frac{b}{2a} = 2$.

3. $k \in (-2,5; 1,5)$.

Так как ветви параболы направлены вверх и $D < 0$, то квадратный трёхчлен положителен при всех значениях x . Значит, при данных значениях параметра неравенство не имеет решения.

Таким образом, в ходе решения вспомогательная числовая прямая по параметру k приняла вид:



Ответ:

если $k \in (-\infty; -2,5) \cup (1,5; +\infty)$,

$$\text{то } x \in \left[\frac{2k+1-\sqrt{4k^2+4k-15}}{2}; \frac{2k+1+\sqrt{4k^2+4k-15}}{2} \right];$$

если $k = -2,5$, то неравенство имеет единственное решение $x = -2$;

если $k = 1,5$, то неравенство имеет единственное решение $x = 2$;

если $k \in (-2,5; 1,5)$, то решений нет.

Мы рассмотрели более простой тип неравенств с параметрами, когда коэффициент при x^2 не содержит параметр. В этом случае мы, как и раньше, можем сделать этот коэффициент положительным и свести решение задачи к исследованию знака дискриминанта.

**Алгоритм решения квадратного неравенства с параметром
(коэффициент при x^2 не содержит параметр)**

1. Вычислить дискриминант квадратного трёхчлена, стоящего в левой части неравенства.
2. Указать значения параметра, при которых:
 - $D > 0$, найти решение неравенства при этих значениях параметра;
 - $D = 0$, найти решение неравенства при этих значениях параметра;
 - $D < 0$, найти решение неравенства при этих значениях параметра.
3. Записать ответ, указывая соответствие между всеми значениями параметра и решением неравенства.

* * *

Перейдем к более сложному типу квадратных неравенств, когда коэффициент при x^2 содержит параметр. Понятно, что при решении подобных неравенств учитывать нужно не только значение дискриминанта, но и знак коэффициента при x^2 . Ведь в зависимости от того, положителен он или отрицателен, ветви параболы будут направлены вверх или вниз.

Кроме того, как и в уравнениях с параметром, в неравенствах нам нужно будет отдельно разбираться со случаем, когда коэффициент при x^2 обращается в нуль (тогда неравенство вырождается в линейное).

Пример 4.

Выяснить, при каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 4ax + 5 \leq 0$ не имеет решений.

Решение:

1. Если $a = 0$, то данное неравенство вырождается в неравенство $0 \cdot x \leq -5$, которое не имеет решений. Поэтому значение параметра $a = 0$ удовлетворяет условию задачи и мы запишем его в ответ.

2. Если $a > 0$, то графиком квадратного трёхчлена в левой части неравенства является парабола с ветвями, ветви которой направлены вверх.

Вычислим $D_1 = 4a^2 - 5a$ (по формуле чётного коэффициента).

Неравенство не имеет решений, если парабола расположена выше оси абсцисс, то есть когда квадратный трёхчлен не имеет корней ($D_1 < 0$).

Решим соответствующее неравенство $4a^2 - 5a < 0$.

Корнями квадратного трёхчлена $4a^2 - 5a$ являются числа $a_1 = 0$ и $a_2 = \frac{5}{4}$, поэтому $D_1 < 0$ при $0 < a < \frac{5}{4}$.

Мы рассматриваем случай положительных значений a , значит, все числа из найденного нами промежутка подходят: $a \in \left(0; \frac{5}{4}\right)$.

3. Если $a < 0$, то графиком квадратного трёхчлена в левой части неравенства является парабола с ветвями, направленными вниз. Значит, обязательно найдутся значения x , при которых трёхчлен будет отрицательным – то есть неравенство будет иметь решение.

Следовательно, все значения $a < 0$ не подходят.

Ответ: $a \in \left[0; \frac{5}{4}\right)$.

Таким образом, если коэффициент при x^2 содержит параметр, то при решении квадратных неравенств следует отдельно рассмотреть 3 случая – когда коэффициент при x^2 равен нулю, больше нуля и меньше нуля. Поэтому установленный выше алгоритм решения квадратного неравенства с параметром для этого случая принимает следующий вид.

Алгоритм решения квадратного неравенства с параметром**(коэффициент при x^2 содержит параметр)**

1. Найти «особенные» значения параметра (когда коэффициент при x^2 равен 0) и решить неравенство при этих значениях параметра.
2. Вычислить дискриминант квадратного трёхчлена, стоящего в левой части неравенства.
3. Решить неравенство, когда коэффициент при x^2 положителен, находя значения параметра, при которых $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$, и соответствующие им решения неравенства.
4. Решить неравенство, когда коэффициент при x^2 отрицателен, находя значения параметра, при которых $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$, и соответствующие им решения неравенства.
5. Записать ответ, указывая соответствие между всеми значениями параметра и решением неравенства.

Пример 5.Решить неравенство $bx^2 + (2b + 3)x + b - 1 \geq 0$ при всех возможных значениях b .*Решение:*

Обозначим исходное неравенство (1).

1. Если $b = 0$, то неравенство (1) вырождается в линейное неравенство $3x - 1 \geq 0$, решением которого является множество значений $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

2. Если $b \neq 0$ неравенство (1) – квадратное. Вычислим дискриминант трёхчлена:

$$D = (2b + 3)^2 - 4b(b - 1) = 4b^2 + 12b + 9 - 4b^2 + 4b = 16b + 9.$$

3. Если $b > 0$, то $D = 16b + 9 > 0$, поэтому два остальных варианта $D = 0$ и $D < 0$ рассматривать не нужно.

Квадратный трёхчлен в левой части неравенства (1) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-2b - 3 - \sqrt{16b + 9}}{2b}, \quad x_2 = \frac{-2b - 3 + \sqrt{16b + 9}}{2b}, \quad \text{причём при } b > 0 \text{ имеем } x_1 < x_2.$$

$$\text{Значит, } x \in \left(-\infty; \frac{-2b - 3 - \sqrt{16b + 9}}{2b}\right] \cup \left[\frac{-2b - 3 + \sqrt{16b + 9}}{2b}; +\infty\right).$$

4. Если $b < 0$, то дискриминант D может принимать значения разных знаков.

• $D > 0$

$$16b + 9 > 0 \Leftrightarrow b > -\frac{9}{16}. \text{ Учитывая, что } b < 0, \text{ значения параметра } b \in \left(-\frac{9}{16}; 0\right).$$

Квадратный трёхчлен в левой части неравенства (1) имеет два корня x_1 и x_2 , но теперь

$$x_1 > x_2. \text{ Значит, } x \in \left[\frac{-2b - 3 + \sqrt{16b + 9}}{2b}; \frac{-2b - 3 - \sqrt{16b + 9}}{2b}\right].$$

• $D = 0$

$$16b + 9 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{9}{16}. \text{ Следовательно, квадратный трёхчлен имеет единственный корень}$$

$$x = \frac{-2b - 3}{2b} = -1 - \frac{3}{2b} = \frac{5}{3}.$$

Ветви параболы направлены вниз, а вершина имеет координаты $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$. Поэтому решением неравенства (1) является единственное число $x = \frac{5}{3}$.

• $D < 0$

$16b + 9 < 0 \Leftrightarrow b < -\frac{9}{16}$. Значит, при $b \in \left(-\infty; -\frac{9}{16}\right)$ квадратный трёхчлен не имеет корней и парабола с ветвями, направленными вниз, расположена целиком ниже оси абсцисс. Следовательно, неравенство (1) не имеет решений.

Ответ:

если $b \in \left(-\infty; -\frac{9}{16}\right)$, то решений нет;

если $b = -\frac{9}{16}$, то неравенство имеет единственное решение $x = \frac{5}{3}$;

если $b \in \left(-\frac{9}{16}; 0\right)$, то $x \in \left[\frac{-2b-3+\sqrt{16b+9}}{2b}; \frac{-2b-3-\sqrt{16b+9}}{2b}\right]$;

если $b = 0$, то $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$;

если $b \in (0; +\infty)$, то $x \in \left[-\infty; \frac{-2b-3-\sqrt{16b+9}}{2b}\right] \cup \left[\frac{-2b-3+\sqrt{16b+9}}{2b}; +\infty\right)$.

К

410 Разбейте неравенства на две группы:

а) $2x^2 + x + p > 0$;

в) $7x^2 + 0,2x - 1 \geq 0$;

д) $2x^2 + ax + 1 < 0$;

б) $4x^2 + x - 9 \leq 0$;

г) $x^2 + 2x + 1 > 0$;

е) $kx^2 + x + (k + 2) \leq 0$.

Какое название вы бы предложили для неравенств, коэффициенты которых заданы буквами или буквенными выражениями? Сравните свой вариант с общепринятым на с. 115.

411

Прочитайте данные неравенства и ответьте на следующие вопросы:

а) $x^2 - 2x + 1 > 0$; б) $x^2 - 2x + 0,75 > 0$; в) $x^2 - 2x + 3 > 0$; г) $x^2 - 2x + k > 0$.

1) Чем отличаются данные неравенства? Какое из этих неравенств является неравенством с параметром?

2) Вычислите дискриминант для каждого из этих неравенств. Как его значение влияет на расположение параболы? Можно ли определить расположение параболы относительно оси абсцисс в последнем неравенстве?

3) При каких значениях параметра k парабола $y = x^2 - 2x + k$ пересекает ось абсцисс в двух точках? Какое решение имеет неравенство в этом случае?

4) При каких значениях параметра k парабола $y = x^2 - 2x + k$ имеет одну общую точку с осью абсцисс? Какое решение имеет неравенство в этом случае?

5) При каких значениях параметра k парабола $y = x^2 - 2x + k$ не имеет общих точек с осью абсцисс? Какое решение имеет неравенство в этом случае?

6) Сделайте вывод о способе решения квадратного неравенства с параметром (коэффициент при x^2 не содержит параметр) и примените его для решения неравенства $x^2 - 2x + k \leq 0$. Сопоставьте свой способ с алгоритмом на с. 118.

412

При каких значениях параметра a решением неравенства $x^2 - ax + 1 > 0$ является любое действительное число?

413

При каких значениях параметра a неравенство $-2x^2 + (a + 2)x - 1 \geq 0$ имеет хотя бы одно решение?

414

При каких значениях параметра a неравенство $2x^2 + (a + 2)x + 1 > 0$ не имеет решений?

415

При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - 2x - 1 < 0$ не имеет решений?

416

Решите неравенство $x^2 - 2x + (1 + k) < 0$ с параметром k .

π **417** Решите квадратные неравенства:

а) $10x^2 + 7x + 1 > 0$;

г) $x^2 - 14x + 45 < 0$;

б) $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$;

д) $-5x^2 + 3x + 2 \leq 0$;

в) $x^2 - 2x \geq 0$;

е) $10 - 2x^2 > 0$.

Найдите сумму их наименьших целых неотрицательных решений. Запишите все делители полученного числа и три числа, кратных ему.

418

Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ 2x + 4 > 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 7 > 0 \\ -2x - 3 > 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x^2 + x + 3 < 0 \\ -x + 1 > 0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} -16x^2 + 8x - 1 \geq 0 \\ -3x + 6 > 0 \end{cases}$.

419

а) На встрече друзей все выпили по полной чашке кофе с молоком. При этом Максим выпил четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько друзей пришло на встречу?

б) У Маши была коробка с арахисом в шоколаде. Она съела одна некоторое количество этих конфет, а потом к ней в гости пришла подруга Света, и оставшиеся конфеты они разделили поровну. Оказалось, что Маша съела в пять раз больше конфет, чем Света. Какую долю от всех конфет Маша успела съесть до прихода Светы?

 $\mathcal{D}$ **420**

При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + ax + 3 < 0$ имеет хотя бы одно решение?

421

Решите неравенство $kx^2 - 6x + 9 \geq 0$ с параметром k .

422

С понедельника по пятницу сборщик винограда собирал с участка урожай винограда. В выходные к нему на помощь приехали два сына. За выходные они закончили сбор урожая, причём части, собранные каждым из них за эти дни, оказались равными. Какую часть урожая успел убрать отец до приезда сыновей, если он убрал в 4 раза больше винограда, чем его сыновья?

 $\mathcal{C}$ **423***

Найдите все значения параметра a , при которых все решения неравенства $x^2 - 2(a+4)x + 4a + 13 \leq 0$ являются решениями неравенства $x^2 + 4|x| - 5 \leq 0$.

424*

Найдите все значения параметра a , при которых любое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ является также решением неравенства $ax^2 - (3a+1)x + 3 > 0$.

425*

Вдоль дороги растут 2002 ели. Утром на каждой из них сидело по одной вороне. В полдень каждая ворона взлетела и перелетела на дерево, растущее через одно от того, с которого она взлетела. Могло ли так получиться, чтобы на каждой ели вновь сидело по одной вороне?

426*

При каких значениях параметра a один из корней уравнения

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + (a - 5) = 0$$

больше 1, а другой – меньше 1?

 π

Выполните тест № 6 для самостоятельной проверки знаний.

Задачи для самоконтроля к главе 4

427 Приведите уравнение

а) $(2x-3)(4x+1) = 7x^2 - 6x + 5$; б) $(5-x)^2 - 13 = (2x+1)(1-2x) - 10x$

к виду $ax^2 + bx + c = 0$ и запишите его коэффициенты.

428 Решите неполное квадратное уравнение:

а) $x^2 + 7x = 0$; б) $x^2 - 196 = 0$; в) $x^2 + 225 = 0$; г) $3x^2 = 0$.

429 Определите количество корней квадратного уравнения:

а) $x^2 + x - 2 = 0$; б) $\frac{1}{8}x^2 - 3x + 72 = 0$; в) $-0,4x^2 + 3x + 15 = 0$; г) $-5x^2 + 2x - 1 = 0$.

430 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + (2a-1)x + a(a-3) = 0$ имеет два корня? Запишите три целых значения a , при которых выполняется это условие.

431 При каких значениях параметра a уравнение $0,5x^2 - ax + 0,5a(a+1) = 0$ не имеет корней? Запишите наименьшее целое значение a , при котором выполняется это условие.

432 Решите квадратное уравнение:

а) $2x^2 + 13x - 7 = 0$; д) $5x^2 - 6\pi x + \pi^2 = 0$;
 б) $12,5x^2 - 10x + 2 = 0$; е) $-\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$;
 в) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$; ж) $\frac{1}{8}x^2 - \sqrt{6}x + 8 = 0$;
 г) $-x^2 - \sqrt{5}x + 11 = 0$; з) $(3-x)^2 + 2 = x^2 - (2x-3)(2x+3)$.

433 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax - \frac{15}{16} + a = 0$ имеет ровно один корень?

434 Один из корней квадратного уравнения $2x^2 + 8x + c = 0$ равен 5. Используя теорему Виета, найдите свободный член c этого уравнения.

435 Один из корней квадратного уравнения $3x^2 + bx - 12 = 0$ равен 4. Используя теорему Виета, найдите второй коэффициент b этого уравнения.

436 Составьте квадратное уравнение, если его корни:

а) $x_1 = \frac{5}{7}$; $x_2 = -1\frac{2}{5}$; б) $x_1 = -\frac{4}{11}$; $x_2 = -5\frac{1}{2}$.

437 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $0,5x^2 - 5x + 11 = 0$. Найдите значение выражения $x_1^3 + x_2^3$.

438 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$. Найдите значение выражения $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

439 Решите уравнение, используя теорему, обратную теореме Виета:

а) $x^2 - 12x + 20 = 0$; б) $x^2 + 4x - 32 = 0$; в) $0,5x^2 - 1,5x - 5 = 0$.

440 Если возможно, разложите квадратный трёхчлен на множители:

а) $\frac{1}{7}x^2 - 2x + 14$; в) $4x^2 - 3x - 1$; д) $x^2 + 4$;
 б) $16x^2 - 24x + 9$; г) $-\frac{1}{5}x^2 + 3,2x - 12$; е) $5x^2 - 3$.

441 Решите уравнение, сводящееся к квадратному:

а) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$; в) $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{5}|x| - 2 = 0$; д) $(x+1)^4 - 12x^2 - 24x + 23 = 0$;
 б) $7x^4 - 13x^2 - 2 = 0$; г) $x^2 - 13|x| + 12 = 0$; е) $(x^2 + x)^2 - 11x^2 = 11x + 12$.

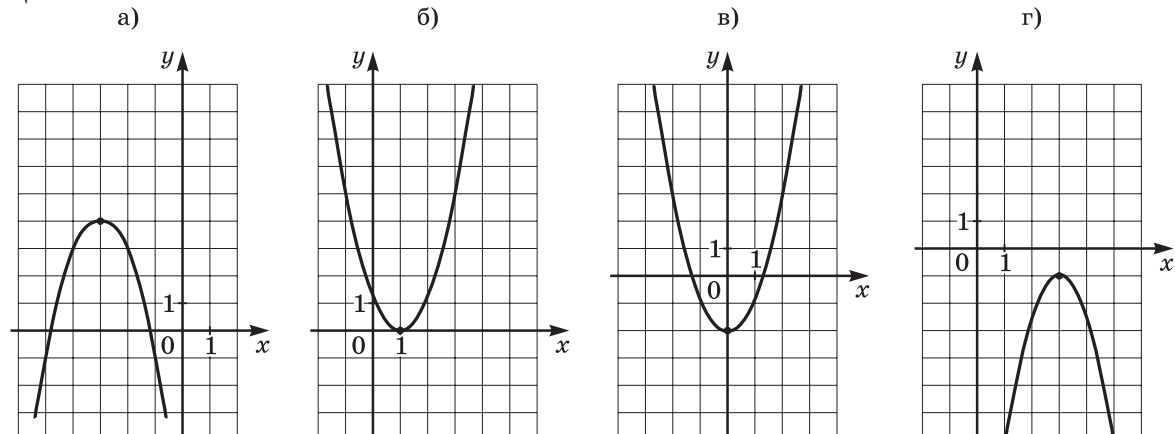
442 Решите задачу:

- а) Известно, что одна из сторон прямоугольника на 5 см больше другой, а его диагональ равна 25 см. Найдите стороны прямоугольника.
 б) Найдите три последовательных натуральных числа, сумма квадратов которых равна 77.

443 Решите задачу:

- а) В параде 7 ноября 2012 года на Красной площади приняли участие более 6 тысяч человек. Среди них было 1936 представителей Московских кадетских корпусов, проходивших по площади в 22 колоннах. Число человек в каждом ряду на три меньше количества рядов. Сколько рядов и сколько кадетов было в каждом ряду в одной колонне?
 б) При использовании салютной установки праздничный фейерверк взлетел вверх со скоростью 40 м/с. Через сколько секунд он окажется на высоте 35 м? ($h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$; $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.)

444 На рисунке изображен график функции $y = a(x + m)^2 + n$. Определите знак коэффициента a и значения m и n :



445 Найдите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 - 2x + 14$; б) $y = -x^2 + 18x - 81$; в) $y = 5x^2 - 5$; г) $y = 1,2x^2 - 6x$.

446 Найдите координаты точек пересечения параболы с осями координат:

а) $y = -x^2 + 9$; б) $y = 5x^2 - x$; в) $y = x^2 - x - 72$; г) $y = -4x^2 + 7x - 3$.

