



Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

8 класс

Учебник

(в 3 частях)

Часть 1

Рекомендовано
к использованию при реализации имеющих государственную
аккредитацию образовательных программ начального общего,
основного общего, среднего общего образования



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

*Чтобы учебником было удобно пользоваться,
в нём введены следующие обозначения:*



– задачи по новой теме для работы в классе,



– задачи для домашней работы,



– повторение ранее пройденного,



– задачи на смекалку,



– задания базового уровня,



– более сложные задания по новым темам и темам повторения,



– задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,



– завершение доказательства теоремы,

*{ * * * – более сложный материал для тех, кому интересно,*



– тест для самостоятельной проверки своих знаний:
<http://metodist.lbz.ru/authors/matematika/6/>

Глава 1

Язык и логика

§ 1. Искусство математических рассуждений

1.1.1. Искусство задавать вопросы



*Открытия в математике – это всегда озарения.
Ответ надо звать, и он приходит.*

Жак Адамар (1865–1963),
французский математик

В решении любой математической задачи присутствует частица открытия. Новая нестандартная задача заставляет перепробовать множество самых разных способов, а часто и придумывать новые. Задача, открывающая свою тайну только после многократных попыток её решения, запоминается надолго, а сам процесс решения приносит огромное удовольствие. А значит, чем больше задач будет решено самостоятельно, тем больше занятия математикой будут приносить удовольствие.

Важную роль при построении математических рассуждений играет умение задавать «правильные» вопросы, то есть те вопросы, ответы на которые помогают продвигаться в поисках решения задачи.

Какие же вопросы могут помочь при решении задачи?

Одним из них является вопрос, помогающий определить конечную цель:

Что требуется найти в задаче?

При этом важно не только ответить на этот вопрос, но и понять, что представляет собой искомая величина, какие значения она может принимать.

После того как мы чётко определили нашу цель, надо выяснить, какие данные у нас имеются, то есть ответить на вопрос:

Что нам дано?

Разобравшись с данными и разъяснив суть каждого используемого понятия, мы можем двигаться дальше.

Решение каждой задачи основывается на накопленном опыте и на тех знаниях о способах решения задач, которые были получены ранее, поэтому следующим вопросом, на который нужно найти ответ, будет вопрос:

Не была ли нами уже решена ранее задача с подобными неизвестными и исходными данными?

Ответ на данный вопрос поможет вспомнить все уже изученные ранее способы решения подобных задач, и если для их решения раньше был уже придуман общий метод, то им можно воспользоваться опять.

Если задачи подобного типа ещё не рассматривались и не удаётся найти ответ на предыдущий вопрос, то бывает полезно задать себе следующий вопрос:

Какие данные нужны, для того чтобы найти неизвестное?

Отвечая на этот вопрос, мы исходное неизвестное заменяем на новые неизвестные, для поиска которых возможным окажется применение уже известных методов.

На следующем этапе важно провести анализ данных, то есть ответить на вопрос:

Для чего могут понадобиться исходные данные?

Данный вопрос позволит понять, что может быть определено по известным данным. Проанализировав известное, нам будет легче установить взаимосвязи между известным и неизвестным.

Нестандартная задача может быть сформулирована таким образом, что разобраться в её условиях бывает достаточно непросто. Если условие громоздкое и запутанное, то полезно ответить на следующий вопрос:

Можно ли переформулировать исходную задачу?

Порой после переформулировки сложная на первый взгляд задача превращается в весьма простую.

Иногда сложную задачу можно разбить на несколько более простых, поэтому важно также ответить на вопрос:

Нельзя ли исходную задачу свести к решению нескольких более простых?

Приведённый список вопросов является лишь некоторой схемой, которая помогает только наметить план решения. Сам процесс решения может потребовать ответа на множество других вопросов. Но для того, чтобы начать решать задачу, полезным бывает составить первоначальный план действий, руководствуясь указанными вопросами. Возможно, первичный план поможет найти решение задачи на каком-то из его этапов. А возможно, предприняв все указанные попытки, мы так и не найдём решения задачи. Тогда нам надо будет задавать новые вопросы и искать новые пути решения. Но главное – начать действовать, так как именно в процессе действия рождаются новые идеи решения. А план нам поможет начать думать над задачей.

Итак, на основе рассмотренных вопросов мы можем составить следующий первоначальный план решения задачи.

Первоначальный план решения нестандартной задачи

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина и какие значения она может принимать.
2. Определить, что известно.
3. Попыаться найти аналогию между решёнными ранее задачами и новой задачей, а затем использовать уже известный способ решения.
4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.
5. Провести анализ данных: выяснить, что может быть определено по известным данным.
6. Попыаться переформулировать исходную задачу, сделав её более понятной.
7. Попыаться разбить сложную задачу на несколько более простых, решение которых, в конечном счёте, приведёт к решению исходной задачи.

Рассмотрим на примерах, как при решении задач могут быть использованы идеи данного плана.

Задача 1.

Из двух пунктов, расстояние между которыми 2500 м, одновременно навстречу друг другу вышли Миша и Маша. Миша шел со скоростью 1,6 м/с, а Маша – 0,9 м/с.

Когда Миша и Маша выходили навстречу друг другу, их собака Тузик побежала от Миши к Маше. Добежав до Маши, она развернулась и побежала к Мише, и так она бегала, не останавливаясь, со скоростью 6 м/с от одного из них к другому, пока Миша не встретился с Машей. Сколько метров пробежала собака?

Решение:

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина.

Надо найти, сколько метров пробежала собака. Искомая величина – расстояние, положительная величина.

2. Определить, что известно.

Известно, что Миша и Маша вышли одновременно навстречу друг другу и прошли вместе расстояние 2500 м. Известны скорости их движения и скорость движения собаки. Известно, что собака бегала все время от начала движения детей и до их встречи.

3. Попытаться найти аналогию между задачами, решёнными ранее, и новой задачей и использовать уже известный способ решения задач такого типа.

Миша и Маша вышли одновременно и двигались навстречу друг другу. Их движение может быть описано известными формулами встречного одновременного движения. Так как собака двигалась с постоянной скоростью, то её движение описывается также известной нам формулой движения $S = vt$, где S – путь, пройденный собакой, v – скорость движения собаки, а t – время её движения.

4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.

Для того чтобы найти путь, который пробежала собака, нам достаточно определить время её движения, так как её скорость нам известна. Собака двигалась всё время, пока Миша и Маша шли навстречу друг другу. Значит, время движения собаки равно времени движения детей. Найдя время движения детей, мы сможем найти время движения собаки, а значит, и путь, который она пробежала.

5. Провести анализ данных: определить, что может быть определено по известным данным.

Зная скорости движения детей и расстояние, которое они прошли при встречном одновременном движении, мы можем вычислить время их движения

$$t = \frac{2500}{1,6 + 0,9}.$$

6. Попытаться переформулировать исходную задачу, сделав её более понятной.

Для того чтобы сделать задачу более простой, её можно сформулировать, например, следующим образом:

«Из двух пунктов, расстояние между которыми 2500 м, одновременно навстречу друг другу вышли Миша и Маша. Миша шёл со скоростью 1,6 м/с, а Маша – 0,9 м/с. Всё то время, что дети шли навстречу друг другу, их собака Тузик бегала со скоростью 6 м/с. Сколько метров пробежала собака?»

7. Попытаться разбить сложную задачу на несколько более простых, решение которых, в конечном счёте, приведёт к решению исходной задачи.

Решая нашу задачу, мы разбили её на две более простые:
нахождение времени движения детей при встречном одновременном движении;
нахождение расстояния, пройденного собакой при движении с постоянной скоростью.
Таким образом, решение нашей задачи выглядит следующим образом:

$$1) \frac{2500}{1,6+0,9} = 1000 \text{ (с)} - \text{ время движения детей и собаки,}$$

$$2) 6 \cdot 1000 = 6000 \text{ (м)} = 6 \text{ (км)} - \text{ путь, который пробежала собака.}$$

Ответ: собака пробежала 6 км.

Задача 2.

Решите уравнение: $\frac{10x}{x+3} + \frac{11x}{x+3} = 7$.

Решение:

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина.

Нам надо найти все значения переменной x , при которых данное равенство превращается в истинное высказывание. Так как выражение $x + 3$ стоит в знаменателе дроби, то $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.

2. Определить, что известно.

Нам известно, что x удовлетворяет указанному уравнению.

3. Попытаться найти аналогию между задачами, решёнными ранее, и новой задачей и использовать уже известный способ решения задач такого типа.

Мы уже умеем решать уравнения вида $kx = c$, где k и c – некоторые рациональные числа. Заметим, что если мы обозначим $y = \frac{x}{x+3}$, то сможем записать уравнение в виде $10y + 11y = 7 \Leftrightarrow 21y = 7$.

4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.

Найдя y из линейного уравнения $21y = 7$, мы затем сможем найти x из равенства $y = \frac{x}{x+3}$, используя основное свойство пропорции.

Таким образом, решение нашей задачи выглядит следующим образом:

$$21y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = x + 3 \text{ (} x \neq -3 \text{)} \Leftrightarrow 2x = 3 \text{ (} x \neq -3 \text{)} \Leftrightarrow x = 1,5 \text{ (} 1,5 \neq -3 \text{)}.$$

Ответ: $\{1,5\}$.

К

1

Сравните задачи. Наметьте план решения каждой из них. Что вы замечаете?

1) Из пунктов A и B одновременно в полдень выехали навстречу друг другу два автомобиля. Один из этих автомобилей приехал в пункт B в 16 часов, а другой приехал в A в полночь. Сколько времени был в пути каждый из этих автомобилей?

2) Из пунктов A и B , расстояние между которыми 360 км, одновременно выехали навстречу друг другу два автомобиля. Автомобили ехали по одной и той же дороге с постоянными скоростями. Через сколько времени они встретились, если первый затратил на весь путь 4 часа, а второй 12 часов?

3) Из пунктов A и B , расстояние между которыми 360 км, одновременно в полдень выехали навстречу друг другу два автомобиля. Автомобили ехали по одной и той же дороге с постоянными скоростями. Один из этих автомобилей приехал в пункт B в 16 часов, а другой приехал в A в полночь. Сколько времени после их встречи двигался каждый автомобиль до пункта назначения?

Как более простые задачи помогут в решении последней задачи? Сформулируйте идею, которая может пригодиться для решения сложных задач.

2

1) Проанализируйте уравнение:

$$\frac{2x-3}{x-6} = \frac{2x-1}{x-2}.$$

Алгоритм решения подобных уравнений вам ещё неизвестен. Аналогия с каким из предложенных ниже уравнений поможет решить данное уравнение?

а) $\frac{5x-1}{x-2} = 0$; б) $\frac{2x}{5} = \frac{x-1}{3}$; в) $x-2 = 5$; г) $2x-3 = 2x-1$.

2) Сформулируйте идею, которая может пригодиться при выполнении «новых» заданий.

3

Сопоставьте идеи, сформулированные вами при выполнении заданий № 1 и № 2 с алгоритмом на с. 4. Какие из шагов алгоритма вам удалось сформулировать самостоятельно?

4

Проанализируйте задачу:

«Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они встретились через 2 часа после выезда, а через 1 час после встречи первый велосипедист приехал в конечный пункт. Сколько времени понадобилось на весь путь второму велосипедисту?»

Аналогия с какой из приведённых ниже задач поможет решить эту задачу?

А) Мастер и ученик, работая вместе, делают всю работу за 2 часа. Мастер, работая один, будет выполнять эту работу на час дольше. За сколько времени эту работу выполнит ученик, если производительность каждого из них не меняется?

Б) Из пунктов A и B , расстояние между которыми составляет 243 км, навстречу друг другу выехали мотоциклисты. Скорость одного из них на 15 км/ч больше скорости второго. С какой скоростью двигался каждый из них, если известно, что через 1 ч 48 минут они встретились?

Решите задачу с помощью найденной аналогии.

5

Попробуйте решить уравнение, пользуясь планом решения нестандартных задач:

а) $\frac{2x-5}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$; б) $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-2} = 1$; в) $x^5 - x^3 = 0$; г) $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$.

6

Решите задачу И. Ньютона.

Купец ежегодно расходует 100 фунтов стерлингов на содержание семьи и приумножает остальной капитал на одну треть. Через три года он стал вдвое богаче. Как велик стал его капитал?

π

7

Решите задачу:

а) Один насос наполнил бассейн, а другой за это же время наполнил бассейн объёмом на 600 м^3 больше. Определите объёмы бассейнов, если один из насосов накачивает 70 м^3 в час, другой – 120 м^3 .

б) Ученики седьмых и восьмых классов получили в библиотеке 286 учебников, причём восьмиклассники получили на 20% больше, чем семиклассники. Сколько учебников получили восьмиклассники?

8

Является ли данное предложение высказыванием? Если является, то сформулируйте его отрицание. Какое из этих высказываний истинно?

- 1) Существуют числа, не являющиеся рациональными.
- 2) В прямоугольном треугольнике гипотенуза короче катета.
- 3) Л. Н. Толстой родился в 1828 году.
- 4) Если бы можно было не ходить в школу!
- 5) Для любого натурального числа n верно, что число $n^3 - n$ делится на 6.
- 6) Для любого натурального числа n число $n^3 - n$ делится на 5.
- 7) И. Ньютон сформулировал три фундаментальных закона механики.
- 8) Я учусь в восьмом классе.
- 9) Если бы я родился на год позже, то я бы сейчас учился в седьмом классе.
- 10) Через пять лет я буду учиться в институте.
- 11) Две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны между собой.
- 12) Вопросительное предложение не является высказыванием.

9

Для двух данных предложений A и B сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Для какой-нибудь из них проведите доказательство методом от противного.

- 1) A : квадрат натурального числа n делится на 7;
 B : натуральное число n делится на 7.
- 2) A : квадрат натурального числа n при делении на 3 даёт остаток 1;
 B : натуральное число n при делении на 3 даёт остаток 1.
- 3) A : квадрат натурального числа n при делении на 7 даёт остаток 2;
 B : натуральное число n при делении на 7 даёт остаток 4.
- 4) A : число $n!$ делится на 13;
 B : натуральное число n больше 11.

10

Вычислите устно:

а) $0,6 \cdot \frac{2}{3}$	б) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$	в) $-0,25 \cdot \frac{4}{7}$	г) $(0,6)^2$
$: (-0,08)$	$: (-1,2)$	$-2\frac{6}{7}$	$: 0,04$
$+ 3\frac{12}{17}$	$-(-7\frac{1}{5})$	$: 0,02$	$-\frac{3}{5}$
$\left(-3\frac{1}{11}\right)$	$-11,8$	$+155$	$-4,4$
?	?	?	?

11

Найдите значение выражения:

- а) $3 \cdot 0,8 \cdot 0,0005$;
- б) $1,2 \cdot 0,07 \cdot 0,5$;
- в) $-0,4 \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right)$;
- г) $1\frac{2}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{6}\right) \cdot (-0,6)$;

д) $\left(-3\frac{5}{6}\right) \cdot 0,4 \cdot 1\frac{1}{23};$

е) $0,3 \cdot \left(-7\frac{3}{5}\right) \cdot 1\frac{1}{19};$

ж) $\frac{7}{9} + \frac{2}{9} \cdot 0,9;$

з) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0,6;$

и) $4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot 3 - 9\frac{1}{6};$

к) $\frac{13}{15} - 2\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 2\frac{2}{5};$

л) $2\frac{3}{4} + \left(3\frac{1}{5} - 3\frac{7}{10}\right) \cdot 1\frac{1}{4};$

м) $\left(2,125 \cdot 1\frac{15}{17} - 1\frac{7}{12}\right) : 7,25.$

12 Найдите неизвестный член пропорции:

$$\frac{x}{\left(7,42 \cdot \frac{5}{9} - (-11,48) : 1\frac{4}{5}\right) : 0,35} = \frac{\left(-6\frac{7}{8} + 1,375 - 5\frac{1}{2} \cdot 0,73\right) : (-1,73)}{7\frac{1}{5} : 2,4}.$$

13 Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

а) $1\frac{1}{3};$ в) $-2\frac{2}{3};$ д) $3\frac{5}{6};$ ж) $4\frac{4}{5};$

б) $1\frac{44}{45};$ г) $2\frac{61}{90};$ е) $-17\frac{28}{225};$ з) $-5\frac{15}{22}.$

14 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) $3,(6);$ в) $94,32(1);$ д) $-7,2(72);$
б) $0,(13);$ г) $-7,0(7);$ е) $17,01(32).$

15 Определите, каким числом – положительным или отрицательным – является значение выражения:

а) $-5 \cdot 7^{24};$ б) $(-5 \cdot 7)^{18};$ в) $5 \cdot (-7)^7;$ г) $-(5 \cdot 7)^8.$

16 Расположите числа в порядке возрастания и расшифруйте фамилию автора высказывания: «Счастье не в том, чтобы делать всегда, что хочешь, а в том, чтобы всегда хотеть того, что делаешь».

О $\left(\frac{1}{8}\right)^{100};$ **С** $3,5^0;$ **Т** $-7^{22};$ **Л** $(-1)^{73};$ **Й** $(-8)^{30};$ **О** $(-2)^{19};$ **Т** $\left(\frac{1}{8}\right)^{101}.$

Как вы понимаете это высказывание, согласны ли вы с ним?

17 Во сколько раз изменится объём куба, если его ребро увеличить:

а) в два раза; б) в три раза; в) в четыре раза; г) в пять раз?

18 Найдите значение выражения:

а) $(-3)^3 - (-1)^6 + 5^2 + 7;$ б) $(0,125)^6 \cdot 8^8;$ в) $\frac{4^3 \cdot 2^5}{8^3};$

г) $(-1)^9 - (-1)^5 - (-1)^4;$ д) $\frac{(0,1)^3 \cdot (0,1)^8}{(0,1)^9};$ е) $\frac{18^{15}}{9^{14} \cdot 2^{16}};$

$$\begin{array}{lll} \text{ж)} 2^5 \cdot (0,5)^3; & \text{з)} \frac{(5^2)^3 \cdot 5^{10}}{(5^3)^5}; & \text{и)} \frac{2^n \cdot 7^n}{14 \cdot 14^n}; \\ \text{к)} (0,25)^3 \cdot 4^3; & \text{л)} \frac{7^9 \cdot 49^3}{7^{14}}; & \text{м)} \frac{10^{n+1}}{2^{n-1} \cdot 5^{n+2}}. \end{array}$$

19 Найдите значение выражения:

$$\frac{(36^2 : 6^3) \cdot 5^{15} \cdot 2^7 \cdot (2^9)^2 \cdot \left(\frac{35^{36}}{35^{30}}\right)}{14^5 \cdot (3^{20} : 3^{17}) \cdot 5^{20} \cdot 2^{23}} + (11,1)^0.$$

20 **Эстафета.** Выполнение заданий начинается с первого номера, верный ответ каждого задания показывает номер задания, которое надо выполнить следующим. Посоветуйтесь со своим товарищем по парте. В эстафете выигрывает тот, кто первым называет правильный ответ последнего задания.

1. Решить уравнение: $(x+1)^3 = 64$.

2. Вычислить: $\frac{(5^8)^3 \cdot 5^5}{(5^2)^{10} \cdot (5^4)^2}$.

3. Решить уравнение: $5^{2n} = 625$.

4. Вычислить: $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^6$.

5. Вычислить: $-5^2 + (-5)^2 + 4$.

Д

21 Решите задачу:

«Для трёх кроликов на 2 дня накосили 12 кг травы. Сколько травы нужно заготовить на 3 дня для 7 кроликов, если каждый кролик в день съедает одинаковое количество сена?».

Какой из шагов плана решения нестандартной задачи подал вам основную идею для её решения?

22 Попробуйте решить уравнение, пользуясь планом решения нестандартных задач:

а) $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^2} = -4$; б) $x^3 + 8x^2 + 15x = 0$.

23 Решите задачу:

а) Моторная лодка развивает скорость в стоячей воде 15 км/ч. Рыбак проплыл на ней против течения реки 30 ч, а затем вернулся на прежнее место за 20 ч. Какова скорость течения реки?

б) В цехе поставили автоматический станок, производительность которого выше производительности рабочего на 95 деталей в час. За 18 минут автомат выполнил шестичасовую норму рабочего. Какова производительность автомата?

в) Морской круизный лайнер должен был преодолеть расстояние между портами за 10 ч. Спустя 8 часов после отправления он увеличил скорость на 5 км/ч, поэтому в порт пришел раньше на 15 минут. С какой скоростью должен был плыть лайнер?

24

Из двух данных предложений A и B сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Для какой-нибудь из них проведите доказательство методом от противного.

1) A : квадрат натурального числа n делится на 5;

B : натуральное число n делится на 5.

2) A : квадрат натурального числа n при делении на 5 дает остаток 1;

B : натуральное число n при делении на 5 дает остаток 1.

3) A : натуральное число n больше 10;

B : число $n!$ делится на 3.

4) A : числа m и n целые;

B : сумма чисел m и n — целое число.

25

Найдите значение выражения:

а) $\left(3,6 - 3\frac{1}{3}\right) \cdot 0,6;$

в) $(3,4 \cdot 2,8 - 7,15) : 0,01;$

б) $12\frac{1}{3} - 3\frac{1}{3} \cdot \left(3,2 - \frac{1}{5}\right);$

г) $7\frac{3}{4} \cdot \left(-2\frac{2}{31}\right) - \left(-5\frac{1}{6}\right) : 2\frac{7}{12}.$

26

Найдите неизвестный член пропорции:

$$\frac{12\frac{4}{5} \cdot 3,75 - 6\frac{2}{5} \cdot 3,125}{x} = \frac{3\frac{3}{5} : \frac{3}{45}}{7,2 + 0,8 \left(5,5 - 3\frac{1}{4}\right)}.$$

27

Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) $-10,(27);$

б) $1,0(27).$

28

Вычислите:

а) $(-5 + 3)^3;$

б) $(-5)^3 + 3^3;$

в) $0,25^6 \cdot 4^8;$

г) $\frac{2^6 \cdot (2^3)^3}{2^{15}}.$

29

Найдите значение выражения:

а) $\left(-0,2^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \cdot (8 - (-4)^3)\right) : (-0,1)^2;$

б) $\frac{55^4 \cdot (3^3)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 11}{(11^5)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot (6:11)^5 \cdot 10^4}.$

с

30* Прочитайте предложения:

A : Натуральное число n не делится на 7;

B : В представлении рационального числа $\frac{n}{7}$, где n — натуральное число, десятичной дробью имеется период из шести цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Из этих предложений сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Проведите доказательство методом от противного.

1.1.2. Необходимость и достаточность



*Математику уже затем учить надо,
что она ум в порядок приводит.*

Михаил Ломоносов (1711–1765)
русский учёный-естествоиспытатель,
основатель Московского университета

Понятиями, важными не только для грамотного проведения математических рассуждений, но и для построения любых рассуждений, являются понятия «необходимости» и «достаточности».

В повседневной жизни мы часто используем слова «необходимо» и «достаточно». Например, «мне необходимо сделать домашнее задание» или «мне этого достаточно». При этом эти слова иногда употребляются в разных смыслах. Так, когда вы говорите, что для того, чтобы дойти из дома до школы, вам необходимо 20 минут, то, скорее всего, вы имеете в виду, что за это время вы успеете дойти до школы. На самом деле вы хотите сказать, что на путь из дома до школы вам достаточно 20 минут. А когда вы говорите, что для того чтобы поехать во Францию вам нужна виза, вы имеете в виду, что без визы вас во Францию не пустят и здесь слово «необходимо» употребляется уже в другом смысле.

Так как математика не допускает нескольких различных толкований одного и того же понятия, нам важно разобраться с математическим смыслом этих слов.

Для этого рассмотрим следующее высказывание:

«Если Миша умеет читать по-английски, то он знает буквы английского алфавита». Это высказывание можно записать в виде $A \Rightarrow B$, где

- предложение A : «Миша умеет читать по-английски»,
- предложение B : «Миша знает буквы английского алфавита».

Данное высказывание можно переформулировать следующим образом: «Из того что Миша умеет читать по-английски, следует, что он знает буквы английского алфавита». Это высказывание истинное.

А вот обратное высказывание: «Из того что Миша знает буквы английского алфавита, следует, что он умеет читать по-английски» ложно.

Какое же условие является здесь необходимым, а какое достаточным?

Определение. Если высказывание $A \Rightarrow B$ истинно, то A называется *достаточным условием* для B , а B – *необходимым условием* для A .

Итак,

$A \Rightarrow B$ – истинное
 A – достаточное условие для B
 B – необходимое условие для A

В нашем случае истинно высказывание: «Из того, что Миша умеет читать, следует, что он знает буквы». Значит, *знание букв* – необходимо для *умения читать*, а *умение читать* – достаточно для *знания букв*.

Другими словами:

- для того чтобы Миша умел читать по-английски, *необходимо*, чтобы он знал буквы английского алфавита;
- для того чтобы Миша знал буквы английского алфавита, *достаточно*, чтобы он умел читать по-английски.

* * *

Чтобы определить, необходимым или достаточным является то или другое условие, мы можем использовать также диаграммы Эйлера–Венна. В качестве примера рассмотрим следующее высказывание: «Если натуральное число делится на 4, то оно делится на 2». Обозначим:

предложение A : «Натуральное число x делится на 4»,

предложение B : «Натуральное число x делится на 2».

Натуральное число, которое делится на 4, можно записать в виде произведения $4n = 2 \cdot 2n$, откуда ясно, что оно делится на 2. Значит, из предложения A следует предложение B ($A \Rightarrow B$), то есть условие B является необходимым условием для A , а A – достаточным условием для B .

Обозначим I_A множество всех x , при которых предложение A становится истинным высказыванием. Это *множество истинности* предложения A – множество натуральных чисел, кратных 4.

Обозначим I_B множество всех x , для которых предложение B становится истинным высказыванием. Это *множество истинности* предложения B – множество натуральных чисел, кратных 2.

Изобразим множества I_A и I_B на диаграмме Эйлера–Венна. Множество I_A является подмножеством множества I_B , так как есть числа, делящиеся на 2, но не делящиеся на 4, например 6. При этом все числа, делящиеся на 4, делятся на 2 (рис. 1).

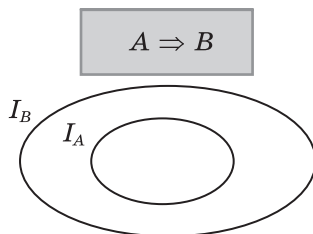


Рис. 1

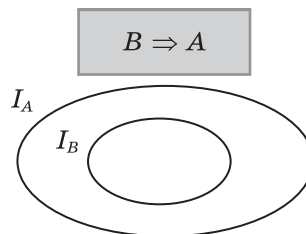


Рис. 2

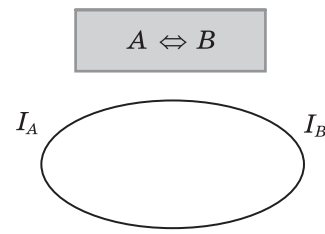


Рис. 3

На рисунке 2, наоборот, множество I_B является подмножеством множества I_A ($I_B \subset I_A$), тогда A будет необходимым условием для B , а B – достаточным для A : $B \Rightarrow A$.

В каких же случаях условие A будет необходимым и достаточным для B ?

Согласно нашему определению, для этого нужно, чтобы были истинными оба следствия: $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. При этом если A является необходимым и достаточным условием для B , то и B является необходимым и достаточным условием для A , а множества их истинности совпадают (рис. 3).

Как мы уже знаем, в этом случае говорят, что такие предложения *равносильны*¹, то есть $A \Leftrightarrow B$. Другими словами, можно сказать, что для того, чтобы выполнялось A , *необходимо и достаточно*, чтобы выполнялось B .

Таким образом,

- A является достаточным условием для B , если $I_A \subset I_B$;
- A является необходимым условием для B , если $I_B \subset I_A$;
- A является необходимым и достаточным условием для B , если $I_A = I_B$.

¹ *Равносильные* предложения называются также *эквивалентными*; применяется обозначение $A \sim B$.

Рассмотрим ещё несколько примеров для того, чтобы разобраться, какие условия являются необходимыми, какие достаточными, а какие необходимыми и достаточными.