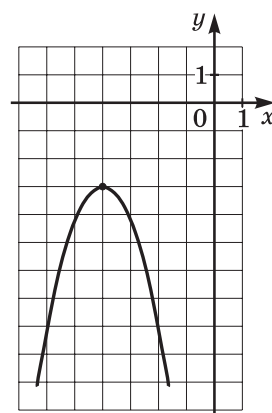
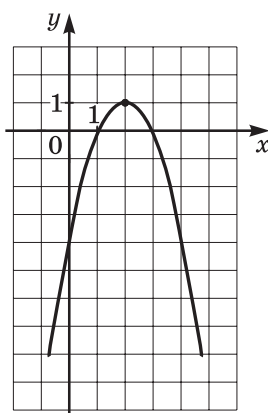
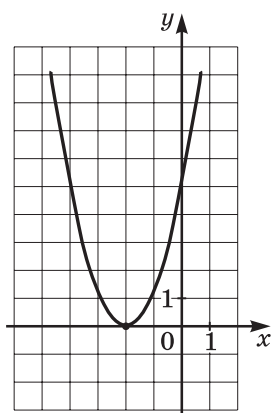
447 Квадратичная функция задана формулой $y = ax^2 - 8x + 5$. Найдите значение коэффициента a , если известно, что прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы.

448 Квадратичная функция задана формулой $y = -x^2 + 6x + c$.

- а) Напишите уравнение оси симметрии графика заданной функции,
 б) Найдите значение коэффициента c , если известно, что наибольшее значение функции равно 4.

Задачи для самоконтроля к главе 4

- 449** Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графически. Определите знаки коэффициентов a , b , c и дискриминанта D соответствующего квадратного трёхчлена:



- 450** Постройте график функции:

а) $y = (x - 4)^2 + 1$;

в) $y = 2x^2 - 8x$;

д) $y = -x^2 - 4x + 12$;

б) $y = -(x + 1)^2 - 5$;

г) $y = -4x^2 - 12x - 9$;

е) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$.

- 451** Постройте график функции и «прочитайте» его:

а) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } 0 \leq x \leq 9; \\ |x|, & \text{если } -1 \leq x < 0; \\ -x^2 - 4x - 2, & \text{если } -3 \leq x < -1 \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{если } 1 \leq x \leq 3; \\ -3x^2 + 3x, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ \frac{6}{x}, & \text{если } -3 \leq x < -1 \end{cases}$

- 452** Найдите наибольшее и наименьшее значения квадратного трёхчлена:

а) $x^2 + 2x + 1$ на отрезке $[-2; 0]$;

б) $x^2 - 10x + 27$ на отрезке $[0; 4]$;

в) $-5x^2 + 12x - 8$ на отрезке $[-2; 0]$.

- 453** Решите квадратные неравенства:

а) $-3x^2 - 2x > 0$;

в) $4 + x^2 \leq 0$;

д) $x^2 + x - 56 > 0$;

ж) $-x^2 - x - 6 < 0$;

б) $x^2 - 5 \leq 0$;

г) $x^2 + 5 > 0$;

е) $-4x^2 + 4x - 1 \geq 0$;

з) $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$.

- 454** Найдите значения x , при которых данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{3x^2 - x - 14}$;

б) $\sqrt{-x^2 + 10x - 25}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{4 - 8x - 5x^2}}$.

- 455** Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 15x^2 + x - 2 > 0 \\ 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} -x^2 + 13x - 36 \geq 0 \\ 6 - 1,5x \geq 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} -x^2 - 4x + 21 < 0 \\ 3x^2 + 8x + 5 > 0 \end{cases}$.

- 456** Укажите область допустимых значений переменной:

а) $\sqrt{-x-1} + \sqrt{8x^2 + 10x - 3}$;

б) $\sqrt{x^2 - 5x} + \sqrt{-3x^2 + 10x - 3}$.

- 457** а) При каких значениях параметра a неравенство $-x^2 + (a + 1)x - 1 \geq 0$ имеет хотя бы одно решение?

б) При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + ax + 1 < 0$ не имеет решений?

Глава 5

Рациональные уравнения и неравенства

§ 1. Алгебраические дроби

5.1.1. Алгебраические дроби и их свойства



... имея возможность обратиться к математическому обоснованию, большой глупостью было бы искать какое-либо другое, – это все равно, что идти на ощупь в темноте, когда рядом стоит свеча.

Джон Арбетнот (1667–1735),
английский физик

Как мы знаем, дроби возникли ещё в глубокой древности в связи с практическими потребностями людей. Мы начали изучать обыкновенные дроби в начальной школе. Позже мы научились решать задачи на дроби. Так, например, при нахождении части, которую одно число составляет от другого, мы делили первое число на второе и записывали ответ в виде дроби. В наше время, например для анализа работы предприятия, приходится решать подобные задачи не с числовыми, а с буквенными данными. Рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 1.

Ежемесячно компания тратит на оплату звонков по городу x тысяч рублей. Траты на междугородные звонки по России составляют a тысяч рублей, а на международные звонки на b тысяч рублей меньше. Какую часть потраченных на связь денег составили в этом месяце затраты на международные звонки?

Решение:

На междугородные звонки потрачено $a - b$ тыс. руб. Всего на связь было потрачено: $a + a - b + x = 2a - b + x$ тыс. руб. Найдем, какую часть составили затраты на международные звонки от суммы всех затрат на связь:

$$\frac{a - b}{2a - b + x}.$$

Ответ: $\frac{a - b}{2a - b + x}.$

В ответе к этой задаче мы получили выражение, которое является отношением двух многочленов $a - b$ и $2a - b + x$. Подобные выражения часто встречаются в математике и имеют специальное название.

Определение 1. Выражение, являющееся отношением двух многочленов A и B , $B \neq 0$, называется *алгебраической дробью* $\frac{A}{B}$. При этом многочлен A называют *числителем* алгебраической дроби, а многочлен B – её *знаменателем*.

Алгебраическими дробями являются, например, следующие выражения:

$$1) \frac{2}{3}; 2) \frac{11m-27}{1}; 3) \frac{x-2}{x-3}; 4) \frac{ax^2-bx+1}{a^3+b-x}.$$

Напомним, что степенью многочлена называется наибольшая из степеней входящих в него одночленов, а степенью одночлена – сумма показателей степеней входящих в него переменных. Составим для данных дробей таблицу.

Алгебраическая дробь	Числитель дроби	Знаменатель дроби
$\frac{2}{3}$	2 – многочлен 0-й степени	3 – многочлен 0-й степени
$\frac{11m-27}{1}$	11m – 27 – многочлен 1-й степени	1 – многочлен 0-й степени
$\frac{x-2}{x-3}$	x – 2 – многочлен 1-й степени	x – 3 – многочлен 1-й степени
$\frac{ax^2-bx+1}{a^3+b-x}$	ax ² – bx + 1 – многочлен 3-й степени	a ³ + b – x – многочлен 3-й степени

Как мы видим, обыкновенная дробь $\frac{2}{3}$ является алгебраической дробью. И любой многочлен может быть записан как алгебраическая дробь, числитель которой равен этому многочлену, а знаменатель – единице. Свойства подобных выражений и правила действий с ними мы уже изучали. А вот о последних двух алгебраических дробях этого сказать нельзя. Расширим свои знания об алгебраических дробях.

Ясно, что алгебраические дроби могут принимать различные числовые значения, в зависимости от значений, входящих в них переменных. Так, алгебраическая дробь $\frac{x-2}{x-3}$ при $x = 5$ равна $\frac{5-2}{5-3} = \frac{3}{2} = 1,5$. При $x = 2$ она равна $\frac{2-2}{2-3} = \frac{0}{-1} = 0$.

Если бы мы придали переменной x значение 3, то знаменатель дроби обратился бы в ноль: при $x = 3$ дробь $\frac{x-2}{x-3}$ не имеет смысла. Поэтому значение алгебраической дроби можно рассматривать только на так называемой *области определения* (или *множестве допустимых значений переменной*) – это множество, из которого исключают все значения переменных, обращающих её знаменатель в ноль.

Определение 2. *Областью определения алгебраической дроби* является множество тех и только тех значений переменных, при которых её знаменатель не обращается в ноль.

Пример 1.

Найти области определения алгебраических дробей:

$$a) \frac{x-2}{x-3}; б) \frac{x^2-2x}{x^2-3x}; в) \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}.$$

Решение:

а) Областью определения дроби является множество чисел x таких, что

$$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$

б) Областью определения дроби является множество чисел x таких, что:

$$x^2 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ и } x \neq 3.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty).$

в) Аналогично, $x^2 - 4x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

В связи с тем что значения алгебраических дробей мы рассматриваем только на их области определения, нам необходимо уточнить понятие равенства алгебраических дробей.

Определение 3. Две алгебраические дроби будем называть **равными**, если их числовые значения совпадают при всех значениях переменных, допустимых для обеих дробей.

Работая с обыкновенными дробями, мы часто пользовались *основным свойством дроби*. Так как в алгебраической дроби переменными обозначены некоторые числа, аналогичное свойство будет справедливо и для алгебраических дробей.

Основное свойство алгебраической дроби

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится алгебраическая дробь, равная данной.

$$\frac{A}{B} = \frac{AX}{BX}, \text{ где } X \neq 0, B \neq 0$$

Указанное свойство позволяет проводить преобразования алгебраических дробей: их сокращение, домножение числителя и знаменателя на один и тот же многочлен, приведение к общему знаменателю и др.

Сократим, например, алгебраические дроби из рассмотренного выше примера 1.

а) Числитель и знаменатель дроби $\frac{x-2}{x-3}$ не имеют общих множителей. Дробь несократима.

б) Проведём равносильные преобразования данной дроби и сократим её на x , представив дробь в более простом виде:

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x} = \frac{x(x-2)}{x(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

Заметим, что в процессе этого преобразования область определения исходной дроби расширилась на значение $x = 0$.

в) Аналогично,

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{x-3}{x-2}.$$

В данном случае при сокращении алгебраической дроби её область определения не расширилась.

Прочитаем равенства, полученные в случаях б и в, справа налево. Теперь эти равенства служат примерами домножения числителя и знаменателя алгебраической дроби на один и тот же ненулевой многочлен. При этом, в отличие от сокращения алгебраических дробей, область определения дроби в случае б сузилась.

С помощью умножения числителя и знаменателя алгебраической дроби на один и тот же ненулевой многочлен можно привести алгебраическую дробь к новому знаменателю.

Пример 2.

Представьте дробь $\frac{7}{3r+8s}$ как дробь со знаменателем $9r^2 - 64s^2$.

Решение:

Приведем дробь к новому знаменателю по аналогии с обыкновенными дробями. Чтобы понять, на какой многочлен нужно домножить числитель и знаменатель

дроби, разложим новый знаменатель на множители. По формуле разности квадратов: $9r^2 - 64s^2 = (3r + 8s)(3r - 8s)$. Отсюда ясно, что для получения нового знаменателя числитель и знаменатель дроби надо домножить на $3r - 8s$, значит:

$$\frac{7}{3r + 8s} = \frac{7(3r - 8s)}{(3r + 8s)(3r - 8s)} = \frac{7(3r - 8s)}{9r^2 - 64s^2}.$$

Теперь можно перейти к приведению нескольких дробей к общему знаменателю. Ясно, что общий знаменатель должен делиться на каждый из знаменателей исходных дробей, и в самом общем случае им может быть произведение знаменателей исходных дробей.

Пример³ 3.

Приведите дроби $\frac{2}{a+c}$, $\frac{3}{a-c}$ к общему знаменателю.

Решение:

Общий знаменатель дробей равен произведению: $(a+c)(a-c)$.

$$\frac{2}{a+c} = \frac{2(a-c)}{(a+c)(a-c)}, \quad \frac{3}{a-c} = \frac{3(a+c)}{(a+c)(a-c)}.$$

Часто для двух дробей можно найти более простой общий знаменатель, чем произведение их знаменателей. Чтобы избежать громоздких преобразований будем стремиться к поиску *простейшего* общего знаменателя. Для этого воспользуемся известным правилом: домножим один из знаменателей дробей на недостающие множители из знаменателей других дробей.

Пример 4.

Приведите дроби $\frac{3b-2}{7a^2+7ac}$, $\frac{2b-3}{a^2-ac}$ к общему знаменателю.

Решение:

Сначала разложим знаменатели дробей на множители:

$$7a^2 + 7ac = 7a(a+c), \quad a^2 - ac = a(a-c)$$

Найдём простейший общий знаменатель. Для этого выпишем знаменатель одной из дробей $7a(a+c)$ и допишем недостающий множитель $a-c$ из знаменателя второй дроби. Получим, что общий знаменатель дробей равен произведению $7a(a+c)(a-c)$.

Найдём дополнительные множители для дробей, разделив общий знаменатель на каждый из знаменателей исходных дробей:

$$\frac{7a(a+c)(a-c)}{7a(a+c)} = a-c, \quad \frac{7a(a+c)(a-c)}{a(a-c)} = 7(a+c).$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{3b-2}{7a^2+7ac} = \frac{3b-2}{7a(a+c)} = \frac{(3b-2)(a-c)}{7a(a+c)(a-c)}; \quad \frac{2b-3}{a^2-ac} = \frac{2b-3}{a(a-c)} = \frac{7(2b-3)(a+c)}{7a(a+c)(a-c)}.$$

Итак, преобразования алгебраических дробей выполняются аналогично преобразованиям обыкновенных дробей, но имеют *важные особенности*:

- для проведения преобразований на множители раскладываются не только числовые множители, но и многочлены;

³ Примечание: Если в условии задачи не требуется искать области определения алгебраических дробей, то вряд ли это стоит делать по собственной инициативе. В результате нахождения области определения часто получается очень громоздкий ответ, и в случае нескольких переменных он не несет никакой полезной информации. Договоримся, если в условии задачи не требуется искать области определения дробей, то делать мы этого не будем.

• преобразование алгебраической дроби может привести к изменению её области определения (при сокращении дроби – к расширению, а при домножении – к сужению на корни многочлена X).

Таким образом, алгоритмы преобразования алгебраических дробей совпадают (с учётом указанных особенностей) с соответствующими алгоритмами преобразования обыкновенных дробей. Например, алгоритм сокращения алгебраических дробей выглядит следующим образом.

Алгоритм сокращения алгебраических дробей

1. Разложить числитель и знаменатель дроби на множители.
2. Найти общие множители.
3. Разделить числитель и знаменатель на общие множители.

Аналогичным образом можно вывести алгоритм приведения алгебраических дробей к общему знаменателю (ОЗ).

Алгоритм приведения алгебраических дробей к ОЗ

1. Если возможно, разложить знаменатели всех дробей на множители.
2. Найти ОЗ, домножив один из знаменателей дробей на недостающие множители из знаменателей других дробей.
3. Найти дополнительные множители.
4. Привести дроби к ОЗ.

В завершение заметим, что из основного свойства алгебраической дроби непосредственно вытекают два следующих важных свойства:

1. Если числитель и знаменатель алгебраической дроби заменить на противоположные многочлены, то получится дробь, равная данной:

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}.$$

2. Числитель или знаменатель алгебраической дроби можно заменить на противоположный многочлен, поставив минус перед дробью:

$$\frac{A}{B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}.$$

Эти свойства часто используются в самых разных преобразованиях, например при сокращении дробей. Так, мы можем записать, что

$$\frac{2x-2y}{y-x} = \frac{2(x-y)}{y-x} = -\frac{2(y-x)}{y-x} = -2.$$

К

458

Какую из этих дробей можно считать «лишней»? Обоснуйте свой ответ.

$$\frac{-3}{-101}; \frac{1}{4}; \frac{3}{8}; -\frac{5}{16}; \frac{7}{2}; \frac{89}{100}; \frac{a}{c}; \frac{3}{-7}; \frac{99}{1}; \frac{18}{36}.$$

459

Решите задачи:

а) Скорость гоночных автомобилей достигает 400 км/ч, а скорость пикирования орла – 320 км/ч. Какую часть скорости орла составляет от скорости гоночного автомобиля?

б) Самостоятельная работа длилась n минут, а её проверка на 5 минут меньше. Какую часть заняла самостоятельная работа с самопроверкой от всего урока (урок длится 40 минут)?

в) На занятии по карате разминка продолжалась s минут, а отработка техники – на 10 минут дольше. После этого в течение d минут ребята выполняли упражнения с партнером, затем занятие закончилось. Какая часть занятия ушла на отработку техники, если ребята приступили к разминке через 5 минут после начала занятия? Чем похожи ответы к задачам, чем они отличаются? Как бы вы назвали две последние дроби? Сопоставьте свой вариант с определением, предложенным на с. 125. Можно ли первую дробь назвать так же?

460 Найдите значение алгебраической дроби $\frac{2x+1}{x-4}$ при данных значениях переменной: $x = 2; -5; 104; 0,5$. Удается ли найти значение этой алгебраической дроби при $x = 4$? Почему?

На каком множестве можно рассматривать значение алгебраической дроби? Как бы вы назвали это множество? Сопоставьте свое предположение с определением на с. 126.

461 Найдите область определения алгебраической дроби:

- а) $\frac{x+1}{x-1}$ в) $\frac{x^2+x}{x^2-x}$; д) $\frac{x^3-x^2+2x+3}{x^2-5x+6}$;
 б) $\frac{x-2}{x-3}$; г) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$; е) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-7x+12}$.

462 а) Сократите дробь $\frac{33}{88}$, а затем приведите её к знаменателю 24. На основании какого свойства вы выполнили данные преобразования?

б) Сократите алгебраическую дробь $\frac{ab}{bc}$, а затем приведите её к знаменателю $3c^2$.

Предположите, на основании какого свойства можно выполнить эти преобразования. Сформулируйте это свойство и сравните его со свойством на с. 127.

463 а) Сократите дроби:

$$\frac{3m}{2m}; \quad \frac{3c}{2c^2}; \quad \frac{a(a-5)}{5a}; \quad \frac{2-d}{(2-d)(2+d)}; \quad \frac{1-3x}{(1-3x)^3}.$$

б) Найдите область определения исходных дробей и дробей, полученных в результате сокращения. Что вы наблюдаете?

в) Можно ли обобщить результат этих наблюдений? Сформулируйте вывод об изменении области определения при сокращении дробей.

г) Изменится ли область определения алгебраической дроби после умножения её числителя и знаменателя на один и тот же ненулевой многочлен?

д) Сравните свои выводы о влиянии преобразования алгебраической дроби на область её определения с выводами в учебнике.

464 Сократите алгебраическую дробь:

- а) $-\frac{15}{3n}; \frac{-4m}{-16m}; \frac{3m}{m^2}; \frac{-m^3n}{n^2m}; \frac{7km^6n}{7^2k^2m^5n^3}$;
 б) $\frac{15-3c}{3c}; \frac{5c-3c^2}{c}; \frac{5c-5a}{c-a}; \frac{-(a-c)}{a-c}; \frac{-c-a}{a+c}; \frac{4c-4a}{a-c}$;
 в) $\frac{4a-a^2}{ab+a}; \frac{4b-a}{4b^2-ab}; \frac{b-a}{b^2-a^2}; \frac{a-b}{b^2-a^2}; \frac{a-b}{(a-b)^2}; \frac{a-b}{(b-a)^2}; \frac{(a-b)^3}{b-a}$;
 г) $\frac{25-y^2}{25+5y}; \frac{25-y^2}{(5+y)^2}; \frac{x^2-16}{(x-4)^2}; \frac{(x-4)^2}{16-x^2}$.

465 Сократите алгебраическую дробь:

а) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$;

б) $\frac{x^2 + 5xy - 6y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2}$.

466 Сократите алгебраическую дробь:

а) $\frac{x^2 - 15x + 50}{x - 5}$;

в) $\frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 1}$;

б) $\frac{x + 6}{x^2 + 14x + 48}$;

г) $\frac{x^2 + x - 6}{3x^2 - 4x - 4}$.

467 Сократите алгебраическую дробь и вычислите её значение при $x = x_0$. Расположив ответы в порядке возрастания, прочитайте слово. Как вы его понимаете?

а) $\frac{x^2 - 13x + 42}{2x^2 - 14x}$, $x_0 = 4$

А

е) $\frac{7x^2 - 2x - 24}{7x^2 + 12x}$, $x_0 = -1\frac{1}{4}$

И

б) $\frac{-x^2 + 11x - 30}{x^2 - 36}$, $x_0 = 9$

П

ж) $\frac{-2x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 1}$, $x_0 = -2$

Т

в) $\frac{3x^2 - 11x - 34}{17 - 3x}$, $x_0 = -5$

З

з) $\frac{-15x^2 + 13x - 2}{10 - 15x}$, $x_0 = \frac{24}{35}$

И

г) $\frac{-\frac{5}{3}x^2 + x + 12}{9 - 6x + x^2}$, $x_0 = 0,6$

Т

и) $\frac{-3x^2 + 6x + 24}{-x^2 - 3x + 28}$, $x_0 = -1\frac{1}{6}$

Р

д) $\frac{x^2 + 13x + 12}{-2x^2 + x + 3}$, $x_0 = 0,5$

М

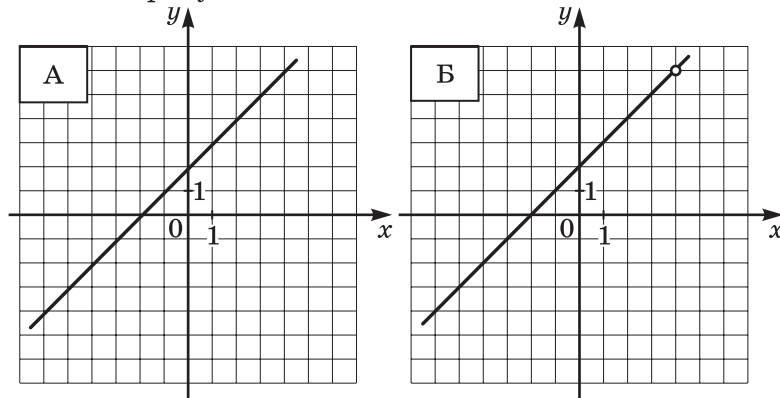
к) $\frac{11x - 2x^2 - 12}{(2x - 3)(x^2 - 16)}$, $x_0 = -5\frac{3}{4}$

О

468 Сократите дробь:

$$\frac{x^8 - y^8}{(x^4 + y^4)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)}.$$

469 На рисунке А изображен график функции $y = x + 2$. Чем отличается от него график, изображённый на рисунке Б?



Укажите область определения для каждой из функций.

Какой из этих графиков является графиком функции $y = \frac{(x+2)(x-4)}{x-4}$?

Объясните, как построить график функции $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$.

470 Постройте график функции

а) $y = \frac{x^2 + x - 30}{x - 5}$;

б) $y = \frac{x^2 + 3x - 18}{x + 6}$;

в) $y = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$;

$$\text{г) } y = \frac{x^3 + 27}{x + 3}; \quad \text{д) } y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-2)(x-3)}; \quad \text{е) } y = \frac{x^4 - 17x^2 + 16}{(x+4)(x+1)}.$$

471 Приведите дроби:

а) $\frac{m}{n}$ к знаменателю $3n, -n, mn, n^2, 2n^3$;

б) $\frac{a-b}{ab}$ к знаменателю $ab^2, a^2b^2, -a^2b, 5ab^3$;

в) $\frac{b}{a+b}$ к знаменателю $a(a+b), b^2(a+b), (a-b)(a+b), (a+b)^2, a^3+b^3$.

472 Приведите дроби к знаменателю $x^4 - y^4$:

а) $\frac{2x+y}{x^2-y^2}$; в) $\frac{3x+1}{x-y}$; д) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$;

б) $\frac{x-2y}{x^2+y^2}$; г) $\frac{1-3y}{x+y}$; е) $\frac{2x+2y}{x^2+2xy+y^2}$.

473 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{2}{y}$ и $\frac{x}{3y}$; б) $\frac{1}{xy}$ и $\frac{x^2}{y}$; в) $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$; г) $\frac{2}{x^2y}$ и $\frac{3}{xy^2}$.

474 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{1}{a}$; б) $\frac{b}{a+b}$ и $\frac{a}{a-b}$; в) $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{(a+b)^2}$; г) $\frac{1}{a-b}$ и $\frac{a}{b-a}$.

475 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a^2-b^2}$; в) $\frac{b}{a+b}, \frac{a-b}{a^4-b^4}$;
б) $\frac{a}{a+b}, \frac{a-b}{a^2-b^2}$; г) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, \frac{b}{a^3-b^3}$.

π

476 При каких значениях переменных выражения теряют смысл:

а) $6 : x$; б) $\frac{1}{m}$; в) $-\frac{2}{6-2m}$; г) $\frac{25}{m^2-25}$; д) $-\frac{1}{4m^2-4m+1}$?

477 1) Приведите дробь к знаменателю 48:

а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{5}{12}$; в) $\frac{11}{16}$; г) $\frac{84}{96}$; д) $\frac{33}{144}$.

2) Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{1}{12}$ и $\frac{5}{6}$; б) $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{8}$ и $\frac{13}{20}$; г) $\frac{7}{15}$ и $\frac{6}{25}$.

3) Сократите обыкновенную дробь:

а) $\frac{12}{32}$; б) $\frac{25}{35}$; в) $\frac{51}{68}$; г) $\frac{65}{91}$; д) $\frac{90}{126}$.

Какое свойство дроби позволило выполнить эти преобразования?

478 Выполните действия:

а) $\frac{1}{2} - \frac{1}{7}$; б) $\frac{1}{36} + \frac{7}{9}$; в) $\frac{17}{18} - \frac{5}{12}$; г) $\frac{21}{22} - \frac{3}{4}$; д) $\frac{7}{30} + \frac{5}{6} - \frac{4}{15}$.

479 Найдите число, обратное сумме чисел $\frac{4}{21}$ и $\frac{9}{14}$.

480 Выполните действия:

а) $\frac{1}{12} \cdot \frac{3}{7}$; б) $\frac{1}{63} : \frac{1}{7}$; в) $-\frac{8}{30} \cdot \frac{15}{24}$; г) $\frac{12}{25} : 6$; д) $\frac{9}{15} \cdot \frac{1}{81} : \frac{1}{5}$.

481 Найдите часть от числа, выраженную дробью:

- а) $\frac{5}{7}$ от 98; б) $\frac{9}{11}$ от $\frac{22}{45}$.

482 Найдите число a по его части, выраженной дробью:

- а) если $\frac{1}{3}$ числа a равна 3; б) если $\frac{5}{8}$ числа a равны $\frac{5}{32}$.

483 Какую часть первое число составляет от второго:

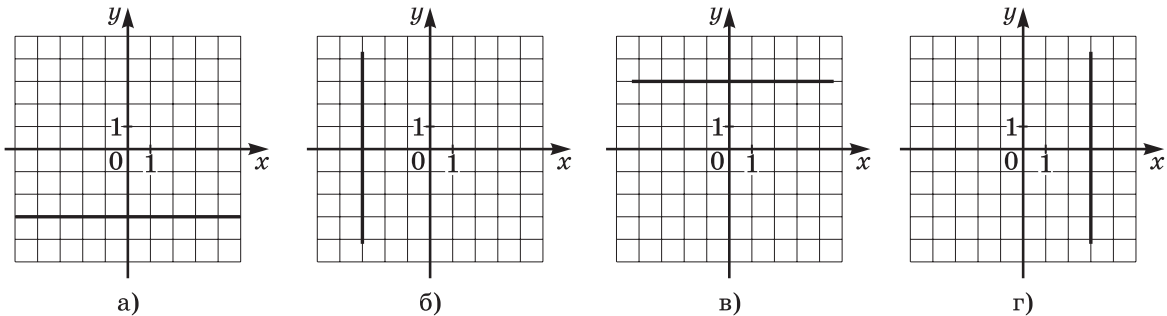
- а) 14 от 98; б) $\frac{45}{121}$ от $\frac{9}{11}$?

484 Найдите значение числового выражения $2\frac{1}{7} \cdot 2\frac{4}{5} - 2,4 - 1\frac{1}{8} : \frac{3}{4}$.

485 Разложите многочлен на множители:

- а) $16x^2 - 1$; б) $x^2 - 8x - 65$;
в) $9x + 27x^2$; г) $5x^2 - 16x + 3$.

486 На каком рисунке изображен график уравнения $y - 3 = 0$?



487 Известно, что пара чисел $(1; 3)$ является решением уравнения $5x + by - 8 = 0$. Найдите b .

488 Какие из точек $A(-10; 0,5)$, $B(0; 3)$ и $C(-4; 4)$ принадлежат графику уравнения $x - 4y = -12$?

489 Постройте график уравнения:

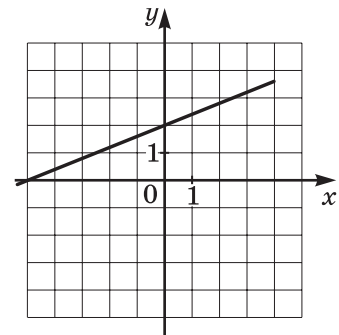
- а) $2x - y = 1$; б) $x + y - 3 = 0$.

490 Постройте график уравнения:

- а) $2x + 0y = -5$; б) $0x - 3y = -9$.

491 График какого из данных уравнений изображен на рисунке:

- 1) $-2x - 5y + 10 = 0$; 3) $-2x + 5y + 10 = 0$;
2) $2x - 5y - 10 = 0$; 4) $2x - 5y + 10 = 0$?



492 При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + ax + 3 \leq 0$ не имеет решений?

493 Найдите значение алгебраической дроби $\frac{1-3x}{x+5}$ при данных значениях переменной: $x = 1; -3; -4,5; 10; \frac{1}{3}$.

494 Найдите область определения алгебраической дроби:

- а) $\frac{x-5}{x+3}$; в) $\frac{x^2-2x}{x^2+x}$; д) $\frac{3x^3-2x^2+13}{x^2+5x+6}$;
 б) $\frac{x+1}{x-31}$; г) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; е) $\frac{x^2-8}{x^2-5x+3}$.

495 а) Сократите дробь $\frac{25}{75}$, а затем приведите её к знаменателю 111.

б) Сократите алгебраическую дробь $\frac{a^2b}{b^2c}$, а затем приведите её к знаменателю $7a^2bc^2$.

496 Приведите дроби к знаменателю $x^4 - y^4$:

- а) $\frac{x+y}{x^2+y^2}$; г) $\frac{2y-1}{x+y}$;
 б) $\frac{2x-y}{x^2-y^2}$; д) $\frac{x-y}{x^2-2xy+y}$;
 в) $\frac{x+y}{x-y}$; е) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$.

497 Сократите алгебраические дроби:

- а) $\frac{a^2-9b^2}{a^2+6ab+9b^2}$; в) $\frac{x^2+15x+50}{x+10}$;
 б) $\frac{x^2-2xy-3y^2}{x^2+3xy+2y^2}$; г) $\frac{2x^2-3x-5}{2x^2+x-1}$.

498 Постройте график функции:

- а) $y = \frac{x^2+x-12}{x-3}$; б) $y = \frac{x^4-26x^2+25}{(x-1)(x+5)}$.

499 Разложите многочлен на множители:

- а) $5x - 85x^2$; в) $x^2 + 23x + 132$;
 б) $x^2 - 3$; г) $2x^2 - 9,4x - 3$.

500 Найдите значение числового выражения:

- а) $\frac{5}{14} + \frac{6}{7} - 2\frac{5}{28}$; б) $\frac{12}{77} \cdot \frac{55}{54} : 1\frac{7}{18}$.

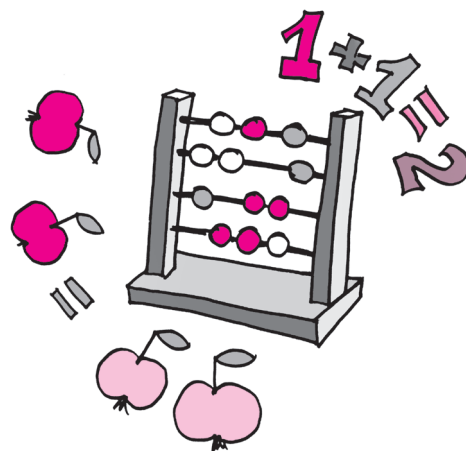
501 Какая из точек $S(0; -2)$, $P(-10; 0)$ принадлежит графику уравнения $-x + 5y = 10$?

502 Постройте график уравнения:

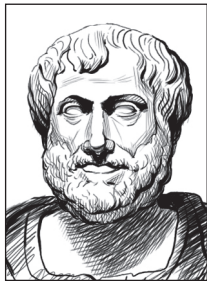
- а) $x + y = 2$; в) $2x - y = 0$;
 б) $-x - 2y = 6$; г) $0x - 3y = -6$.

503* Сократите дробь $\frac{a^2-a+1}{a^4+a^2+1}$.

504* Разложите на множители $a^4 + 4b^4$.



5.1.2. Действия с алгебраическими дробями



Деяние есть живое единство теории и практики

Аристотель (384 до н.э. – 322 до н. э.),
древнегреческий философ и учёный

Разобравшись с определением и основным свойством алгебраических дробей, естественно научиться выполнять с ними арифметические действия. Мы знаем, что, подставив в алгебраические дроби вместо переменных какие-либо их численные значения, мы получим обыкновенные дроби, для которых выполняются изученные ранее правила действий с дробями. Значит, те же правила будут справедливы и для алгебраических дробей.

Рассмотрим сначала сложение алгебраических дробей с *одинаковыми* знаменателями. Для сложения и вычитания алгебраических дробей $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ будут верными следующие правила:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}; \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

Правило сложения (вычитания) алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями

Чтобы сложить (вычесть) две алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями, можно записать дробь, числитель которой равен сумме (разности) числителей исходных дробей, а знаменатель равен их общему знаменателю.

Пример 1.

Выполнить действия: а) $\frac{9a-5b}{4c} + \frac{4b-7a}{4c}$; б) $\frac{3x-11y}{5xy-3} - \frac{8x+3y}{5xy-3}$.

Решение:

В обоих случаях знаменатели дробей, над которыми выполняются действия, равны. Поэтому на основании правил сложения и вычитания алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями имеем:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{9a-5b}{4c} + \frac{4b-7a}{4c} &= \frac{(9a-5b)+(4b-7a)}{4c} = \frac{9a-5b+4b-7a}{4c} = \frac{2a-b}{4c}; \\ \text{б) } \frac{3x-11y}{5xy-3} - \frac{8x+3y}{5xy-3} &= \frac{(3x-11y)-(8x+3y)}{5xy-3} = \frac{3x-11y-8x-3y}{5xy-3} = \frac{-5x-14y}{5xy-3}. \end{aligned}$$

Опираясь на правило сложения и вычитания алгебраических дробей, мы можем складывать и вычитать несколько дробей.

Пример 2.

Представить алгебраическую сумму дробей в виде дроби:

$$\frac{5a-4c}{a+b} + \frac{2b-3c}{a+b} - \frac{4c}{a+b} - \frac{6a-2c+3b}{a+b}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{5a-4c}{a+b} + \frac{2b-3c}{a+b} - \frac{4c}{a+b} - \frac{6a-2c+3b}{a+b} &= \frac{(5a-4c) + (2b-3c) - (4c) - (6a-2c+3b)}{a+b} = \\ &= \frac{5a-4c+2b-3c-4c-6a+2c-3b}{a+b} = \frac{-a-b-9c}{a+b} \end{aligned}$$

Теперь перейдём к сложению и вычитанию алгебраических дробей с *разными* знаменателями. Будем опираться на установленные выше правила и опыт действий с обыкновенными дробями. Ясно, что для того, чтобы использовать правило сложения алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями, нужно сначала привести дроби к общему знаменателю:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} \pm \frac{CB}{DB} = \frac{AD \pm CB}{BD}.$$

Как и для действий с числами, чтобы избежать лишних преобразований, лучше приводить дроби к *простейшему* общему знаменателю (ОЗ). Это делать мы уже умеем. Итак,

Алгоритм сложения (вычитания) алгебраических дробей с разными знаменателями

1. Привести алгебраические дроби к простейшему ОЗ.
2. Сложить (вычесть) полученные алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями.

Пример 3.

Вычислить разность алгебраических дробей: $\frac{y}{2x} - \frac{1}{xy}$.

Решение:

Сначала приведём дроби к общему знаменателю, а затем выполним вычитание:

$$\frac{y^{(y)}}{2x} - \frac{1^{(2)}}{xy} = \frac{y^2}{2xy} - \frac{2}{2xy} = \frac{y^2 - 2}{2xy}.$$

Перейдём к умножению и делению алгебраических дробей. Для умножения алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ будет верным следующее правило:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

Правило умножения алгебраических дробей

Чтобы умножить две алгебраические дроби, можно записать дробь, числитель которой равен произведению числителей исходных дробей, а знаменатель равен произведению знаменателей.

Если при этом в полученной дроби числитель и знаменатель имеют общие множители, отличные от нуля, то дробь можно сократить.

Пример 4.

Умножить дроби $\frac{3x-7y}{5a-3b}$ и $\frac{5a-3b}{7abc}$.

Решение:

Умножим числители и знаменатели исходных дробей:

$$\frac{3x-7y}{5a-3b} \cdot \frac{5a-3b}{7abc} = \frac{(3x-7y)(5a-3b)}{7abc(5a-3b)}.$$

Полученную дробь можно сократить:

$$\frac{(3x-7y)(5a-3b)}{7abc(5a-3b)} = \frac{3x-7y}{7abc}.$$

Прежде чем перейти к делению алгебраических дробей, введём понятие алгебраической дроби, *обратной* данной.

Определение. Алгебраическая дробь $\frac{B}{A}$ называется *обратной* к алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ (где $A \neq 0, B \neq 0$).