Пример 1.

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

«Для того чтобы сумма двух целых чисел была чётным числом, ..., чтобы каждое слагаемое было чётным числом».

Решение:

Исходное высказывание состоит из двух предложений A и B , где:

A : «Сумма двух целых чисел чётное число»,

B : «Каждое слагаемое чётное число».

Определим истинность высказываний $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

$A \Rightarrow B$: Высказывание ложно, так как из того, что сумма двух целых чисел число чётное, не следует, что каждое слагаемое число чётное. Например, сумма двух нечётных чисел также число чётное.

$B \Rightarrow A$: Высказывание истинно, так как, по свойству делимости, если слагаемые чётные, то и их сумма число чётное.

Согласно определению необходимости и достаточности условий: A – является необходимым условием для B , а B – достаточным для A . Поэтому верным будет являться следующее высказывание:

«Для того чтобы сумма двух целых чисел была чётным числом, достаточно, чтобы каждое слагаемое было чётным числом».

Ответ: в предложение вместо многоточия надо поставить слово «достаточно».

* * *

Пример 2.

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

«Для того чтобы число делилось на 9, ..., чтобы оно делилось на 3».

Решение:

Исходное высказывание состоит из двух предложений C и D , где:

C : Число делится на 9;

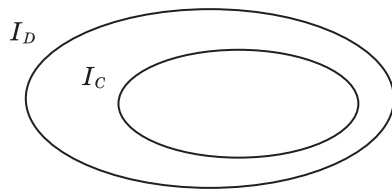
D : Число делится на 3.

Нарисуем диаграмму Эйлера–Венна для множеств истинности I_C предложения C (множество всех чисел, кратных 9) и I_D предложения D (множество всех чисел, кратных 3).

Множество всех чисел, кратных 9, является подмножеством множества всех чисел, кратных 3: $I_C \subset I_D$. Значит, D – необходимое условие для C . Поэтому верным будет являться следующее высказывание:

«Для того чтобы число делилось на 9, необходимо, чтобы оно делилось на 3».

Ответ: в предложение вместо многоточия надо поставить слово «необходимо».



Пример 3.

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

«Для того чтобы было истинно равенство $x + 3 = 5$, ..., чтобы x равнялось 2».

Решение:

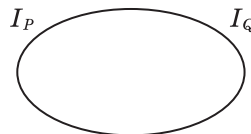
Исходное предложение состоит из двух предложений P и Q , где:

P : «Сумма $x + 3$ равна 5»,

Q : « x равен 2».

Нарисуем диаграмму Эйлера–Венна для множеств истинности I_P предложения P (множество решений уравнения $x + 3 = 5$) и I_Q предложения Q (множество решений уравнения $x = 2$).

Уравнение $x + 3 = 5$ имеет единственный корень $x = 2$. Поэтому множества истинности высказываний P и Q совпадают. Значит, верным будет являться следующее высказывание:



«Для того чтобы было истинно равенство $x + 3 = 5$, необходимо и достаточно, чтобы x равнялось 2».

Ответ: в предложение вместо многоточия надо поставить словосочетание «необходимо и достаточно».

К

31

Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какое из них верное, а какое – ложно? Ответ обоснуйте.

а) A : Натуральное число n при делении на 3 даёт остаток 1.

B : Квадрат натурального числа n при делении на 3 даёт остаток 1.

б) Пусть n – натуральное число.

A : n – чётное число;

B : $n^3 - n$ делится на 6.

в) A : Сумма цифр натурального числа n делится на 3.

B : Натуральное число n чётно.

г) A : Натуральное число a чётно.

B : Натуральное число a является квадратом чётного числа.

д) A : Натуральное число n больше, чем 5.

B : Для натурального числа n произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ больше, чем 1000.

32

1) Является ли верным высказывание: «Если на улице листопад, то сейчас осень»?

2) Переформулируйте это высказывание:

а) с помощью слова «необходимо»,

б) с помощью слова «достаточно».

Можете ли вы обосновать свои варианты?

3) Найдите в тексте учебника определение, с помощью которого можно выполнить данное задание. Оказались ли верными предложенные вами варианты?

33

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

а) Для того чтобы целое число a являлось квадратом чётного числа, ..., чтобы целое число a делилось на 4.

б) Для того чтобы целые числа a и b были равны, ..., чтобы квадраты целых чисел a и b были равны.

в) Для того чтобы натуральное число n делилось на 3, ..., чтобы натуральное число n делилось на 21.

г) Для того чтобы разность двух целых чисел a и b делилась на 5, ..., чтобы каждое из чисел a и b делилось на 5.

 π

34 Возведите в степень:

а) $(t-1)^2$; б) $(y^2+5x^2)^2$; в) $(t+1)^3$; г) $(y^2-5x^2)^3$.

35

Используя формулы сокращённого умножения, вычислите:

а) $91 \cdot 89$; г) 61^2 ; ж) $\left(2\frac{13}{15}\right)^3 + 3 \cdot \left(2\frac{13}{15}\right)^2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot 2\frac{13}{15} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^3$;
 б) $48 \cdot 52$; д) 39^2 ; з) 21^3 ; к) $(4-0,1)(4^2+4 \cdot 0,1+0,1^2)$;
 в) $73 \cdot 67$; е) $\left(29\frac{29}{30}\right)^2$; и) 19^3 ; л) $11^3 - 1$.

36

Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $5k(k+3)(3-k)$; г) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}n-h\right) \left(\frac{1}{2}n+h\right) \cdot \left(\frac{1}{4}n^2-h^2\right)$;
 б) $(a+4)(-a-4) \cdot \frac{1}{16}a$; д) $3d \cdot \left(\frac{2}{3}d-3\right) \left(\frac{4}{9}d^2+2d+9\right)$;
 в) $(m+2)(-m-2)^2$; е) $1000000 \cdot (0,1-q)(0,1+q)(q^4+0,01q^2+0,0001)$.

37

Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{100d^6-t^2}{t-10d^3}$; д) $\frac{8k^3-125l^3}{25l^2+10kl+4k^2}$;
 б) $\frac{625x^4-y^4}{(y^2-25x^2)^2}$; е) $\frac{0,064q^3+0,216r^6}{0,16q^2-0,36r^4}$;
 в) $\frac{9a^2+16b^2-24ab}{4b-3a}$; ж) $\frac{7c-z}{343c^3-147c^2z+21cz^2-z^3}$;
 г) $\frac{\frac{1}{16}n^{10}+25m^4+2,5m^2n^5}{25m^4-\frac{1}{16}n^{10}}$; з) $\frac{81s^2+36sv+4v^2}{729s^3+486s^2v+108sv^2+8v^3}$.

38

Разложите на множители многочлен:

а) $15a-15b+a^2-ab$; д) $m^3n^6+6m^2n^4p^3+12mn^2p^6+8p^9$;
 б) $a^2(c+1)+4a(c+1)+4c+4$; е) $144a^2b^4-289p^6q^8$;
 в) $5s^2c+c^3+5sc^2+s^3$; ж) $64x^3+0,001y^{15}$;
 г) $48x^4m^5-72x^2y^3m^5+27y^6m^5$; з) $512m^6-8n^9$.

39 Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $a^2 - 10a + 9$;

б) $b^2 - 12b + 11$;

в) $c^2 + \frac{1}{2}c - 3$.

2

40

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

а) Для того чтобы сумма цифр натурального числа n делилась на 3, ..., чтобы число n делилось на 9.

б) Для того чтобы целые числа a и b были нечётными, ..., чтобы сумма целых чисел a и b являлась чётной.

в) Для того чтобы одно из натуральных чисел a и b равнялось 1, ..., чтобы их наибольший общий делитель равнялся 1.

г) Для того чтобы натуральное число n делилось на 2 и на 3, ..., чтобы это число делилось на 6.

41

Используя формулы сокращённого умножения, вычислите:

а) $32 \cdot 28$;

б) 99^2 ;

в) 101^3 ;

г) $(11^2 - 0,5 \cdot 11 + 0,5^2) \cdot (11 + 0,5)$.

42

Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $a^2(a + 0,2)(0,2 - a)$;

в) $(d^3 + 2p^2)^2$;

д) $(a - 2b)^3$;

б) $(b^3 + 3c^2)(b^3 - 3c^2)$;

г) $\left(-q^4 + \frac{3}{4}r^2\right)^2$;

е) $\left(5s^3 + \frac{1}{5}z^2\right)^3$.

43

Упростите:

а) $(v^2 + 6k^3) \cdot (v^4 - 6v^2k^3 + 36k^6) - v^3 - 216k^9$;

б) $m^3 - \frac{1}{5}m - \left(m - \frac{1}{5}n\right) \cdot \left(m^2 + \frac{1}{5}mn + \frac{1}{25}n^2\right)$;

в) $(x^2 - 0,3y) \cdot (0,3y - x^2)^2 + 0,027y^3$.

44

Разложите на множители многочлен:

а) $3d^3 - 27d$;

г) $m^3 + 10m^2p^2 + 25mp^4$;

б) $z^3 - z^2 - 36z + 36$;

д) $343a^3q^6 - 125n^9l^3$;

в) $v^2 - h^2 + 8v - 8h$;

е) $b^{12} - b^8k + \frac{1}{3}b^4k^2 - \frac{1}{27}k^3$.

45

Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $k^2 + 6k - 40$;

б) $25b^2 - 10bt - 8t^2$.

46

Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{x^{26}y^{30} + x^{15}y^{48}}{x^{25}y^{28} + x^{14}y^{46}}$;

б) $\frac{8q^3 + 0,001m^9}{4q^2 - 0,01m^6}$;

$$\text{в) } \frac{25x^{16} - 25y^{10}}{(y^5 - x^8)^2}; \quad \text{г) } \frac{\frac{1}{9}c + 9x}{\frac{1}{729}c^3 + \frac{1}{3}c^2x + 27cx^2 + 729x^3}.$$

С

47*

Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какие из них верные, а какие – ложные? Ответ обоснуйте.

а) А: Квадрат целого числа n отрицателен.

В: Целое число n делится на 3.

б) А: Квадрат целого числа n отрицателен.

В: Квадрат целого числа n – простое число.

в) А: Натуральное число n больше, чем 3.

В: Для натурального числа n числа n , $n + 2$, $n + 4$ – простые.

г) А: Целые числа x , y , z удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^2$.

В: Целое число y равно 1.

д) А: Уравнение $ax = b$, где a и b – целые числа, имеет не менее двух целочисленных решений.

В: Целое число a равно 0.

е) А: Натуральное число n больше, чем 1.

В: Для натурального числа n число $n!$ нечетно.

1.1.3. Свойства и признаки. Критерии



Именно математика даёт надёжнейшие правила: кто им следует – тому не опасен обман чувств.

Леонард Эйлер (1707–1783),
выдающийся швейцарский математик

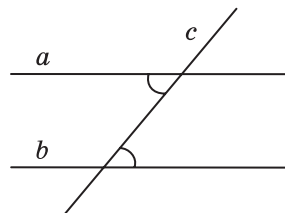
В предыдущем пункте мы учились проводить математические рассуждения, знакомясь с различными формулировками логического следования. Подобные логические формы крайне важны, потому что помогают развиваться математике как науке, а нам помогают продвигаться в изучении этой науки.

В этом пункте мы продолжим разбираться с формой $A \Rightarrow B$. Эта работа поможет вам логически грамотно рассуждать, лучше понимать друг друга, а значит, быстрее и надёжнее получать намеченный результат.

Рассмотрим два предложения:

А: Прямые a и b параллельны, прямая c не параллельна прямым a и b .

В: Внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении прямых a и b прямой c , равны.



Из курса геометрии мы знаем, что из предложения A следует предложение B , и эта теорема называется *свойством* параллельных прямых. Вспомним, как формулируется это свойство.

$$A \Rightarrow B$$

«Если прямые a и b параллельны, то внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении прямых a и b прямой c , равны».

Чтобы получить обратную теорему, поменяем условие и заключение местами: то есть из предложения B следует предложение A . Из курса геометрии мы знаем, что эта теорема тоже верна.

$$B \Rightarrow A$$

«Если внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении прямых a и b прямой c , равны, то прямые a и b параллельны».

Эта теорема называется *признаком* параллельности прямых.

Различие в названиях этих теорем объясняется тем, что *свойство* – это верное высказывание (или утверждение) об объектах, принадлежащих некоторому множеству. *А признак* позволяет установить принадлежность объектов к этому множеству. В геометрии свойства и признаки формулируются для различных фигур, в алгебре – для чисел, а в жизни – для решения практических, жизненно важных проблем.

В нашем случае свойство параллельных прямых утверждает, что для любых двух элементов (обозначим их m_1 и m_2), принадлежащих множеству параллельных прямых (обозначим его M), справедливо утверждение B .

Таким образом,

Свойством элемента $m \in M$ называют высказывание вида «Для каждого элемента m из множества M выполняется утверждение B »:

$$m \in M \Rightarrow B$$

Для чего нужны свойства? Установив, что некоторый элемент принадлежит определённому множеству, мы можем утверждать, что для него будет выполняться свойство, присущее *всем* элементам этого множества. Так, установив, что прямые параллельны, можно не мерить каждый раз внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении этих прямых третьей, а смело утверждать, что эти углы равны.

Признак параллельности прямых утверждает, что два элемента m_1 и m_2 , для которых справедливо утверждение B , будут принадлежать множеству параллельных прямых M .

Признаком принадлежности элемента m множеству M называют высказывание вида «Каждый элемент m , для которого выполняется утверждение B , принадлежит множеству M »:

$$B \Rightarrow m \in M$$

В отличие от свойств признаки нужны для того, чтобы устанавливая принадлежность объекта множеству. Это позволяет трудные или даже невыполнимые задачи сводить к лёгким. Так, в нашем примере, невозможно провести непосредственную проверку параллельности двух прямых – мы не можем продолжить их до бесконечности, чтобы установить, пересекаются они или нет. В признаке параллельности прямых эта неосуществимая на практике работа заменяется проверкой равенства двух определённых углов.

В алгебре признаки используются с той же самой целью. Например, чтобы выяснить, является ли число 123456789101112...99100 чётным, нужно разделить его на 2 и установить, что остаток от деления равен нулю. Пользуясь признаком делимости на 2, мы заменяем этот трудоёмкий процесс простой проверкой чётности его последней цифры. Таким образом, признаки позволяют установить принадлежность объектов определённому множеству путем всего лишь проверки некоторого условия.

Из определений свойства и признака ясно, что на математическом языке их можно записать в виде следования.

Свойство элементов множества M	$m \in M \Rightarrow B(m)$ – истинно
Признак принадлежности элементов множеству M	$B(m) \text{ – истинно} \Rightarrow m \in M$

Эта форма позволяет лучше разобраться в смысле утверждений, а значит, облегчает их доказательство и применение. Однако предложения в форме следования нередко бывают неудобными для практического использования. В этом случае их заменяют более простыми красивыми формулировками.

Например, свойство равнобедренного треугольника, представленное в форме следования, позволяет легко понять, где условие теоремы (то есть что дано), а где – заключение (что требуется доказать):

«Если треугольник принадлежит множеству треугольников с равными боковыми сторонами², то углы при его основании равны»

Однако это предложение звучит несколько громоздко. Поэтому обычно свойство равнобедренного треугольника формулируется кратко:

«В равнобедренном треугольнике углы при основании равны».

Очевидно, что при работе с теоремами важно уметь переходить не только от развёрнутой формы к краткой, но и от краткой формы к развёрнутой «Если..., то...», а затем – и к математической записи теорем, используя введение обозначений. В следующей таблице представлены несколько примеров такого перехода.

Краткая форма	Развёрнутая форма	Математический язык
Вертикальные углы равны.	Если два угла принадлежат множеству пар вертикальных углов, то эти два угла равны.	$\angle A$ и $\angle B$ – вертикальные $\Rightarrow \Rightarrow \angle A = \angle B$
Натуральное число, оканчивающееся на 0 или на 5, делится на 5.	Если натуральное число оканчивается на 5 или на 0, то оно принадлежит множеству чисел, которые делятся на 5.	n оканчивается на 0 или 5 ($n \in N$) $\Rightarrow n : 5$
Железные предметы притягиваются магнитом.	Если предмет принадлежит множеству железных предметов, то он притягивается магнитом.	$p \in M \Rightarrow p$ – притягивается магнитом (M – множество железных предметов)

² Здесь и далее под равенством отрезков понимается равенство их длин.

Развёрнутая форма записи позволяет легко установить, что в первом и третьем примерах приведены *свойства* (соответственно вертикальных углов и железных предметов), а во второй строке – *признак* (делимости на 5). Математический язык облегчает не только понимание смысла теорем, но и построение теорем, обратных данным.

Теорема, обратная свойству вертикальных углов (первая строка таблицы), неверна, так как для утверждения «Равные углы вертикальны» легко подобрать контрпример. Точно так же неверна обратная теорема и для свойства железных предметов: например, магнитом притягиваются никель и кобальт (третья строка).

А вот теорема, обратная признаку делимости на 5 (то есть свойство делимости на 5), как мы знаем, верна: «Число, делящееся на 5, оканчивается на 0 или 5». На математическом языке это свойство можно записать так:

$$n : 5 \Rightarrow n \text{ оканчивается на } 0 \text{ или } 5 \ (n \in \mathbb{N}).$$

Значит, имеет место равносильность условий:

$$n : 5 \Leftrightarrow n \text{ оканчивается на } 0 \text{ или } 5 \ (n \in \mathbb{N}).$$



Таким образом, условие «натуральное число оканчивается на 0 или на 5» является своеобразной меркой, инструментом, средством, помогающим выявить *все без исключения* элементы, принадлежащие множеству чисел, кратных 5, и *только их!* Поэтому такие утверждения в математике называют *критериями* (от др.греч. κριτήριον – способность различения, средство суждения, мерило).

Критериями пользуются и в жизни. Так, например, знакомые вам критерии выставления отметок за проверочную работу однозначно определяют условия начисления того или иного балла.

Мы уже знаем, что знак $\Leftrightarrow$ переводится на русский язык с помощью оборотов «тогда и только тогда», «в том и только в том случае», «если и только если», «необходимо и достаточно». Поэтому признак (а точнее сказать, критерий) делимости числа на 5 мы формулировали так: «Натуральное число делится на 5 *тогда и только тогда*, когда оно оканчивается на 5 или 0» (но его можно формулировать и с любыми другими перечисленными выше оборотами).

Критерием принадлежности элемента t к множеству M называют высказывание вида «Элемент t принадлежит множеству M в том и только в том случае, когда для t выполняется условие B ».

$$t \in M \Leftrightarrow B$$

Ясно, что в любом свойстве условие B является *необходимым* условием для того, чтобы t принадлежал множеству M , в признаке – *достаточным*, а в критерии – *необходимым и достаточным*:

Свойство	Признак	Критерий
$t \in M \Rightarrow B$	$B \Rightarrow t \in M$	$t \in M \Leftrightarrow B$

Следовательно, не любое свойство или признак являются критериями. Так, приведённые выше свойства вертикальных углов и железных предметов, как уже было показано, критериями не являются. А вот равенство двух внутренних накрест лежащих углов, напротив, является критерием параллельности прямых, который можно сформулировать, например, так: «Чтобы две прямые a и b были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении этих прямых третьей прямой c , были равны».

Пример 1.

Даны высказывания:

A : Сумма двух целых чисел a и b чётна.

B : Разность двух целых чисел a и b чётна.

Докажите верность критерия $A \Leftrightarrow B$.

Доказательство:

1) Сформулируем критерий: «Чтобы сумма двух целых чисел a и b была чётна, необходимо и достаточно, чтобы разность этих чисел была чётна».

Чтобы доказать верность критерия, нужно убедиться в равносильности высказываний A и B , то есть доказать, что верны обе теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

2) Сформулируем теорему $A \Rightarrow B$: «Если сумма двух целых чисел a и b чётна, то и разность чисел a и b будет чётной».

Докажем эту теорему.

Разность $a - b$ можем представить в виде: $a - b - b + b = (a + b) - 2b$.

Сумма $a + b$ чётна (по условию), тогда разность $(a + b) - 2b$ будет чётной как разность двух чётных чисел $a + b$ и $2b$. Теорема доказана.

3) Сформулируем теорему $B \Rightarrow A$: «Если разность двух целых чисел a и b чётна, то и сумма чисел a и b будет чётной».

Докажем эту теорему.

Сумму $a + b$ можем представить в виде: $a + b - b + b = (a - b) + 2b$.

Разность $a - b$ чётна (по условию), тогда сумма $(a - b) + 2b$ будет чётной как сумма двух чётных чисел $a - b$ и $2b$. Теорема доказана.

К**48**

Сформулируйте утверждения, обратные данным.

а) Если $a : c$ и $b : c$, то $(a + b) : c$.

б) Если $a : c$ и $b : c$, то $ab : c$.

в) Если прямая линия является графиком прямой пропорциональности, то она проходит через начало координат.

г) Если два числа противоположны, то их квадраты равны.

д) Если число делится на 24, то оно делится на 6 и на 4.

Являются ли они верными?

49

Сравните утверждения:

A : Если число делится на 15, то оно делится на 3 и на 5.

B : Если число делится на 3 и на 5, то оно делится на 15.

Какое из этих утверждений можно назвать свойством делимости на 15, а какое признаком делимости на 15?

Объедините оба утверждения в одно. Как можно назвать полученное утверждение? Сопоставьте свои предположения с определениями на с. 19–21.

50

Докажите, что предложения A и B равносильны. Сформулируйте критерий $A \Leftrightarrow B$.

а) A : Целые числа a и b дают одинаковые остатки при делении на натуральное число m .

B : Разность двух целых чисел a и b делится на натуральное число m .

б) A : Натуральные числа a и b взаимно просты.

B : Наименьшее общее кратное натуральных чисел a и b равно произведению ab .

в) А: Сумма цифр натурального числа n делится на 3.

В: Натуральное число n делится на 3.

г) А: Натуральное число n делится на 11.

В: Сумма цифр натурального числа n , стоящих на чётных местах (считая от первой), отличается от суммы цифр, стоящих на нечётных местах, на число, делящееся на 11.

 π

51 Решите уравнение:

а) $0,9(v+1)=0,2(v-6)$;

д) $\frac{5a+3}{6}=\frac{8a-5}{11}$;

б) $6(x-1)+12(3-2x)=45-17x$;

е) $\frac{m-4}{3}+\frac{m-8}{9}=1-\frac{m+1}{6}$;

в) $1=20y+15(3-y)-5(y+11)$;

ж) $(2z-3)(2z+3)-4z(z-5)=1$;

г) $12(1-z)-4=2(4z-3)-9z+14$;

з) $(t-5)^2+(11+t)(11-t)=3+t$.

52

Решите уравнение, раскладывая на множители многочлен:

а) $d^3-15d^2-4d+60=0$;

в) $k^2+11k+18=0$;

б) $x^3-8x^2-16x+128=0$;

г) $b^2-8b+15=0$.

53

Решите уравнение, содержащее модуль:

а) $|x+7|=15$;

д) $\left|\frac{1}{4}m-6\right|=0$;

б) $|2y+5|=-3$;

е) $|5t-4|=|8-t|$;

в) $-|1,5z+3|=-9$;

ж) $-|2x-4|=-|5-x|$;

г) $|16-3k|=-|2k+1|$;

з) $|3x+12|=|8x+3-10x-7|$.

54

На числовой прямой Ox изобразите следующие числовые промежутки, назовите их и запишите их обозначения:

а) $x \geq -8$;

в) $-5 < x < -1$;

д) $-7 < x \leq 2$;

б) $x < 3,8$;

г) $0 \leq x \leq 9,1$;

е) $\frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{2}$.

55

Запишите множество целочисленных решений неравенства:

а) $-8 < x < 1$;

б) $-8 \leq x \leq -1$

в) $0 < x \leq 8,7$;

г) $0 \leq x < 8,7$.

56

Решите неравенство:

а) $0,4x \geq -0,12$;

е) $4x+6(x-1) < 6x+4(2x-3)-8(0,5x+1)$;

б) $-\frac{2}{3}y \leq -\frac{5}{12}$;

ж) $\frac{2}{5}y-(0,8y-7) \geq 2(1,2y-1)-(2,8y+8)$;

в) $-10m+3,2 < -4,8$;

з) $-3a-0,3(a-5)+2 \geq 4,8(a+5)+6,5$;

г) $7a \geq 19a+6$;

и) $\frac{z}{8}-0,3 > 0,5$;

д) $2(3c+2)-4 \leq -5c-6(2c-0,5)$;

к) $-\frac{3s}{4}+3 < -\frac{s}{6}+\frac{2}{3}$.

2

57

Докажите, что высказывания A и B равносильны. Сформулируйте критерий $A \Leftrightarrow B$.

а) A : Две последние цифры натурального числа n образуют двузначное число, делящееся на 25.

B : Натуральное число n делится на 25.

б) A : Натуральное число n чётно.

B : Квадрат натурального числа n делится на 4.

58

Решите уравнение:

а) $3\left(3\frac{5}{6}q - \frac{2}{3}\right) + 7 - 2,5q = 6\left(\frac{3}{4} - q\right);$

е) $|6t - 2,4| = 1,2;$

б) $17 - (2z + 5) - 5z = 19 - 7\left(2\frac{2}{7} - z\right);$

ж) $|5x - 1,2| = -\frac{1}{4};$

в) $63d + 4(0,125 - 15d) = 0,5(1 + 6d);$

з) $|0,8 - 4x| = 0;$

г) $\frac{r - 7,6}{4} = \frac{4,5 + r}{5};$

и) $|2c - 6| = |4 - 3c + 2 - c|;$

д) $(k - 1)^2 + (5 - 2k)^2 - 5(3 + k)(k - 3) = -26;$

к) $-|3x + 6| = -|-7 + 4x + 2|.$

59

Решите уравнение, раскладывая на множители многочлен:

а) $a^3 + 7a^2 - 9a - 63 = 0;$

в) $h^2 - 8h + 12 = 0;$

б) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0;$

г) $c^2 + 9c + 18 = 0.$

60

Решите неравенство:

а) $14x - 7 \leq 0;$

е) $1,3q + 3\left(\frac{2}{3} - 0,6q\right) > 22 + 5(0,02q - 1);$

б) $-5y + 0,25 > 0;$

ж) $5 - \frac{0,75d + 1}{6} < -\frac{d}{8} + 1;$

в) $-2,4b + 3 > 10,2;$

з) $-\frac{a}{5} - 3 < \frac{a}{7} + 6;$

г) $-3 < 6(h - 9) + 27;$

и) $\frac{5 - 2b}{4} > 3b - \frac{9 - b}{6};$

д) $3t - (0,8 - 0,6t) + 1,5(7t - 8) \leq 1,2 - 0,9t;$

к) $\frac{3x + 7}{3} - 12 \geq \frac{2x + 5}{2} - 7.$

с

61*

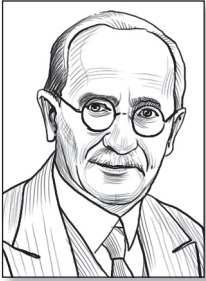
Докажите, что высказывания A и B эквивалентны. Сформулируйте критерий $A \Leftrightarrow B$.

A : Уравнение $ax + by = c$, где a, b, c — целые числа, причём $a \neq 0, b \neq 0$, имеет целочисленные решения x, y .

B : Целое число c делится на наибольший общий делитель чисел $|a|$ и $|b|$, где a, b — целые числа, $a \neq 0, b \neq 0$.

§ 2. Сложные предложения

1.2.1. Сложные высказывания



Логика – это нравственность мысли и речи.

Ян Лукасевич (1878–1956), польский логик,
член Польской академии наук

Умение правильно рассуждать необходимо любому из нас. Мы уже обсуждали, насколько это важно в математике и какие абсурдные выводы могут получаться в случае нарушения логики рассуждений. В этом пункте мы познакомимся с правилами логики, которые нужны каждому для обоснования своей позиции и понимания позиции другого в любой совместной деятельности.

Текст, как математический, так и литературный, обычно состоит из сложных предложений, то есть таких предложений, которые можно разложить на отдельные части. При этом каждая такая часть будет самостоятельным предложением. Например, предложение «Вчера шёл дождь, а сегодня светит солнце» состоит из двух отдельных частей: «Вчера шёл дождь» и «Сегодня светит солнце». Естественно, сложное предложение может состоять и из большего количества частей.

Сложные высказывания получаются из простых высказываний. Мы уже знакомы с некоторыми правилами их построения. Так, мы учились строить отрицание с помощью фразы «Не верно, что...», строить логическое следование, соединяя простые предложения связкой: «Если..., то...». Но можно получить сложное предложение, пользуясь и другими связками, например союзами «и», «или». Использование этих связок в математике несколько отличается от смысла этих оборотов в повседневной жизни. Поэтому нам важно разобраться с правилами, определяющими смысл каждого союза.

Рассмотрим два простых предложения:

«В 8 классе учится Антон»,

«В 8 классе учится Вова».

* * *



Примечание. Для какого-то отдельно взятого 8 класса эти предложения являются высказываниями, так как в этом случае можно однозначно определить, истинны они или ложны. В общем же случае мы имеем дело с предложениями с переменной «8 класс», поскольку в зависимости от того, какой 8 класс выбран, каждое из этих предложений может становиться либо истинным, либо ложным. Мы будем работать с ними как с высказываниями, считая, что речь идет о конкретно выбранном 8 классе.

Из этих высказываний мы можем получить сложное высказывание:

«В 8 классе учатся Антон и Вова».

Это сложное высказывание истинно в том и только в том случае, если в 8 классе учатся два мальчика с указанными именами, то есть если истинны оба исходных простых высказывания. Во всех остальных случаях оно – ложно.

Зафиксируем этот факт в таблице:

A:	B:	A и B:
В 8 классе учится Антон	В 8 классе учится Вова	В 8 классе учатся Антон и Вова
истинно	истинно	истинно
истинно	ложно	ложно
ложно	истинно	ложно
ложно	ложно	ложно

Нетрудно понять, как устроена эта таблица. Даны два предложения, каждое из которых может становиться либо истинным, либо ложным высказыванием. В итоговом столбце (отмеченном цветом) указано, каким – истинным или ложным – является соответствующее сложное высказывание.

Рассмотрим теперь следующее сложное предложение с союзом «или»:

«В 8 классе учится Антон или Вова».

Это сложное высказывание истинно в том и только в том случае, когда хотя бы один из мальчиков с указанным именем учится в 8 классе, то есть если истинно хотя бы одно из исходных высказываний, во всех остальных случаях оно – ложно.

Зафиксируем этот факт в таблице:

A:	B:	A или B:
В 8 классе учится Антон	В 8 классе учится Вова	В 8 классе учится Антон или Вова
истинно	истинно	истинно
истинно	ложно	истинно
ложно	истинно	истинно
ложно	ложно	ложно

В математике у таких сложных высказываний есть специальные названия – *конъюнкция* и *дизъюнкция*.

Определение 1. *Конъюнкцией высказываний A и B* называется высказывание «A и B», которое истинно, когда A и B одновременно истинны, и ложно, когда хотя бы одно из высказываний A и B ложно.

Конъюнкция высказываний A и B обозначается $A \wedge B$.

Для определения истинности (ложности) конъюнкции можно использовать следующий критерий.

Критерий истинности сложного высказывания с союзом «и»

Конъюнкция $A \wedge B$ истинна в том и только в том случае, когда *оба* высказывания A, B истинны.

Определение 2. *Дизъюнкцией высказываний A и B* называется высказывание «A или B», которое истинно, когда хотя бы одно из высказываний A и B истинно, и ложно, когда A и B одновременно ложны.

Дизъюнкция высказываний A и B обозначается $A \vee B$.

Для определения ложности (истинности) дизъюнкции можно использовать следующий критерий.

Критерий ложности сложного высказывания с союзом «или»

Дизъюнкция $A \vee B$ ложна в том и только в случае, когда *оба* высказывания A, B ложны.

Отметим, что логическое «или» несколько отличается от обыденного. В жизни предлог «или» обычно означает, что верно ровно одно из двух высказываний. Например, когда человек говорит: «В выходные я поеду на дачу или в пансионат», то мы понимаем, что он планирует выбрать одно и только одно из этих двух мест отдыха. Логическое же «или» означает, что, кроме этого, могут быть верны оба высказывания одновременно.

* * *

Предложения с переменными при подстановке значений переменных могут, как и высказывания, принимать два значения: «истина» и «ложь». Поэтому к ним применимы все операции логики высказываний: следование, отрицание, конъюнкция и дизъюнкция. При этом все операции сохраняют тот же смысл, что и для обычных высказываний.

Таким образом, из простых предложений с переменными можно строить сложные предложения. Например, из предложений:

$A(m)$: «Натуральное число m чётное»

$B(n)$: «Натуральное число n чётное»

можно составить следующие сложные предложения:

$A \wedge B$: «Натуральное число m чётно *и* натуральное число n чётно»,

$A \vee B$: «Натуральное число m чётно *или* натуральное число n чётно».

Эти предложения можно сформулировать короче:

$A \wedge B$: «Натуральные числа m и n чётны»;

$A \vee B$: «Хотя бы одно из натуральных чисел m или n чётно».

Определение 3. Конъюнкцией двух предложений с переменными $A(n)$ и $B(m)$ называется предложение « $A(n)$ и $B(m)$ », которое принимает значение «истина» при тех и только тех значениях переменных, при которых каждое из предложений принимает значение «истина» и значение «ложь» – во всех остальных случаях.

Попробуйте самостоятельно составить определение для дизъюнкции двух предложений с переменной.

На диаграмме Эйлера–Венна множество истинности конъюнкции $I_{A \wedge B}$ будет изображаться пересечением множеств истинности предложений $A(n)$ и $B(m)$, то есть множеством общих точек множеств I_A и I_B (рис. 3).

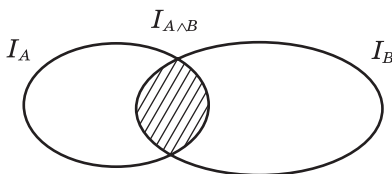


Рис. 3

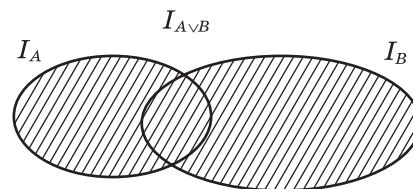


Рис. 4

Множество истинности дизъюнкции $I_{A \vee B}$ будет изображаться *объединением* множеств истинности A и B , то есть множеством точек, принадлежащих *хотя бы одному* из множеств I_A или I_B (рис. 4).

Таким образом, для определения истинности и ложности сложных предложений с переменными можно использовать следующие *критерии*.

Критерий истинности предложений A, B с переменными

Конъюнкция $A \wedge B$ истинна только при таких значениях переменных, при которых *оба* предложения A, B становятся истинными высказываниями.

Дизъюнкция $A \vee B$ ложна только при таких значениях переменных, при которых *оба* предложения A, B становятся ложными высказываниями.

Попробуем построить ещё более сложные предложения – отрицание конъюнкции и дизъюнкции отрицаний. Чтобы нам легче было установить новые логические законы, применим отрицание к рассмотренной выше конъюнкции $A \wedge B$: «Натуральные числа m и n чётны», а затем сравним полученное предложение с дизъюнкцией отрицаний $\bar{A} \vee \bar{B}$.

Составим таблицу.

Формула	Понимание смысла предложения	Окончательная формулировка
$\overline{A \wedge B}$	Неверно, что натуральные числа m и n чётны.	Хотя бы одно из натуральных чисел m или n нечётно.
$\bar{A}$	Неверно, что натуральное число m чётно.	Натуральное число m нечётно.
$\bar{B}$	Неверно, что натуральное число n чётно.	Натуральное число n нечётно.
$\bar{A} \vee \bar{B}$	Натуральное число m нечётно или натуральное число n нечётно.	Хотя бы одно из натуральных чисел m или n нечётно.

Сравним $\overline{A \wedge B}$ и $\bar{A} \vee \bar{B}$. Замечаем, что отрицание конъюнкции предложений A и B *совпало* с дизъюнкцией отрицаний этих предложений: $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$. Этот факт можно доказать в общем виде.

Теорема 1.

Отрицание конъюнкции равносильно дизъюнкции отрицаний:

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}.$$

Доказательство:

Пусть при некоторых значениях переменных предложение $\overline{A \wedge B}$ истинно. Это означает, что на этом множестве предложение $A \wedge B$ ложно или, другими словами, хотя бы одно из предложений A или B ложно. Но тогда хотя бы одно из предложений $\bar{A}$ или $\bar{B}$ истинно, а значит, и $\bar{A} \vee \bar{B}$ истинно.

Пусть теперь при некоторых значениях переменных предложение $\overline{A \wedge B}$, наоборот, ложно. Это означает, что на данном множестве предложение $A \wedge B$ истинно, то есть оба предложения A и B истинны. Но тогда оба предложения $\bar{A}$ и $\bar{B}$ ложны, и поэтому предложение $\bar{A} \vee \bar{B}$ тоже ложно.

Итак, мы получили, что на определённом множестве предложения $\overline{A \wedge B}$ и $\bar{A} \vee \bar{B}$ становятся одновременно истинными или одновременно ложными высказываниями. Значит, $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.

Отрицание дизъюнкции равносильно конъюнкции отрицаний:

$$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}.$$

Докажите это утверждение самостоятельно.

Полученные утверждения называются *формулами де Моргана*. Они верны для любых двух высказываний или предложений с переменными A, B .

Формулы де Моргана

Отрицание конъюнкции равносильно дизъюнкции отрицаний: $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$.

Отрицание дизъюнкции равносильно конъюнкции отрицаний: $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$.



Формулы де Моргана дают нам право в рассуждениях на равносильную замену следующих предложений:

«Неверно, что A и B » $\Leftrightarrow$ «Не A или не B »

«Неверно, что A или B » $\Leftrightarrow$ «Не A и не B »

Удивительным образом эти правила помогают разобраться в чисто практических жизненных ситуациях – при решении различных юридических споров, вопросов о сохранении имущества и др.

Задача 1.

Страховая компания не может заключить договор, если³ клиент не оплатит страховой взнос или не предоставит справку о состоянии здоровья. В каком случае страховая компания заключит договор с клиентом?

Решение:

Запишем данное высказывание в виде: «Клиент не может заключить договор, если будет A ». При этом высказывание A : «Клиент не оплатит страховой взнос или не предоставит справку о состоянии здоровья» можно записать как сложное высказывание вида « B или C », где:

B : «Клиент не оплатит страховой взнос»,

C : «Клиент не предоставит справку о состоянии здоровья».

Значит, компания *не заключит* договор, если будет истинна дизъюнкция $B \vee C$, и, соответственно, *заключит* договор, если будет истинно её отрицание $\overline{B \vee C}$.

Как же можно переформулировать это отрицание, чтобы стало понятно, что должен сделать клиент, чтобы договор был заключен?

По закону де Моргана высказывание $\overline{B \vee C}$ означает то же самое, что и $\bar{B} \wedge \bar{C}$. В свою очередь, $\bar{B} \wedge \bar{C}$ можно сформулировать так: «Клиент оплатит страховой взнос и предоставит справку о состоянии здоровья».

Ответ: чтобы страховая компания заключила договор с клиентом, клиент должен оплатить страховой взнос и предоставить справку.

Полученные правила имеют важное значение. Раз усвоенные, они применяются затем автоматически, освобождая нас от необходимости каждый раз проводить сложные рассуждения.

³ Строго говоря, здесь подразумевается «если и только если».

К

62

Даны высказывания A и B . Объедините их в одно высказывание с помощью союзов «и», «или».

A : сегодня алгебра – первый урок по расписанию;

B : сегодня алгебра – второй урок по расписанию.

Прочитайте в учебнике, как называются полученные сложные высказывания.

Чем отличается смысл логического «или» от обыденного понимания смысла этого союза?

63

Даны высказывания A и B . Сформулируйте их конъюнкцию и дизъюнкцию. Какое из полученных высказываний истинно?

A : неправильная дробь равна единице;

B : неправильная дробь больше единицы.

64

Даны предложения A и B . Сформулируйте высказывание $A \wedge B$ и придайте ему «более красивый» вид.

а) A : целое число n меньше, чем 1;

B : целое число n больше, чем -1 .

б) A : натуральное число n делится на 3;

B : натуральное число n делится на 5.

в) A : натуральное число n нечётно;

B : остаток от деления натурального числа n на 3 равен 1.

г) A : p – простое число;

B : p является факториалом натурального числа.

Образец:

а) A : целое число n меньше, чем 1;

B : целое число n больше, чем -1 .

Решение:

1) Сформулируем $A \wedge B$: «Целое число n меньше, чем 1, и одновременно больше, чем -1 ».

2) Придадим ему «более красивый» вид, для этого сформулируем предложение C , равносильное $A \wedge B$ и не содержащее в своей формулировке союза «и»: «Целое число n равно 0».

3) Докажем, что $A \wedge B \Leftrightarrow C$. По свойству целых чисел между -1 и 1 содержится ровно одно целое число – 0, ч.т.д.

Ответ: целое число равно 0.

65

Даны предложения A и B . Сформулируйте высказывание $A \vee B$ и придайте ему «более красивый» вид.

а) A : остаток от деления натурального числа n на 4 равен 1;

B : остаток от деления натурального числа n на 4 равен 3.

б) A : натуральное число n делится на 3;

B : натуральное число n нечётно.

в) A : натуральное число n чётно;

B : остаток от деления натурального числа n на 5 равен 2.

г) A : сумма чисел x и y равна 0;

B : кубы чисел x и y равны.

Образец:

а) A : остаток от деления натурального числа n на 4 равен 1;

B : остаток от деления натурального числа n на 4 равен 3.

Решение.

1) Сформулируем $A \vee B$: «Остаток от деления натурального числа n на 4 равен 1 или 3».

2) Придадим ему «более красивый» вид, для этого сформулируем предложение C , равносильное $A \vee B$ и не содержащее в своей формулировке союза «или»: «Натуральное число n нечётно».

3) Докажем, что $A \vee B \Leftrightarrow C$. Остаток от деления n на 4 может равняться 0, 1, 2, 3. Если он равен 0 или 2, то n чётно; если он равен 1 или 3, то n нечётно. Поэтому при некотором n предложения C и $A \vee B$ становятся одновременно истинными или одновременно ложными, то есть $A \vee B \Leftrightarrow C$, ч. т. д.

Ответ: натуральное число n нечётно.

66

Даны высказывания:

A : Дробь $7,(9)$ является периодической;

B : Дробь $7,(9)$ является положительной.

1) Постройте конъюнкцию этих высказываний. Постройте отрицание полученного сложного высказывания $A \wedge B$.

2) Постройте отрицание каждого из высказываний. Составьте их дизъюнкцию $A \vee B$.

3) Сравните утверждения, полученные вами. Что вы замечаете? Сформулируйте гипотезу. Сравните её с формулами де Моргана на с. 29.

67

Придумайте свои примеры сложных высказываний со связкой «и» и связкой «или», постройте их отрицания.

π

68 Функция задана формулой. Найдите её область определения:

а) $y = -5x + 4$;

в) $y = 2x^2$;

д) $y = \frac{x}{2}$;

ж) $y = \frac{x-7}{x-8}$;

б) $y = 2$;

г) $y = \frac{2}{x^2}$;

е) $y = \frac{\frac{3}{4}x^3}{x}$;

з) $y = \frac{(x-4,2)x}{(8,3-x)(x+4,2)}$.

69

График прямой пропорциональной зависимости проходит через точку $R(6; -1,5)$:

а) определите коэффициент пропорциональности;

б) постройте график данной функции;

в) принадлежат ли графику точки $S(-18; 74)$, $Q(20; 80)$, $P(0,75; -3)$?

70 Не строя графика функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку M :

а) $f(x) = 3x - 5$, $M(-\frac{2}{3}; -7)$;

в) $f(x) = 20 - \frac{4}{5}x$, $M(25; 0)$;

б) $f(x) = -0,1x - 8$, $M(10; 8)$;

г) $f(x) = 6x$, $M(-1; -6,7)$.

71 Найдите точку пересечения графиков функций:

а) $y = 2x - 2$ и $y = -x - 5$;

б) $y = 0,5x - 1$ и $y = -0,5x - 3$.

72 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } x \geq 1; \\ 3x + 2, & \text{если } x < 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -2x + 15, & \text{если } x \geq 6; \\ 3, & \text{если } 2 \leq x < 6; \\ 5 - x, & \text{если } x < 2. \end{cases}$

73 Постройте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = 0,5x + 2$; б) $f(x) = -3x - 6$; в) $f(x) = |x + 2|$; г) $f(x) = |2x - 6|$.

С помощью графика определите:

а) координаты точек пересечения графика с осями координат Ox и Oy ;

б) при каких значениях аргумента график расположен выше оси Ox ;

в) при каких значениях аргумента график расположен ниже оси Ox .

Д

74 Даны предложения A и B . Сформулируйте высказывание $A \wedge B$ и придайте ему «более красивый» вид.

а) A : число x меньше или равно 3;

B : число x больше или равно 3.

б) A : число x отрицательно;

B : произведение чисел x и y положительно.

в) A : сумма квадратов чисел x и y больше или равна 1;

B : число x больше или равно 1.

г) A : данный четырёхугольник является прямоугольником;

B : данный четырёхугольник является ромбом.

Постройте отрицание одной из составленных вами конъюнкций.

75 Даны предложения A и B . Сформулируйте высказывание $A \vee B$ и придайте ему «более красивый» вид.

а) A : числа x и y положительны;

B : числа x и y отрицательны.

б) A : натуральное число n не делится на 3;

B : натуральное число n не делится на 5.

в) A : число x больше 1;

B : число x меньше 1.

г) A : данный четырёхугольник не является прямоугольником;

B : данный четырёхугольник не является ромбом.

Постройте отрицание одной из составленных вами дизъюнкций.

76 а) Чтобы догнать свою группу, туристу необходимо было пройти по проселочной дороге, а затем подняться в гору. На рис. 1 изображен график его движения. Определите, с какой скоростью турист шел по проселочной дороге, а потом – в гору (ответ дайте в км/ч).

б) Из пункта A вышел пешеход, а через некоторое время вслед за ним выехал велосипедист. На рис. 2 изображены графики их движения. На сколько километров в час скорость велосипедиста больше, чем скорость пешехода? Через сколько минут велосипедист догнал пешехода и на каком расстоянии от пункта A ?

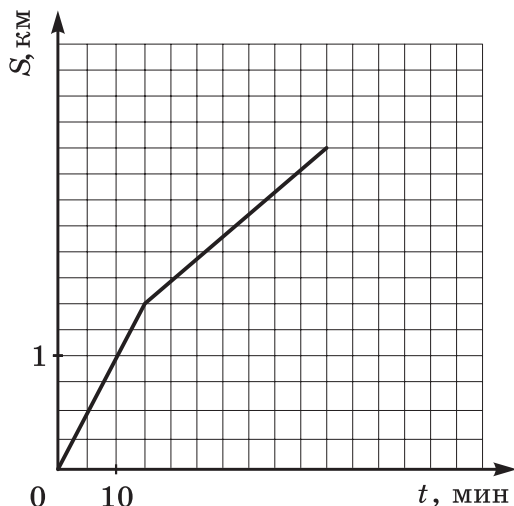


Рис. 1

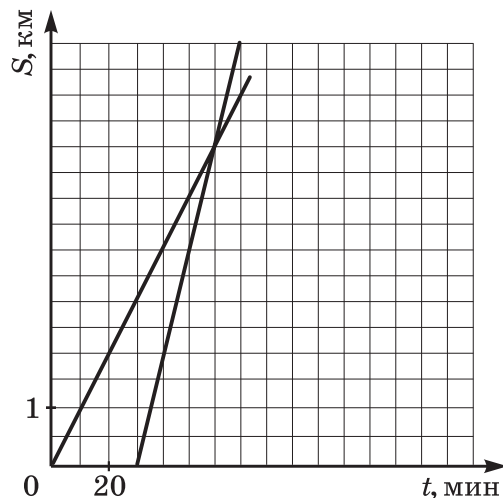


Рис. 2

77

Функция задана формулой. Найдите её область определения:

а) $y = 2,5x$;

в) $y = \frac{1}{2x}$;

д) $y = \frac{x}{x(x-8)}$;

б) $y = x^3 + 1$;

г) $y = \frac{2x-7}{3-1,5x}$;

е) $y = \frac{7}{(3x-4)(0,25x-1)}$.

78

Постройте график кусочно-линейной функции:

$$y = \begin{cases} -x+5, & \text{если } x \geq 6; \\ -1, & \text{если } -3 \leq x < 6; \\ x+2, & \text{если } x < -3. \end{cases}$$

1) вычислите: а) $y = f(0)$;

б) $y = f(-8,2)$;

в) $y = f(6)$;

г) $y = f(8)$;

2) принадлежат ли графику кусочно-линейной функции точки $A(1; 1)$, $B(-10; -8)$, $C(-1; -1)$, $D(-2; -4)$, $F(1; 4)$, $R(15; -10)$.

79

Постройте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = -4x + 4$;

б) $f(x) = 2x + 5$;

в) $f(x) = |x+1|$.

С помощью графика определите:

а) координаты точек пересечения графика с осями координат Ox и Oy ;б) при каких значениях аргумента график расположен выше оси Ox ;в) при каких значениях аргумента график расположен ниже оси Ox .

с

80

* Докажите, что для любых высказываний A и B верны следующие утверждения:

а) $\overline{\overline{A \wedge B}} \Leftrightarrow A \vee \overline{B}$;

в) $\overline{\overline{A \wedge B}} \Leftrightarrow A \vee B$;

б) $\overline{\overline{A \vee B}} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$;

г) $\overline{\overline{A \vee B}} \Leftrightarrow A \wedge B$.

1.2.2.* Законы логики для сложных высказываний



...к области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера, и совершенно несущественно, будут ли это числа, фигуры, звёзды или что-нибудь другое, в чём отыскивается эта мера.

Рене Декарт (1596–1650), французский математик, философ и физик

В этом пункте мы продолжим знакомиться с правилами логики сложных высказываний, которые помогут нам увидеть аналогии исследуемых в математике объектов и ещё раз убедиться в том, эта наука позволяет раскрыть единство законов окружающего нас мира.

Обозначим заведомо истинное высказывание буквой I и заведомо ложное высказывание буквой O . Тогда для любого высказывания A верны утверждения, которые следуют из определений конъюнкции и дизъюнкции:

$$\begin{array}{ll} A \wedge I \Leftrightarrow A; & A \vee O \Leftrightarrow A; \\ A \wedge O \Leftrightarrow O; & A \vee I \Leftrightarrow I. \end{array}$$

Проанализируем формулы с конъюнкцией: конъюнкция с высказыванием I не изменяет значение исходного высказывания A . Для любого высказывания A его конъюнкция с заведомо ложным высказыванием O даёт ложное высказывание, то есть O . Что напоминает нам эта операция? Конечно, умножение чисел на единицу и ноль. При этом заведомо истинное высказывание I играет роль единицы, а заведомо ложное высказывание O играет роль нуля.

Аналогично, формула $A \vee O \Leftrightarrow A$ подсказывает нам аналогию дизъюнкции со сложением с нулём. И хотя полной аналогии здесь нет (второе равенство не даёт аналогию сложения с единицей), тем не менее операцию конъюнкции часто называют «умножением высказываний», а операцию дизъюнкции – «сложением высказываний».

А будут ли логическое сложение и умножение удовлетворять основным законам арифметического сложения и умножения – переместительному, сочетательному, распределительному?

Опираясь на определения конъюнкции и дизъюнкции, можно сделать вывод, что значение конъюнкции или дизъюнкции не зависит от порядка высказываний. Значит, переместительные законы конъюнкции и дизъюнкции работают. Их можно описать следующими формулами:

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A; \quad A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

Для сложных высказываний, состоящих из трёх простых, составим законы, аналогичные сочетательным законам сложения и умножения:

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C); \quad (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

Подобные логические равенства можно доказывать при помощи так называемых *таблиц истинности*.

В таблицах истинности рассматриваются всевозможные комбинации истинности (и) и ложности (л) исходных высказываний и устанавливается истинность или ложность соответствующих сложных высказываний. В нашем случае различных комбинаций значений A , B и C всего восемь. Составим таблицу и проверим, что во всех этих случаях обе части логического равенства одновременно истинны или одновременно ложны.

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
и	и	и	и	и	и	и
и	и	л	и	и	и	и
и	л	и	и	и	и	и
и	л	л	и	и	л	и
л	и	и	и	и	и	и
л	и	л	и	и	и	и
л	л	и	л	и	и	и
л	л	л	л	л	л	л

Мы видим, что высказывания $(A \vee B) \vee C$ и $A \vee (B \vee C)$ при соответствующих значениях исходных высказываний A , B и C одновременно истинны или одновременно ложны. Это дает нам право утверждать, что эти сложные высказывания равносильны (то есть логически эквивалентны). Аналогично можно доказать выполнение сочетательного закона конъюнкции.

Итак, таблицы истинности обладают следующим важным свойством.

Свойство таблиц истинности

Если таблицы истинности различных сложных высказываний, построенных на основе одних и тех же простых высказываний, совпадают во всех возможных комбинациях, то эти сложные высказывания *равносильны*.

Исходя из сочетательных законов логического сложения и умножения, порядок скобок в сложных высказываниях $A \vee (B \vee C)$ и $(A \vee B) \vee C$ не важен. Поэтому их можно опустить и записывать эти высказывания короче: $A \vee B \vee C$ и $A \wedge B \wedge C$.

Составим формулу логического распределительного закона умножения относительно сложения:

$$(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Убедимся в его выполнении с помощью таблицы истинности:

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
и	и	и	и	и	и	и	и
и	и	л	и	л	л	л	л
и	л	и	и	и	и	л	и
и	л	л	и	л	л	л	л
л	и	и	и	и	л	и	и
л	и	л	и	л	л	л	л
л	л	и	л	л	л	л	л
л	л	л	л	л	л	л	л

Из этой таблицы видно, что данные сложные высказывания равносильны. Значит, распределительный закон логического умножения относительно сложения, как и в случае с арифметическими действиями, также верен.

Однако подчеркнём ещё раз, что, несмотря на выявленную аналогию свойств логических и арифметических действий, полного их совпадения нет. Например, с помощью таблиц истинности можно доказать распределительный закон логического сложения относительно умножения:

$$(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Вместе с тем, аналогичный распределительный закон сложения относительно умножения $ab + c = (a + c)(b + c)$, очевидно, не выполняется.

Ещё одним логическим законом, который часто используется для обоснования суждений, является закон де Моргана для трёх и более высказываний:

$$\overline{A \wedge B \wedge C} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}; \quad \overline{A \vee B \vee C} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$$

Доказать его можно, применяя последовательно несколько раз формулы де Моргана для двух высказываний. Например,

$$\overline{A \wedge B \wedge C} \Leftrightarrow \overline{A \wedge (B \wedge C)} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \overline{B \wedge C} \Leftrightarrow \bar{A} \vee (\bar{B} \vee \bar{C}) \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}, \text{ ч. т. д.}$$

Таким образом, логические законы можно доказывать не только с помощью таблиц истинности, но и используя логический вывод.

Законы для сложных высказываний помогают в решении логических задач.

Задача 1.

Три подружки спорили о результатах предстоящего кросса, который должны были бежать мальчики из их класса:

- Вот увидишь, Шурик не будет первым! Первым прибежит Макс.
- Да нет же, победителем будет, как всегда, Шурик. А Андрею и думать нечего о победе!
- Макс не видать первого места, а вот Андрей сейчас в самой хорошей спортивной форме!

По завершении забега оказалось, что каждое из двух предположений двух из девочек подтвердилось, а оба предположения третьей оказались неверными. Кто прибежал первым?

Решение:

Введем обозначения для логических высказываний:

$\overline{Ш}$ – победит Шурик;

$\overline{М}$ – победит Макс;

$\overline{А}$ – победит Андрей;

$\overline{С}$ – Андрей в хорошей спортивной форме.

Тогда высказывания девочек можно записать следующим образом:

1: $\overline{Ш} \wedge \overline{М}$;

2: $\overline{Ш} \wedge \overline{А}$;

3: $\overline{М} \wedge \overline{С}$.