Очевидно, что если первая дробь обратна второй, то вторая дробь обратна первой. Поэтому дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{A}$ называют *взаимно обратными*.

Заметим, что произведение взаимно обратных алгебраических дробей равно 1. Действительно,

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A} = \frac{AB}{BA} = 1.$$

Для деления алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ верно следующее правило:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}.$$

Правило деления алгебраических дробей

Чтобы разделить первую дробь на вторую, можно первую дробь умножить на дробь, обратную ко второй.

Пример 5.

Разделите дробь $\frac{4x+2y}{9ab-1}$ на дробь $\frac{2x+y}{7a-5b}$.

Решение:

Чтобы разделить дроби, умножим первую дробь на дробь, обратную второй, и упростим полученную дробь:

$$\frac{4x+2y}{9ab-1} : \frac{2x+y}{7a-5b} = \frac{4x+2y}{9ab-1} \cdot \frac{7a-5b}{2x+y} = \frac{2(2x+y)(7a-5b)}{(9ab-1)(2x+y)} = \frac{2(7a-5b)}{9ab-1}.$$

В завершение выясним, как возвести алгебраическую дробь в натуральную степень.

Операция возведения в натуральную степень является, по сути, многократной операцией умножения, поэтому мы можем действовать в этом случае согласно правилу умножения алгебраических дробей.

Рассмотрим дробь $\frac{A}{B}$ и возведём её в натуральную степень n :

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \dots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ множителей}} = \frac{\underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ множителей}}}{\underbrace{B \cdot \dots \cdot B}_{n \text{ множителей}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Таким образом, получаем правило возведения алгебраической дроби в степень.

Правило возведения алгебраической дроби в степень $n, n \in \mathbb{N}$

Для того чтобы возвести алгебраическую дробь в натуральную степень n , можно возвести в эту степень числитель и знаменатель данной дроби.

Пример 6.

Запишите выражение $\left(\frac{4a-b}{5a+2b}\right)^2$ в виде алгебраической дроби.

Решение:

$$\left(\frac{4a-b}{5a+2b}\right)^2 = \frac{(4a-b)^2}{(5a+2b)^2} = \frac{16a^2 - 8ab + b^2}{25a^2 + 20ab + 4b^2}.$$

Рассмотрим пример, где выполняются сразу нескольких действий с алгебраическими дробями.

Пример 7.

Выполните действия: $\left(\frac{x}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+8}{x^3-8} - \frac{1}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{2}{2-x}\right).$

Решение:

При преобразовании таких громоздких выражений бывает полезно упрощать отдельные блоки в этих выражениях, а затем производить окончательное упрощение.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{x^{(x-2)}}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+8^{(1)}}{(x-2)(x^2+2x+4)} - \frac{1^{(x^2+2x+4)}}{x-2} = \frac{x(x-2)+x^2+8-(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \\ & = \frac{x^2-2x+x^2+8-x^2-2x-4}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x^2-4x+4}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x-2}{x^2+2x+4}; \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} - \left(-\frac{2}{x-2}\right) = \frac{x^{2(1)}}{(x-2)(x+2)} + \frac{2^{(x+2)}}{x-2} = \frac{x^2+2(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x+2)};$$

$$3) \quad \frac{x-2}{x^2+2x+4} \cdot \frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}.$$

Ответ: $\frac{1}{x+2}.$

Выражения, составленные из переменных величин и чисел при помощи арифметических операций, называют *рациональными алгебраическими выражениями*. Все рациональные выражения данного пункта содержали операцию деления на выражение с переменной, их принято называть *дробно-рациональными*. В противопоставление этому названию, рациональные выражения, не содержащие переменной в знаменателе, обычно называют *целыми рациональными* выражениями.

К

505

На какие группы можно разбить эти выражения:

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9}; \quad \frac{2}{3} - \frac{3}{7}; \quad \frac{2}{a} + \frac{5}{a}; \quad \frac{1}{15} + \frac{2}{3}; \quad \frac{b}{c} + \frac{2}{b}; \quad \frac{2}{3x} - \frac{1}{x}?$$

Выполните действия с обыкновенными дробями. Сформулируйте известные вам правила сложения и вычитания обыкновенных дробей. Будут ли справедливы эти правила для алгебраических дробей? Почему? Сопоставьте свой ответ с предложенными в учебнике правилами и выполните действия.

506

Выполните действия:

$$\text{а) } \frac{2a-3b}{ab} + \frac{2b-2a}{ab}; \quad \text{б) } \frac{xz+y^2}{xy-yz} - \frac{2x^2+y^2}{xy-yz}.$$

507 Выполните действия:

а) $\frac{a-b}{a} + \frac{b-a}{b}$;

в) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a^2-b^2}$;

д) $\frac{b}{a+b} + \frac{a-b}{a^4-b^4}$;

б) $\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}$;

г) $\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a^2-b^2}$;

е) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} - \frac{b}{a^3-b^3}$.

508 Выполните действия:

а) $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x^2+4x-12}$;

б) $\frac{2}{2x+3} + \frac{x}{2x^2+x-3} - \frac{1}{x-1}$;

в) $\frac{x-2}{x+4} - \frac{x^2}{x^2+2x-8}$.

509 Выполните действия: $\frac{yx^2+16}{(y-1)(x-4)} - \frac{16y+x^2}{xy-x-4y+4}$ и сократите получившуюся алгебраическую дробь.

510 На какие группы можно разбить эти выражения:

$\frac{2}{9} : \frac{5}{9}$;

$\frac{2}{3} : \frac{3}{7}$;

$\frac{2}{a} : \frac{5}{a}$;

$\frac{4}{15} : \frac{3}{2}$;

$\frac{b}{c} : \frac{2}{b}$?

Выполните действия с обыкновенными дробями. Сформулируйте известное вам правило умножения обыкновенных дробей. Будет ли справедливо это правило для алгебраических дробей? Почему? Сопоставьте свой ответ с предложенным в учебнике правилом и выполните действия.

511 Выполните действия:

а) $\frac{a-b}{a} \cdot \frac{b+a}{b}$;

в) $\frac{x+y}{xy} \cdot \frac{3x}{x^2-y^2}$;

д) $\frac{x^2-4x-12}{x} \cdot \frac{x}{x-6}$;

б) $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+b}{a-b}$;

г) $\frac{2xy}{x-y} \cdot \frac{x^3-y^3}{4x^2}$;

е) $\frac{4}{2x+1} \cdot \frac{2x^2+5x+2}{2x}$.

512 Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\frac{a-b}{2a+b}\right)^2$;

б) $\left(\frac{x-y}{2x+3y}\right)^3$.

513 Выберите пары дробей, произведение которых равно 1:

$\frac{2}{9}$;

$\frac{7+c}{c-8}$;

$\frac{b}{a}$;

$\frac{18}{1}$;

$\frac{9}{2}$;

$\frac{a}{b}$;

$\frac{c-8}{7+c}$.

Из выбранных пар найдите пару, составленную из обыкновенных дробей. Как называются эти обыкновенные дроби?

Предположите, как будут называться алгебраические дроби в каждой из выбранных вами пар. Сопоставьте свое предположение с определением на с. 137.

514 Запишите алгебраическую дробь, обратную к данной:

а) $\frac{2x+3y}{5x^2-y}$;

б) bc ;

в) $\left(\frac{x+y}{2x-y}\right)^2$.

515 На какие группы можно разбить эти выражения:

$\frac{2}{9} : \frac{5}{9}$;

$\frac{2}{3} : \frac{3}{7}$;

$\frac{2}{a} : \frac{5}{a}$;

$\frac{4}{15} : \frac{3}{2}$;

$\frac{b}{c} : \frac{2}{b}$?

Выполните действия с обыкновенными дробями. Сформулируйте известное вам правило деления обыкновенных дробей. Будет ли справедливо это правило для алгебраических дробей? Почему? Сопоставьте свой ответ с предложенным в учебнике правилом и выполните действия.

516 Выполните действия:

а) $\frac{5a-b}{a} : \frac{b-a}{a}$;

в) $\frac{x-y}{xy+x} : \frac{x^2-y^2}{2x^2+xy}$;

д) $\frac{x^2+5x+6}{x} : \frac{x+3}{x}$;

б) $\frac{a^2}{a+b} : \frac{a^2-ab}{a+b}$;

г) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y} : \frac{x^3-y^3}{x^2}$;

е) $\frac{x^4-5x^2+6}{x^2} : \frac{x^2-2}{x^4}$.

517 Упростите выражение:

а) $\frac{x+12}{x^3-9x} : \left(\frac{x-3}{2x^2+5x-3} - \frac{9}{9-x^2} \right)$;

б) $\left(\frac{4}{5a^2+a-4} - \frac{1+a}{9(5a-4)} \right) \cdot \frac{5a-4}{a+7}$.

518 Докажите, что выражение равно нулю при допустимых значениях переменной:

а) $\frac{6x^2-5x-6}{2x-3} + \frac{4-9x^2}{3x-2}$;

б) $\frac{4x^2-4x-3}{2x+1} + \frac{9-4x^2}{2x+3}$.

519 Выполните действия:

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b-c}} \cdot \left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right) : \frac{b-a-c}{abc}.$$

520 Проанализируйте таблицу и попытайтесь составить определение дробно-рациональных и целых выражений, сопоставьте свой вариант с определениями, приведенными в учебнике.

Рациональные выражения	
Целые выражения	Дробно-рациональные выражения
$2x-7$; $\frac{1}{2}x-5+x:4$; $x^2-2x+0,75$; $\left(\frac{x-1}{5} + 3 \right) \cdot \frac{x+5}{2}$.	$\frac{1}{x+1}$; $\frac{2}{x}-5-3x$; $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x} - \frac{5}{x(x-2)}$; $\left(\frac{x+1}{x-4} + \frac{9}{x^2-16} \right) : \frac{x}{2x+8}$.

π

521 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\frac{5-x}{9+x}$;

б) $\frac{18+2x}{81x-x^3}$;

в) $\frac{x}{x^2-x-12}$.

522 Сократите алгебраическую дробь:

а) $\frac{15a^3b^7}{65a^6b^4}$;

б) $\frac{(m-7)^2}{14-2m}$;

в) $\frac{16-d^2}{d^2+8d+16}$;

г) $\frac{y^2-9y+20}{y^2+y-30}$;

д) $\frac{5-5n+5n^2}{n^3+1}$.

523 Сократите, разложив на множители числитель и знаменатель дроби:

а) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

б) $\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{x-y}$;

в) $\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{x-2\sqrt{xy}+y}$.

524 Представьте дробь $\frac{t}{t-5}$ в виде дроби со знаменателем t^2-25 .

525 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{a-7m}{2am}$ и $\frac{1+m}{4a}$;

в) $\frac{1}{x^2+xq}$ и $\frac{x+q}{5x^2-5xq}$;

б) $\frac{b-1}{t-3}$ и $\frac{b}{6-2t}$;

г) $\frac{n^2+n+1}{(1+n)^2}$ и $\frac{n}{n^2-1}$.

526 Неизвестный многочлен обозначили буквой A .

а) $A \cdot (-2m^3) = 2m^{11} - 12m^9 + 8m^3$;

б) $A \cdot 3ab = 18a^3b^3 + 9a^3b^2 - 3a^2b^3$;

в) $A \cdot (d+7) = 3d+21$;

г) $A \cdot (t+5) = t^2-25$;

д) $A \cdot (2z+5) = 20z^2 + 100z + 125$.

Найдите многочлен A .

527 Русский инженер Глеб Котельников изобрел ранцевый парашют в XX веке. Первая конструкция парашюта была разработана итальянским учёным Леонардо да Винчи на несколько веков раньше. Выполнив деление с остатком 79 551 на 647, вы сможете узнать, сколько лет разделяют эти изобретения. Для этого выпишите из полученного при делении «столбика» второе неполное делимое (примерный год изобретения парашюта Леонардо да Винчи) и третье неполное делимое (год изобретения парашюта Котельниковым).

528 Найдите остаток при делении:

а) 109 на 9; б) 200 на 18; в) 360 на 12; г) 190 на 15; д) 23 на 25.

529 Представьте неправильную дробь в виде смешанного числа:

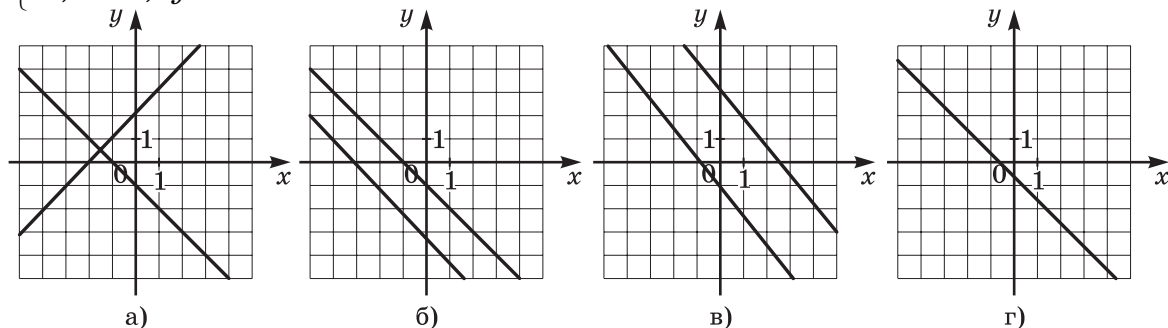
а) $\frac{11}{6}$; б) $\frac{63}{8}$; в) $\frac{93}{73}$; г) $\frac{256}{15}$; д) $\frac{100}{2}$.

530 Найдите решение системы графическим способом:

а) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 0,5x-y=-3,5 \\ -3x-y=0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+y=-4 \\ -\frac{1}{3}x+y=-2 \end{cases}$.

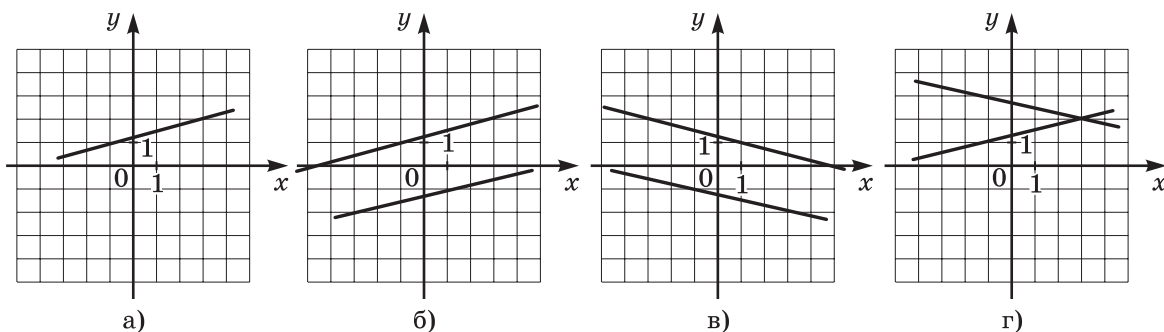
531 Укажите рисунок, на котором изображено графическое решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x+5y=-2 \\ -2,5x-2,5y=1 \end{cases}$$



532 Укажите рисунок, на котором изображено графическое решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - 12y = -15 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$$



533 Решите систему, используя теорему о целочисленных точках графика уравнения для решения систем:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ x + 5y = 15 \end{cases}$$

Д

534 Выполните действия:

а) $\frac{2a^2 + 3b^2}{a+b} + \frac{b^2 - 6a^2}{a+b}$;

б) $\frac{xy + 2y^2}{xy + yz} - \frac{xy - y^2}{xy + yz}$.

535 Выполните действия:

а) $\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b}$;

б) $\frac{b}{a-b} - \frac{ab}{a^2 - b^2}$;

в) $\frac{1}{a-b} - \frac{a^3 + b^3}{a^4 - b^4}$;

г) $\frac{a-b}{a^2 + ab + b^2} - \frac{b^2}{a^3 - b^3}$.

536 Выполните умножение:

а) $\frac{a+b}{a^2} \cdot \frac{b-a}{b^2}$;

б) $\frac{b}{a-b} \cdot \frac{a-b}{a+2b}$;

в) $\frac{x-y}{3xy} \cdot \frac{5y^2}{x^2 - y^2}$;

г) $\frac{3y^2}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^3 + y^3}{6xy}$.

537 Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\frac{a+b}{3a-b} \right)^2$;

б) $\left(\frac{x+y}{5x+y} \right)^3$.

538 Запишите алгебраическую дробь, обратную к данной:

а) $\frac{x-3y}{2x+y^2}$;

б) $x+y$;

в) $\left(\frac{x-y}{x+3y} \right)^2$.

539 Выполните деление:

а) $\frac{3a+b}{b^2} : \frac{b+2a}{b}$;

б) $\frac{ab}{a-b} : \frac{3a^2+ab}{ab-b^2}$;

в) $\frac{x+y}{2xy-x} : \frac{x^2-y^2}{2y^2-y}$;

г) $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y} : \frac{x^3+y^3}{xy}$.

540 Выполните действия: $\frac{x^3}{2x^2+x-3} : \frac{x^2}{x-1} \cdot (2x+3)$.

541 Выполните действия:

$$\left(\frac{a^6+b^6}{a^4-b^4} + \frac{a^2b^4-a^4b^2}{a^4+b^4-2a^2b^2} \right) : (a-b) - b.$$

542 Найдите области определения алгебраической дроби:

а) $\frac{x}{x-3}$; б) $\frac{5}{15x^2+3x}$; в) $\frac{4+x}{x^2-2x-24}$.

543 Сократите алгебраическую дробь:

а) $\frac{14s^5r^7p^5q}{98s^7r^5p}$; б) $\frac{(8+a)^2}{24+3a}$; в) $\frac{m^2-6m+9}{m^2-9}$; г) $\frac{t^2+t-110}{t^2-12t+20}$; д) $\frac{3+3b+3b^2}{b^3-1}$.

544 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{s-1}{5s}$ и $\frac{5+d}{2sd}$; в) $\frac{2}{m^2-mp}$ и $\frac{p}{9m^2+9mp}$;

б) $\frac{1}{5-10k}$ и $\frac{k}{2k-1}$; г) $\frac{a^2-a+4}{(a-2)^2}$ и $\frac{a}{a^2-4}$.

545 Найдите решение системы графическим способом:

а) $\begin{cases} 5,5x+y=6 \\ -x+y=-7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ -0,4x+0,2y=-1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 0,25x+0,25y=0,5 \\ 3x+3y=-3 \end{cases}$.

546* Можно ли разделить поровну 13 одинаковых прямоугольных пирожных среди шести ребят так, чтобы каждое пирожное либо не разрезалось вовсе, либо разрезалось на две равные части, либо разрезалось на три равные части?

547* Числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$.

5.1.3.* Алгебраические дроби и деление многочленов



За лёгкое дело берись как за трудное, а за трудное – как за лёгкое. В первом случае, дабы уверенность не перешла в беспечность; во втором – неуверенность в робость.

Грасиан-и-Моралес Бальтасар (1601–1658),
испанский писатель и философ

В этом пункте мы будем рассматривать многочлены *только от одной переменной*. Эту переменную будем обозначать x , а многочлены от одной переменной будем обозначать как $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, ...

Алгебраические дроби, с которыми мы познакомились в пункте 5.1.1, представляют собой отношение двух многочленов A и B , стоящих в числителе и знаменателе дроби. Иногда это отношение может быть равно некоторому многочлену C . Например, алгебраическая дробь $\frac{x^4-1}{x^2-1}$ при $x \neq \pm 1$ равна многочлену x^2+1 . В таких случаях, аналогично

делимости целых чисел, говорят, что многочлен A *делится* на многочлен B , где $B \neq 0$.

Но чаще всего многочлен A не делится на многочлен B . В этом случае для многочленов, как и для целых чисел, вводится понятие *деления с остатком*.

Мы уже изучали в 7-м классе операции сложения, вычитания и умножения многочленов. В этом пункте мы познакомимся с операцией деления многочленов и её применением для преобразования алгебраических дробей.

Определение 1. Разделить многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$ с остатком при $B(x) \neq 0$, значит, представить многочлен $A(x)$ в виде:

$$A(x) = B(x) \times C(x) + R(x),$$

где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $B(x)$ или $R(x) = 0$.

В данном равенстве многочлен $A(x)$ называют *делимым*, $B(x)$ – *делителем*, $C(x)$ – *неполным частным*, а $R(x)$ – *остатком* от деления многочленов $A(x)$ на $B(x)$. Значит, разделить $A(x)$ на $B(x)$ – это значит, фактически, указать частное $C(x)$ и остаток $R(x)$.

Например, чтобы разделить многочлен $x^4 + 1$ на многочлен $x^2 - 1$ с остатком, достаточно составить равенство:

$$x^4 + 1 = (x^4 - 1) + 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2$$

Здесь $C(x) = x^2 + 1$ – неполное частное, $R(x) = 2$ – остаток, причём степень остатка меньше степени делителя: $0 < 2$. Таким образом, мы получили требуемое представление многочлена $x^4 + 1$, а значит, произвели его деление с остатком на многочлен $x^2 - 1$.

Примечание. В случае $R(x) = 0$, наше определение означает, что многочлен $A(x)$ делится на многочлен $B(x)$, где $B(x) \neq 0$.

Разберём несколько примеров, которые помогут нам вывести алгоритм деления многочленов. Вначале рассмотрим более простой случай деления – деление многочлена на одночлен. Разделим с остатком, например многочлен $6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2$ на одночлен $2x^3$.

Чтобы выполнить деление, нам надо представить делимое в виде:

$$6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 = 2x^3 \cdot C(x) + R(x),$$

где либо $R(x) = 0$, либо $R(x)$ – многочлен степени меньше 3. Сгруппируем члены многочлена, степень которых больше или равна 3:

$$(6x^7 - 2x^6 + 4x^5) + x^2 + 2.$$

Вынося за скобки $2x^3$, получим:

$$6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 = 2x^3 \cdot (3x^4 - x^3 + 2x^2) + x^2 + 2.$$

Значит, неполное частное $C(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2$, а остаток $R(x) = x^2 + 2$, где степень остатка меньше степени делителя: $2 < 3$.

При решении примера 1 мы использовали способ подбора. Как и любой подбор, он не является общим способом. Вместе с тем полученный результат мы можем использовать для вывода алгоритма деления с остатком любых многочленов. Для этого будем действовать аналогично делению целых чисел «в столбик»:

Деление чисел

$$\begin{array}{r|l} 6241 & 2 \\ -6 & 3120 \\ \hline 2 & \\ -2 & \\ \hline 4 & \\ -4 & \\ \hline & 1 \text{ (ост.)} \end{array}$$

$$6241 = 2 \cdot 3120 + 1.$$

Деление многочлена на одночлен

$$\begin{array}{r|l} 6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 & 2x^3 \\ -6x^7 & \\ \hline -2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 & \\ -2x^6 & \\ \hline +4x^5 + x^2 + 2 & \\ +4x^5 & \\ \hline & +x^2 + 2 = R(x) \end{array}$$

$$6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 = 2x^3 \cdot (3x^4 - x^3 + 2x^2) + x^2 + 2.$$

Таким образом, мы получили тот же самый результат. Вначале мы определили, на какой одночлен надо умножить $2x^3$, чтобы получить старший член делимого $6x^7$, нашли первый член частного $3x^4$. Вычли выражение $6x^7$ из делимого и выписали полученную разность: $-2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2$. А затем ещё 2 раза последовательно применили ту же самую процедуру к полученным после вычитания выражениям.

Теперь рассмотрим случай деления с остатком двух многочленов, например многочлена $4x^3 + x - 3 + x^4$ на многочлен $x - 2$. Запишем многочлены в стандартном виде. По определению, чтобы выполнить указанное деление, нам надо представить многочлен $x^4 - 4x^3 + x - 3$ в виде:

$$x^4 - 4x^3 + x - 3 = (x - 2) C(x) + R(x),$$

где либо $R(x) = 0$, либо $R(x)$ – многочлен, степень которого меньше степени двучлена $x - 2$, то есть меньше 1.

Как и в первом примере, разделим многочлены «в столбик» по аналогии с целыми числами:

$$\begin{array}{r|l} 15013 & 12 \\ \hline 12 & 1251 \\ \hline 30 & \\ -24 & \\ \hline 61 & \\ -60 & \\ \hline 13 & \\ -12 & \\ \hline & 1 \text{ (ост.)} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 & + x - 3 \\ \hline x^4 - 2x^3 & \\ \hline -2x^3 & + x - 3 \\ -2x^3 + 4x^2 & \\ \hline & -4x^2 + x - 3 \\ -4x^2 + 8x & \\ \hline & -7x - 3 \\ -7x + 14 & \\ \hline & -17 = R(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = C(x) \end{array}$$

$$15013 = 12 \cdot 1251 + 1;$$

$$x^4 - 4x^3 + x - 3 = (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4x - 7) - 17.$$

Будем подбирать каждый член частного так, чтобы при умножении его на делитель получать старший член делимого. Тогда на каждом шаге степень делимого будет последовательно уменьшаться.

Первый член частного равен x^4 : $x = x^3$. Умножим x^3 на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим $-2x^3 + x - 3$.

Второй член частного равен $-2x^3$: $x = -2x^2$. Умножим $-2x^2$ на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим $-4x^2 + x - 3$.

Третий член частного равен $-4x^2$: $x = -4x$. Умножим $-4x$ на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим $-7x - 3$.

Четвёртый член частного равен $-7x$: $x = -7$. Умножим -7 на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим в остатке многочлен -17 степени 0, $0 < 1$. Деление закончено.

Значит, $C(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$, $R(x) = -17$. Этот результат можно проверить непосредственным преобразованием правой части.

$$\begin{aligned} (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4x - 7) - 17 &= x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 7x - 2x^3 + 4x^2 + 8x + 14 - 17 = \\ &= x^4 - 4x^3 + x - 3. \end{aligned}$$

Итак, для того чтобы выполнить деление многочленов, мы сначала приводим их к стандартному виду, а затем выполняем деление многочленов «в столбик» аналогично делению чисел. При этом неполное частное и остаток при делении многочленов «в столбик» находятся на тех местах, на которых находятся неполное частное и остаток при обычном делении чисел «в столбик».

В итоге, мы можем записать следующий алгоритм.

Алгоритм деления многочлена на многочлен

1. Записать оба многочлена в стандартном виде.
2. Записать делимое и делитель как при делении чисел «в столбик».
3. Найти первый член частного: одночлен, при умножении которого на старший член делителя получается старший член делимого.
4. Умножить найденный член частного на делитель и подписать под делимым так, чтобы одночлены одинаковых степеней стояли друг под другом.
5. Вычесть из делителя найденное произведение.
6. Если степень полученной разности меньше степени делителя, то закончить деление и перейти к пункту 8.
7. Если степень разности больше или равна степени делителя, то, считая разность делимым, найти следующий член частного и повторить пункты 4–6.
8. Записать результат деления многочленов.

Операция деления многочленов «в столбик» часто применяется при работе с алгебраическими дробями. Так, деление без остатка многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$ может использоваться для сокращения дроби $\frac{A(x)}{B(x)}$.

Пример 1.

Сократите дробь $\frac{4x^3 - 2x^2 + 6x + 4}{x^2 - x + 2}$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 2x^2 + 6x + 4 & x^2 - x + 2 \\ \underline{4x^3 - 4x^2 + 8x} & 4x + 2 = C(x) \\ 2x^2 - 2x + 4 & \\ \underline{2x^2 - 2x + 4} & \\ 0 & \end{array}$$

Значит, $\frac{4x^3 - 2x^2 + 6x + 4}{x^2 - x + 2} = 4x + 2$.

Чтобы понять, как при работе с алгебраическими дробями используется деление с остатком, введём следующее определение.

Определение 2. Алгебраическая дробь $\frac{A(x)}{B(x)}$, где степень числителя равна m , а степень знаменателя n , называется *правильной*, если $m < n$, и *неправильной*, если $m \geq n$ ($m, n \in N_0$).

Например,

а) дробь $\frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 + 6x + 1}$ – правильная, так как $m = 2$, $n = 3$ и $2 < 3$;

б) дробь $\frac{x^6 - 2x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}$ – неправильная, так как $m = 6$, $n = 4$ и $6 > 4$;

в) дробь $\frac{x^3 - 3x - 1}{(x^2 + x)^2 - (x^2 - x)^2}$ – неправильная, так как $m = 3$, $n = 3$ (знаменатель преобразуется к виду $x^4 + 2x^3 + x^2 - x^4 + 2x^3 - x^2 = 4x^3$) и $3 = 3$.

Легко заметить, что введенное нами определение напоминает определение правильной и неправильной числовой дроби.



Как мы помним, числовая неправильная дробь может быть представлена в виде смешанного числа (суммы целого числа и правильной дроби, где знак «+» обычно опускается), например $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Чтобы представить неправильную дробь в виде смешанного числа, мы выполняли деление с остатком числителя на знаменатель. Так, в приведённом примере при делении с остатком 7 на 3 получается $7 = 3 \cdot 2 + 1$, откуда следует вывод, что $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$. Данное преобразование мы называли *выделением целой части* из неправильной дроби.

Аналогичное преобразование можно выполнить и для алгебраической дроби, исходя из формулы её деления с остатком:

$$A(x) = B(x) \cdot C(x) + R(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A(x)}{B(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{B(x)}, \text{ где } B(x) \neq 0.$$

Следовательно, любую неправильную алгебраическую дробь можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной алгебраической дроби, то есть *выделить из неё целую часть*.

Определение 3. *Выделить целую часть из алгебраической дроби $\frac{A(x)}{B(x)}$, где $B(x) \neq 0$, значит представить её в виде суммы некоторого многочлена $C(x)$ и правильной дроби $\frac{R(x)}{B(x)}$ т. е.*

$$\frac{A(x)}{B(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{B(x)}, \text{ где } B(x) \neq 0.$$

Значит, чтобы выделить из алгебраической дроби целую часть, нужно многочлен, стоящий в числителе, разделить с остатком на многочлен, стоящий в знаменателе. Тогда неполное частное будет целой частью алгебраической дроби, а остаток – числителем дробной части.

Вернёмся к рассмотренному нами выше примеру деления многочленов. При делении многочлена $x^4 - 4x^3 + x - 3$ на $x - 2$ мы получили неполное частное $C(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$ и остаток $R(x) = -17$, значит,

$$\frac{x^4 - 4x^3 + x - 3}{x - 2} = x^3 - 2x^2 - 4x - 7 - \frac{17}{x - 2}.$$

Выделение целой части из алгебраической дроби бывает весьма полезным при решении самых разнообразных задач.

Пример 2.

При каких значениях k , где $k \in \mathbb{Z}$, алгебраическая дробь $\frac{k^3 + k^2 - 2k + 7}{k - 1}$ является целым числом?

Решение:

Выделим целую часть данной дроби при $k \neq 1$. Для этого разделим «в столбик» многочлен $k^3 + k^2 - 2k + 7$ на многочлен $k - 1$.

$$\begin{array}{r|l} k^3 + k^2 - 2k + 7 & k - 1 \\ \hline k^3 - k^2 & k^2 + 2k = C(x) \\ \hline 2k^2 - 2k + 7 & \\ - 2k^2 - 2k & \\ \hline 7 & 7 = R(x) \end{array}$$

$$\text{Значит, } \frac{k^3 + k^2 - 2k + 7}{k - 1} = k^2 + 2k + \frac{7}{k - 1}.$$

При всех целых значениях k выражение $k^2 + 2k$ будет целым числом. Значит, для того чтобы исходная алгебраическая дробь была целым числом, необходимо, чтобы $\frac{7}{k-1}$ было целым числом. Это возможно только в тех случаях, когда знаменатель является делителем числа 7.

Делителями 7 являются четыре целых числа: -1 ; 1 ; -7 ; 7 . Значит, исходная алгебраическая дробь будет целым числом только при следующих значениях k :

$$k - 1 = -1 \Leftrightarrow k = 0;$$

$$k - 1 = -7 \Leftrightarrow k = -6;$$

$$k - 1 = 1 \Leftrightarrow k = 2;$$

$$k - 1 = 7 \Leftrightarrow k = 8.$$

Все полученные значения k принадлежат области определения данной дроби $k \neq 1$. Значит, они и составляют множество решений нашей задачи.

Ответ: $\{-6; 0; 2; 8\}$.

К

548 Выполните деление многозначных чисел:

а) $9984 : 39$;

б) $56095 : 123$.

Проверьте результат с помощью умножения. Какие случаи деления вы вспомнили?

549

Выполните вычитание многочленов «в столбик»:

а) $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ и $2x^3 - x^2$;

б) $4x^2 + 4x - 3$ и $4x^2 - 2x$.

Сравните степени уменьшаемого многочлена и многочлена, полученного в результате вычитания.

550

Выполните умножение многочлена $x^2 + 2x + 3$ на многочлен $2x - 1$.

Пользуясь результатами выполнения этого задания, ответьте на вопросы:

1) На какой многочлен нужно умножить многочлен $2x - 1$, чтобы получить многочлен $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$?

2) Какой результат получится после сокращения дроби $\frac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 3}{x^2 + 2x + 3}$?

3) Какой результат получится при делении многочлена $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ на многочлен $2x - 1$?

4) Предложите способ выполнения деления многочлена $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ на многочлен $2x - 1$.

551

Выполните деление многочленов и проведите проверку с помощью умножения.

а) Разделите многочлен $3x^6 + 12x^4 - 21$ на одночлен $3x^3$ по аналогии с делением «в столбик» многозначного числа на однозначное.

б) Разделите многочлен $18x^2 - 27x + 10$ на двучлен $3x - 2$ по аналогии с делением «в столбик» многозначного числа на многозначное.

в) Разделите многочлен $x^5 + 6x^4 - 19x^3 + x^2 + 8x + 4$ на многочлен $x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ по аналогии с делением «в столбик» многозначного числа на многозначное.

Пользуясь результатами выполнения деления, сформулируйте алгоритм деления многочлена на многочлен и сравните его с алгоритмом на с. 146.

552 Замените дробь равным ей целым выражением, разделив её числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{x^3-13x-12}{x+1}; & \text{в) } \frac{x^3-13x-12}{x-4}; & \text{д) } \frac{x^3-13x-12}{x^2-3x-4}; \\ \text{б) } \frac{x^3-13x-12}{x+3}; & \text{г) } \frac{x^3-13x-12}{x^2-x-12}; & \text{е) } \frac{x^3-13x-12}{x^2+4x+3}. \end{array}$$

553 Найдите остаток от деления многочлена $3x^4+13x^3+17x^2+6x+5$ на $x+2$.

554 Найдите остаток от деления многочлена x^3+x^2 на многочлен x^2-1 .

555 На какие подмножества можно разбить дроби из множества

$$A = \left\{ \frac{5}{6}; \frac{7}{3}; \frac{8}{99}; \frac{44}{21}; \frac{16}{2} \right\}?$$

Каким определением вы воспользовались?

Можно ли аналогичным способом разбить дроби из множества B

$$B = \left\{ \frac{5a}{a^4-1}; \frac{b-1}{b^2}; \frac{x-3}{x^2+4}; \frac{d^8}{8}; \frac{n-4}{(n+4)^2} \right\}?$$

Проверьте свою версию, прочитав определение на с. 146.

556 Выделите целую часть из алгебраической дроби:

$$\text{а) } \frac{3x^4+13x^3+17x^2+6x+5}{x+2}; \quad \text{б) } \frac{x^3+x^2}{x^2-1}.$$

Результаты выполнения каких предыдущих заданий помогут вам сделать это быстрее?

557 Выделите целую часть из алгебраической дроби:

$$\text{а) } \frac{3x-1}{x-2}; \quad \text{б) } \frac{4x^2+x-6}{x+5}; \quad \text{в) } \frac{y^3+0,5y^2}{2y^2+y-4}.$$

π

558 Выполните действия:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{3m+2p}{5a} + \frac{8p-13m}{5a}; & \text{в) } \frac{x-y}{xy^2} - \frac{x-y}{x^2y}; \\ \text{б) } \frac{b+1}{b} - \frac{3b+2}{3b}; & \text{г) } \frac{2}{a^2-4} + \frac{1}{a^2-2a}. \end{array}$$

559 Выполните действия:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{9a^3}{6b^2} \cdot \frac{4b^3}{3a^4}; & \text{в) } \frac{d^2-q^2}{3x-3z} : \frac{dq+q^2}{x-z}; \\ \text{б) } \frac{c-5}{c} \cdot \frac{7c^2}{c^2-25}; & \text{г) } \frac{p^2-2pt+t^2}{p^3+t^3} : \frac{p-t}{p^2-pt+t^2}. \end{array}$$

560 Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

$$\text{а) } \left(\frac{k^2}{s^3} \right)^5; \quad \text{б) } \left(-\frac{4dt^3}{h^2} \right)^3; \quad \text{в) } \left(\frac{2ax^4}{v^3} \right)^3 \cdot \left(-\frac{v^3}{5a^4x} \right)^2.$$

561 Выполните действия: $\frac{3(a-3)}{a+3} + \left(\frac{5a}{a+3} - \frac{14a}{a^2+6a+9} \right) : \frac{5a+1}{a^2-9}.$

562 Выполните действия:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{2}{x-y}; \quad \text{б) } \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{x-2\sqrt{xy}+y} \cdot \frac{1}{x}.$$

563 Решите уравнение:

а) $\frac{x-1}{2} - \frac{4+2x}{3} = 0$; б) $\frac{x}{15} - \frac{1}{5} = \frac{x-1}{25}$.

564 Найдите неизвестный член пропорции:

а) $5 : x = 7 : 21$; б) $x : 3,3 = 0,2 : 0,6$; в) $\frac{5}{6} = \frac{2x}{3}$; г) $\frac{5x}{6} = \frac{x+1}{3}$.

В каком случае вы использовали основное свойство пропорции? Сформулируйте это свойство.