Учитывая то, что предположения двух девочек подтвердились, а предположения третьей неверны, запишем истинное высказывание:

$$\left((\overline{Ш} \wedge M) \wedge (\overline{Ш} \wedge \overline{А}) \wedge (\overline{М} \wedge C) \right) \vee \left((\overline{Ш} \wedge M) \wedge (\overline{Ш} \wedge \overline{А}) \wedge (\overline{М} \wedge C) \right) \vee \left((\overline{Ш} \wedge M) \wedge (\overline{Ш} \wedge \overline{А}) \wedge (\overline{М} \wedge C) \right)$$

Заметим, что

$$(\overline{Ш} \wedge M) \wedge (\overline{Ш} \wedge \overline{А}) \wedge (\overline{М} \wedge C) = O, \text{ так как } \overline{Ш} \wedge Ш = O;$$

$$(\overline{Ш} \wedge M) \wedge (\overline{Ш} \wedge \overline{А}) \wedge (\overline{М} \wedge C) = O, \text{ так как } \overline{М} \wedge M = O;$$

$$\begin{aligned} (\overline{Ш} \wedge M) \wedge (\overline{Ш} \wedge \overline{А}) \wedge (\overline{М} \wedge C) &= (Ш \vee \overline{М}) \wedge (\overline{Ш} \wedge \overline{А}) \wedge (\overline{М} \wedge C) = \\ &= (Ш \wedge Ш \wedge \overline{А} \wedge \overline{М} \wedge C) \vee (\overline{М} \wedge Ш \wedge \overline{А} \wedge \overline{М} \wedge C) = \\ &= (Ш \wedge \overline{А} \wedge \overline{М} \wedge C) \vee (\overline{М} \wedge Ш \wedge \overline{А} \wedge C) = \overline{М} \wedge Ш \wedge \overline{А} \wedge C. \end{aligned}$$



Поэтому исходное высказывание равно $O \vee O \vee \overline{М} \wedge Ш \wedge \overline{А} \wedge C = \overline{М} \wedge Ш \wedge \overline{А} \wedge C$. Значит, победителем забега стал Шурик, несмотря на то что Андрей действительно был в самой лучшей спортивной форме.

Сложные высказывания, полученные, казалось бы, из абстрактных логических рассуждений, оказываются весьма полезны для решения не только математических, но и жизненно важных практических задач.

К

81

1) Из данных утверждений выберите те, смысл которых вам ясен. Как они называются?

а) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$; б) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$; в) $A \wedge I \Leftrightarrow A$; г) $A \vee O \Leftrightarrow A$.

2) Чтобы разобраться со смыслом двух последних записей, действуйте по плану:

1. Узнайте, какие высказывания принято обозначать буквами I и O .
2. Познакомьтесь со способами доказательств равносильности сложных высказываний.
3. Докажите равносильность $A \wedge I$ и A при помощи таблицы истинности.
4. Докажите равносильность $A \vee O$ и A при помощи таблицы истинности.

82

Докажите при помощи таблицы истинности, что для любых трех высказываний A, B, C справедливо утверждение

$$(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C).$$

83

Докажите при помощи таблицы истинности формулу де Моргана для трёх высказываний $\overline{A \wedge B \wedge C} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$.

84

Докажите формулу де Моргана для трех высказываний $\overline{A \vee B \vee C} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$:

- а) при помощи таблицы истинности;
- б) при помощи формул де Моргана для двух высказываний.

85

Составьте таблицу истинности для высказывания:

а) $(\overline{A \wedge B}) \vee (\overline{A} \wedge C)$; б) $(A \vee B) \wedge (\overline{A \vee C})$; в) $(\overline{A \wedge B}) \vee (\overline{A} \wedge C)$.

86

Докажите, что для любых высказываний A, B и C верно утверждение:

а) $\overline{A \wedge B \wedge C} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$; б) $\overline{A \vee B \vee C} \Leftrightarrow A \wedge B \wedge C$; в) $\overline{A \wedge B \wedge C} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$.

π **87** Решите уравнение, содержащее модули:

а) $|a - 2,5| = 5$;

г) $|-11 + 2r| = |r - 3,2|$;

б) $|3n + 7| = -10$;

д) $|2,8d - 16,94| = 0$;

в) $|-7,5m - 2,5| = -10$;

е) $|3x - 2| = |6 - x|$.

88

Решите уравнение, содержащее модули:

а) $\left|\frac{1}{4}t - 3\right| + \left|\frac{1}{2}t + 2\right| = 6$;

б) $|2,5y - 1| - |3 - 1,5y| = 8$;

в) $|a - 5| + |4 + a| = -7$;

г) $2|h - 3| - |4 - h| + |h + 5| = 10$.

89

Решите задачу, используя алгоритм решения линейных уравнений в целых числах.

а) Задумали два натуральных числа. Известно, сумма утроенного первого числа и увеличенного в четыре раза второго числа равна 92. Найдите задуманные числа.

б) Для продажи орехи расфасовали в пакеты либо по 500 г, либо по 250 г. Сколько надо приготовить тех и других пакетов для упаковки 10 кг орехов?

90

Решите неравенство, содержащее модули:

а) $3 \cdot \left|2\frac{2}{3}x + 1\right| \leq 5$;

д) $|k - 16| < |9 - 4k|$;

и) $|s - 3| + |s + 7| \leq -8$;

б) $|2,4b - 0,2| > 5$;

е) $|z + 3| > |z - 5|$;

к) $|q + 16| + |6 - q| < 12$;

в) $|7y - 2| \leq -0,1$;

ж) $|2s - 14| \geq |3s + 6|$;

л) $|4p - 16| - |p + 5| \geq 8$;

г) $|8d - 16| > -1$;

з) $|3m - 5| \leq |2m + 9| + 12$;

м) $|2x - 11| - |13 - x| < -10$.

91

Найдите значения переменной, которые обращают данное предложение в верное высказывание:

а) $|c - 9| - |5 - c| + |2c + 4| < 2$;

б) $|4l - 8| + |5l + 10| - |7l - 21| > 20$.

 $\mathcal{D}$ **92**

Докажите утверждение при помощи таблицы истинности:

а) $A \vee I \Leftrightarrow I$;

б) $A \wedge O \Leftrightarrow O$.

93Докажите при помощи диаграммы Эйлера–Венна формулу де Моргана для трёх высказываний $\overline{A \vee B \vee C} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$.**94**Докажите при помощи таблицы истинности формулу де Моргана для трёх высказываний $\overline{A \wedge B \wedge C} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$.

95 Составьте таблицу истинности для высказывания:

- а) $(\overline{A \vee \overline{B}}) \wedge (\overline{A \vee C})$; в) $(\overline{A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}}) \vee (\overline{A \wedge C})$;
 б) $(\overline{A \wedge B \wedge \overline{C}}) \vee (\overline{A \wedge C})$; г) $(\overline{A \vee \overline{B}}) \wedge (\overline{A \vee \overline{B} \vee C}) \wedge \overline{C}$.

96 Решите уравнение, содержащее модули:

- а) $-|4,5d - 18| = |1,5d - (-9)|$;
 б) $|5t - 6| + |12 - t| = 0$;
 в) $|13s + 1| + |8 - 3s| = -5$;
 г) $|12z - 24| + |7 + z| = 32$;
 д) $|x + 2,3| - |x - 2,7| = 2$;
 е) $|p + 2| + |p - 6| - |12 - p| = -18$.

- 97 а) Задумали два натуральных числа. При этом удвоенное первое число равно разности числа 63 и второго числа, увеличенного в пять раз. Найдите задуманные числа.
 б) Бабушка сварила 20 л варенья. В шкафу у нее есть банки вместимостью 0,5 л и 0,7 л. Сколько банок по 0,5 л и 0,7 л надо подготовить бабушке, если банки должны быть заполнены полностью?

98 Докажите, что число 10 является решением неравенства $|q + 1| > |8 - q| - 4$.

99 Решите неравенство с модулем:

- а) $|q + 4| < 2$;
 б) $|2b - 1| > 3,8$;
 в) $|5h - 3| \leq -10$.

100 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $|6x - 1|$ меньше 13;
 б) значение выражения $|2t + 3|$ больше или равно значению выражения $|14 - t|$;
 в) значение выражения $|8 + p| - |p - 2|$ отрицательно;
 г) значение выражения $|3y + 12| + |6 - 3y|$ положительно;
 д) значение суммы выражений $|a - 13|$ и $|2a + 6|$ неположительно;
 е) значение выражения $|1 + m| - |m + 2| + |m - 4|$ неотрицательно?

C

101* Докажите, что для любых высказываний A , B и C верно утверждение:

- а) $\overline{\overline{A \vee \overline{B} \vee C}} \Leftrightarrow A \wedge B \wedge \overline{C}$;
 б) $\overline{\overline{A \wedge B \wedge \overline{C}}} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B} \vee C$;
 в) $\overline{\overline{A \vee \overline{B} \vee \overline{C}}} \Leftrightarrow A \wedge B \wedge C$.

П

Выполните тест № 1 для самостоятельной проверки знаний.

Задачи для самоконтроля к главе 1

102 Вычислите устно:

а) $\frac{1}{4} : 0,5$	б) $-0,9 : 0,02$	в) $-0,25 + \frac{3}{4}$	г) $3,6 \cdot \frac{1}{4}$
$\cdot (-20)$	$\cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$	$\cdot \left(-2\frac{1}{8}\right)$	$: 1\frac{1}{2}$
$-3\frac{1}{3}$	$-(-\frac{1}{9})$	$+\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{5}$
$: \left(-3\frac{1}{3}\right)$	$: \left(\frac{1}{9}\right)$	$: 2\frac{3}{7}$	$\frac{-0,4^2}{?}$
?	?	?	?

103 Найдите значение выражения:

а) $3 : \frac{9}{16} + \frac{5}{8} : 3 - 3\frac{1}{2} : 3 + 6 : 1\frac{1}{2} + 2\frac{3}{8} : 3\frac{4}{5}$; б) $4\frac{2}{9} \cdot 7\frac{2}{19} : 3\frac{4}{5} \cdot 5,7$.

104 Найдите 20% от значения выражения:

а) $\frac{(8 \cdot 0,5 - 0,2) : 3\frac{4}{5}}{\left(\left(12\frac{2}{5} - 6\right) : \frac{8}{15} - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{1}{83}}$; б) $\frac{\left(13,25 - \frac{5}{8} - 2\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{8}}{\left(1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) : 3\frac{3}{4} + 6\frac{2}{3}}$.

105 Эстафета.

1. Найти значение одночлена $\frac{1}{4}d^4$, если $d = -2$.
2. Вычислить: $\frac{(2^5)^2 \cdot 3^{10}}{6^7}$.
3. Решить уравнение $2^{2n+5} = 512$.
4. Найти коэффициент одночлена: $(5^2)^5 \cdot m \frac{1}{(5^3)^4} \cdot n \cdot \frac{5^3}{5^0} \cdot k$.
5. Вычислить: $\frac{3^{10} \cdot 27}{9^6}$.

106 Возведите в степень:

а) $(a + 2b)^2$; б) $(x^3 - 3y)^2$; в) $(-m - k)^3$; г) $(4 + d^2)^3$.

107 Запишите как многочлен стандартного вида:

а) $3a(a - 4)(a + 4)$; г) $c(c^3 + 3)(3 - c^3)$;
 б) $2x(x^2 - 1)(x^2 + 1)$; д) $(n + 5)(n^2 - 5n + 25)$;
 в) $t(t + 2)(2 - t)$; е) $(2 - a)(a^2 + 2a + 4)$.

108 Запишите как многочлен стандартного вида:

а) $(z + 10)(z - 10)(z^4 + 100z^2 + 10\,000)$;
 б) $(1 + a)(a - 1)(a^4 + a^2 + 1)$.

109 Представьте многочлен в виде куба или квадрата двучлена:

- | | |
|----------------------------|--|
| а) $9x^2 + 6xy + y^2$; | е) $16s^4 + 48s^2 + 36$; |
| б) $9a^2 + 30ab + 25b^2$; | ж) $64 + 48d + 12d^2 + d^3$; |
| в) $x^2 - 4xy + 4y^2$; | з) $216x^3 - 108x^2y + 18xy^2 - y^3$; |
| г) $-24a + 9 + 16a^2$; | и) $(m + 5)(m^2 + 10m + 25)$; |
| д) $k^4 - 2k^2 + 1$; | к) $(mn - 1)(m^2n^2 - 2mn + 1)$. |

110 Разложите многочлен на множители:

- | | |
|-------------------------------|----------------------|
| а) $7x + 7y + 3ax + 3ay$; | г) $25c^2 - 81d^2$; |
| б) $8d^2 - 12d - 8bd + 12b$; | д) $216 + a^3$; |
| в) $121a^2 - 144b^2$; | е) $n^6 - 64$. |

111 Разложите многочлен на множители:

- | | |
|-----------------------|--------------------------------|
| а) $(a - 2)^2 - 25$; | в) $(c^2 + 10c + 25) - 1$; |
| б) $9 - (d + 2)^2$; | г) $(a^2 + a + 0,25) - 2,25$. |

112 Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| а) $c^2 + 10c + 24$; | в) $a^2 + a - 30$; |
| б) $x^2 - 12x + 32$; | г) $y^2 + 13y + 36$. |

113 Решите уравнение, представляя многочлен в виде произведения:

- | | | |
|---------------------------|-----------------------|------------------------------|
| а) $x^2 + 12x + 36 = 0$; | в) $c^2 - 0,16 = 0$; | д) $2x^2 + x - 6x - 3 = 0$; |
| б) $(2x - 1)^2 - 4 = 0$; | г) $6x^2 - 2x = 0$; | е) $3a^2 + 7a + 2 = 0$. |

114 Решите уравнение, выделяя полный квадрат:

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| а) $x^2 - 16x + 64 = 0$; | б) $x^2 - 16x + 63 = 0$; | в) $a^2 + a - 20 = 0$. |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|

115 Решите неравенство:

- | | |
|---------------------------|--|
| а) $0,2x < 5$; | д) $18 - 5x - 10 > 4x + 8 - 9x$; |
| б) $-2x > 0,54$; | е) $4(5a + 7) \leq -18 - 3(3a + 4)$; |
| в) $22y - 0,3 \leq 4,1$; | ж) $-1,7(4 - 10c) - 5,4 \geq 5,3c - 0,7(9c + 6)$; |
| г) $5 \geq -3 - 0,4y$; | з) $2,5d + (-4,1d + 2,9) < 7,2 - 2,7(d + 2)$. |

116 Решите неравенство, содержащее модули:

- | | | |
|--------------------|------------------------|------------------------------|
| а) $ x + 4 < 8$; | б) $ 2x - 5 \geq 3$; | в) $ 5x + 20 > 4x - 12 $. |
|--------------------|------------------------|------------------------------|

117 Постройте график функции:

- | | | | |
|---------------|----------------|-------------------|-------------------|
| а) $y = 2x$; | б) $y = -2x$; | в) $y = 2x + 4$; | г) $y = 2x - 4$. |
|---------------|----------------|-------------------|-------------------|

Проанализируйте формулы. Что в них общего? Какую из них можно считать «лишней» и по какому признаку?

118 Не строя графика функции $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если: а) $k = 3,4$; б) $k = -0,4$.

Задачи для самоконтроля к главе 1

119 На рисунке 1 представлен график линейной функции $y = kx + b$. Какие знаки имеют коэффициенты k и b ?

120 Мобильная компания предлагает на выбор два разных тарифа для оплаты телефонных разговоров: тариф «Выгода» и тариф «Эконом». Для каждого тарифа зависимость стоимости разговора от его продолжительности изображена графически на рисунке 2. Ответьте по рисунку на вопросы:

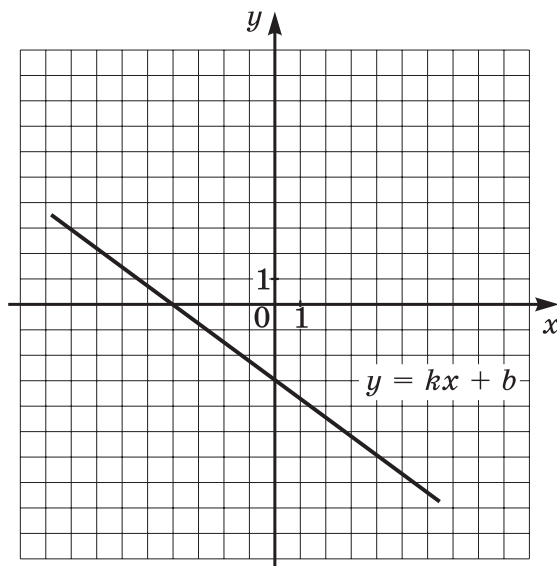


Рис. 1

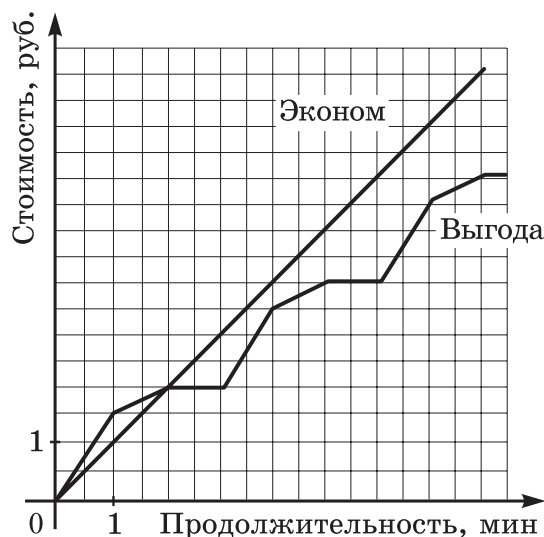


Рис. 2

- 1) Определите, являются ли данные зависимости функциями, и если да, то какими.
- 2) Какой из тарифов предлагает «каждую третью минуту разговора в подарок»?
- 3) Какой из тарифов выгоднее для абонента, который разговаривает менее 2 минут?
- 4) Какой из тарифов выгоднее для абонента, продолжительность разговора которого более 2 минут?
- 5) Сколько длится разговор, стоимость которого одинакова по двум тарифам?
- 6) На сколько минут хватит 4 рублей по тарифу «Выгода», по тарифу «Эконом»?

121 Не строя графика функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точки $A(0; 1)$, $B(-2; 5)$:

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| а) $f(x) = 2x + 1$; | в) $f(x) = -0,5x + 4$; |
| б) $f(x) = -2x + 1$; | г) $f(x) = 3x + 1$. |

122 Постройте график кусочно-линейной функции:

- | | |
|--|---|
| а) $y = \begin{cases} x+2, & \text{если } x \geq 1; \\ 3x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$ | б) $y = \begin{cases} 2x-1, & \text{если } x \geq -2; \\ -x-7, & \text{если } x < -2 \end{cases}$ |
|--|---|

123 а) В школе три восьмых класса. Известно, что в «А» классе учится на 10% больше учеников, чем в «Б» классе, а число учеников «Б» класса относится к числу учеников «В» класса как 3 к 2,8. Сколько учеников в 8 «А», если известно, что число восьмиклассников в этой школе равно 91?

б) Загаданы четыре числа. Известно, что первые три относятся как $3 : 4 : 1$, а четвёртое число на 20% меньше третьего. Найдите произведение этих чисел, если среднее арифметическое этих чисел равно 110.

124

Участники школьной олимпиады по математике среди 8 классов показали следующие результаты:

Участник	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Баллы	15	18	22	31	17	21	35	30	14	17

Найдите размах набора значений, указанных в таблице.

Найдите медиану и моду набора значений, указанных в таблице.

Найдите среднее значение баллов участников олимпиады.

Какое значение приняли бы эти величины, если бы в олимпиаде не принял участие школьник, набравший наименьшее число баллов?

125

Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какое из них верное, а какое – ложно? Ответ обоснуйте.

- а) A : последнюю неделю температура на улице не повышалась выше -10°C ;
 B : лужи на улице покрыты льдом.
- б) A : вчера восьмиклассник Вася заболел ангиной;
 B : сегодня восьмиклассник Вася не пришел в школу.
- в) A : график линейной функции $y = kx + b$ проходит через точки $(1; 3)$ и $(2; 4)$;
 B : $k = 1, b = 2$.
- г) A : a и b – целые ненулевые числа;
 B : ab – целое ненулевое число.
- д) A : a и b – целые ненулевые числа;
 B : $a + b$ – целое ненулевое число.
- е) A : a и b – целые ненулевые числа;
 B : $a - b$ – целое ненулевое число.
- ж) A : a и b – целые ненулевые числа;
 B : $\frac{a}{b}$ – целое ненулевое число.
- з) A : сумма числа a и b кратна 8;
 B : каждое из чисел a и b делится на 8.
- и) A : произведение чисел a и b кратно 18;
 B : число a делится на 6, а число b делится на 3.
- к) A : площадь прямоугольника равна 48 см^2 ;
 B : две из сторон прямоугольника равны 6 см и 8 см.

126

Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какое из них верное, а какое – ложно? Ответ обоснуйте. Из каких предложений можно составить критерий?

- а) a и b – целые числа.
 A : a и b – нечётные;
 B : ab – нечётно.
- б) a и b – целые числа.
 A : a и b – чётные;
 B : ab – нечётно.
- в) a и b – целые числа.
 A : a и b – нечётные;
 B : ab – чётно.
- г) a и b – целые числа.
 A : a и b – чётные;
 B : ab – чётно.

Задачи для самоконтроля к главе 1

- д) a и b – натуральные числа.
 А: a и b – чётные числа;
 В: $a^2 - b^2$ делится на 4.
- ж) a и b – натуральные числа.
 А: a и b делятся на 3;
 В: $a^2 + b^2$ делится на 3.
- и) a и b – натуральные числа.
 А: a и b не делятся на 3;
 В: $ab - 1$ делится на 3.
- л) a и b – натуральные числа.
 А: a и b делятся на 3;
 В: $a + 2b$ делится на 3.
- н) m и n – натуральные числа.
 А: $\text{НОД}(m, n) = n$;
 В: m делятся на n .
- п) m и n – натуральные числа.
 А: $\text{НОК}(m, n) = m$;
 В: m делятся на n .
- с) А: число a больше 1;
 В: квадрат числа a больше единицы.
- у) А: число a – рациональное;
 В: число a представимо в виде конечной десятичной дроби.
- е) a и b – натуральные числа.
 А: a и b – нечётные числа;
 В: $a^2 - b^2$ делится на 4.
- з) n – натуральное число.
 А: n – нечётное число;
 В: $n^3 - n$ делится на 24.
- к) a и b – натуральные числа.
 А: a и b не делятся на 3;
 В: $ab + 1$ делится на 3.
- м) m и n – натуральные числа.
 А: $\text{НОД}(m, n) = 5$;
 В: m и n делятся на 5.
- о) m и n – натуральные числа.
 А: $\text{НОД}(m, n) = 60$;
 В: число 60 делится и на m и на n .
- р) a – положительное число.
 А: число a больше своего квадрата;
 В: число a меньше единицы.
- т) А: число a больше 1;
 В: куб числа a больше единицы.

127

Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какое из них верное, а какое – ложно? Ответ обоснуйте.

- а) a, b, m – натуральные числа.
 А: $a \equiv b \pmod{m}$;
 В: $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$.
- б) А: $|a| + |b| > |a + b|$;
 В: $ab < 0$.
- в) А: $|a| + |b| > |a - b|$;
 В: $ab > 0$.
- г) А: $|a| + |b| = |a + b|$;
 В: $ab > 0$.
- д) А: $|a| + |b| = |a - b|$;
 В: $ab < 0$.
- е) А: $|a| + |b| = |a + b|$;
 В: a и b – неотрицательные числа.



Системы линейных уравнений и неравенств

§ 1. Системы линейных уравнений

2.1.1. Количество решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными



Не представляю себе, как можно довольствоваться знаниями, полученными из вторых рук; хотя чужое знание может нас кое-чему научить, мудр бываешь лишь своей собственной мудростью.

Мишель де Монтень (1533–1592),
французский писатель и философ

При решении задач иногда бывает необходимо уметь определять количество решений системы в ситуации, когда известный способ неудобен или даже неприемлем. Рассмотрим, например, задачу 1.

Задача 1. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 1000x + y = 0,001 \\ x + 0,001y = 1000 \end{cases}$?

Для построения точных графиков уравнений этой системы нам потребовался бы лист бумаги с размерами в несколько десятков километров, что, очевидно, невозможно. В данном пункте мы узнаем, как можно решать подобные задачи, не решая систему.

Рассмотрим вначале случай *ненулевых коэффициентов* в уравнениях системы. Нам нужно, по сути, определить необходимые и достаточные условия, при которых две прямые на плоскости $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$: 1) пересекаются в одной точке; 2) параллельны; 3) совпадают.

Воспользуемся для этого свойствами линейной функции. Запишем уравнения системы в виде, удобном для применения известных нам правил:

$$a_1x + b_1y = c_1 \Leftrightarrow y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \Leftrightarrow y = k_1x + d_1,$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \Leftrightarrow y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \Leftrightarrow y = k_2x + d_2,$$

где $k_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, $k_2 = -\frac{a_2}{b_2}$, $d_1 = \frac{c_1}{b_1}$, $d_2 = \frac{c_2}{b_2}$ ($b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$).

Мы знаем, что прямые $y = k_1x + d_1$ и $y = k_2x + d_2$ пересекаются при $k_1 \neq k_2$, параллельны при $k_1 = k_2$, $d_1 \neq d_2$, совпадают при $k_1 = k_2$ и $d_1 = d_2$. Возвращаясь к системе двух линейных уравнений, данные условия можно записать в виде:

$$k_1 = k_2 \Leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad d_1 = d_2 \Leftrightarrow \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

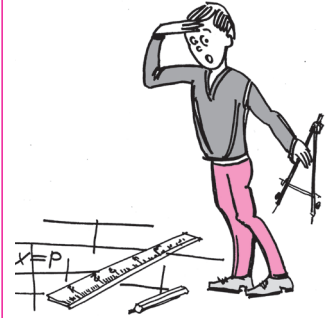


Аналогичные преобразования можно выполнить для неравенств $k_1 \neq k_2$, $d_1 \neq d_2$.

Таким образом, взаимное расположение графиков уравнений $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ определяется пропорциональностью их коэффициентов. Значит, этим же определяется и количество решений системы.

Система двух линейных уравнений с ненулевыми коэффициентами:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

- имеет *единственное* решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,
- *не имеет* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$,
- имеет *бесконечно много* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.



Отсюда мы можем сформулировать общее правило определения количества решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными:

Система двух линейных уравнений с ненулевыми коэффициентами:

- имеет *единственное* решение тогда и только тогда, когда коэффициенты при x не пропорциональны соответствующим коэффициентам при y ;
- *не имеет* решений тогда и только тогда, когда коэффициенты при x и y пропорциональны друг другу, но не пропорциональны свободным членам;
- имеет *бесконечно много* решений тогда и только тогда, когда коэффициенты при x и y пропорциональны друг другу и свободным членам.

Пример 1.

Выяснить количество решений каждой из систем:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 6x - 9y = 10 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 7x - y = -6 \end{cases} \end{array}$$

Решение:

$$\text{а)} \frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{7}{10}.$$

Ответ: система не имеет решений.

$$\text{б)} \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}.$$

Ответ: система имеет бесконечное множество решений.

$$\text{в)} \frac{2}{7} \neq \frac{-3}{-1}.$$

Ответ: система имеет единственное решение.

Теперь мы можем вернуться к задаче 1 о количестве решений системы $\begin{cases} 1000x + y = 0,001 \\ x + 0,001y = 1000 \end{cases}$. Воспользуемся построенным правилом:

$$\frac{1000}{1} = \frac{1}{0,001} \neq \frac{0,001}{1000},$$

следовательно, система не имеет решений.

Ответ: нет решения.

* * *

Теперь найдём условия, определяющие количество решений системы для случая, когда в ней *имеются нулевые коэффициенты при переменной, но в каждом уравнении не более одного*. В этом случае возможно несколько вариантов.

1. В одном из уравнений системы есть нулевой коэффициент, а в другом – нет.

Нулевой коэффициент означает, что график уравнения параллелен одной из осей координат (или совпадает с ней), а отсутствие нулевого коэффициента – что график уравнения не параллелен ни одной из осей. Значит, графики уравнений – это пересекающиеся прямые, и поэтому система уравнений имеет *единственное решение* (рис. 1).

2. Нулевой коэффициент имеется в обоих уравнениях системы, но при разных переменных.

Это означает, что график одного из уравнений параллелен оси x , а график другого – оси y . Следовательно, здесь опять графики уравнений пересекаются, и система уравнений имеет *единственное решение* (рис. 2).

3. Нулевой коэффициент имеется в обоих уравнениях системы при одной и той же переменной.

В этом случае графики обоих уравнений параллельны одной и той же оси координат. Значит, если ненулевые коэффициенты уравнений пропорциональны свободным членам, прямые совпадают и система имеет *бесконечное множество* решений. В противном случае графики уравнений параллельны и система *не имеет* решений (рис. 3).

Разные варианты решения можно проиллюстрировать на рис. 1–3.

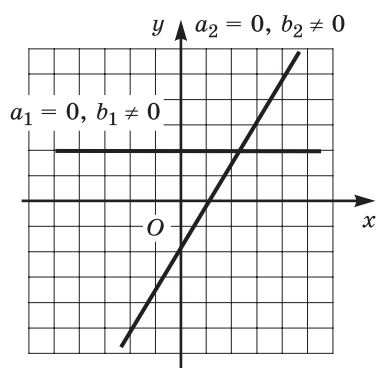


Рис. 1

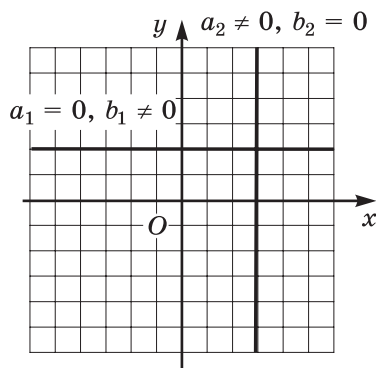


Рис. 2

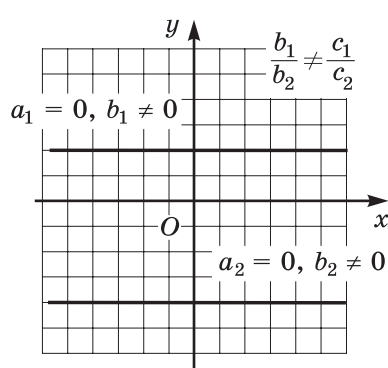


Рис. 3

Итак:

Система двух линейных уравнений, содержащая нулевые коэффициенты при переменных (не более одного в каждом уравнении):

- имеет *единственное* решение тогда и только тогда, когда в ней нет нулевых коэффициентов при одной и той же переменной;
- имеет *бесконечное множество* решений тогда и только тогда, когда в ней есть нулевые коэффициенты при одной и той же переменной, а ненулевые коэффициенты пропорциональны свободным членам;
- *не имеет* решений тогда и только тогда, когда в ней есть нулевые коэффициенты при одной и той же переменной, а ненулевые коэффициенты не пропорциональны свободным членам.

И наконец, если хотя бы одно из уравнений системы содержит нули при обеих переменных, то система может не иметь решений либо иметь бесконечное множество решений (прямая, плоскость).

Попробуйте понять, почему это так, и закончите исследование самостоятельно.

Пример 2.

Выяснить, при каких значениях a система $\begin{cases} ax - y = a \\ -x + ay = -1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

Решение:

Система двух линейных уравнений может иметь бесконечное число решений, если:

- 1) хотя бы одно из её уравнений имеет нули при обеих переменных;
- 2) нулевой коэффициент расположен в каждом уравнении при одной и той же переменной;
- 3) коэффициенты в системе отличны от нуля и пропорциональны.

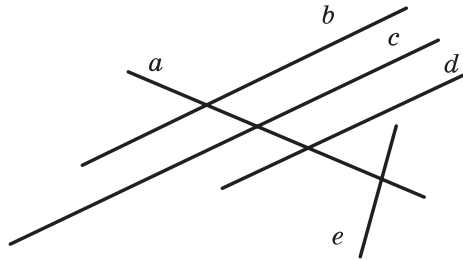
Поскольку первые два условия не выполняются, то нам остаётся рассмотреть третий случай. На математическом языке данное условие можно записать так:

$$\frac{a}{-1} = \frac{-1}{a} = \frac{a}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ 1 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Ответ: система имеет бесконечное множество решений при $a \in \{-1; 1\}$.

К

128 На какие группы можно разбить эти прямые?



Сколько общих точек могут иметь две прямые на плоскости?

129 а) Графики линейных функций $y = 2x + 3$ и $y = kx - 4$ параллельны. Чему равен коэффициент k ?

б) Графики линейных функций $y = 2x + 3$ и $y = kx + b$ совпадают. Каковы значения k и b ?

в) Графики линейных функций $y = -7x + 1$ и $y = kx - 4$ пересекаются. Чему может быть равен коэффициент k ?

130 1) Постройте графики уравнений системы и ответьте, сколько решений имеет система

$$\begin{cases} 4x - y = 4 \\ 12x + y = 6 \end{cases}$$

Можно ли было выяснить, сколько решений имеет система, не решая систему?

2) Вспомните, от чего зависит расположение графиков линейных функций. Как это может помочь определить количество решений системы?

3) Постройте правило определения количества решений систем двух линейных уравнений с двумя переменными и сопоставьте его с правилом на с. 46.

131 Выясните, сколько решений имеют данные системы:

а) $\begin{cases} 4x - 6y = -2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases};$

б) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases};$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = 0,5 \\ -2x + 3y = -\frac{1}{2} \end{cases};$

г) $\begin{cases} 5x - 10y = 2 \\ x - 5y = 1 \end{cases};$

д) $\begin{cases} 3x + 0,75y = 7 \\ 4x + y = 1 \end{cases};$

е) $\begin{cases} -x - 8y = 1 \\ x + 8y = -1 \end{cases}.$

132 Для каждой системы выясните, при каких значениях параметра a она не имеет решений, а при каких имеет бесконечно много решений:

а) $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases};$

б) $\begin{cases} ax + ay = a^2 \\ x + ay = 2 \end{cases};$

в*) $\begin{cases} ax - ay = ab \\ 2ax - y = a \end{cases}.$

π

133 Представьте периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) $0,(4);$

б) $1,(25);$

в) $-0,8(1);$

г) $345,1(76).$

134 Найдите НОК ($a; b$):

а) $a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4, b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5;$

б) $a = 2121; b = 777.$

135 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $\frac{(4a)^{12} \cdot a^{11} \cdot a^{25} \cdot a^{32} \cdot (a^2)^6}{4^{13} \cdot a^{14} \cdot (a^{54} : a^{27}) \cdot a^{23} \cdot a^{26}}$ при $a = 2;$

б) $\frac{5^{49} \cdot (b^{79} : b^{34}) \cdot c^{23} \cdot c^{36} \cdot (bc)^{29}}{b^4 \cdot c^{43} \cdot (c^{29} : c^{17}) \cdot (c^2)^{11} \cdot c^{10} \cdot (5b)^{48} \cdot b^{21}}$ при $b = 5, c = 3.$

Д

136 Выясните, сколько решений имеет система:

а) $\begin{cases} 4x + 12y = 1 \\ 6x + 9y = 1 \end{cases};$

б) $\begin{cases} 6x - 9y = -3 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases};$

в) $\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}.$

137 Выясните, при каких значениях параметра a система не имеет решений, а при каких имеет бесконечно много решений:

$\begin{cases} ax + y = a^3 \\ x + ay = 1 \end{cases}.$

138 Представьте периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

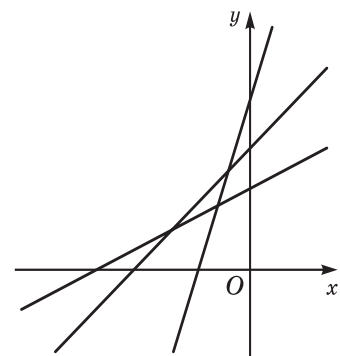
а) $0,(6);$

б) $-1,(15).$

139 Найдите значение выражения $\frac{a^{21} \cdot a^{35} \cdot a^{42} \cdot (a^2)^6 \cdot (3a)^{12}}{3^{10} \cdot a^{24} \cdot (a^{57} : a^{29}) \cdot a^{33} \cdot a^{36}}$ при $a = 9.$

С

140* Графики трёх линейных функций расположены так, как показано на рисунке. Существуют ли такие числа a, b и c , что одна из этих функций задаётся формулой $y = ax + b$, другая – формулой $y = bx + c$, а третья – формулой $y = cx + a$?



141* Для каждой системы выясните, при каких значениях параметров она имеет ровно одно решение, и найдите это решение:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 2 \\ x + 4y = a \end{cases};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + 4y = 2 \\ bx + 4y = 2 \end{cases};$$

$$\text{в) } \begin{cases} ax + by = a \\ (a - 2)x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

2.1.2. Математические модели задач и системы линейных уравнений с двумя переменными



...чистый математик, который забыл бы о существовании внешнего мира, был бы подобен живописцу, умеющему гармонически сочетать цвета и формы, но лишённому натуры, модели — его творческая сила быстро бы иссякла.

Жюль Анри Пуанкаре (1854 – 1912), французский математик, физик, астроном и философ

На уроках при решении практических задач вы часто используете их математические модели. Тем самым вы начинаете осваивать метод моделирования, который в наше время широко применяется в науке и практике. Суть его заключается в том, что человек в своей деятельности часто работает не с реальными объектами, явлениями и процессами, а с их моделями — «заместителями», отражающими все существенные для деятельности стороны этих объектов, но в более простой и удобной для работы форме.

Как вы помните, процесс решения текстовых задач методом моделирования включает в себя три основных этапа:

- I. Построение математической модели задачи.
- II. Работа с математической моделью.
- III. Практический вывод.

На этапе построения математической модели задачи из её условия выводятся соотношения (уравнения, неравенства и др.), которые описывают взаимосвязи между соответствующими величинами. Работа с математической моделью сводится к применению известных способов решения полученных уравнений и неравенств (а если они неизвестны, то к их построению). На третьем этапе полученные результаты соотносятся с условием и вопросом задачи, оцениваются их правдоподобие и соответствие здравому смыслу, фиксируется ответ.

В предыдущих пунктах мы познакомились с системами двух линейных уравнений с двумя переменными. Возникает вопрос: требует ли коррекции описанный выше алгоритм решения задач, если задача сведется к системе уравнений? Для ответа на него попробуем применить этот алгоритм для решения следующей задачи.

Задача 1. Задумано число. Известно, что оно на 36 больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. При делении данного числа на сумму его цифр неполное частное равно 7, а остаток равен 6. Какое число задумали?

Решение:

1. Определим, какие величины известны и какие надо найти.

В задаче известны взаимосвязи между двузначным числом и его цифрами. Требуется найти двузначное число.

2. Проверим соответствие единиц измерения величин.

Все числа записаны в единой системе счисления – десятичной.

3. Выберем неизвестные величины и введём для них буквенные обозначения.

Обозначив неизвестное число буквой, мы не сможем записать взаимосвязь между его цифрами. Поэтому введём буквенные обозначения для цифр задуманного числа. Обозначим x – цифру разряда десятков, y – цифру разряда единиц.

4. Определим множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.

Так как x и y – это цифры двузначного числа, то $x \in \{1; 2; \dots; 9\}$, $y \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$.

5. Установим взаимосвязи между величинами.

1) Задуманное двузначное число можно записать $10x + y$. Число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке: $10y + x$. Первое число на 36 больше второго.

2) Сумма цифр задуманного числа равна $x + y$. При делении $10x + y$ на $x + y$ неполное частное равно 7, а остаток 6.

6. Составим уравнение или неравенство (одно или несколько) и обоснуем их.

Можем составить два уравнения.

1) Чтобы найти большее число, надо к меньшему прибавить разность, значит:

$$10x + y = 10y + x + 36.$$

2) По формуле деления с остатком делимое $10x + y$ равно произведению делителя $(x + y)$ и неполного частного 7 плюс остаток 6, то есть:

$$10x + y = 7(x + y) + 6.$$

Запишем все установленные соотношения и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} 10x + y = 10y + x + 36; \\ 10x + y = 7(x + y) + 6; \\ x \in \{1; 2; \dots; 9\}; \\ y \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}. \end{cases} \rightarrow \boxed{10x + y = ?}$$



7. Найдем все решения, удовлетворяющие построенной модели.

Искомые значения x и y должны удовлетворять каждому из составленных соотношений. Сначала решим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 10x + y = 10y + x + 36 \\ 10x + y = 7(x + y) + 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 9y = 36 \\ 10x + y = 7x + 7y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - 6y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x - 2y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Мы получили значения неизвестных, которые удовлетворяют обоим уравнениям. Осталось проверить соответствие найденных решений остальным соотношениям построенной модели:

$6 \in \{1; 2; \dots 9\}$ (верно),

$2 \in \{0; 1; 2; \dots 9\}$ (верно).

8. Проверим соответствие полученного ответа вопросу задачи.

Найденное решение систем ещё не является ответом к задаче. Определим искомое задуманное число: $10x + y = 10 \cdot 6 + 2 = 62$.

9. Убедимся, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

Полученный ответ 62 является двузначным числом, что соответствует смыслу задачи.

Ответ: задумали число 62.

Таким образом, установленные нами ранее шаги алгоритма решения текстовых задач помогли нам и для решения задачи, сводящейся к решению системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Рассмотрим ещё два примера применения этого алгоритма для решения задач, один из которых – задача, наверняка известная многим с детства.

Пример 1.

Прилетели галки,
Сели на палки.
Если на каждой палке
Сядет по одной галке,
То для одной галки
Не хватит палки.

Если же на каждой палке
Сядет по две галки,
То одна из палок
Останется без галок.
Сколько было галок?
Сколько было палок?

Решение:

Обозначим x – количество галок, а y – количество палок. Понятно, что количество галок и палок может выражаться только натуральными числами, поэтому $x, y \in N$.

Строки «если на каждой палке сядет по одной галке, то для одной галки не хватит палки» означают, что x на 1 больше y .

Чтобы на каждой палке сидело по две галки и при этом «одна из палок будет без галок», количество галок должно быть в два раза больше, чем количество палок, уменьшенное на единицу, то есть x должно быть равно $2(y - 1)$.

Составим математическую модель задачи:

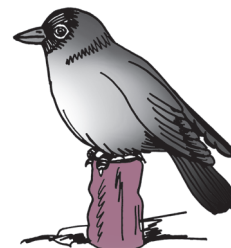
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x = 2(y - 1) \\ x, y \in N \end{cases} \rightarrow \boxed{x - ? \quad y - ?}$$

Чтобы найти решение, удовлетворяющее построенной модели, найдем сначала решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2 - y = 1 \\ x = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4. \end{cases}$$

Полученные значения принадлежат множеству натуральных чисел: $3 \in N, 4 \in N$.

Ответ: было 4 галки и 3 палки.



Пример 2.

После сдачи экзаменов в университет близнецы Саша и Маша трудились в семейном бизнесе. Они заработали деньги, часть которых решили потратить на покупку нового фотоаппарата. Маша предложила купить фотоаппарат за 3380 рублей и согласна вложить в его покупку треть заработанных ею денег, тогда брату придётся добавить половину своего заработка. Саша выбрал более качественный фотоаппарат, который стоит на 850 рублей дороже. Саша высчитал, что в этом случае они с сестрой должны вложить в эту покупку по 50% своих летних заработков. Сколько денег заработала за лето Маша, а сколько – Саша?

Решение:

Сначала согласуем единицы измерения – 3380 рублей составят 3,38 тыс. р.

Пусть Маша заработала за лето x тыс. р., а Саша – y тыс. р. Ясно, что это количество может выражаться только положительным числом, поэтому $x > 0, y > 0$.

При покупке фотоаппарата за 3,38 тыс. р. Маша вложит $\frac{1}{3}x$ тыс. р., а Саша $0,5y$ тыс. р. При покупке более дорогого фотоаппарата Маша вложит $0,5x$ тыс. р., а Саша $0,5y$ тыс. р. По условию, стоимость этого фотоаппарата составит $(3,38 + 0,85)$ тыс. р.

Составим математическую модель задачи:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 0,5y = 3,38 \\ 0,5x + 0,5y = 3,38 + 0,85 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1000x - ? \\ 1000y - ? \end{cases}$$



Решим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{3}x + 0,5y = 3,38 \\ 0,5x + 0,5y = 3,38 + 0,85 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x - \frac{1}{3}x = 3,38 + 0,85 - 3,38 \\ 0,5x + 0,5y = 4,23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6}x = 0,85 \\ x + y = 8,46 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5,1 \\ x + y = 8,46 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5,1 \\ y = 3,36. \end{cases} \end{aligned}$$

Соотнесём полученное решение с остальными соотношениями построенной модели: $5,1 > 0$ (верно); $3,36 > 0$ (верно). Значит, Маша заработала за лето 5100 р., а Саша 3360 р.

Полученные решения соответствуют реальной жизни, так как за лето можно заработать такие деньги.

Ответ: Маша заработала за лето 5100 р., а Саша – 3360 р.

К

142

1) Периметр прямоугольника равен 16 см. Длина одной стороны на 5 см больше другой. Найдите площадь этого прямоугольника.

Переведите задачу на математический язык, составив:

- а) числовое выражение;
- б) уравнение с одной переменной.
- в) систему уравнений с двумя переменными.

2) Решите задачу с помощью последней модели. Потребовалась ли корректировка уже известного вам алгоритма решения задач методом моделирования?

В № 143–151 решите задачу, составив систему уравнений.

- 143** Скорость моторной лодки по течению реки составила 22 км/ч, а против течения – 19 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.
- 144** Сумма двух чисел равна 4. Если из большего числа вычесть меньшее, то получится 1. Найдите эти числа.
- 145** В зоомагазине продают больших и маленьких хомячков. Большой хомячок стоит вдвое дороже маленького. В первый день было продано 5 больших хомячков и 3 маленьких, а во второй – 5 маленьких и 3 больших. При этом в первый день за хомячков заплатили на 200 рублей больше, чем во второй. Сколько стоят хомячки?
- 146** На лужайке росли 35 одуванчиков, некоторые из которых были белыми, а остальные – ещё жёлтыми. После того как 8 белых одуванчиков облетели, а два жёлтых – побелели, жёлтых одуванчиков стало вдвое больше, чем белых. Сколько белых и сколько жёлтых одуванчиков росло на лужайке вначале?
- 147** Коневод продаёт двух коней с седлами, причем цена одного седла 48 000 рублей, а другого – 10 000 рублей. Первый конь с дорогим седлом втрое дороже другого с дешёвым, а второй конь с дорогим седлом вдвое дешевле первого коня с дешёвым. Какова цена каждого коня?
- 148** Одиннадцатикласснику Пете нужно было сдать несколько выпускных экзаменов. Перед последним из них он подсчитал, что для того, чтобы его средний балл за все экзамены стал 95 баллов, ему необходимо набрать ровно 100 баллов на последнем экзамене, а для среднего балла, равного 90, ему достаточно набрать лишь 80 баллов. Сколько всего экзаменов у Пети?
- 149** В трёх ящиках лежат конфеты. В первом ящике на 6 килограмм конфет меньше, чем в двух других вместе. А во втором – на 10 килограмм меньше, чем в двух других вместе. Сколько конфет в третьем ящике?
- 150** Из двух пунктов, расстояние между которыми 90 км, должны выехать навстречу друг другу два велосипедиста. Если второй велосипедист выедет на 1,5 часа позже первого, то он встретит первого велосипедиста через 3 часа после начала своего движения. Если второй велосипедист выедет на 1 час раньше первого, то он встретит первого через 4 часа. С какой скоростью двигался каждый из них?
- 151** Задумано двузначное число. Известно, что число единиц задуманного числа на 3 больше числа его десятков, а частное от деления этого числа на сумму его цифр равно 4. Найдите число, которое было задумано.



152 Какие из чисел 221, 237, 241, 247, 251, 257, 321 являются составными?

153 Найдите значение выражения:

а) $|5| + |-8|$;

б) $|1,45| \cdot |-2|$;

в) $|1,44| : |-12|$;

г) $-|1,5| - \left| -\frac{1}{2} \right|$;

д) $-|6,3| \cdot \left(-\frac{1}{9} \right)$;

е) $-0,72 : |-0,8|$;

ж) $\left| \frac{1}{8} \right| + |-0,125|$;

з) $-|4,44| \cdot |-0,25|$;

и) $|1,11| : |-0,25|$.

154 Решите уравнение устно:

а) $|x| = 3$;

г) $|10x - 8| = 0$;

б) $|-x| = -3$;

д) $|5x| = -15$;

в) $|5x| = 0$;

е) $-|-5x| = 15$.

155 Решите уравнение:

а) $|2x + 4| = 8$;

б) $|4x - 5| = 13$;

в) $|2x + 4| = |x + 2|$;

г) $|3x + 5| = |x - 4|$;

д) $|x + 4| + |x - 3| = 4$;

е) $|x + 1| - |x - 2| = 5$.

Д

В № 156–158 решите задачу, составив систему уравнений.

156 Сумма двух чисел равна 12. Если из утроенного первого числа вычесть удвоенное второе, то получится 1. Найдите эти числа.

157 Несколько пастухов пасли на поле коров. Петя насчитал на поле 54 ноги и 15 голов. Сколько было пастухов и коров?

158 В школе два восьмых класса, и всего в них учится 52 школьника. На экскурсию в музей современного искусства пошли треть учащихся 8 «А» класса и 25% учащихся 8 «Б» класса, а остальные отправились в музей космонавтики. Сколько школьников учится в 8 «Б» классе, если музей космонавтики посетило 37 восьмиклассников из этой школы?

159 Решите уравнение:

а) $|-x + 3| = 2$;

б) $|2x + 8| = |-x + 2|$;

в) $|7 - y| - |2y + 8| = 1$;

г) $|x + 4| + |x - 3| = -4$.

160 Какие из чисел 121, 137, 141, 157 являются составными?

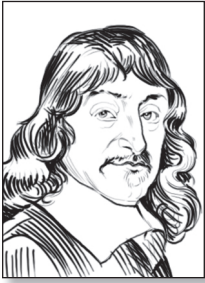
С

161* Продавщица случайно смешала конфеты первого сорта (по 300 рублей за килограмм) и конфеты второго сорта (по 200 рублей за килограмм). По какой цене надо продавать эту смесь, чтобы выручить ту же сумму, если известно, что первоначально общая стоимость всех конфет первого сорта была равна общей стоимости всех конфет второго сорта?



162* Три ковбоя зашли в салун. Один купил 4 сэндвича, чашку кофе и 10 пончиков – всего на 1 доллар 69 центов. Второй купил 3 сэндвича, чашку кофе и 7 пончиков на 1 доллар 26 центов. Сколько заплатил третий ковбой за сэндвич, чашку кофе и пончик?

2.1.3. Системы двух уравнений с модулями



Особенно нравилась математика верностью и очевидностью своих рассуждений.

Рене Декарт (1596–1650),
французский математик, философ, физик

При решении систем линейных уравнений нам уже встречались случаи, когда необходимо исследовать несколько вариантов возможной взаимосвязи между величинами. Особое значение имеют системы уравнений с модулями. В данном пункте мы познакомимся со способами решения систем уравнений с модулями, которые сводятся к решению систем линейных уравнений с двумя переменными.

Рассмотрим решение одной из задач, приводящих к таким системам.

Задача 1. На координатной прямой отметили две точки, расстояние между которыми равно 5. Если координату одной из точек увеличить в 2 раза, а координату другой увеличить в 3 раза, то их сумма составит 10. Какие точки отметили?

Решение:

Обозначим координату первой точки x , а координату второй точки y , где x, y – некоторые числа.

Удвоенное значение координаты одной из точек, например x , можно записать $2x$, тогда утроенное значение координаты другой точки – $3y$. По условию, их сумма равна 10, значит,

$$2x + 3y = 10.$$

Расстояние между точками с координатами x и y можно записать в виде модуля $|x - y|$, значение которого, по условию, равно 5:

$$|x - y| = 5$$

Таким образом, математическая модель нашей задачи имеет вид системы двух уравнений с модулем:

$$\begin{cases} |x - y| = 5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \rightarrow \boxed{x - ? \quad y - ?}$$

Модуль в уравнении $|x - y| = 5$ можно «раскрыть», пользуясь определением модуля числа:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{если } x - y \geq 0 \\ y - x, & \text{если } x - y < 0 \end{cases}$$

Следовательно, уравнение $|x - y| = 5$ при $x - y \geq 0$ записывается в виде $x - y = 5$, а при $x - y < 0$ – в виде $y - x = 5$, и поэтому вместо одной системы уравнений с модулем нам придется рассмотреть две соответствующие системы.

1-й случай.

Если $x - y \geq 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 15 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 25 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

При $x = 5, y = 0$, условие $x - y \geq 0$ выполняется. Значит, найденная пара чисел является решением исходной системы.

2-й случай.

Если $x - y < 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} y - x = 5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2x = 10 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 5 \\ 5y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

При $x = -1, y = 4$, условие $x - y < 0$ также выполняется. Значит, и эта пара чисел является решением исходной системы.

Таким образом, система имеет два решения: $x = 5, y = 0$ и $x = -1, y = 4$.

Ответ: на координатной прямой отметили точки с координатами 0 и 5 или точки с координатами -1 и 4.

Итак, при решении системы с модулем **мы выполнили следующие шаги:**

- 1) «раскрыли» модуль, воспользовавшись определением модуля;
- 2) решили системы, которые получились в обоих случаях;
- 3) проверили для каждой из систем, удовлетворяет ли найденная пара чисел рассматриваемому случаю.

Однако в системе уравнений может оказаться не один, а два, три или более модулей. В этом случае необходимо рассмотреть все возможные варианты раскрытия модулей.

Пример 1.

Решить систему
$$\begin{cases} |x| + 2y = 1,5 \\ 2x - 4|y| = 3 \end{cases}.$$

Решение:

В условии задачи нет ограничений на значения переменных x и y .

По определению модуля числа:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad |y| = \begin{cases} y, & \text{если } y \geq 0 \\ -y, & \text{если } y < 0 \end{cases}$$

Значит, чтобы раскрыть модули, нам надо рассмотреть 4 возможных случая сочетания знаков переменных x и y :

- 1) $x \geq 0, y \geq 0$; 3) $x < 0, y \geq 0$;
- 2) $x \geq 0, y < 0$; 4) $x < 0, y < 0$.

1-й случай.

Если $x \geq 0, y \geq 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} x + 2y = 1,5 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y = 0 \\ x + 2y = 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 0 \end{cases}$$

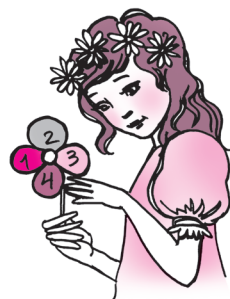
Оба полученных значения переменных удовлетворяют заданным условиям: $1,5 \geq 0, 0 \geq 0$. Значит, найденная пара чисел является решением исходной системы.

2-й случай.

Если $x \geq 0, y < 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} x + 2y = 1,5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1,5 \\ x + 2y = 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 1,5.$$

Получим равносильную систему, уравнения которой совпадают. Значит, исходная система равносильна каждому из данных уравнений. Следовательно, система имеет



бесконечно много решений, где общее решение можно записать в виде: $(1,5 - 2y; y)$, где $y < 0$. Очевидно, что при этом $x = 1,5 - 2y \geq 0$.

3-й случай.

Если $x < 0, y \geq 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} -x + 2y = 1,5 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 3 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y + 2x - 4y = 6 \\ -x + 2y = 1,5 \end{cases}$$

Первое уравнение не имеет решения, т. к. сводится к равенству $0 = 6$, значит, система не имеет решений.

4-й случай.

Если $x < 0, y < 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} -x + 2y = 1,5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 3 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ -x + 2y = 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0,75 \end{cases}$$

Значение x не удовлетворяет заданному условию: неравенство $0 < 0$ ложно. Значит, и в этом случае решений тоже нет.