565 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=0,5 \\ 2x+5y=-4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x-4y=-5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2(3x-y)+5=4(0,5x+y) \\ 19y+8(0,15x-1)=-1,8x \end{cases}$;

г) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 0,1 \end{cases}$; д) $\begin{cases} \frac{x-y}{6} = 1 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{1-2y}{4} = -\frac{5}{12} \end{cases}$; е) $\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{2} \\ \frac{3x-y}{5} = \frac{5x-4y}{6} \end{cases}$.

Д

566 Замените дробь равным ей целым выражением:

а) $\frac{x^3-11x^2+10}{x-1}$; в) $\frac{x^3-10x+3}{x-3}$; д) $\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$;

б) $\frac{x^3-5x-2}{x+2}$; г) $\frac{x^3-x^2-x-2}{x^2+x+1}$; е) $\frac{x^3+27}{x^2-3x+9}$.

567

Найдите остаток от деления многочлена $x^4 - x^3 + x^2 - x + 5$ на $x+3$.

568

Найдите остаток от деления многочлена $2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ на $x-2$.

569

Найдите остаток от деления многочлена $3x^3 + 2x^2 + x$ на многочлен $x^2 - 1$.

570

Выделите целую часть алгебраической дроби:

а) $\frac{3x+2}{x-3}$; б) $\frac{x^3-2x^2+1}{x^2+x}$.

571

Выполните действия: $\left(\frac{5d}{d+1} - \frac{3d}{d^2+2d+1} \right) : \frac{5d+2}{d^2-1} + \frac{d-1}{d+1}$.

572

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y-4=6(y-2,5x) \\ 13x-5(x+1)=-y-0,2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x+y}{6} - \frac{x}{5} = 0,1 \\ \frac{y}{3} + \frac{x-y}{2} = -0,5 \end{cases}$.

573

Решите уравнение: $\frac{x-3}{4} + \frac{x}{22} = \frac{x+3}{8}$.

С

574* В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идет число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?

575*

На доске записаны числа 4, 14, 24, ..., 94, 104. Можно ли стереть одно число, затем из оставшихся ещё два, затем ещё три и, наконец, ещё четыре числа так, чтобы после каждого вычёркивания сумма оставшихся чисел делилась на одиннадцать?

Ответы

4. 4. 12. $-0,25; -0,5; -1; -0,5; 0$; 24. 13. Нет; 4; 6; 3,2; 2; нет. 18. $\frac{13}{5}; \frac{-6}{1}; \frac{37}{100}; \frac{0}{a}; \frac{-4}{7}; \frac{3}{50}; \frac{-91}{6}$.
19. а) 0,(3); б) 0,(216); в) 0,4(6); г) 3,(0); д) $-15,15(0)$; е) 2,(4); ж) $-6,41(6)$; з) 8,(09).
20. а) $\frac{37}{3}$; б) $\frac{122}{99}$; в) $\frac{689}{45}$; г) $-\frac{6937}{495}$; д) $\frac{3667}{450}$. 22. $(-\infty; +\infty)$. 23. [1,4; 1,5). 25. $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 3; 5$; нет; $\frac{1}{5}$;
- 0,1. 26. 2. 27. 1; 2; 9; 0; $-4,5$; нет. 30. а) 0,25(0); б) 0,(2); в) 3,(6); г) 8,09(0); д) $-1,(6)$;
- е) $-8,(63)$. 31. а) $\frac{10}{9}$; б) $\frac{21}{10}$; в) $-\frac{202}{33}$; г) $\frac{4889}{495}$; д) $-\frac{1339}{9900}$. 32. $(-\infty; 5]$. 33. $\left[0,25; \frac{1}{3}\right)$. 40. а, г, е, ж, з.
41. а) 30; б) 0,6; в) $-1,3$; г) $\frac{5}{3}$; д) 10; е) 75; ж) 4,9; з) 2; и) 135; к) 200; л) 0,37; м) $-0,4$; н) 64;
- о) 0,4; п) 0; р) $-\frac{7}{39}$. 42. а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 0]$; г) $[4; +\infty)$;
- д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\{0\}$. 43. а) 2; б) 8; в) -4 ; г) -4 ; д) 64; е) 64. 44. а) 6; б) 10; в) 12. 45. а) 3; б) 2; в) $\frac{1}{3}$.
46. а) 35; б) 0,12; в) 90; г) $\frac{6}{11}$; д) $\frac{15}{4}$. 47. а) 5; б) 5; в) 6; г) 6; д) 36; е) 36; ж) 243; з) 243; и) 3^n ; к) 3^n .
48. а) $|c|$; б) $-c$; в) c ; г) d^{50} ; д) a^{2n} ; е) $5t^4\sqrt{2}$; ж) $-6b^8t|t|$; з) $\frac{2}{5}|a|m^3$. 50. а) $3\sqrt{2}$;
- б) $8\sqrt{2}$; в) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}$; г) $4\sqrt{a}$; д) $|x^3|y^6\sqrt{y}$; е) $\frac{x^5\sqrt{x}}{y^2}$. 51. а) $\sqrt{27}$; б) $-\sqrt{50}$; в) $\sqrt{121b^3}$; г) $\sqrt{80a^5}$. 55. а) 3;
- б) 30. 56. а) $\{25\}$; б) $\{144\}$; в) $\{196\}$; г) $\{1\}$; д) $\{0\}$; е) $\emptyset$; ж) $\{6\}$; з) $\emptyset$; и) $\{4\}$. 57. а) 6; б) -41 ; в) 0,5;
- г) $\frac{2}{3}$. 59. а) одно, при любом a ; б) $a = 4$, бесконечно; $a \neq 4$ нет решения; в) $a = 2$, нет решения; $a \neq 2$, одно решение. 61. а) $x(x-2)$; б) $ab(a^2b-a+1)$; в) $(2k-3t)(2k+3)$; г) $(2y-7z)(2y+7z)$; д) $(5m^2-n^3) \cdot (5m^2+n^3)$; е) $2(4pq^4-r^5)(4pq^4+r^5)$; ж) $(d+3h^2)^2$; з) $(a^3-1,5b^4)^2$; и) $(3-2p+x)(3+2p-x)$;
- к) $(s+3)(s^2-3s+9)$; л) $(z^3-5)(z^6+5z^3+25)$; м) $(ac+2b^3)(a^2c^2-2ab^3c+4b^6)$. 62. а) $4a^2-9s^2$; б) $0,01x^4-y^2$;
- в) $64t^4-80t^2r+25r^2$; г) $0,09d^2+0,08dq^3+\frac{4}{225}q^6$; д) v^3-1 ; е) $8w^3+27c^6$. 63. а) t ; б) $b-2$; в) $6-0,5x$.
64. а) 28; б) -7 ; в) 323; г) 13; д) 1,7; е) $-2,4$. 67. а) 36; б) 175; в) 5,2; г) 256; д) $81\sqrt{3}$. 68. а) 1;
- б) 42. 69. а) $9\sqrt{2}$; б) $\frac{5}{7}$. 70. а) $u^3v^6\sqrt{u}$; б) $\frac{u\sqrt{u}}{v^4}$. 71. а) $\sqrt{216}$; б) $-\sqrt{405}$; в) $\sqrt{1,44d^3}$; г) $\sqrt{169z^5}$. 72. а)
- $\{121\}$; б) $\{7\}$; в) $\emptyset$; г) $\{9\}$. 73. а) $m^4(m-4)$; б) $24n^2k^2(n^2k+3)$; в) $(14y+7z)(14y-7z)$; г) $d(d-3)(d+3)$;
- д) $(7s+c)^2$; е) $(4x^2-0,125y^2)^2$; ж) $(m-8)(m^2+8m+64)$; з) $(3p^5-q)(9p^{10}+3p^5q+q^2)$.
74. а) $0,04d^2-p^2$; б) $\frac{1}{9}h^6-10h^3k+225k^2$; в) n^3-64 . 75. а) $-x$; б) $8-y$; в) $9-1,8a$. 79. а, в, г, ж, з.
80. а) 2^2 , б) $(\sqrt{7})^2$, в) нет, г) $(\sqrt{b})^2$, д) $(3\sqrt{d})^2$. 81. а) $25-a$; б) $b-c$; в) $9t-16s$; г) $1+2\sqrt{m}+m$;
- д) $p-2\sqrt{pq}+q$; е) $10-2\sqrt{21}$; ж) $4x-28\sqrt{xy}+49y$; з) $1-a\sqrt{a}$; и) $m\sqrt{m}+n\sqrt{n}$. 82. а) $6(6+b)$;
- б) $\sqrt{10}(\sqrt{10}+b)$; в) $\sqrt{7a}(\sqrt{2a}-1)$; г) $(x-3)(x+3)$; д) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$; е) $(8\sqrt{y}-\sqrt{7})(8\sqrt{y}+\sqrt{7})$;
- ж) $(z-6t)^2$; з) $(\sqrt{n}+\sqrt{k})^2$; и) $(15\sqrt{a}-4\sqrt{b})^2$. 84. а) $6\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{a}+6\sqrt{b}$; г) $5\sqrt{7}-2\sqrt{5}$.
85. б) $2a+1$; 3- a ; $a-1$. 86. $4-x^2$. 87. а) 6; б) 1; в) $3\sqrt{5}-7$. 89. а) $2+\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7}-1$; в) $4-\sqrt{2}$.
90. а) 7; б) 7; в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 91. а) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$; в) $5\sqrt{3}-5\sqrt{2}$; г) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$. 93. $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; 9;
- $\sqrt{95}$; $7\sqrt{2}$; $3\sqrt{11}$; 10; $2\sqrt{26}$. 94. а) 110; б) 60. 95. $\sqrt{0,01}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}$; 0,6; $\sqrt{\frac{25}{49}}$. 96. а) $-1,5$; б) $\frac{5}{3}$.

98. а) $4 - \sqrt{13}$; б) $\sqrt{101} - 10$; в) $1 + \sqrt{3}$; г) $5 + \sqrt{7}$; д) $x - 1$; е) 1. 99. а) $6\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{5}$; в) -6 ; г) -4 .
100. а) $\frac{7\sqrt{11}}{11}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-3 - \sqrt{14}$; г) $\frac{7}{8}(\sqrt{17} - 3)$; д) $2\sqrt{2} - 5$; е) $\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{4}$; ж) $\frac{\sqrt{30} + \sqrt{18} - \sqrt{12}}{12}$;
- з) $\frac{6\sqrt{3} + 4\sqrt{5} + 5\sqrt{6} + \sqrt{10}}{28}$. 102. $6\sqrt{3}$; $4\sqrt{7}$; 11; $5\sqrt{5}$; $8\sqrt{2}$; $\sqrt{130}$; 12. 106. 1. 107. 1) $a = \sqrt{S}$; 2) $k = \sqrt{c}$;
- 3) $y = \sqrt{x}$. 108. 1) 0; 1; 4; 6,25; 2) 0; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2,5}$. 109. а) больше; б) больше; в) больше; г) меньше. 110. а) меньше; б) больше. 111. а) $\frac{16}{81}$; б) 100 000 000. 112. 12 множителей. 113. 0; 13.
116. а) {0; 7}; б) {-2; -1,5; 2}; в) {2; 10}. 117. а) 1,4; б) 1,7; в) 2,2; г) 2,4. 119. -1. 120. а) 40 000 $\sqrt{10}$; б) 132 250 000. 121. 126 множителей. 122. а) {-3; 0; 3; 5}; б) $\{3 + \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2}\}$. 126. а) $1 < \sqrt{2} < 2$; $1 < \sqrt{3} < 2$; $2 < \sqrt{5} < 3$; б) $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$. 127. а) 1; б) 7. 129. а) 2 и 3; б) 4 и 5; в) 17 и 18; г) 31 и 32; д) 5 и 6; е) 17 и 18; ж) 31 и 32; з) 31 и 32; и) 4 и 5; к) 5 и 6; л) 9 и 10; м) 64 и 65.
130. а) 3; б) 3,3; в) 3,32; г) 3,317. 132. 0,4. 133. а) 9; б) 16; в) 1; г) 0,25. 134. а) $(x - 3)(x + 5)$; б) $(a - 1)(a + 5)$; в) $(x - 1,5)(x + 2,5)$. 135. а) 2 и 3; б) 8 и 9; в) 27 и 28; г) 88 и 89; д) 31 и 32; е) 29 и 30; ж) 23 и 24; з) 418 и 419; и) 7 и 8; к) 8 и 9; л) 44 и 45; м) 63 и 64. 136. а) 4; б) 4,4; в) 4,36; г) 4,359.
137. а) $(x - 6)(x + 4)$; б) $(a + 2)(a + 10)$; в) $(x - 0,5)(x + 1,5)$. 139. А) 1) а) больше; б) больше; в) равно; 2) а) $y_{\text{наиб}} = 16$; $y_{\text{наим}} = 0$; б) $y_{\text{наиб}} = 1$; $y_{\text{наим}} = 0$; в) $y_{\text{наиб}} = 1$; $y_{\text{наим}} = 0$; 3) положительна на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; нигде не отрицательна, равна 0 при $x = 0$. Б) 1) а) меньше; б) меньше; в) меньше; 2) а) $y_{\text{наиб}} = 32$; $y_{\text{наим}} = -32$; б) $y_{\text{наиб}} = 0$; $y_{\text{наим}} = -1$; в) $y_{\text{наиб}} = 1$; $y_{\text{наим}} = 0$; 3) положительная на $(0; +\infty)$; отрицательная на $(-\infty; 0)$; равна нулю в 0. 140. 1) -1; -1; 0; -1; -1; 2) [-1; 0]; 3) [-5; -1] $\cup$ [1; 5]. 141. 1) -1; -4; -2; 2) [-2; 2]; 3) [-5; -2] $\cup$ [2; 5]. 143. а) {-1}; б) $\emptyset$; в) {0; 1}. 144. 300; 15; -20; -0,36; -0,06; $\frac{1}{300}$. Принадлежат точки: А, С, F. 147. а) 1,8; б) -30; в) 1,8; г) -1,5; д) -9000; е) $\frac{9}{10m}$. 148. а) (1; 3); (3; 1); б) (1; -7); (-1; 7); в) (-2; -4); $(-\frac{4}{3}; -6)$. 149. а) одно; б) нет; в) два. 152. Нет; 2; 1; $\frac{1}{16}$; 0; 16. 153. а) 20; б) 0,7; в) 8; г) 125; д) 66; е) 40; ж) 0,2; з) 3; и) 10; к) 60. 154. а) 90; б) 105; в) $\frac{17}{30}$; г) 9; д) 105; е) 9,6. 155. а) $10\sqrt{2}$; б) $15\sqrt{2}$; в) $\frac{8}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}$; г) $10\sqrt{m}$; д) $2d^5k^5\sqrt{k}$; е) $\left(\frac{z}{n}\right)^4\sqrt{z}$. 156. а) $7 - x$; б) $\frac{2-5x}{\sqrt{5}}$. 157. а) $\sqrt{8}$; б) $-\sqrt{27}$; в) $\sqrt{169m^3}$; г) $\sqrt{16d^7}$. 158. а) $6 - 18\sqrt{2}$; б) 0; в) $-3m^2$; г) 6. 159. а) {49}; б) {625}; в) {1225}; г) 1; д) $\emptyset$; е) {0}; ж) {10}; з) $\emptyset$; и) {10}. 160. а) $1 - m$; б) $d - c$; в) $4 + 8\sqrt{q} + 4q$; г) $k - 2\sqrt{kz} + z$; д) $25b + 4\sqrt{b} + 0,16$; е) $8 - s\sqrt{s}$. 161. а) 2; б) -55; в) 3; г) -0,1. 162. Для доказательства следует преобразовать выражения к виду: а) $11 + 2\sqrt{10}$; б) $56 + 12\sqrt{3}$; в) $-\frac{4 + \sqrt{7}}{9}$; г) $4\sqrt{7}$.
163. а) $\sqrt{11}(\sqrt{11} + m)$; б) $\sqrt{3m}(\sqrt{2m} - 1)$; в) $(x - \sqrt{13})(x + \sqrt{13})$; г) $(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})$; д) $(\sqrt{c} + \sqrt{s})^2$; е) $(\sqrt{a} - 14\sqrt{b})^2$. 164. а) $2\sqrt{3}$; б) $14\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{n} + 11\sqrt{v}$; г) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$. 165. а) $2\sqrt{2} - 1$; б) 7; в) $18 - 5\sqrt{12}$; г) $36\sqrt{5} + 24$. 166. а) $2 + \sqrt{6}$; б) $\sqrt{10} - 1$; в) $6 - \sqrt{15}$. 167. а) $\frac{17\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{5\sqrt{13}}{91}$; в) $\frac{5 - \sqrt{5}}{5}$; г) $\frac{9 + 3\sqrt{6}}{2}$; д) $-12\sqrt{3} + 12\sqrt{7}$; е) $-\sqrt{11} - \sqrt{13}$; ж) $\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{10} + 2\sqrt{15}}{20}$; з) $9 - 5\sqrt{3} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{21}$. 168. $9\sqrt{2}$; $7\sqrt{3}$; 12; $5\sqrt{5}$; $\sqrt{65}$; $3\sqrt{7}$; $2\sqrt{15}$. 169. 1) а) больше; б) больше; в) меньше; г) меньше. 170. а) 1 и 2; б) 3 и 4; в) 17 и 18; г) 22 и 23. 171. а) {0; 1}; б) {0; 1}; в) {-2; 1}; г) $\emptyset$; д) {-4; 4}. 173. а) 0,25; 1; 0; 0,5; 0,7; 1; 0,5. в) $y_{\text{наиб}} = 1$; $y_{\text{наим}} = 0$. 178. а) 0; б) {5; -5}; в) $\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$; г) $\emptyset$; д) $\emptyset$. 179. а) {0; 7}; б) {0; 2}.