Обобщая все 4 случая и учитывая, что пара чисел $(1,5; 0)$ имеет вид $(1,5 - 2y; y)$ при $y = 0$, мы можем записать множество решений исходной системы.

Ответ: $(1,5 - 2y; y)$, где $y \leq 0$.

Итак, мы приходим к следующему алгоритму решения систем двух уравнений с двумя переменными с модулем.

Алгоритм решения систем двух уравнений с модулем

1. Найти в уравнениях все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Рассмотреть всевозможные комбинации случаев, когда каждое из этих выражений принимает неотрицательные и отрицательные значения.
3. Для каждого возможного случая «раскрыть» модули, используя определение модуля.
4. Решить все полученные системы.
5. Для каждого случая отобрать те решения системы, которые ему удовлетворяют.

Заметим, что при использовании данного алгоритма нужно внимательно анализировать полученные системы и уравнения, потому что иногда такой анализ позволяет существенно сократить решение. Так, если при рассмотрении случаев 2 и 3 заметить, что коэффициенты при переменных пропорциональны, то ответы можно записать сразу, не выполняя преобразований. А из уравнения $2x - 4|y| = 3$ следует, что $2x = 4|y| + 3 > 0$ (сумма неотрицательного и положительного чисел), поэтому третий и четвёртый случаи невозможны, и их можно было не рассматривать, сделав соответствующую оговорку.

Рассмотрим еще несколько примеров, в которых можно упростить решение системы.

Пример 2.

Решить систему
$$\begin{cases} 8x + 2|y| = 3 \\ 3x - 6|y| = 1 \end{cases}$$

Решение:

Домножим первое уравнение на 3 и прибавим ко второму. Получим уравнение $27x = 10$, не содержащее переменной y . Следовательно, $x = \frac{10}{27}$.

Из первого уравнения $|y| = \frac{3-8x}{2} = \frac{1}{54}$. Значит, либо $y = \frac{1}{54}$, либо $y = -\frac{1}{54}$.

Ответ: $\left(\frac{10}{27}; \frac{1}{54}\right); \left(\frac{10}{27}; -\frac{1}{54}\right)$.

В обоих уравнениях под модулем одна и та же переменная, поэтому мы смогли решить систему методом алгебраического сложения, не раскрывая модулей.

Пример 3.

Решить систему
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ |x| + |y| = -3 \end{cases}$$

Решение:

Можно заметить, что во втором уравнении системы каждое из слагаемых в левой части неотрицательно: $|x| \geq 0$ и $|y| \geq 0$. Поэтому и их сумма тоже неотрицательна, и равенство $|x| + |y| = -3$ не может иметь места. Значит, система не имеет решений.

Ответ: система не имеет решений.

Последние примеры показали, что прежде чем применять построенный нами новый алгоритм, нужно попробовать воспользоваться особенностями конкретной системы и понять, можно ли упростить её решение. В рассмотренных нами примерах при решении систем с модулем мы использовали следующие «хитрые приёмы»:

1. Если в обоих уравнениях системы под модулем стоит одна и та же переменная, то её можно решить методом алгебраического сложения.

2. Можно выявить, что некоторые (или даже все) случаи, которые следует рассматривать для раскрытия модуля, невозможны.



К

163 Решите уравнение $2|x| - 3x = 1$, пользуясь определением модуля.

164 1) Решите систему уравнений, содержащую переменную под знаком модуля:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 2x - 3|y| = -5 \end{cases}$$

2) Подумайте, как свести данную систему к известному случаю.

3) Проанализируйте, как вы решали эту систему, и предложите свой способ решения систем уравнений, содержащих переменную под знаком модуля. Сравните его со способом, предложенным на с. 58 учебника.

165 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2|x| + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 3|y| = 1 \\ 4x + 6y = -5 \end{cases}; \quad \text{в) } \begin{cases} |2x + 3y| = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}; \quad \text{г) } \begin{cases} 2|x + 3y| = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}.$$

166 Чем данные системы отличаются от систем в предыдущем задании? Сколько вариантов раскрытия модулей нужно рассмотреть? Решите системы.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x + 3|y| = 5 \\ 3|x| - 2y = 1 \end{cases}; & \text{б) } \begin{cases} 2|x| + 3|y| = -1 \\ -3x + 2y = -1 \end{cases}; \\ \text{в) } \begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 2|x| + 3|y| = 4 \end{cases}; & \text{г) } \begin{cases} 6|x| - 9|y| = -3 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}. \end{array}$$

167 Чем данные системы отличаются от систем в предыдущем задании? Решите их.

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - 6|y| = -2 \\ 2x - 3|y| = 1 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 4|x| + 12y = 1 \\ 6|x| + 9y = 1 \end{cases}.$$

π 168 Найдите какие-нибудь два идущих подряд натуральных числа, у первого из которых сумма цифр равна 8, а второе – делится на 8.

169 Найдите НОК (a ; b):

$$\begin{array}{ll} \text{а) } a = 18, b = 12; & \text{б) } a = 72, b = 600; \\ \text{в) } a = 250, b = 725; & \text{г) } a = 102, b = 63. \end{array}$$

170 Пусть $A = \{2; 6; 9; 12; 16; 32; 36; 63\}$. В множестве A найдите подмножество B , состоящее из чисел, кратных 6, и подмножество C , состоящее из чисел, кратных 4. Найдите: а) $B \cap C$; б) $B \cup C$.

171 Решите неравенство:

$$\text{а) } 2x + 5 < 0; \quad \text{б) } -4x - 2,4 < 0; \quad \text{в) } 2(x + 4) \leq x - 12; \quad \text{г) } 5y - 4(y + 3) \geq -y + 16.$$

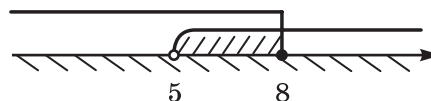
172 Найдите пересечение и объединение указанных числовых промежутков, изобразив их на числовой прямой:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } (2; +\infty) \text{ и } [3; +\infty); & \text{в) } (-\infty; 9) \text{ и } (3; +\infty); & \text{д) } (-\infty; 10] \text{ и } [10; +\infty); \\ \text{б) } (-\infty; -5) \text{ и } (-\infty; -5]; & \text{г) } (-\infty; -3] \text{ и } [-9; +\infty); & \text{е) } (-\infty; 1] \text{ и } (2; +\infty). \end{array}$$

Образец:

$$(-\infty; 8] \cap (5; +\infty) = (5; 8]$$

$$(-\infty; 8] \cup (5; +\infty) = (-\infty; +\infty)$$



Д 173 Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} 9x - 2y = -3 \\ 3x + |y| = 9 \end{cases}; & \text{б) } \begin{cases} 6x + 9y = 3 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}; & \text{в) } \begin{cases} 3x + 10|y| = 19 \\ -4x + 5|y| = -7 \end{cases}. \end{array}$$

174 Решите неравенство:

$$\text{а) } -2x + 5 < 6; \quad \text{б) } 4y - 2,4 > 0; \quad \text{в) } 2(x + 4) \leq 5x - 4(x + 3).$$

175 Найдите пересечение и объединение указанных числовых промежутков, изобразив их на числовой прямой:

$$\text{а) } [4; +\infty) \text{ и } (1; +\infty); \quad \text{б) } (-\infty; 3) \text{ и } (-3; +\infty); \quad \text{в) } (-\infty; 0] \text{ и } [0; +\infty).$$

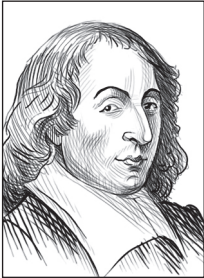
С 176* Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2|x-1| + 3y = 6 \\ x - 3y = -5 \end{cases}; & \text{б) } \begin{cases} 2|x+1| + 3y = 7 \\ 3x - 2|y-3| = -1 \end{cases}; \\ \text{в) } \begin{cases} |2x + 3y + 3| = 2 \\ |3x + 2y - 2| = 1 \end{cases}; & \text{г) } \begin{cases} |2|x-2| + 3|y+1|| = 14 \\ 6x + 9y = 1 \end{cases}. \end{array}$$

177* Зайцы распилили несколько бревен. Они сделали 10 распилов и получили 16 чурбачков. Сколько бревен они распилили?

178* Когда отцу было 27 лет, сыну было только три года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

2.1.4*. Системы линейных уравнений с тремя и более переменными



Наши знания никогда не могут иметь конца именно потому, что предмет познания бесконечен.

Блез Паскаль (1623–1662), французский математик, физик, литератор и философ

При переводе условия задачи на математический язык иногда требуется обозначить буквами не две неизвестные величины, а три и даже более.

Задача.

Половина от суммы первого и второго углов треугольника на 90° меньше третьего угла. Если третий угол треугольника уменьшить в 3 раза, то он станет равен разности между первым и вторым углами. Найти градусные меры углов треугольника.

Решение:

Чтобы нам было проще записать на математическом языке условие задачи, обозначим величины углов треугольника x° , y° и z° . Ясно, что величина угла может принимать только положительные значения, меньшие 180° , поэтому

$$0 < x < 180, 0 < y < 180, 0 < z < 180.$$

Учитывая взаимосвязи, указанные в условии, можем записать два уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x+y) &= z - 90 \\ \frac{z}{3} &= x - y\end{aligned}$$

А из свойства углов треугольника следует третье уравнение: $x + y + z = 180$.

Запишем все установленные соотношения и зафиксируем искомые величины:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y) = z - 90 \\ \frac{z}{3} = x - y \\ x + y + z = 180 \\ 0 < x < 180, 0 < y < 180, 0 < z < 180. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - ? \\ y - ? \\ z - ? \end{cases}$$

Мы получили *систему из трёх уравнений* с тремя переменными. Упростим её, приведя к целым коэффициентам:

$$\begin{cases} x + y = 2z - 180 \\ z = 3x - 3y \\ x + y + z = 180. \end{cases}$$

Сведём её к системе с двумя переменными, которую мы уже умеем решать. Для этого подставим выражение для z из второго уравнения в остальные уравнения системы.

Теперь мы работаем только с первым и третьим уравнениями системы как с системой двух линейных уравнений с двумя переменными. Для удобства поменяем места второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} x+y=2(3x-3y)-180 \\ x+y+3x-3y=180 \\ z=3x-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-7y=180 \\ 4x-2y=180 \\ z=3x-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-7(2x-90)=180 \\ y=2x-90 \\ z=3x-3y \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -9x=-450 \\ y=2x-90 \\ z=3x-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=10 \\ z=3x-3y. \end{cases}$$

Наконец, подставив найденные выражения для x и y в третье уравнение, получим, что $z = 120$, и при этом $0 < 50 < 180$, $0 < 10 < 180$, $0 < 120 < 180$.

Ответ: $50^\circ, 10^\circ, 120^\circ$.

Итак, при решении задачи мы получили *систему из трех линейных уравнений с тремя переменными*. Для её решения мы использовали способ подстановки, после чего получили в системе *два уравнения с двумя переменными*. Из них мы нашли значения этих переменных уже известным нам способом и подставили их в третье уравнение. В результате мы нашли тройку чисел, которая удовлетворяет всем трём уравнениям сразу.

При решении задач могут получаться системы уравнений с большим количеством переменных, их решение осуществляется аналогичным образом.

Пример 1.

Решить систему
$$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x-2y-z=1 \\ 5x-6y+z=1 \end{cases}.$$

Решение:

Выразим x из первого уравнения: $x = 2y - 3z + 3$.

Подставим найденное выражение для x в остальные уравнения и выполним равносильные преобразования:

$$\begin{cases} x=2y-3z+3 \\ 2(2y-3z+3)-2y-z=1 \\ 5(2y-3z+3)-6y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3z+3 \\ 2y-7z=-5 \\ 4y-14z=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3z+3 \\ y=\frac{7z-5}{2} \\ 4 \cdot \frac{7z-5}{2} - 14z = -14. \end{cases}$$

Третье уравнение преобразуется к равенству $0 = -4$, поэтому система не имеет решений.

Ответ: система не имеет решений.

Заметим, что мы могли решить данную систему, используя другой известный нам способ – способ алгебраического сложения.

Анализируя уравнения, мы видим, что, вычитая первое уравнение из второго, мы «избавляемся» от y во втором уравнении. Аналогичным образом мы можем

избавиться от y в третьем уравнении, домножив первое уравнение на 3 и вычитая его из третьего уравнения. Таким образом, мы получаем цепочку равносильных преобразований:

$$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x-2y-z=1 \\ 5x-6y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-4z=-2 \\ 5x-6y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-4z=-2 \\ 5x-6y+z-3(x-2y+3z)=1-3\cdot 3 \end{cases}$$

Приведём в полученной системе подобные слагаемые и используем метод алгебраического сложения для второго и третьего уравнений:

$$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-4z=-2 \\ 2x-8z=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-4z=-2 \\ x-4z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-4z=-2 \\ x-4z-(x-4z)=-2-(-4) \end{cases}$$

Третье уравнение преобразуется к равенству $0 = 2$. Значит, не имеет решений и вся система.

Ответ: система не имеет решений.

Итак, исходя из заданных коэффициентов, мы выбрали, какую из переменных удобнее убирать из уравнений системы. Затем домножали одно из уравнений и выполняли его алгебраическое сложение с остальными уравнениями. Таким образом, мы получили в системе два уравнения с двумя переменными, которые мы уже умеем решать.

Данный приём алгебраического сложения можно применить и для систем из k линейных уравнений с n переменными.

Пример 2.

Решить систему
$$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-3y+4z=6 \\ 3x-4y+5z=7 \end{cases}.$$

Решение:

Применим метод алгебраического сложения:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-3y+4z=6 \\ 3x-4y+5z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-3y+4z-2(x-2y+3z)=6-2\cdot 5 \\ 3x-4y+5z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \\ 3x-4y+5z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \\ 3x-4y+5z-3(x-2y+3z)=7-3\cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \\ 2y-4z=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \\ 2y-4z-2(y-2z)=-8-2\cdot(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \\ 2y-4z-2y+4z=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Третье уравнение преобразуется к равенству $0 = 0$, которое справедливо при любых x , y и z . Таким образом, система равносильна системе из двух уравнений
$$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \end{cases}.$$

Значит, данная система имеет бесконечно много решений, поскольку для каждого z можно найти такие x и y , чтобы все уравнения системы обращались в верные равенства.

Выразим через z из первых двух уравнений значения x и y и запишем ответ.

Ответ: система имеет бесконечно много решений $(z - 3; 2z - 4; z)$, z – любое число.

Мы разобрали случаи, в которых система трех линейных уравнений с тремя переменными:

- 1) имеет единственное решение;
- 2) не имеет решений;
- 3) имеет бесконечно много решений.

Примем без доказательства, что этим исчерпываются все возможные варианты решения систем из n линейных уравнений с n переменными.

Можно доказать, что

Система из n линейных уравнений с n переменными либо имеет единственное решение, либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

В разобранных нами примерах мы уже сталкивались с системами, в которых количество уравнений было меньше, чем количество переменных. Такие системы либо не имеют решений, либо имеют бесконечно много решений.

Можно доказать, что

Система из k линейных уравнений с n переменными при $k < n$ либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

Доказательство этого свойства мы также проводить не будем.

Пример 3.

Решить систему
$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + 8y + z = 7 \end{cases}.$$

Решение:

Выразим x из первого уравнения, подставим его во второе уравнение и приведём подобные слагаемые. А затем выразим y из второго уравнения:

$$\begin{cases} x = -3y + z + 2 \\ 2(-3y + z + 2) + 8y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + z + 2 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + z + 2 \\ y = \frac{3 - 3z}{2} \end{cases}$$

Полученная система имеет бесконечно много решений, поскольку для каждого z можно найти такие x и y , чтобы все уравнения системы обращались в верные равенства. Действительно, $y = \frac{3 - 3z}{2}$, а $x = -3y + z + 2 = -3 \cdot \frac{3 - 3z}{2} + z + 2 = \frac{11z - 5}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{11z - 5}{2}; \frac{3 - 3z}{2}; z \right)$, z – любое число.

Пример 4.

Решить систему
$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 4y + 2z = 6 \end{cases}.$$

Решение:

Домножим первое уравнение на 2 и вычтем из второго, а затем приведём подобные слагаемые:

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+4y+2z-2(x+2y+z)=6-2\cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+4y+2z-2x-4y-2z=-4 \end{cases}$$

В полученной равносильной системе второе уравнение не имеет решения. Следовательно, не имеет решений и вся система.

Ответ: система не имеет решений.

К

179

1) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+2z=9 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$$

2) Подумайте, можно ли использовать идеи известных вам способов решения систем линейных уравнений с двумя переменными для этой системы.

3) Проанализируйте, как вы решали эту систему, и предложите свои алгоритмы решения систем уравнений из трех линейных уравнений с тремя переменными.

180

Решите систему способом подстановки и способом алгебраического сложения:

а)
$$\begin{cases} x+2y+3z=-4 \\ 2x+3y+4z=1 \\ x+y+z=5 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} -3x+10y-10z=1 \\ -7x+4y-4z=1 \\ -2x-3y+3z=1 \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

181

Решите систему в зависимости от параметра a :

а)
$$\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x+2y+2z=a \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 3x-2y+z=2 \\ x-y+z=a \end{cases}$$

π

182

Отцу, сыну и деду вместе 105 лет. Отцу и сыну вместе 45 лет, а деду и внуку вместе 70 лет. Сколько лет каждому из них?

183

Вычислите:

$$\frac{(9^{15} : 3^{28}) \cdot 2^{43} \cdot 17^{34} \cdot (17^3)^{10} \cdot \left(\frac{6^{48}}{6^{15}}\right)}{34^{35} \cdot (17^{63} : 17^{34}) \cdot 2^{39} \cdot 3^{34}}.$$

184 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $3xy(4x^2 - 6xy + 2y^2) - 2xy(5x^2 - 7xy + 2y^2)$ при $x = 2, y = -1$;

б) $p^2q^2(3p^3 - 2p^2 - 2pq - 3) - 3p^2q(2p^3q - 5p^2q - 4pq^2 - 7q)$ при $p = q = 1$.

Д

185 Решите систему способом подстановки. Выполните проверку полученного результата, решив систему способом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} x - 3y - z = -4 \\ -2x + 7y + 2z = 10 \\ 3x + 2y - 4z = 9. \end{cases}$$

186 Вычислите:

$$\frac{2^{16} \cdot 14^{23} \cdot 5^{35} \cdot (2^5)^3 \cdot (7^{36} : 7^{13})}{10^{24} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{18} \cdot 35^{28} \cdot 2^{29}}.$$

187 Найдите пересечение указанных числовых промежутков:

а) $[6; +\infty)$ и $(-1; +\infty)$;

б) $(-\infty; -5)$ и $(-3; +\infty)$;

в) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ и $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

188 Найдите объединение указанных числовых промежутков:

а) $(-\infty; -3)$ и $(-5; +\infty)$;

б) $(-\infty; -5)$ и $(-3; +\infty)$;

в) $(-\infty; -3)$ и $[-3; 5)$;

г) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ и $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

д) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

е) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), \left[-\frac{1}{2}; 2\right)$ и $(2; +\infty)$.

Ответ запишите в возможно более короткой форме.

С

189* Число состоит из 2013 единиц. Какой у него остаток при делении на 11?

190* Вычислите произведение:

$$(100 - 1^2)(100 - 2^2)(100 - 3^2) \dots (100 - 25^2).$$

191* Найдите все пары целых чисел m и n таких, что $4m + 5n = mn - 9$.

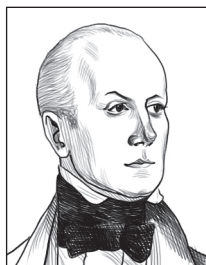
192* Найдите наибольший общий делитель чисел $7^{2011} - 1$ и $7^{1993} - 1$.

П

Выполните тест № 2 для самостоятельной проверки знаний.

§2. Системы и совокупности линейных неравенств

2.2.1. Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной



...каждая математическая теорема осуществляется где-нибудь в природе, в какой-либо комбинации молекул или элементов. Математика кажется нам отвлечённой только потому, что мы не замечаем применения её принципов в природе.

Петр Яковлевич Чаадаев (1794–1856),
русский философ, публицист

В седьмом классе мы научились решать линейные неравенства и записывать их решение с помощью числовых промежутков. Однако при решении некоторых практических задач приходится составлять не одно, а несколько неравенств.

Рассмотрим решение следующей задачи.

Задача.

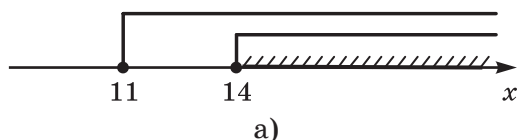
В аквапарке на горке «Горная речка» разрешено кататься всем детям начиная с 11 лет. А на горку «Для смельчаков» дети младше 14 лет не допускаются. Дети какого возраста могли прокатиться с каждой из этих горок? Хотя бы с одной из них?

Решение:

Пусть искомым возраст детей – x лет. Тогда условие допуска на горку «Для смельчаков» можно записать в виде неравенства $x \geq 14$, а условие допуска на горку «Горная речка» – в виде неравенства $x \geq 11$.

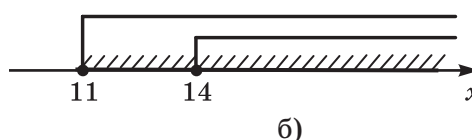
Изобразим числовые промежутки, соответствующие данным неравенствам, используя упрощённую числовую прямую (рис. 1). Тогда возраст детей, которых пропустят на обе горки, следует искать на *пересечении* отмеченных промежутков (рис. 1а), а возраст детей, которых пропустят хотя бы на одну горку, – на *объединении* этих промежутков (рис. 1б).

а) $[11; +\infty) \cap [14; +\infty) = [14; +\infty)$



а)

б) $[11; +\infty) \cup [14; +\infty) = [11; +\infty)$



б)

Рис. 1

Ответ: с каждой из этих горок могли прокатиться дети начиная с 14 лет, а хотя бы с одной из них – начиная с 11 лет.

Если требуется найти значения переменных, которые удовлетворяют *сразу нескольким* неравенствам, то эти неравенства называют **системой неравенств** и записывают с помощью фигурной скобки. Если же требуется найти значения переменных, которые удовлетворяют *хотя бы одному из нескольких* неравенств, то эти неравенства называют **совокупностью неравенств** и записывают с помощью квадратной скобки.

Таким образом, для ответа на первый вопрос задачи мы фактически решали *систему неравенств*: $\begin{cases} x \geq 14 \\ x \geq 11 \end{cases}$, а для ответа на второй вопрос – *совокупность неравенств*: $\begin{cases} x \geq 14 \\ x \geq 11 \end{cases}$.

В данном пункте мы познакомимся с решением систем и совокупностей линейных неравенств с одной переменной.

Напомним, что **линейным неравенством с одной переменной x** называется неравенство, которое может быть представлено в одном из четырёх видов:

$$kx + b > 0; \quad kx + b < 0; \quad kx + b \geq 0; \quad kx + b \leq 0.$$

Как мы знаем, решением линейного неравенства с одной переменной может быть один из числовых промежутков:

открытый луч: $(a; +\infty); (-\infty; a);$

замкнутый луч: $[a; +\infty); (-\infty; a];$

вся числовая прямая: $(-\infty; +\infty);$

пустое множество: $\emptyset.$

В систему и совокупность линейных неравенств с одной переменной x могут входить два, три или более неравенств.

Из определения системы неравенств следует, что множеством её решений является *пересечение* множеств решений неравенств, входящих в систему. Легко доказать, что это может быть либо промежуток, либо единственная точка, либо пустое множество, например:

$$(-\infty; 3] \cap (2; +\infty) = (2; 3], \quad (-\infty; 3] \cap [3; +\infty) = \{3\}, \quad (-\infty; 3] \cap [5; +\infty) = \emptyset.$$

Аналогично из определения совокупности неравенств следует, что множеством её решений является *объединение* множеств решений неравенств, входящих в совокупность. Результатом здесь может быть либо промежуток, либо пустое множество, либо объединение промежутков, поскольку, например, множество $(-2; 3] \cup [5; +\infty)$ не является промежутком, и никакой другой более простой записи для этого множества придумать нельзя.

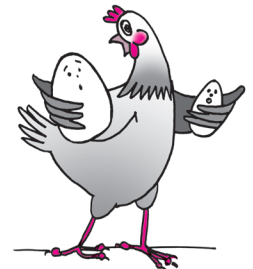
Сначала разберёмся с тем, как решать *системы* неравенств. Для этого решим, например, систему

$$\begin{cases} -2x + 4 < 0 \\ 3x - 5 > 0 \\ 2x - 7 \leq 0 \end{cases},$$

после чего установим, с помощью каких шагов можно решить любую другую систему неравенств.

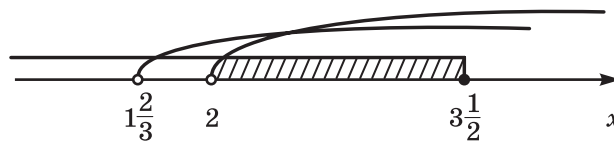
Заменим каждое из неравенств системы на более простое с помощью равносильных преобразований. Получим системы, равносильные исходной.

$$\begin{cases} -2x + 4 < 0 \\ 3x - 5 > 0 \\ 2x - 7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x < -4 \\ 3x > 5 \\ 2x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 1\frac{2}{3} \\ x \leq 3\frac{1}{2} \end{cases}$$



Решением первого неравенства полученной системы является промежуток $(2; +\infty)$, второго – промежуток $\left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$, а третьего – промежуток $\left(-\infty; 3\frac{1}{2}\right]$.

Чтобы найти их пересечение, воспользуемся числовой прямой:



По схеме видно, что их пересечением является промежуток $\left(2; 3\frac{1}{2}\right]$.

При решении системы линейных неравенств мы использовали следующее **равносильное преобразование систем неравенств** – заменили одно из неравенств системы на равносильное ему неравенство.

Заметим, что в отличие от систем уравнений приём сложения неравенств одного знака при решении систем линейных неравенств не даёт возможности решить систему.

Так, например, сложение неравенств системы $\begin{cases} 3x - 5 > 0 \\ 5x - 3 > 0 \end{cases}$ даёт неравенство $8x - 8 > 0$, решение $x \in (1; +\infty)$ которого содержит значения переменной, не удовлетворяющие первому из неравенств системы.

Можем записать следующий алгоритм **решения систем неравенств**.

Алгоритм решения систем линейных неравенств

1. Найти решение каждого из неравенств системы.
2. Изобразить найденные промежутки на числовой прямой.
3. Найти на числовой прямой пересечение промежутков (отметить общую часть изображенных промежутков).
4. Записать в ответ полученное множество.

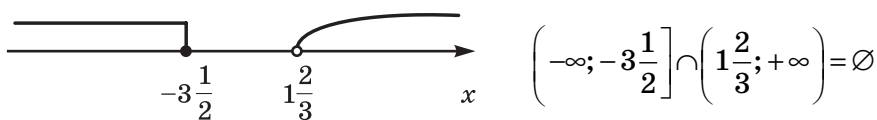
Пример 1.

Решить $\begin{cases} 3x - 5 > 0 \\ 2x + 7 \leq 0 \end{cases}$.

Решение:

Решением первого неравенства является луч $\left(1\frac{1}{2}; +\infty\right)$, второго – луч $\left(-\infty; -3\frac{1}{2}\right]$, а их пересечением является пустое множество.

Изобразим решение на числовой прямой и запишем его на математическом языке:



Ответ: $\emptyset$.

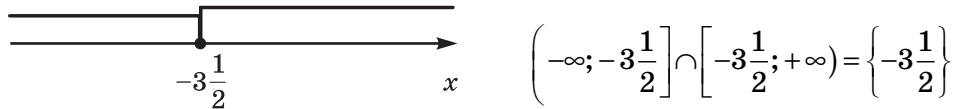
Пример 2.

Решить $\begin{cases} 6x + 21 \geq 0 \\ 2x + 7 \leq 0 \end{cases}$.