180. а) 0; б) $\emptyset$; в) $\{-1; 1\}$. 181. а) $\left\{0; -\frac{1}{4}\right\}$; б) $\{0; -4\}$; в) $\{0; 9\}$. 182. а) $\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$; б) 0; в) $\left\{0; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$; г) $\{0\}$. 183. а) 0; б) 4; в) $\{-3; 1\}$; г) $\{3; 11\}$; д) $\{\sqrt{2} + 1; -\sqrt{2} + 1\}$; е) $\{\sqrt{2} - 2; -\sqrt{2} - 2\}$; ж) $\emptyset$; з) $\emptyset$. 185. а) 0; б) $\emptyset$; в) $\{3; -3\}$. 186. а) $\{0; -0,2\}$; б) $\{0; -5\}$; в) $\{0; 25\}$. 187. а) $\{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$; б) 0; в) $\{-1; 0; 1\}$; г) 0. 188. а) $\{-3; 3\}$; б) $\{-4; 1\}$; в) $\{1 - \sqrt{11}; 1 + \sqrt{11}\}$; г) $\emptyset$. 198. а) $\left\{-\frac{1}{3}; 0,5\right\}$; б) 4; в) $\left\{\frac{5 + \sqrt{13}}{6}; \frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right\}$; г) $\{3 + \sqrt{3}; 3 - \sqrt{3}\}$; д) $\emptyset$; е) $\emptyset$. 199. а) $\{-2; 4\}$; б) $\{-1; -7\}$; в) $\emptyset$; г) $-0,5$. 200. б) 4; г) $\{3 + \sqrt{3}; 3 - \sqrt{3}\}$; е) $\emptyset$. 201. а) $\{-0,5; -2\}$; б) $\{-2; 5\}$; в) $\left\{\frac{5 - \sqrt{19}}{3}; \frac{5 + \sqrt{19}}{3}\right\}$; г) $\{1; -4\}$. 202. а) $\emptyset$; б) $\left\{\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{3}\right\}$; в) $\{-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\}$. 204. а) при $a \neq 6$ единственное решение; при $a = 6$ бесконечно много решений; б) при $a \neq -2$ единственное решение; при $a = -2$ нет решений; в) при $a \neq \pm 1$ единственное решение; при $a = 1$ бесконечно много решений; при $a = -1$ нет решений. 205. а) $[3; 6]$; б) $\left[1\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}\right]$. 206. а) $(-3; +\infty)$; б) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. 208. а) $\left\{\frac{2}{3}; 1\right\}$; б) $\{-10; 3\}$; в) $\left\{-2; 8\frac{2}{3}\right\}$; г) $\{-2,8; 1\}$. 209. а) $\{4; 6\}$; б) $\emptyset$; в) $\{0,5; 1\}$; г) $\{2; 3\}$. 210. а) $\emptyset$; б) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{12}{7}; +\infty\right)$. 224. $\{2,5; -2; 1; -0,5\}$. 226. а) $\{1; -1; \sqrt{0,6}; -\sqrt{0,6}\}$; б) $\{2; -2\}$; в) $\emptyset$; г) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. 227. а) $\{-6; 6; -1; 1\}$; б) $\{1,5; -1,5\}$; в) $\emptyset$. 229. а) $\{-1; 1; -2; 2\}$; б) 1; в) 16. 230. $\{-2; 4\}$. 231. $\{-2; -1; 2; 3\}$. 232. $\{-0,75; -2\}$. 235. а) $\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$; б) $\emptyset$; в) $\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{0,5}; -\sqrt{0,5}\}$. 236. а) $\left\{\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$; б) $\emptyset$; в) $\left\{-\frac{5}{7}; \frac{5}{7}\right\}$; г) $\{-2; 2; 0,5; -0,5\}$. 237. а) $\{0,5; -2,5\}$; б) $\{-0,8; -1,2\}$; в) $\left\{-1; 4; \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right\}$; г) $\{-2 + \sqrt{6}; -2 - \sqrt{6}\}$. 242. а) 4,4; б) -9,2. 245. а) $\{-2; 5\}$; б) $\{2; -6\}$; в) $\{4; 7\}$; г) $\{-1; -15\}$. 246. а) $\{-100; 1\}$; б) $\{1; -549\}$; в) $\{5; 1\}$; г) $\{1; -8\}$. 247. а) $\{-1; -11\}$; б) $\left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$; в) $\{-1; -6\}$. 249. а) $\{1; -2,5\}$; б) $\left\{1; -\frac{1019}{1021}\right\}$; в) $\left\{-1; \frac{22}{35}\right\}$; г) $\left\{-1; -\frac{1}{6}\right\}$. 250. -2. 251. а) 5 и 10; б) нельзя; в) нельзя. 252. $\{a; -a - 4\}$. 254. а) $x^2 + x - 6 = 0$; б) $x^2 + 6x + 5 = 0$; в) $24x^2 - 10x + 1 = 0$; г) $6x^2 + 5x + 1 = 0$. 255. а) $15x^2 - 7x - 2 = 0$; б) $7x^2 - 39x + 20 = 0$; в) $18x^2 + 23x - 6 = 0$; г) $50x^2 + 35x + 6 = 0$. 256. $x^2 - 2x - 4 = 0$. 257. Нет, не могут. 258. а) $x^2 - 4x + 1 = 0$; б) $x^2 - 6x + 7 = 0$. 259. 1,5. 260. -2,6. 261. $\frac{185}{2704}$. 264. а) $\{1; 2\}$; б) $\{-8; 1\}$; в) $\{-1000; 1\}$; г) $\left\{-1; -\frac{12}{13}\right\}$. 266. 497. 267. а) $x^2 - 8x + 15 = 0$; б) $x^2 + 2x - 3 = 0$; в) $6x^2 - x - 1 = 0$; г) $10x^2 + 3x - 1 = 0$. 268. а) $2x^2 - 7x + 6 = 0$; б) $14x^2 - 5x - 1 = 0$; в) $20x^2 - 11x - 3 = 0$. 269. а) $x^2 - 2x - 4 = 0$; б) $x^2 - 4x + 2 = 0$. 279. а) $\left\{1; \frac{2}{3}\right\}$; б) $\{-1,5; 1,5\}$; в) $\{1; 2,5\}$. 282. а) $(x-3)(x-2)$; б) $3\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$; в) $(3-2x)(x-1)$. 285. а) 5; б) 30. 286. а) $7 < \sqrt{55} < 8$; б) $-14 < -\sqrt{190} < -13$; в) $-20 < -\sqrt{19 \cdot 21} < -19$; г) $34 < \sqrt{30 \cdot 40} < 35$. 287. а) $(x+5)(x-2)$; б) $(2x - \sqrt{14})\left(x + \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$; в) $(3x+1)(x-2)$; г) $(4-3x)(x-1)$; д) $2\left(x + \frac{3 - \sqrt{41}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{41}}{4}\right)$. 288. 13. 292. а) $a < 0$; б) $a = 0$; в) $a > 0$. 293. $a = -2 (x = 1), a = 2 (x = -1)$. 294. $a = -2$. 295. 31. 296. $a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. 298. $a = 10$. 299. 2. 300. а) при $a = 2$ $x = -2$; при $a < 2$, $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 2a}$; при $a > 2$ нет корней; б) при любом значении a два корня $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 12}}{6}$; в) при $a = 0$ $x = 1,5$; при $a = -\frac{1}{3}$ $x = 3$; при

$a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3a}}{a}$; при $a < -\frac{1}{3}$ нет корней. **302.** а) $-\frac{16}{3}$; б) $\frac{46}{45}$. **304.** а) $a < 0$; б) $a=0$; в) $a>0$. **305.** а) $a \in (-\infty; 0,5)$; б) $a \in (-\infty; 0,5] \cup \{1\}$; в) $a \in [0,5; +\infty)$. **306.** $a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. **307.** а) $a \in (-\infty; 4]$; б) $a \in (0; 4)$; в) $a \in (-\infty; 0)$; г) $a = 0$; д) $a = \emptyset$. **308.** а) при $k \in (-1; +\infty)$ $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+4k}$; при $k \in (-\infty; -1)$ нет корней; при $k = -1$ $x = -2$; б) при любом значении k два корня $x_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2+5}}{5}$; в) при $k = 0$ $x = \frac{3}{8}$; при $k = -5\frac{1}{3}$ $x = \frac{3}{4}$; при $k \in \left(-5\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$ $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+3k}}{k}$; при $k \in \left(-\infty; -5\frac{1}{3}\right)$ нет корней. **313.** 21 см и 30 см. **314.** 12 см и 16 см. **315.** 48 или 16 обезьян. **316.** 24 и 27; -24 и -27. **317.** 2,8 с. **318.** 12 тыс. руб. **319.** $\frac{3 \pm \sqrt{7}}{4}$. **320.** $8 + \sqrt{73}$ км/ч. **327.** а) 1999; б) 2001. **328.** 6 и 7. **329.** 3 дм. **330.** 24 кв. ед. **331.** 8 команд. **332.** $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$; $\frac{\sqrt{17}-3}{2}$ или $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$; $\frac{-\sqrt{17}-3}{2}$. **333.** $10+2\sqrt{13}$; $2+2\sqrt{13}$ дней. **341.** 10 с. **348.** 9 м. **350.** $x^2 - 10x + 23 = 0$. **362.** $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; возрастает при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, убывает при $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **363.** а) $(-4; -19)$; б) $\left(\frac{2}{3}; -1\frac{1}{3}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{4}; 1\frac{1}{8}\right)$; г) $(0; -5)$. **366.** а) $(3,5; +\infty)$; б) $\left[1; 4\frac{1}{3}\right)$; в) $\emptyset$; г) $\left[5\frac{2}{3}; 6\right]$; д) $\left[-1; -\frac{1}{3}\right)$; е) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$; ж) $\left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{3}\right]$; з) $\left(-\infty; -\frac{5}{9}\right]$. **369.** а) $(x+3)^2 - 16$; б) $2(x-1)^2 + 3$; в) $-(x+2)^2 + 5$; г) $-3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 1\frac{1}{3}$. **371.** а) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$; б) $\left[-\frac{2}{5}; +\infty\right)$; в) $\left(-\infty; -\frac{4}{7}\right)$; г) $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{7}{11}\right]$; д) $(6; +\infty)$; е) $(-1,5; 9]$; ж) $[-6; 2,55]$; з) $\{5\}$. **381.** а) наибольшее значение 13 при $x = 3$; наименьшее значение 11 при $x = 4$; б) наибольшее значение $7\frac{1}{8}$ при $x = 1\frac{3}{4}$; наименьшее значение 4 при $x = 3$; в) наибольшее значение $\frac{1}{3}$ при $x = \frac{1}{3}$; наименьшее значение -8 при $x = 2$; г) наибольшее значение 0 при $x = -1$; наименьшее значение $-3\frac{1}{8}$ при $x = \frac{1}{4}$; д) наибольшее значение 24 при $x = 0$; наименьшее значение -6 при $x = 5$; е) наибольшее значение 2 при $x = 1$; наименьшее значение -0,45 при $x = 0,3$. **382.** а) 2 м; б) 11,025 м. **384.** а) 0; б) 0; в) 4; г) 22. **385.** а) $\sqrt{10}$; б) $-3\sqrt{21}$; в) $3\sqrt{42}$; г) $6\sqrt{38}$; д) $-2\sqrt{34}$; е) -2; ж) $-\sqrt{6}$; з) 5; и) $\sqrt{10}-6$; к) 1. **386.** а) наибольшее значение 13 при $x = 2$; наименьшее значение 5 при $x = 0$; б) наибольшее значение 17 при $x = 2$; наименьшее значение $\frac{2}{3}$ при $x = -\frac{1}{3}$; в) наибольшее значение -2 при $x = 0$ и $x = 1,5$; наименьшее значение равно $-3\frac{1}{8}$ при $x = \frac{3}{4}$; г) наибольшее значение 2 при $x = 0$; наименьшее значение -13 при $x = 3$. **387.** а) 2; б) 1; в) -7; г) 33. **392.** 2) отрицательные значения при $x \in (-5; -1)$, положительные значения при $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$. **393.** 1) $(-5; -1)$; 2) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$. **394.** 1. а) $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right] \cup [2; +\infty)$; б) $[3; 5]$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $\emptyset$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\emptyset$. 2. а) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$; в) $\emptyset$; г) $(-2; 1)$; д) $[0; 0,6]$; е) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **395.** а) 0; б) $(-\infty; -1,5) \cup (1,5; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; д) $\emptyset$; е) $\left[-\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{5}{3}}\right]$. **396.** а) $(-\infty, 0] \cup [9; +\infty)$; б) $[0; 3,5]$; в) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-\infty; -7] \cup [-1; +\infty)$;

- е) $[-3; 1]$; ж) -8 ; з) $(-\infty; +\infty)$. **397. 2. 401.** а) $[-4, 5; +\infty)$; б) $[7; +\infty)$; в) $(-\infty; 16]$; г) $(-\infty; -2, 4]$; д) $(-\infty; 6)$;
 е) $(2; +\infty)$; ж) $[1; +\infty)$; з) $(0; 1]$. **402.** а) $-2, 5$; б) $\emptyset$; в) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; -0, 6] \cup [0; +\infty)$;
 д) $(-\infty; -4) \cup (0, 5; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$. **403.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) 2 ; в) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$; г) $(-\infty; -1) \cup (0, 2; +\infty)$;
 д) $(-\infty; 1] \cup [2, 5; +\infty)$; е) $\emptyset$. **404.** а) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $(-1; 1)$; в) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; г) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;
 д) $(-\infty; +\infty)$. **405.** а) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; б) $(-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$. **406.** -2 . **412.** $a \in (-2; 2)$.
413. $a \in (-\infty; -2 - 2\sqrt{2}] \cup [-2 + 2\sqrt{2}; +\infty)$. **414.** $a \in \emptyset$. **415.** $\emptyset$. **416.** Если $k < 0$, то $x \in (1 - \sqrt{-k}; 1 + \sqrt{-k})$;
 если $k \geq 0$, то нет решений. **417.** а) $(-\infty; -0, 5) \cup (-0, 2; +\infty)$; б) 5 ; в) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; г) $(5; 9)$;
 д) $(-\infty; -0, 4] \cup [1; +\infty)$; е) $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$. **418.** а) $(-2; 1]$; б) $\emptyset$; в) $(-\infty; -1, 5)$; г) $0, 25$. **419.** а) 5 ; б) $\frac{2}{3}$.
420. $a \in (-\infty; 0) \cup (12; +\infty)$. **421.** Если $k < 0$, то $x \in \left[\frac{3 + \sqrt{9 - 9k}}{k}; \frac{3 - \sqrt{9 - 9k}}{k}\right]$; если $k = 0$, $x \in (-\infty; 1, 5]$;
 если $0 < k < 1$, $x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{9 - 9k}}{k}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{9 - 9k}}{k}; +\infty\right)$; если $k \geq 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$. **422.** $\frac{7}{10}$.
427. а) $x^2 - 4x - 8 = 0$; б) $5x^2 + 11 = 0$. **428.** а) $\{0; -7\}$; б) $\{-14; 14\}$; в) $\emptyset$; г) 0 . **430.** $a \in \left(-\frac{1}{8}; +\infty\right)$.
431. $a \in (0; +\infty)$. **432.** а) $\{0, 5; -7\}$; б) $0, 4$; в) $\{1; 1, 5\}$; г) $\left\{\frac{-\sqrt{5} + 7}{2}; \frac{-\sqrt{5} - 7}{2}\right\}$; д) $\left\{\pi; \frac{\pi}{5}\right\}$; е) $\{1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}\}$;
 ж) $\{4(\sqrt{6} + \sqrt{2}); 4(\sqrt{6} - \sqrt{2})\}$; з) $\{1; 0, 5\}$. **433.** $\{1, 5; 2, 5\}$. **434.** -90 . **435.** -9 . **436.** а) $x^2 + \frac{24}{35}x - 1 = 0$;
 б) $x^2 + 5\frac{19}{22}x + 2 = 0$. **437. 340. 438.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **439.** а) $\{2; 10\}$; б) $\{-8; 4\}$; в) $\{-2; 5\}$. **440.** а) нельзя; б) $(4x - 3)^2$;
 в) $(4x + 1)(x - 1)$; г) $-\frac{1}{5}(x - 6)(x - 10)$; д) нельзя; е) $(\sqrt{5}x - \sqrt{3})(\sqrt{5}x + \sqrt{3})$. **441.** а) $\{-5; 5; -3; 3\}$;
 б) $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; в) $\{\sqrt{5} + 3; -\sqrt{5} - 3\}$; г) $\{-1; 1; -12; 12\}$; д) $\{-1 \pm \sqrt{7}; -1 \pm \sqrt{5}\}$; е) $\{3; -4\}$. **442.** а) 15 см и 20 см;
 б) 4 ; 5 ; 6 . **443.** а) 11 рядов по 8 кадетов в ряду; б) через 1 с и через 7 с. **445.** а) $(1; 13)$; б) $(9; 0)$;
 в) $(0; -5)$; г) $(2, 5; -7, 5)$. **446.** а) с Oy : $(0; 9)$; с Ox : $(3; 0)$ и $(-3; 0)$; б) с Oy : $(0; 0)$; с Ox : $(0; 0)$ и $(0, 2; 0)$;
 в) с Oy : $(0; -72)$; с Ox : $(9; 0)$ и $(-8; 0)$; г) с Oy : $(0; -3)$; с Ox : $(1; 0)$ и $(0, 75; 0)$. **447.** $a = 2$. **448.** а) $x = 3$;
 б) $c = -5$. **449.** а) $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$; $D = 0$; б) $a < 0$; $b > 0$; $c < 0$; $D > 0$; в) $a < 0$; $b < 0$; $c < 0$; $D < 0$.
452. а) наибольшее значение 1 при $x = 0$ и $x = -2$; наименьшее значение 0 при $x = -1$; б) наибольшее
 значение 27 при $x = 0$; наименьшее значение 3 при $x = 4$; в) наибольшее значение -8 при $x = 0$; наи-
 меньшее значение -52 при $x = -2$. **453.** а) $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$; б) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$; в) $\emptyset$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-\infty; -8) \cup (7; +\infty)$;
 е) $0, 5$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $[1; 1, 5]$. **454.** а) $(-\infty; -2] \cup \left[2\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) 5 ; в) $(-2; 0, 4)$. **455.** а) $(-\infty; -0, 4) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$;
 б) 4 ; в) $(-\infty; -7) \cup (3; +\infty)$. **456.** а) $(-\infty; -1, 5]$; б) $\emptyset$. **457.** а) $a \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; б) $a \in [0; 4]$. **459.** а) $\frac{4}{5}$;
 б) $\frac{2n - 5}{40}$; в) $\frac{c + 10}{2c + d + 5}$. **460.** $-2, 5$; 1 ; $2, 09$; $-\frac{4}{7}$. **461.** а) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;
 в) $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; д) $(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$; е) $(-\infty; 3) \cup$
 $\cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$. **462.** а) $\frac{9}{24}$; б) $\frac{3ac}{3c^2}$. **463.** а) $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2c}$; $\frac{a - 5}{5}$; $\frac{1}{2 + d}$; $\frac{1}{(1 - 3x)^2}$; б) область определения
 расширилась; не изменилась; расширилась; расширилась; не изменилась. **464.** а) $-\frac{5}{n}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{m}$; $-\frac{m^2}{n}$;