Решение:

Решением первого неравенства является луч $\left[-3\frac{1}{2}; +\infty\right)$, второго – луч $\left(-\infty; -3\frac{1}{2}\right]$, а их пересечением является точка $\left\{-3\frac{1}{2}\right\}$.

Изобразим решение на числовой прямой и запишем его на математическом языке:



Ответ: $\left\{-3\frac{1}{2}\right\}$.

Теперь разберёмся с тем, как решать *совокупности* неравенств. Из определения совокупности неравенств следует, что мы должны выполнять те же шаги, что и при решении систем неравенств, кроме одного: по схеме следует искать не пересечение промежутков, а их объединение.

Таким образом, мы можем записать следующий алгоритм *решения совокупности неравенств*.

Алгоритм решения совокупности линейных неравенств

1. Найти решение каждого из неравенств системы.
2. Изобразить полученные промежутки на числовой прямой.
3. Найти на числовой прямой объединение промежутков (отметить все точки изображённых промежутков).
4. Записать в ответ полученное множество.

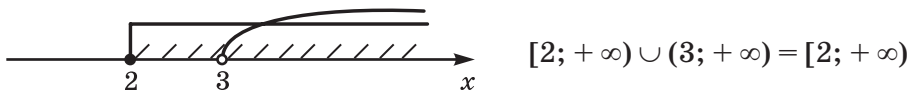
Пример 3.

Решить
$$\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ 6 - 2x < 0 \end{cases}.$$

Решение:

Заменим каждое из неравенств совокупности на более простое с помощью равносильных преобразований. Получим совокупность неравенств $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 3 \end{cases}$, равносильную исходной.

Изобразим промежутки $[2; +\infty)$ и $(3; +\infty)$ на одной схеме. Их объединением является первый из этих промежутков.



Ответ: $[2; +\infty)$.

* * *

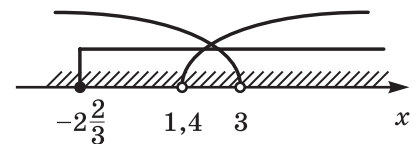
Пример 4.

Решить
$$\begin{cases} 7 - 5x < 0 \\ 8 + 3x \geq 0 \\ 2x - 4 \leq 2 \end{cases}.$$

Решение:

Множествами решений трех неравенств совокупности являются соответственно промежутки $(1, 4; +\infty)$, $\left[-2\frac{2}{3}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 3)$. Их объединением является вся числовая прямая.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.



Пример 5*.

Решить систему
$$\begin{cases} 7x - 20 > 0 \\ 0,3x + 2 \geq 0 \\ 6x - 11 < 0 \\ 0,5x - 1 \leq 0 \\ 3x - 6 \geq 0 \end{cases}.$$

Решение:

1. Множествами решений двух неравенств первой совокупности являются промежутки $\left(2\frac{6}{7}; +\infty\right)$ и $\left[-6\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Их объединением является второй промежуток $\left[-6\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

2. Аналогично решением второй совокупности является промежуток $(-\infty; 2]$.

3. Наконец, множеством решений неравенства $3x - 6 \geq 0$ является промежуток $[2; +\infty)$, который выделен пунктирной прямоугольной скобкой.

4. Пересечением трёх полученных множеств является множество, состоящее из единственной точки $x = 2$:

$$\left[-6\frac{2}{3}; +\infty\right) \cap (-\infty; 2] \cap [2; +\infty) = \{2\}.$$

Ответ: $\{2\}$.

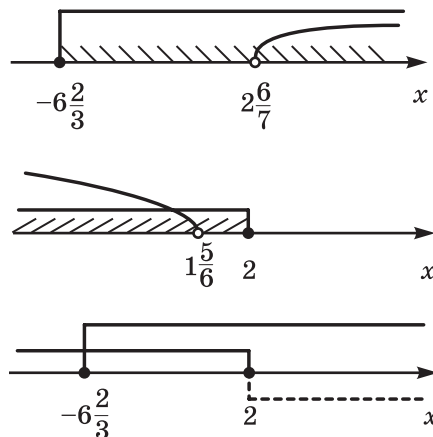
Замечание.

Решение данной системы можно найти быстрее, если заметить, что вторая совокупность и последнее неравенство имеют единственное общее решение $x = 2$:

$$(-\infty; 2] \cap [2; +\infty) = \{2\}.$$

Значит, $x = 2$ — это единственный возможный вариант решения и всей системы. Поэтому мы можем получить ответ, не решая первую совокупность, а лишь проверив, удовлетворяет ли ей число 2.

Таким образом, при решении подобных конструкций из систем и совокупностей бывает полезным рассматривать промежуточные пересечения или объединения множеств.



К

193

Решите неравенства $3x - 12 \geq 0$ и $-4x + 28 > 0$. Из множества $A = \{3; 4; 5; 6; 7\}$ выпишите числа, которые:

- принадлежат сразу обоим множествам решений этих неравенств;
- принадлежат хотя бы одному из множеств решений этих неравенств.

Как иначе можно сформулировать эти задания?

194

Мама попросила Сашу потратить на покупку его нового велосипеда не более 3000 рублей, а папа сказал, что хороший велосипед не может стоить меньше 2000 рублей. Запишите просьбу мамы и папы на математическом языке. Выясните, какой из велосипедов стоимостью 3200 рублей; 2300 рублей; 1300 рублей удовлетворяет:

- обоим соотношениям;
- хотя бы одному из записанных соотношений.

За какую цену Саша может купить велосипед, чтобы удовлетворить требованиям обоих родителей? Хотя бы одного из родителей? Сколько, по твоему мнению, может стоить велосипед, который купит Саша?

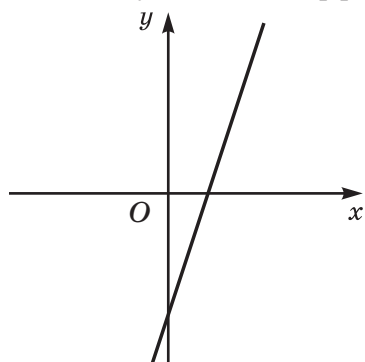
- 195** Проанализируйте следующее задание: «Найдите все значения x , которые:
а) удовлетворяют обоим неравенствам $ax + b > 0$ и $kx + n < 0$;
б) удовлетворяют хотя бы одному из неравенств $ax + b > 0$ и $kx + n < 0$ ».
Запишите это задание иначе, предложив свои знаки. Сравните их с общепринятыми понятиями и их обозначениями на с. 68.
- 196** Придумайте практическую ситуацию, которая требует решения системы неравенств. Запишите эту систему неравенств и попробуйте решить её с опорой на числовую прямую. Составьте алгоритм решения системы неравенств и сравните его с алгоритмом на с. 69.
- 197** Запишите решения простейших систем неравенств:
а) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > 5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x \leq 2 \\ x < 5 \end{cases}$.
- 198** Придумайте практическую ситуацию, которая требует решения совокупности неравенств. Запишите эту совокупность неравенств и попробуйте решить её с опорой на числовую прямую. Составьте алгоритм решения совокупности неравенств и сравните его с алгоритмом на с. 70.
- 199** Запишите решения простейших совокупностей неравенств:
а) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > 5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x \leq 2 \\ x < 5 \end{cases}$.
- 200** Решите системы неравенств:
а) $\begin{cases} 3x - 5 \geq 1 \\ 2 - x > -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3 - 3x \geq 1 \\ x - 4 < 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x - 7 \leq 11 \\ 3 - 4x > -5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x - 2 \leq 4 \\ 3x - 3 > 6 \end{cases}$.
- 201** Решите совокупности неравенств:
а) $\begin{cases} 2x - 5 \geq 1 \\ 3 - 4x > -5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x - 9 \geq 1 \\ 4 - 7x < -3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} -3 - 5x \leq 2 \\ 2x - 3 > 11 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x - 12 \leq 10 \\ 3x - 18 > 15 \end{cases}$.
- 202** Решите:
а) $\begin{cases} 5x - 1 > 0 \\ -3x + 2 \leq 0 \\ -10x + 2 > 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2 - 3x \geq 0 \\ 5 - x < 0 \\ 1 + 2x < 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 4x - 12 < 0 \\ 8x - 32 > 0 \\ 35 - 7x > 0 \end{cases}$.
- 203** Решите двойное неравенство двумя способами: с помощью перехода к системе и с помощью равносильных преобразований неравенства.
а) $-2 \leq x + 4 < -1$; г) $\frac{1}{2} < \frac{2-3x}{4} < \frac{5}{8}$;
б) $-1 \leq 0,3x + 2 < 2,6$; д) $-4 < 4x^2 - (2x - 1)(2x + 1) + x \leq 5$;
в) $5 \leq \frac{2x-1}{3} \leq 7$; е) $x \leq \frac{(x+2)^2 - x^2}{3} < 1\frac{1}{2}$.
- Какой из этих способов вы находите более удобным?
- π 204** Изобразите схематично график линейной функции с положительным коэффициентом.
а) Отметьте точку, в которой функция равна нулю.

б) Обведите красным цветом ту часть графика, где функция принимает положительные значения. При каких значениях аргумента это происходит – заштрихуйте на оси Ox соответствующий промежуток.

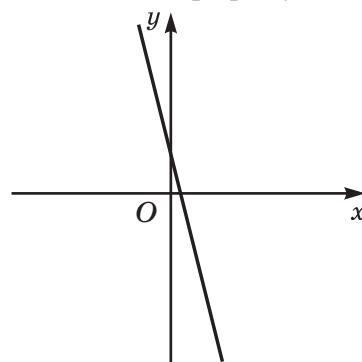
в) Обведите синим цветом ту часть графика, где функция принимает отрицательные значения. При каких значениях аргумента это происходит – заштрихуйте на оси Ox соответствующий промежуток.

Выполните то же самое задание со схематичным изображением графика линейной функции с отрицательным коэффициентом. Какой вывод вы можете сделать?

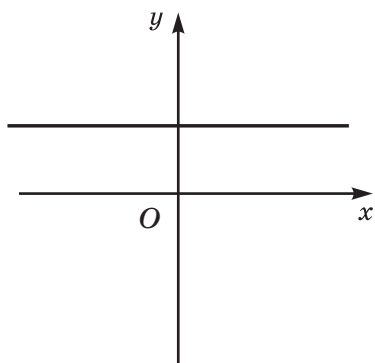
205 Определите знак углового коэффициента линейной функции по ее графику:



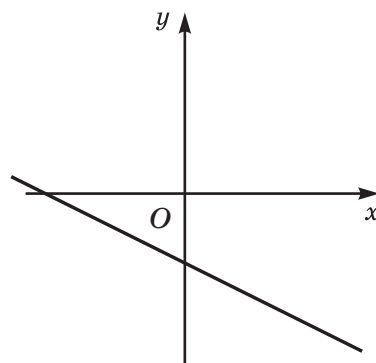
а)



б)



в)



г)

206 Выясните знак углового коэффициента линейной функции, если:

а) она принимает положительные значения справа от точки пересечения с Ox ;

б) она принимает отрицательные значения справа от точки пересечения с Ox .

207 Перепишите функции в виде кусочно-линейных, выделяя промежутки, на которых выражения под знаком модуля не меняют своего знака. Постройте графики этих функций:

а) $y = |x + 1| - 4$; б) $y = 4 - |2x - 4|$; в) $y = |2x| - |3x - 5|$; г) $y = |1 - x| - |x - 5|$.

208 Выпишите числа a , b , c и d в порядке возрастания:

$$a = \frac{2}{50} + \frac{8}{75};$$

$$b = \frac{4}{9} - \frac{2}{7};$$

$$c = \frac{7}{23} - \frac{1}{7};$$

$$d = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}.$$

209 Шариковая ручка стоит четыре рубля. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 30 рублей после повышения цены ручки на 10%?

210 Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

- а) 1, 2, 3; б) 2, 4, 8; в) 16, 36, 56; г) 18, 48, 90.

211 Упростите выражение:

- а) $1\frac{2}{3}ab - 2\frac{7}{15}ab - \frac{1}{5}ab + \frac{5}{6}ab$; б) $0,5n + 0,2n^2 - 0,2n + 0,8n^2$.

212 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

- а) $\frac{2ab}{5xy} : \frac{3ab}{5by}$; б) $4am : \frac{8mx}{2x^2}$; в) $\left(\frac{3a}{5b} : \frac{4a}{7b}\right) \cdot \frac{20}{21}$.

Д

213 Решите систему неравенств:

- а) $\begin{cases} 2x-5 \geq 3 \\ 5-3x > -4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2-4x \geq -2 \\ 3x-10 < 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x-2 \leq 1 \\ 13-4x > 1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x-2 \leq 4 \\ 3x-6 > 12 \end{cases}$.

214 Решите совокупность неравенств:

- а) $\begin{cases} 3x-5 \geq 4 \\ 13-x > -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x-3 \geq 2 \\ 4-9x < -5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 13-x \leq 3 \\ 2x-7 > 1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 3x-15 \leq 6 \\ 4x-20 > 8 \end{cases}$.

215 Решите:

- а) $\begin{cases} 3x+6 \geq 0 \\ 3-2x \leq 0; \\ 6x-9 \leq 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 7-5x < 0 \\ 8+3x \geq 0. \\ 2x-4 \leq 2 \end{cases}$

216 Изобразите схематично график линейной функции, угловой коэффициент которой:

- а) положителен, б) отрицателен, в) равен нулю.

Заштрихуйте красным цветом на оси абсцисс промежутки, на котором данная функция принимает положительные значения, а синим – на котором данная функция принимает отрицательные значения.

В каком случае штриховка получилась одноцветной?

217 Выясните знак углового коэффициента линейной функции, если:

- а) она принимает отрицательные значения справа от точки пересечения с Ox ;
б) она принимает отрицательные значения слева от точки пересечения с Ox .

218 Постройте график функции:

- а) $y = |2x + 1| - x$; б) $y = 3 - |5x - 3| + |2 - 4x|$.

219 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

- а) $\frac{4x}{3y} : \frac{20bx}{9ay}$; б) $90mn : \frac{45nx}{2my}$; в) $\left(\frac{5xy}{9ab} : \frac{12b^2}{25x^2y}\right) : \frac{1}{x}$.

С

220* Решите систему

$$\begin{cases} 3x-2 > 10 \\ 0,5x+1 \geq 3 \\ 5x-11 < 4 \\ 0,25x-3 \leq 1 \\ x-2 \geq 3 \\ 2x-5 < 25 \end{cases}$$

2.2.2.* Системы неравенств с одной переменной с модулями



Я постоянно держу в уме предмет своего исследования и терпеливо жду, пока первый проблеск мало-помалу обратится в полный и блестящий свет.

Исаак Ньютон (1643–1727),
английский физик, математик, астроном

Мы уже умеем решать системы линейных неравенств с одной переменной, а также системы уравнений с модулями. В седьмом классе мы познакомились с тем, как решать неравенство с одной переменной, содержащее модули. Разберёмся теперь с тем, как решать системы неравенств с модулями. Для этого рассмотрим вначале несколько примеров.

Пример 1.

Решить систему неравенств
$$\begin{cases} 2|x+3|+x > 4 \\ x-3|2x+5| \leq -13 \end{cases}$$

Решение:

Решим данную систему неравенств по алгоритму, сформулированному нами в предыдущем пункте.

1. Решим первое неравенство системы $2|x+3|+x > 4$. В нём содержится модуль выражения $x+3$. По определению модуля:

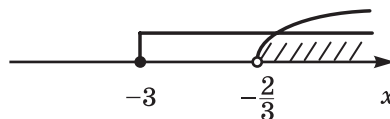
$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{если } x \geq -3 \\ -(x+3), & \text{если } x < -3 \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1-й случай.

Если $x \geq -3$, то $|x+3| = x+3$, то наше неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ 2(x+3)+x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 3x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

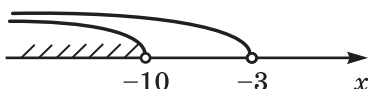


Подходят все $x \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

2-й случай.

Если $x < -3$, то $|x+3| = -(x+3)$, то наше неравенство равносильно системе:

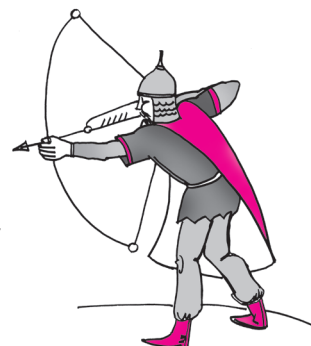
$$\begin{cases} x < -3 \\ -2(x+3)+x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ -x > 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x < -10 \end{cases}$$



Подходят все $x \in (-\infty; -10)$.

Решением неравенства $2|x+3|+x > 4$ является объединение решений, полученных в обоих случаях:

$$x \in (-\infty; -10) \cup \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

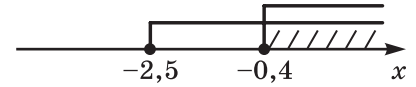


2. Аналогично, решим второе неравенство системы $x - 3|2x + 5| \leq -13$.

1-й случай.

Если $x \geq -2,5$, то $|2x + 5| = 2x + 5$, то данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x \geq -2,5 \\ x - 3(2x + 5) \leq -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2,5 \\ -5x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2,5 \\ x \geq -0,4 \end{cases}$$

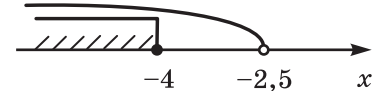


Подходят все $x \in [-0,4; +\infty)$.

2-й случай.

Если $x < -2,5$, то $|2x + 5| = -(2x + 5)$, то наше неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x < -2,5 \\ x + 3(2x + 5) \leq -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2,5 \\ 7x \leq -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2,5 \\ x \leq -4 \end{cases}$$

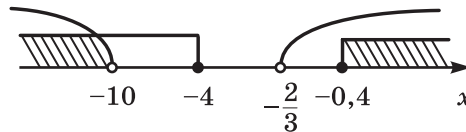


Подходят все $x \in (-\infty; -4]$.

Решением неравенства $x - 3|2x + 5| \leq -13$ является объединение решений, полученных в обоих случаях:

$$x \in (-\infty; -4] \cup [-0,4; +\infty).$$

3. Найдем теперь решение системы, пересекая полученные решения первого и второго неравенств:



Ответ: $x \in (-\infty; -10) \cup [-0,4; +\infty)$.

Итак, для решения систем неравенств с одной переменной с модулями можно применять алгоритм решения системы неравенств, сформулированный нами ранее в пункте 2.2.1. Однако на первом шаге этого алгоритма нам придется решать не просто линейные неравенства, а неравенства с модулями, сводящиеся к линейным. Остальные шаги алгоритма останутся теми же.

* * *

Системы указанного вида можно решать и способом, суть которого заключается в следующем. Вначале выделяются числовые промежутки, на которых все выражения под знаком модуля не меняют своего знака, затем данная система неравенств последовательно решается на каждом из выделенных промежутков. Решением исходной системы является объединение всех полученных решений.

Аналогичный способ мы использовали в 7 классе при решении неравенства с несколькими

модулями. Применим его для решения системы
$$\begin{cases} 2|x + 3| + x > 4 \\ x - 3|2x + 5| \leq -13 \end{cases}$$

1. Выпишем выражения, находящиеся под знаком модуля в системе: $x + 3$; $2x + 5$.

2. Найдем корни уравнений:

$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2,5.$$

3. Определим непересекающиеся числовые промежутки, на которые числовая прямая разбивается этими корнями: $(-\infty; -3)$, $[-3; -2,5)$ и $[-2,5; +\infty)$.

4. Проверим, что объединение выделенных промежутков составляет всю числовую прямую.

$$(-\infty; -3) \cup [-3; -2,5) \cup [-2,5; +\infty) = (-\infty; +\infty).$$

5. На каждом из выделенных промежутков значения выражений $x + 3$ и $2x + 5$ не меняют своего знака. Так как коэффициенты при x положительные, то слева от соответствующего

корня выражение принимает отрицательные значения (отметим это на схеме знаком «-»), а справа – положительные («+»). В зависимости от этого знака установим, как раскрывать модули в системе на каждом из найденных промежутков.

$ x+3 $	-	$\Rightarrow -x-3$	+	$\Rightarrow x+3$	+	$\Rightarrow x+3$
$ 2x+5 $	-	$\Rightarrow -2x-5$	-	$\Rightarrow -2x-5$	+	$\Rightarrow 2x+5$
	$\xrightarrow{\hspace{10cm}}$					
	$(-\infty; -3)$	-3	$[-3; -2,5)$	-2,5	$[-2,5; +\infty)$	

6. Раскроем модули $|x+3|$ и $|2x+5|$ на этих промежутках. Тогда решение исходной системы сведётся к решению трёх систем без модулей и последующему отбору решений.

1) $x \in (-\infty; -3)$	$\begin{cases} 2(-x-3)+x > 4 \\ x-3(-2x-5) \leq -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > 10 \\ 7x \leq -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -10 \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -10)$
2) $x \in [-3; -2,5)$	$\begin{cases} 2(x+3)+x > 4 \\ x-3(-2x-5) \leq -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > -2 \\ 7x \leq -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$
3) $x \in [-2,5; +\infty)$	$\begin{cases} 2(x+3)+x > 4 \\ x-3(2x+5) \leq -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > -2 \\ -5x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x \geq -0,4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-0,4; +\infty)$

7. Отберём из найденных решений только те, которые принадлежат указанным промежуткам. Для этого найдём пересечение каждого множества решений с соответствующим ему числовым промежутком.

- 1) $(-\infty; -3) \cap (-\infty; -10) = (-\infty; -10)$;
- 2) $[-3; -2,5) \cap \emptyset = \emptyset$;
- 3) $[-2,5; +\infty) \cap [-0,4; +\infty) = [-0,4; +\infty)$.

8. Решением исходной системы является объединение множеств решений, полученных на всех числовых промежутках: $x \in (-\infty; -10) \cup [-0,4; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -10) \cup [-0,4; +\infty)$.

Приходим к следующему алгоритму решения систем неравенств с одной переменной.



Алгоритм решения простейших систем неравенств с одной переменной с модулями

1. Найти в системе неравенств все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Приравнять каждое из них к нулю и найти корни полученных уравнений.
3. Отметить найденные корни уравнений на числовой прямой и определить непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные точки разбивают прямую.
4. Проверить, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую.
5. Установить для всех числовых промежутков, какой вид принимает каждый модуль – самого выражения, содержащегося под знаком модуля, или выражения, противоположного ему.
6. Для каждого числового промежутка записать и решить исходную систему неравенств без знаков модуля.
7. Найти пересечение полученных множеств решений и соответствующих числовых промежутков.
8. В ответе записать объединение всех получившихся множеств решений.

Отметим, что системы более сложных неравенств с модулем решить при помощи этого алгоритма не так просто. Даже с одним неравенством бывает не очень легко справиться. Например, вот с таким:

$$||2x - 1| - |3x + 1| + 4x| - 5x < 10.$$

А это ещё не самое сложное неравенство с модулем, сводящееся к линейному. Решение подобных неравенств требует большой аккуратности. Мы вернемся к ним в старших классах.

Системы неравенств с одной переменной с модулями можно решать также с помощью графиков. Разберём графический способ их решения на конкретном примере, а затем построим общий алгоритм.

Пример 2.

Решить систему неравенств
$$\begin{cases} 2x - 1 + |x| \geq 0 \\ |x - 3| + |2x - 2| - 5 < 0 \end{cases}.$$

Решение:

Можно заметить, что левые части неравенств системы задают кусочно-линейные функции: $y = 2x - 1 + |x|$ и $y = |x - 3| + |2x - 2| - 5$. Тогда решение неравенств сводится к поиску значений x , при которых эти функции принимают значения указанного в неравенстве знака.

1) Построим график функции $y = 2x - 1 + |x|$. Для этого вначале упростим выражение в правой части равенства, используя определение модуля:

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow 2x - 1 + |x| = 2x - 1 + x = 3x - 1;$$

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow 2x - 1 + |x| = 2x - 1 - x = x - 1.$$

Значит, мы можем записать данную функцию в виде $y = \begin{cases} 3x - 1, & \text{если } x \geq 0 \\ x - 1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$. Построим её график (рис. 1).

Далее в соответствии со знаком неравенства укажем значения x , при которых эта функция неотрицательна. Для этого выберем ту часть графика, которая лежит выше оси Ox и пересекается с ней.

Этой части графика соответствует промежуток справа от точки пересечения графика функции $y = 3x - 1$ с осью Ox , включая саму эту точку. Вычислим её точную абсциссу:

$$3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $2x - 1 + |x| \geq 0$ при $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

2) Аналогично, построим график функции $y = |x - 3| + |2x - 2| - 5$. Выделяя промежутки, на которых все выражения под знаком модуля не меняют своего знака, запишем данную функцию в виде

$$y = \begin{cases} 3x - 10, & \text{если } x \geq 3 \\ x - 4, & \text{если } 1 \leq x < 3 \\ -3x, & \text{если } x < 1 \end{cases} \text{ и построим её график (рис. 2).}$$

Найдем абсциссы точек пересечения функции с осью Ox :

$$3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 3\frac{1}{3}; \quad -3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

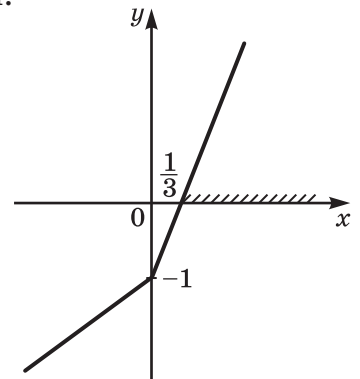


Рис. 1

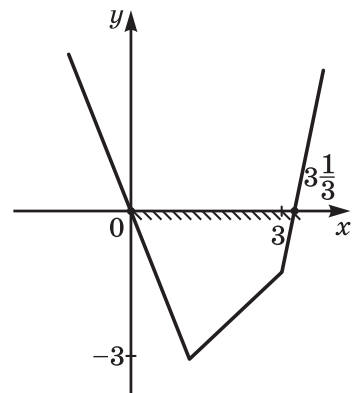


Рис. 2

Итак, график функции пересекает ось Ox в двух точках:

$$x = 0 \text{ и } x = 3\frac{1}{3}.$$

Опираясь на рис. 2, находим, что $|x - 3| + |2x - 2| - 5 < 0$ при $x \in \left(0; 3\frac{1}{3}\right)$.

3) Решением системы является пересечение множеств решений двух данных неравенств:

$$\text{Ответ: } \left[\frac{1}{3}; 3\frac{1}{3}\right). \quad \left[\frac{1}{3}; +\infty\right) \cap \left(0; 3\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}; 3\frac{1}{3}\right).$$

Сформулируем теперь общий *алгоритм* графического решения неравенств с одной переменной с модулями. Для определённости, будем считать, что переменная обозначена x .

Алгоритм графического решения систем неравенств с одной переменной с модулями

1. Изобразить графическое решение каждого неравенства системы на координатной плоскости, выполнив шаги:

- 1) Преобразовать неравенство так, чтобы справа от знака неравенства стоял ноль.
- 2) Построить график кусочно-линейной функции, задаваемой левой частью неравенства.
- 3) Найти точки пересечения построенного графика с осью Ox .
- 4) Указать объединение промежутков, где график располагается выше Ox или ниже Ox (соответственно знаку неравенства).
- 5) Если неравенство нестрогое, включить в полученное множество точки пересечения графика с осью Ox .

2. Найти пересечение полученных множеств решений неравенств системы.

К

221

Решите неравенство с модулем:

а) $|x| - 1 > 0;$

б) $|2x - 3| - 4 < 0;$

в) $|3x - 1| - 2|x| > 5.$

222

Составьте систему из неравенств под буквами а и б предыдущего задания.

1) Чем отличается эта система неравенств от рассматриваемых в пункте 2.2.1? Вспомните, что является решением системы неравенств, и найдите его для полученной системы. Постройте общий способ решения подобных систем и сравните его с предложенным на с. 77.

2) Можно ли воспользоваться идеей решения неравенства под буквой в предыдущего задания для решения систем неравенств? Выделите промежутки, на которых модули будут раскрываться однозначно, и решите систему. Предложите ещё один способ решения систем неравенств и сравните его с алгоритмом на с. 79.