- $\frac{m}{7kn^2}$; б) $\frac{5-c}{c}$; 5-3c; 5; -1; -1; -4; в) $\frac{4-a}{b+1}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{1}{b+a}$; $-\frac{1}{b+a}$; $\frac{1}{a-b}$; $\frac{1}{a-b}$; $-(a-b)^2$; г) $\frac{5-y}{5}$; $\frac{5-y}{5+y}$;
- $\frac{x+4}{x-4}$; $\frac{4-x}{4+x}$. 465. а) $\frac{a+b}{a-b}$; б) $\frac{x+6y}{x-3y}$. 466. а) $x-10$; б) $\frac{1}{x+8}$; в) $\frac{3x-1}{x^2-x+1}$; г) $\frac{x+3}{3x+2}$. 468. $x-y$.
471. а) $\frac{3m}{3n}$; $-\frac{m}{-n}$; $\frac{m^2}{mn}$; $\frac{mn}{n^2}$; $\frac{2n^2m}{2n^3}$. б) $\frac{b(a-b)}{ab^2}$; $\frac{ab(a-b)}{a^2b^2}$; $-\frac{a(a-b)}{a^2b}$; $\frac{5b^2(a-b)}{5ab^3}$. в) $\frac{ab}{a(a+b)}$;
- $\frac{b^3}{b^2(a+b)}$; $\frac{b(a-b)}{(a-b)(a+b)}$; $\frac{b(a+b)}{(a+b)^2}$; $\frac{b(a^2-ab+b^2)}{a^3+b^3}$. 472. а) $\frac{(2x+y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; б) $\frac{(x-2y)(x^2-y^2)}{x^4-y^4}$;
- в) $\frac{(3x+1)(x^2+y^2)(x+y)}{x^4-y^4}$; г) $\frac{(1-3y)(x^2+y^2)(x-y)}{x^4-y^4}$; д) $\frac{(x+y)^2(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; е) $\frac{2(x^2+y^2)(x-y)}{x^4-y^4}$. 473. а) $\frac{6}{3y}$ и
- $\frac{x}{3y}$; б) $\frac{1}{xy}$ и $\frac{x^3}{xy}$; в) $\frac{y}{xy}$; $\frac{x}{xy}$; г) $\frac{2y}{x^2y^2}$; $\frac{3x}{x^2y^2}$. 474. а) $\frac{a}{a(a+b)}$ и $\frac{a+b}{a(a+b)}$; б) $\frac{b(a-b)}{a^2-b^2}$ и $\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}$;
- в) $\frac{a(a+b)}{(a+b)^2}$ и $\frac{b}{(a+b)^2}$; г) $\frac{1}{a-b}$ и $-\frac{a}{a-b}$. 475. а) $\frac{a(a-b)}{a^2-b^2}$ и $\frac{b}{a^2-b^2}$; б) $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{1}{a+b}$; в) $\frac{a^2b+b^3}{(a+b)(a^2+b^2)}$ и
- $\frac{1}{(a+b)(a^2+b^2)}$; г) $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}$ и $\frac{b}{a^3-b^3}$. 476. а) $x=0$; б) $m=0$; в) $m=3$; г) $m=\pm 5$; д) $m=0,5$.
477. 1) а) $\frac{36}{48}$; б) $\frac{20}{48}$; в) $\frac{33}{48}$; г) $\frac{42}{48}$; д) $\frac{11}{48}$. 2) а) $\frac{1}{12}$ и $\frac{10}{12}$; б) $\frac{10}{35}$ и $\frac{21}{35}$; в) $\frac{15}{40}$ и $\frac{26}{40}$; г) $\frac{35}{75}$ и $\frac{18}{75}$.
- 3) а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{7}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{5}{7}$; д) $\frac{5}{7}$. 478. а) $\frac{5}{14}$; б) $\frac{29}{36}$; в) $\frac{19}{36}$; г) $\frac{9}{44}$; д) $\frac{4}{5}$. 479. $\frac{5}{6}$ обратное $\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}=1,2$.
480. а) $\frac{1}{28}$; б) $\frac{1}{9}$; в) $-\frac{1}{6}$; г) $\frac{2}{25}$; д) $\frac{1}{27}$. 481. а) 70; б) 0,4. 482. а) 9; б) 0,25. 483. а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{5}{11}$. 484. 2,1.
485. а) $(4x-1)(4x+1)$; б) $9x(1+3x)$; в) $(x-13)(x+5)$; г) $5(x-3)(x-0,2)$. 486. рисунок в).
487. $b = \frac{8-5x}{y} = 1$. 488. Точки А и В. 489. а) $y=2x-1$; б) $y=-x+3$. 490. а) $x=-2,5$; б) $y=3$.
491. Уравнение 4. 492. При $a \in [0; 12)$. 493. $-\frac{1}{3}$; 5; 29; $-1\frac{14}{15}$; 0. 494. а) $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$;
- б) $(-\infty; 31) \cup (31; +\infty)$; в) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$; д) $(-\infty; -3) \cup$
- $\cup (-3; -2) \cup (-2; +\infty)$; е) $\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$. 495. а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{37}{111}$; б) $\frac{a^2}{bc}$
- и $\frac{7a^4c}{7a^2bc^2}$. 496. а) $\frac{(x+y)(x^2-y^2)}{x^4-y^4}$; б) $\frac{(2x-y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; в) $\frac{(x+y)^2(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; г) $\frac{(2y-1)(x^2+y^2)(x-y)}{x^4-y^4}$;
- д) $\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; е) $\frac{(x-y)^2(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$. 497. а) $\frac{a-3b}{a+3b}$; б) $\frac{x-3y}{x+2y}$; в) $x+5$; г) $\frac{2x-5}{2x-1}$. 499. а) $5x(1-17x)$;
- б) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$; в) $(x+12)(x+11)$; г) $2(x-5)(x+0,3)$; 500. а) $-\frac{27}{28}$; б) $\frac{4}{35}$. 501. Точка Р при-
- надлежит графику. 502. а) $y=2-x$; б) $y=-0,5x-3$; в) $y=2x$; г) $y=2$. 505. $\frac{7}{9}$; $\frac{5}{21}$; $\frac{7}{a}$; $\frac{11}{15}$;
- $\frac{b^2+2c}{bc}$; $-\frac{1}{3x}$. 506. а) $-\frac{1}{a}$; б) $\frac{xz-2x^2}{xy-yz}$. 507. а) $-\frac{(b-a)^2}{ab}$; б) $\frac{a^2-2ab-b^2}{a^2-b^2}$; в) $\frac{a^2-ab+b}{a^2-b^2}$; г) $\frac{a-1}{a+b}$;
- д) $\frac{a^2b+b^3+1}{(a^2+b^2)(a+b)}$; е) $\frac{a^2-b^2-b}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$. 508. а) $\frac{2x+6}{(x+6)(x-2)}$; б) $\frac{x-5}{(x-1)(2x+3)}$; в) $\frac{4(1-x)}{(x+4)(x-2)}$. 509. $x+4$.
510. $\frac{10}{81}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{10}{a^2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{c}$. 511. а) $\frac{a^2-b^2}{ab}$; б) $\frac{a}{a-b}$; в) $\frac{3}{y(x-y)}$; г) $\frac{y(x^2+xy+y^2)}{2x}$; д) $x+2$; е) $\frac{2(x+2)}{x}$.
512. а) $\frac{(a-b)^2}{(2a+b)^2}$; б) $\frac{(x-y)^3}{(2x+3y)^3}$. 513. $\frac{2}{9}$ и $\frac{9}{2}$; $\frac{7+c}{c-8}$ и $\frac{c-8}{7+c}$; $\frac{b}{a}$ и $\frac{a}{b}$. 514. а) $\frac{5x^2-y}{2x+3y}$; б) $\frac{1}{bc}$; в) $\left(\frac{2x-y}{x+y}\right)^2$.

515. 0,4; $1\frac{5}{9}$; 0,4; $\frac{8}{45}$; $\frac{b^2}{2c}$. 516. а) $\frac{5a-b}{b-a}$; б) $\frac{a}{a-b}$; в) $\frac{2x+y}{(y+1)(x+y)}$; г) $\frac{x^2}{x^2-y^2}$; д) $x+2$; е) $x^2(x^2-3)$.
517. а) $\frac{2x-1}{x^2}$; б) $\frac{5-a}{9(a+1)}$. 519. $\frac{a^2-ab+ac}{2}$. 521. а) $(-\infty; -9) \cup (-9; +\infty)$; б) $(-\infty; -9) \cup (-9; 0) \cup (0; 9) \cup (9; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (-3; 4) \cup (4; +\infty)$. 522. а) $\frac{3b^3}{13a^3}$; б) $\frac{7-m}{2}$; в) $\frac{4-d}{4+d}$; г) $\frac{y-4}{y+6}$; д) $\frac{5}{n+1}$.
523. а) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$; б) $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; в) $\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. 524. $\frac{t(t+5)}{t^2-25}$. 525. а) $\frac{2a-14m}{4am}$ и $\frac{m+m^2}{4am}$; б) $\frac{2b-2}{2(t-3)}$ и $\frac{-b}{2(t-3)}$;
- в) $\frac{5(x-q)}{5x(x-q)(x+q)}$ и $\frac{(x+q)^2}{5x(x-q)(x+q)}$; г) $\frac{n^3-1}{(1+n)^2(n-1)}$ и $\frac{n(n+1)}{(1+n)^2(n-1)}$. 526. а) $A = -m^8 + 6m^6 - 4$;
- б) $A = 6a^2b^2 + 3a^2b - ab^2$; в) $A = 3$; г) $A = t-5$; д) $A = 10z + 25$. 527. 1 485 – второе неполное делимое, 1 911 – третье неполное делимое; 426 лет. 528. а) 1; б) 2; в) 0; г) 10; д) 23. 529. а) $1\frac{5}{6}$; б) $7\frac{7}{8}$; в) $1\frac{20}{73}$;
- г) $17\frac{1}{15}$; д) 50. 530. а) (2; 0); б) (-1; 3); в) (-3; -3). 531. г. 532. б. 533. (5; 2). 534. а) $4(b-a)$; б) $\frac{3y}{x+z}$.
535. а) $\frac{b^2+a^2}{ab}$; б) $\frac{b^2}{a^2-b^2}$; в) $\frac{ab}{(a^2+b^2)(a-b)}$; г) $\frac{a(a-2b)}{a^3-b^3}$. 536. а) $\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$; б) $\frac{b}{a+2b}$; в) $\frac{5y}{3x(x+y)}$;
- г) $\frac{y(x^2-xy+y^2)}{2x(x-y)}$. 537. а) $\frac{(a+b)^2}{(3a-b)^2}$; б) $\frac{(x+y)^3}{(5x+y)^3}$. 538. а) $\frac{2x+y^2}{x-3y}$; б) $\frac{1}{x+y}$; в) $\frac{(x+3y)^2}{(x-y)^2}$. 539. а) $\frac{3a+b}{b(b+2a)}$;
- б) $\frac{b^2}{3a+b}$; в) $\frac{y}{x(x-y)}$; г) $\frac{xy}{x^2-y^2}$. 540. x. 541. a. 542. а) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -0,2) \cup (-0,2; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $(-\infty; -4) \cup (-4; 6) \cup (6; +\infty)$. 543. а) $\frac{r^2p^4q}{7s^2}$; б) $\frac{8+a}{3}$; в) $\frac{m-3}{m+3}$; г) $\frac{t+11}{t-2}$; д) $\frac{3}{b-1}$.
544. а) $\frac{2d(s-1)}{10sd}$ и $\frac{5(5+d)}{10sd}$; б) $\frac{-1}{5(2k-1)}$ и $\frac{5k}{5(2k-1)}$; в) $\frac{18(m+p)}{9m(m-p)(m+p)}$ и $\frac{p(m-p)}{9m(m-p)(m+p)}$;
- г) $\frac{a^3+8}{(a-2)^2(a+2)}$ и $\frac{a(a-2)}{(a-2)^2(a+2)}$. 545. а) 2; -5; б) (0,5 y + 2,5; y) – y любое число; в) нет решения.
548. а) 256; б) 456 (ост. 7). 549. а) $4x^2+4x-3$; б) $6x-3$. 550. $2x^3+3x^2+4x-3$; 1) x^2+2x+3 ; 2) $2x-1$;
- 3) x^2+2x+3 . 551. а) x^3+4x (ост. -21); б) $6x-5$; в) $x-2$. 552. а) x^2-x-12 ; б) x^2-3x-4 ; в) x^2+4x+3 ;
- г) $x+1$; д) $x+3$; е) $x-4$. 553. 5. 554. x + 1. 555. Правильные дроби: $\frac{5}{6}; \frac{8}{99}$; неправильные дроби: $\frac{7}{3}; \frac{44}{21}; \frac{16}{2}$. Правильные дроби: $\frac{5a}{a^4-1}; \frac{b-1}{b^2}; \frac{x-3}{x^2+4}; \frac{n-4}{(n+4)^2}$; неправильные дроби: $\frac{d^8}{8}$.
556. а) $3x^3+7x^2+3x+\frac{5}{x+2}$; б) $x+1+\frac{x+1}{x^2-1}$. 557. а) $3+\frac{5}{x-2}$; б) $4x-19+\frac{89}{x+5}$; в) $0,5y+\frac{2y}{2y^2+y-4}$.
558. а) $\frac{2p-2m}{a}$; б) $\frac{1}{3b}$; в) $\left(\frac{x-y}{xy}\right)^2$; г) $\frac{3a+2}{a(a^2-4)}$. 559. а) $\frac{2b}{a}$; б) $\frac{7c}{c+5}$; в) $\frac{d-q}{3q}$; г) $\frac{p-t}{p+t}$. 560. а) $\frac{k^{10}}{s^{15}}$;
- б) $-\frac{64d^3t^9}{h^6}$; в) $\frac{8x^{10}}{25a^5v^3}$. 561. a - 3. 562. а) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+2}{x-y}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. 563. а) -11; б) 6. 564. а) 15; б) 1,1;
- в) 1,25; г) $\frac{2}{3}$. 565. а) $\left(-\frac{3}{14}; -\frac{5}{7}\right)$; б) (-0,25; 0,875); в) (-0,5; 0,5); г) (1,25; -1,5); д) (3; -3); е) (20; 10).
566. а) $x^2-10x-10$; б) x^2-2x-1 ; в) x^2+3x-1 ; г) $x-2$; д) $x-2$; е) $x+3$. 567. 125. 568. 88. 569. $4x+2$.
570. а) $3+\frac{11}{x-3}$; б) $x-3+\frac{3x+1}{x^2+x}$. 571. d - 1. 572. а) (0,5; 0,8); б) $\left(-\frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right)$. 573. 6,6.

Предметный указатель

- Алгебраическая дробь с. 125
Арифметический
квадратный корень с. 14
Биквадратное уравнение с. 58
«Выколотые» точки с. 4
Взаимно обратные
алгебраические дроби с. 137
Внесение множителя
под знак корня с. 17
Выделение целой части
алгебраической дроби с. 147
Вынесение множителя
из-под знака корня с. 16
Действительное число с. 14
Деление многочлена
на многочлен с остатком с. 144
Дискриминант
квадратного уравнения с. 52
Избавиться от иррациональности
в знаменателе дроби с. 23
Извлечение квадратного корня с. 15
Иррациональное число с. 14
Квадратичная функция с. 94
Квадратное уравнение:
 полное с. 45
 неполное с. 45
 приведенное с. 66
Квадратное неравенство с. 107
Квадратный трёхчлен:
 корень квадратного трёхчлена с. 72
 дискриминант квадратного
 трёхчлена с. 72
Кусочно-заданная функция с. 4
Наибольшее и наименьшее значения
квадратного трёхчлена с. 100
Неравенство с параметрами с. 115
Область определения
алгебраической дроби с. 126
Основное свойство
алгебраической дроби с. 127
Основное свойство
квадратного корня с. 15
Основное тождество
квадратного корня с. 15
Парабола
 вершина параболы с. 88
 ось параболы с. 89
Правильная и неправильная
алгебраическая дробь с. 146
Решить неравенство с параметром с. 116
Решить уравнение с параметром с. 78
Способы приближенного вычисления
значения $\sqrt{x}$:
 с помощью последовательности
 чисел x_n с. 37
 способ сужения границ с. 37
Способ разложения квадратного
трёхчлена на множители с. 72
Уравнение с параметрами с. 76
Теорема Виета с. 64
Теорема, обратная
теореме Виета с. 66
Формула корней квадратного уравнения
 общая с. 52
 с чётным коэффициентом b с. 54
Функция сигнум с. 3

Оглавление

Глава 3. Исследование нелинейных процессов	3
§ 2. Кусочно-заданные функции	3
3.2.1. Кусочно-заданные функции	3
§ 3. Квадратный корень	13
3.3.1. Арифметический квадратный корень и его свойства	13
3.3.2. Преобразование выражений с корнями	21
3.3.3. График функции $y = \sqrt{x}$	28
3.3.4. *Приближённое вычисление квадратного корня	34
Задачи для самоконтроля к главе 3	40
Глава 4. Квадратичная функция	44
§ 1. Квадратные уравнения	44
4.1.1. Квадратные уравнения в реальных процессах. Неполные квадратные уравнения и их решение	44
4.1.2. Формулы корней квадратного уравнения	51
4.1.3. Решение уравнений, сводящихся к квадратным	58
4.1.4. Теорема Виета и обратная к ней теорема	64
4.1.5. Квадратный трёхчлен и его разложение на множители	71
4.1.6. Квадратные уравнения с параметром	76
4.1.7. Задачи, сводящиеся к решению квадратных уравнений	82
§ 2. Квадратичная функция	88
4.2.1. Функции $y = ax^2$; $y = ax^2 + h$; $y = a(x - d)^2$ их графики	88
4.2.2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$	94
4.2.3.* Наибольшее и наименьшее значения квадратного трёхчлена	101
§ 3. Квадратные неравенства	107
4.3.1. Решение квадратных неравенств	107
4.3.2.* Неравенства с параметром	115
Задачи для самоконтроля к главе 4	122
Глава 5. Рациональные уравнения и неравенства	125
§ 1. Алгебраические дроби	125
5.1.1. Алгебраические дроби и их свойства	125
5.1.2. Действия с алгебраическими дробями	135
5.1.3.* Алгебраические дроби и деление многочленов	143
Ответы	151
Предметный указатель	158

* – звездочкой помечены пункты, содержание которых выходит за рамки программы базового курса математики

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

$$(\sqrt{a})^2 = a, \text{ где } a \geq 0$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \text{ где } a \geq 0 \text{ и } b \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ где } a \in \mathbf{R}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ где } a \geq 0 \text{ и } b > 0$$

$$(\sqrt{a})^{2n} = a^n, \text{ где } a \geq 0, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{Если } a > b, \text{ то } \sqrt{a} > \sqrt{b}, \text{ где } a > 0 \text{ и } b \geq 0$$

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|, \text{ где } a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{Если } a < b, \text{ то } \sqrt{a} < \sqrt{b}, \text{ где } a \geq 0 \text{ и } b > 0$$

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Формулы корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$D = b^2 - 4ac$		
$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
Нет корней	$x = -\frac{b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

Формулы корней квадратного уравнения с чётным коэффициентом $b = 2k$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a},$$

где $D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac$

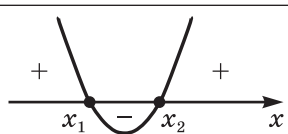
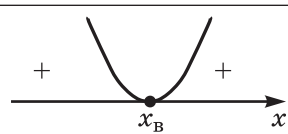
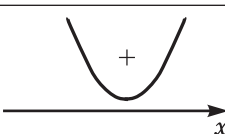
Теорема Виета и обратная к ней теорема

$$x_1 \text{ и } x_2 - \text{корни квадратного уравнения } ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0, \text{ где } x_1, x_2 - \text{корни трёхчлена}$$

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Схема Неравенство где $a > 0$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
			
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_{\text{B}}) \cup (x_{\text{B}}; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (x_1; x_2)$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in [x_1; x_2]$	$x = x_{\text{B}}$	$x \in \emptyset$