3) Рассмотрите функции $y = |x| - 1$ и $y = |2x - 3| - 4$. Как графики этих функций могут помочь решить систему? Познакомьтесь с графическим способом решения систем неравенств, изложенным в учебнике, и решите систему.

223

Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x + |x| \geq 1 \\ 2x - 15 < 3 \end{cases};$

б) $\begin{cases} 2x + |x - 1| + 3 \geq 5 \\ 2|x| - 5 > 1 \end{cases};$

в) $\begin{cases} |3x + 2| + |2x - 1| - 7 \leq 5x \\ 2|x - 2| - 3 > 5 \end{cases}.$

π

224 1) Изобразите график функции $y = 2x + 4$. Вычислите, какое значение принимает функция при $x = 1$.

Возьмите несколько точек с абсциссой равной 1, лежащих ниже прямой $y = 2x + 4$, сравните их ординаты с полученным значением.

Возьмите несколько точек с абсциссой равной 1, лежащих выше прямой $y = 2x + 4$, сравните их ординаты с полученным значением.

2) Объясните, где будут находиться точки плоскости с координатами $(x; y)$, ординаты которых равны $2x + 4$, меньше $2x + 4$, больше $2x + 4$.

Проведите аналогичное исследование с графиком функции $y = -2x + 4$.

225 При каком значении параметра b график функции $y = -\frac{x}{4} + b$ проходит через точку $(1; 1)$?

226 Из 80 девятиклассников школы 30 человек приняли участие в математической олимпиаде. Сколько процентов девятиклассников приняло участие в олимпиаде?

227 Не менее $\frac{139}{201}$ и не более $\frac{89}{123}$ участников математического кружка ходят на занятие по шахматам. Какое наименьшее число учеников может быть в таком кружке?

228 Разложите многочлен $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9$ на множители.

229 Делится ли произведение $20^2 \cdot 27^3$ на:

а) 12; б) 15; в) 17; г) 18; д) 35; е) 36?

230 Определите, является ли число рациональным:

а) 0,123; б) 1,010010001; в) 3,03030303...;
г) 1,2(34); д) 3,03003000300003...; е) 2,525525525...

Если является, запишите его в виде обыкновенной дроби (результат можно не сокращать).

 $\mathcal{D}$

231 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x - |x| \leq 2 \\ 3x - 1 > 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x - |x + 2| + 1 \geq 7 \\ 3|x| - 10 \leq 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} |x + 3| - |x - 2| + 10 \leq 3x \\ 3|x - 3| - 4 < 2 \end{cases}$.

232 1) Изобразите прямую, которая задаётся уравнением $x = 5$.

Возьмите несколько точек, лежащих левее прямой $x = 5$, сравните их абсциссы с $x = 5$.

Возьмите несколько точек, лежащих правее прямой $x = 5$, сравните их абсциссы с $x = 5$.

2) Объясните, где будут находиться точки плоскости с координатами $(x; y)$, абсциссы которых равны 5, меньше 5, больше 5.

233 При каком значении параметра k график функции $y = kx + 5$ проходит через точку $(7; 1)$?

234 В феврале завод уменьшил выпуск продукции на 10% по сравнению с январем. В марте вновь произошло уменьшение выпуска продукции на 20% по сравнению с февралем. Какой процент составляет продукция, выпущенная в марте, от продукции, выпущенной в январе?

235 Разложите многочлен $ab(b - a) + bc(b + c) - ac(a + c)$ на множители.

236 Делится ли произведение $12^3 \cdot 25^2$ на:
 а) 24; б) 28; в) 32; г) 36; д) 40; е) 44?

237 Определите, является ли число рациональным:
 а) 1,234; б) 1,020030004; в) 2,12121212...;
 г) 4,(321); д) 1,23223222322223...; е) 9,87666666...

Если является, запишите его в виде обыкновенной дроби (результат можно не сокращать).

238* Содержимое бака, полностью заполненного водой, разлили поровну в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объёма, во втором бидоне вода заняла $\frac{2}{3}$, а в третьем бидоне — $\frac{3}{4}$ его объёма. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объеме бака возможна такая ситуация? Ответ укажите в литрах.

2.2.3. Линейные неравенства с двумя переменными и их системы. Графическое изображение множества их решений



*Алгебра — это лишь изображённая в символах геометрия,
а геометрия — воплощённая в фигуре алгебра.*

Софи Жермен (1776–1831),
французский математик и философ

В 7 классе мы научились решать линейные уравнения с двумя переменными и их системы. Новые алгоритмы расширили наши возможности по решению практических задач. В данном пункте аналогичным образом мы построим алгоритмы решения линейных неравенств с двумя переменными и их систем.

Вспомним задачу, которая привела нас к уравнению с двумя переменными.

Задача 1.

Таня купила тетрадей на 100 р.: в линейку — по цене 5 р. и в клетку — по цене 9 р. Сколько тетрадей каждого вида купила Таня?

Решение этой задачи свелось к решению уравнения $5x + 9y = 100$, где $x, y \in \mathbb{N}$. Изменим условие задачи.

Задача 2.

Тетрадь в линейку стоит 5 р., а в клетку — 9 р. Сколько тетрадей каждого вида может купить Таня, если она планирует потратить на покупку не более 100 р., и при этом купить хотя бы по одной тетради каждого вида?

Теперь задача сводится к неравенству с двумя переменными $5x + 9y \leq 100$, где $x, y \in \mathbb{N}$. Подобные неравенства с двумя переменными встречаются при решении многих текстовых задач. Их можно записать в общем виде, поставив в левой части

от знака неравенства выражение $ax + by + c$, а в правой – нуль. Исследуем эти неравенства и выведем общий способ их решения, но вначале уточним необходимые нам определения.

Определение 1. *Линейным неравенством с двумя переменными x и y называется неравенство одного из четырёх видов:*

$$ax + by + c > 0, \quad ax + by + c < 0, \quad ax + by + c \geq 0, \quad ax + by + c \leq 0,$$

где a, b, c – некоторые числа.

Определение 2. *Решением линейного неравенства с двумя переменными x и y называется пара чисел $(x; y)$, которая обращает его в верное числовое неравенство.*

Например, пара чисел $(1; 2)$ является решением неравенства $5x + 9y \leq 100$, так как $5 \cdot 1 + 9 \cdot 2 \leq 100$ – верное неравенство. А пара чисел $(10; 10)$, напротив, не является его решением, так как неравенство $5 \cdot 10 + 9 \cdot 10 \leq 100$ – неверное.

Найти множество решений линейного неравенства с двумя переменными в некоторых случаях можно методом перебора. Например, для решения полученного выше неравенства $5x + 9y \leq 100$, где $x, y \in \mathbb{N}$, мы можем последовательно подставить вместо x все его возможные натуральные значения от 1 до 18 и для каждого случая установить соответствующие значения y . Так, при $x = 1, y \in \{1; 2; 3; \dots 10\}$, при $x = 2, y \in \{1; 2; 3; \dots 10\}$, при $x = 3, y \in \{1; 2; 3; \dots 9\}$, ... при $x = 17, y \in \{1\}$, при $x = 18, y \in \{1\}$. Всего данное неравенство имеет около сотни решений.

Однако возникает вопрос: как найти и описать множество решений неравенства с двумя переменными в случае, когда перебор невозможен? Для ответа на этот вопрос, как и для неравенств с одной переменной, удобно использовать графическое изображение, но теперь уже не на прямой, а на плоскости, поскольку пары чисел $(x; y)$ изображаются точками координатной плоскости. Тогда *графическим решением неравенства с двумя переменными* будут служить все точки координатной плоскости, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют этому неравенству.

Вначале изобразим множество решений неравенства $5x + 9y \leq 100$, а затем на этой основе построим общий алгоритм графического решения линейного неравенства с двумя переменными.

Преобразуем неравенство $5x + 9y \leq 100$ к виду $y \leq -\frac{5x}{9} + 11\frac{1}{9}$ и построим прямую $y = -\frac{5x}{9} + 11\frac{1}{9}$ по двум точкам: $(20; 0)$ и $(11; 5)$ (рис. 1).

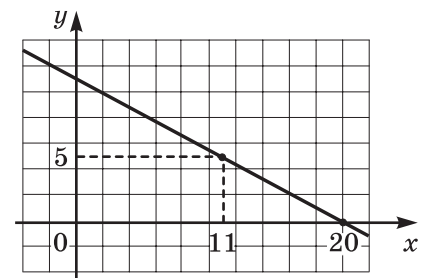


Рис. 1

Так как неравенство $y \leq -\frac{5x}{9} + 11\frac{1}{9}$ нестрогое, то множество его решений будет состоять, во-первых, из точек самой прямой $y = -\frac{5x}{9} + 11\frac{1}{9}$, а, во-вторых, из всех точек $(x; y)$ плоскости, ординаты которых меньше чем $-\frac{5x}{9} + 11\frac{1}{9}$. Эти точки, очевидно, находятся в нижней из полуплоскостей, на которые данная прямая разбивает координатную плоскость. Множество решений неравенства $y \leq -\frac{5x}{9} + 11\frac{1}{9}$ изображено на рис. 2.

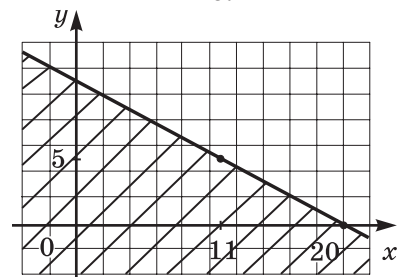


Рис. 2

* * *

Проведем аналогичные рассуждения общего характера. Мы знаем, что множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $ax + by + c = 0$, где числа a и b одновременно не обращаются в нуль, – прямая линия. Любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Покажем, что все точки одной из этих полуплоскостей удовлетворяют неравенству $ax + by + c > 0$, а другой – неравенству $ax + by + c < 0$.

Рассмотрим все возможные варианты в зависимости от значений b .

1) Если $b > 0$, то

$$ax + by + c > 0 \Leftrightarrow y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}; \quad ax + by + c < 0 \Leftrightarrow y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Значит, первому неравенству удовлетворяют все точки, лежащие выше прямой $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, а второму – точки, лежащие ниже этой прямой.

2) Если $b < 0$, то

$$ax + by + c > 0 \Leftrightarrow y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}; \quad ax + by + c < 0 \Leftrightarrow y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Следовательно, первому неравенству, наоборот, удовлетворяют все точки, лежащие ниже прямой $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, а второму – точки, лежащие выше этой прямой.

3) Если $b = 0$, то $a \neq 0$, и неравенства $ax + c > 0$ и $ax + c < 0$ задают полуплоскости, лежащие правее или левее (в зависимости от знака a) прямой $x = -\frac{c}{a}$.

В нестрогих неравенствах во всех трёх случаях в множество решений включаются также точки прямой $ax + by + c = 0$.

Итак, для графического решения линейного неравенства с двумя переменными (с ненулевым коэффициентом при y) нужно вначале преобразовать исходное неравенство так, чтобы слева от знака неравенства осталось только переменная y . Получится одно из неравенств вида $y > kx + d$, $y \geq kx + d$, $y < kx + d$, $y \leq kx + d$. Затем надо построить прямую $y = kx + d$ и выбрать соответственно знаку неравенства одну из полуплоскостей, на которые прямая разбивает плоскость:

Вид неравенства	Графическое решение
$y > kx + d$	Все точки, расположенные <i>выше</i> прямой $y = kx + d$
$y \geq kx + d$	Все точки, расположенные <i>на прямой</i> $y = kx + d$ и <i>выше</i> неё
$y < kx + d$	Все точки, расположенные <i>ниже</i> прямой $y = kx + d$
$y \leq kx + d$	Все точки, расположенные <i>на прямой</i> $y = kx + d$ и <i>ниже</i> неё

Если же коэффициент при переменной y равен нулю, то после преобразования исходного неравенства к одному из неравенств вида $x > d$, $x \geq d$, $x < d$, $x \leq d$ нужно построить прямую $x = d$ и выбрать полуплоскость в соответствии со знаком неравенства:

Вид неравенства	Графическое решение
$x > d$	Все точки, расположенные <i>правее</i> прямой $x = d$
$x \geq d$	Все точки, расположенные <i>на прямой</i> $x = d$ и <i>правее</i> неё
$x < d$	Все точки, расположенные <i>левее</i> прямой $x = d$
$x \leq d$	Все точки, расположенные <i>на прямой</i> $x = d$ и <i>левее</i> неё

Таким образом, мы приходим к следующему алгоритму.

**Алгоритм графического решения
линейного неравенства с двумя переменными**

1. Преобразовать неравенство так, чтобы слева от знака неравенства осталось только переменная y . Если это невозможно, то оставить слева только переменная x .
2. Заменить знак неравенства знаком равенства и построить прямую, задаваемую полученным уравнением.
3. Выделить часть плоскости в соответствии со знаком полученного неравенства.

Пример 1.

Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенств:

$$2x - 3y + 1 > 0;$$

$$-3x + y + 2 \geq 0;$$

$$3x - 4 < 0.$$

Решение:

1. Преобразуем неравенства к виду:

$$y < \frac{2}{3}x + \frac{1}{3};$$

$$y \geq 3x - 2;$$

$$x < 1\frac{1}{3}.$$

2. Построим на координатной плоскости прямые линии:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3};$$

$$y = 3x - 2;$$

$$x = 1\frac{1}{3}.$$

3. Выберем части плоскости, образованные этими прямыми, в соответствии со знаками полученных неравенств: для первого неравенства – нижняя полуплоскость, для второго – верхняя, а для третьего – слева от прямой. В случае, когда точки прямой не принадлежат искомому множеству, изобразим её пунктирной линией (рис. 3).

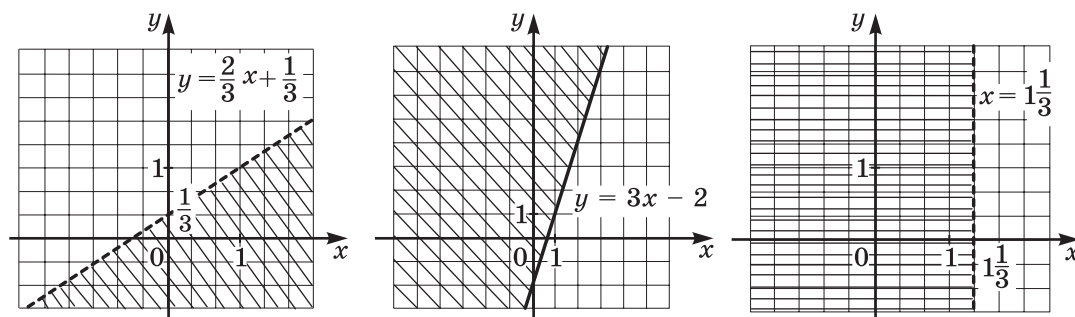


Рис. 3

* * *

Вернёмся к задаче 1 и изменим ее условие еще раз. Мы уже ограничивали стоимость покупки, теперь ограничим и количество тетрадей, которые должна купить Таня.

Задача 3.

Тане нужно купить не меньше 16 тетрадей, потратив на покупку не более 100 р., и при этом купить хотя бы по одной тетради каждого вида. Сколько и каких тетрадей она может купить, если в продаже имеются тетради в линейку по 5 р. и в клетку по 9 р.?

Решение:

Данная задача сводится к системе неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} 5x + 9y \leq 100 \\ x + y \geq 16 \end{cases} \rightarrow x = ? \quad y = ?, \text{ где } x, y \in N.$$

Решением данной системы является пересечение множеств решений каждого из неравенств.

Множеством решений неравенства $5x + 9y \leq 100$ является нижняя полуплоскость, ограниченная прямой $y = -\frac{5x}{9} + 11\frac{1}{9}$, а множеством решений неравенства $x + y \geq 16$ – верхняя полуплоскость, ограниченная прямой $y = -x + 16$. Пересечением этих полуплоскостей будет угол, все точки которого лежат ниже первой прямой и выше второй (рис. 4).

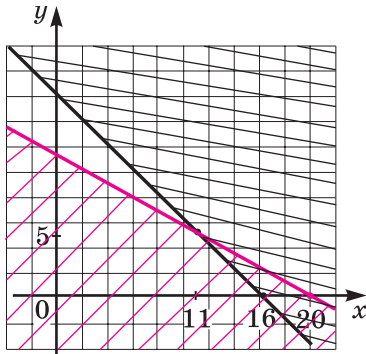


Рис. 4

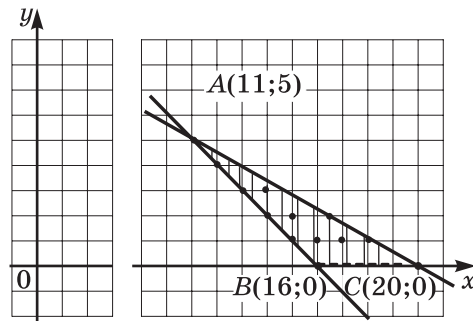


Рис. 5

Чтобы ответить на вопрос задачи 3, надо из полученного множества точек выбрать точки с натуральными координатами. Эту задачу можно свести к нахождению всех пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе из четырёх неравенств:

$$\begin{cases} 5x + 9y \leq 100 \\ x + y \geq 16 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$



Пересечением четырёх полуплоскостей будут все точки треугольника с вершинами $A(11; 5)$, $B(16; 0)$ и $C(20; 0)$, за исключением его стороны BC . Тогда множеством решений задачи будут 11 пар целых координат точек этого треугольника ABC , отмеченных на увеличенном фрагменте рисунка 3 (рис. 5).

Ответ: количества тетрадей, которые сможет купить Таня, указаны в таблице:

В линейку	11	12	13	14	14	15	15	16	16	17	18
В клетку	5	4	3	3	2	2	1	2	1	1	1
Всего	16	16	16	17	16	17	16	18	17	18	19

По найденному графическому решению удобно отобрать наибольшие значения переменных. Так, при заданных в условии ограничениях Таня сможет купить максимум 18 тетрадей в линейку (тогда других 1) или максимум 5 тетрадей в клетку (тогда других 11). Наибольшее значение общего количества тетрадей, которые можно купить, равно 19.

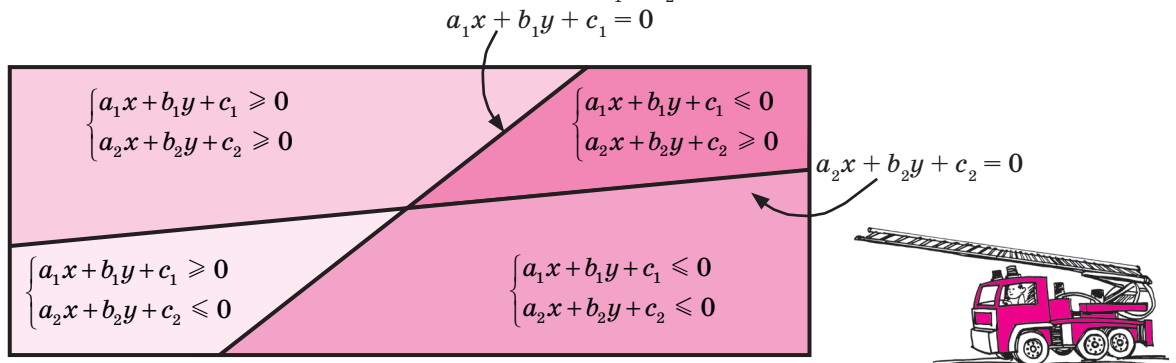
Подобные задачи о нахождении наибольшего или наименьшего значения некоторой функции называют экстремальными. Они имеют существенное прикладное значение. Важным, например, является умение находить максимальное значение той или иной величины (например, количества) при наименьших значениях другой (например, стоимости).

Теорией и методам решения экстремальных задач на множествах, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств, занимается одна из важнейших областей прикладной математики – *линейное программирование*.

Подобным образом можно описать множество решений любой системы линейных неравенств. Действительно, пусть $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ – уравнения прямых на плоскости. Если эти прямые пересекаются, то они образуют две пары вертикальных углов. Каждый из этих четырёх углов задаётся одной из следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \leq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \leq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 \leq 0 \end{cases}.$$

Покажем это, например, для положительных b_1 и b_2 , на следующей схеме:



Если прямые, заданные уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, параллельны, то пересечение двух полуплоскостей, каждая из которых задаётся одной из этих прямых, может быть либо полосой, либо одной из данных полуплоскостей, либо пустым множеством.

Пример 2.

Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0 \\ 4x - 2y \leq 2 \end{cases}$$

Решение:

Упростим неравенства системы, выполнив равносильные преобразования:

$$\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0 \\ 4x - 2y - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2x + 2 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases}$$

Решением первого неравенства полученной системы будет множество точек, лежащих на прямой $y = 2x + 2$ и ниже нее. Решением второго неравенства будет множество точек, лежащих на прямой $y = 2x - 1$ и выше неё. Множество решений данной системы неравенств – полоса между параллельными прямыми $y = 2x + 2$ и $y = 2x - 1$, включая точки прямых (рис. 6).

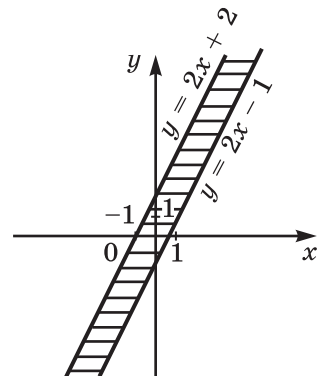


Рис. 6

К

239 Выберите из данных записей линейные неравенства с двумя переменными:

- а) $3x + 4y = 5$; б) $3x + 4y < -5$; в) $3x - 4y - 5 > 0$; г) $3xy - 4x^2 \leq 5$.

Решением какого из выбранных неравенств является пара чисел $x = 1$ и $y = -1$?

240

Изобразите прямую, заданную равенством $y = 2x + 2$. Где будут располагаться точки плоскости с координатами $(x; y)$, заданные неравенством:

- а) $y > 2x + 2$; б) $y \geq 2x + 2$; в) $y < 2x + 2$; г) $y \leq 2x + 2$?

Можно ли провести аналогичные рассуждения для графического решения любого линейного неравенства с двумя переменными? Дополните таблицу:

Вид соотношения	Графическое решение
$y = kx + d$	Все точки, расположенные на прямой $y = kx + d$
$y > kx + d$	
$y \geq kx + d$	
$y < kx + d$	
$y \leq kx + d$	

241 Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства $3x + y - 6 > 0$. Составьте алгоритм графического решения линейного неравенства с двумя переменными и сравните его с алгоритмом, предложенным в учебнике.

242 Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенств:

а) $3x - 2y + 7 > 0$; б) $-2x + 3y - 2 \geq 0$; в) $2x + 3 > 0$.

243 Решите задачу и ответьте на вопросы к ней:

«Егору нужно купить не менее 20 дисков, потратив на покупку не более 500 рублей. Сколько и каких дисков он сможет купить, если цена *CD* диска составляет 20 рублей, а цена *DVD* диска – 30 рублей?»

1) Что получено в качестве математической модели этой задачи? Какие шаги вы предпринимали, чтобы найти ее решение?

2) Составьте алгоритм решения системы линейных неравенств с двумя переменными, выбрав из следующих шагов необходимые:

Найти пересечение полученных решений неравенств системы.

Изобразить на координатной плоскости графическое решение каждого неравенства системы.

Найти объединение полученных решений неравенств системы.

При необходимости уточнить координаты точек, описывающих полученное решение системы.

244 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x - 2y - 1 \geq 0 \\ x - 3y + 6 \leq 0 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x - 2y - 1 \geq 0 \\ 2x - 4y - 2 \leq 0 \end{cases}$;
 б) $\begin{cases} 2x - 3y + 6 \geq 0 \\ -x + 2y - 4 \leq 0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x - 2y - 1 \geq 0 \\ 2x - 4y - 8 \leq 0 \end{cases}$; е) $\begin{cases} x - 2y - 1 \geq 0 \\ 2x - 4y - 1 \leq 0 \end{cases}$.

π

245 На рулоне обоев указано, что длина обоев в рулоне равна $10 \pm 0,1$ м. Какую из указанных ниже длин не может иметь рулон?

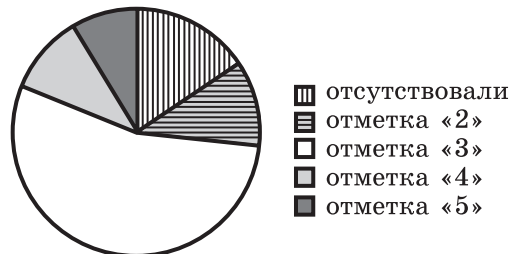
а) 9,95 м; б) 10,05 м; в) 10 м; г) 9,87 м.

246 Для строительства дачи можно использовать один из трех вариантов фундамента: каменный, бетонный и фундамент из пеноблоков. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн камня и 9 мешков цемента. Для фундамента из пеноблоков необходимо 5 кубометров пеноблоков. Для бетонного фундамента необходимо

12 тонн щебня и 34 мешка цемента. Тонна камня стоит 2100 рублей, кубометр пеноблоков стоит 2500 рублей, щебень стоит 630 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 200 рублей. Сколько рублей придётся заплатить за самый дешёвый фундамент?

247 Прямая проходит через точки $(-1; 2)$ и $(2; -4)$. Найдите её угловой коэффициент.

248 На круговой диаграмме показаны результаты контрольной работы за первую четверть в восьмых классах. Сколько примерно учащихся получили отметку не ниже тройки, если всего в школе 80 восьмиклассников?



- более 70 учащихся;
- около 60 учащихся;
- около 50 учащихся;
- менее 40 учащихся.

249 Докажите утверждение:

- Если натуральное число a не делится на 3, то число $5a$ не делится на 3.
- Если натуральное число b делится на 5, то число $2b$ делится на 10.
- Если число $3c$ делится на 5 (где c – натуральное), то число c делится на 5.
- Если число $15d$ делится на 9 (где d – натуральное), то число d может не делиться на 9.

250 Какой цифрой оканчивается число:

- 2^{345} ;
- 3^{4567} ;
- 9^{87} ?

251

Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

- $2x - 3y + 12 < 0$;
- $-3x + 5y - 15 \geq 0$;
- $3y - 9 > 0$.

252 Для похода Тане нужно купить не менее 20 банок консервов, потратив на покупку не более 1000 рублей. Сколько и каких консервов она может купить, если в продаже имеются консервы с тушенкой по цене 47 рублей и рыбные консервы по цене 53 рубля?

253 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

- $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x + 2y \leq 0 \end{cases}$;
- $\begin{cases} 2x - 5y - 10 \geq 0 \\ 3x - y + 6 \leq 0 \end{cases}$;
- $\begin{cases} 3x + y - 1 \geq 0 \\ 6x + 2y - 2 \leq 0 \end{cases}$;
- $\begin{cases} x - 5y + 10 \geq 0 \\ -2x + 3y - 18 \leq 0 \end{cases}$;
- $\begin{cases} 3x + y - 1 \geq 0 \\ 6x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$;
- $\begin{cases} 3x + y - 1 \geq 0 \\ 6x + 2y - 1 \leq 0 \end{cases}$.

254 Строительной фирме нужно приобрести 50 кубометров строительного бруса у одного из трёх поставщиков. Известно, что поставщик А требует 3500 рублей за кубический метр бруса, и его стоимость доставки составляет 9900 рублей. Поставщик Б требует 4500 рублей за кубометр бруса, стоимость доставки составляет 7900 рублей, но доставка бесплатна, если стоимость заказа превышает 150 000 рублей. Поставщик В назначил плату 3600 рублей за один кубометр бруса, его стоимость доставки составляет 7900 рублей, и доставка бесплатна в случае, если стоимость заказа превышает 200 000 рублей. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)?

255 Докажите утверждение:

- Если натуральное число a не делится на 11, то число $7a$ не делится на 11.
- Если натуральное число b делится на 7, то число $3b$ делится на 21.

в) Если число $5c$ делится на 3 (где c – натуральное), то число c делится на 3.

г) Если число $225d$ делится на 15 (где d – натуральное), то число d может не делиться на 15.

256 Какой цифрой оканчивается число:

а) 7^7 ; б) 7^{100} ; в) 7^{7^7} ?



257* От двух кусков сплавов (с различным содержанием свинца) массой в 6 и 12 килограммов отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавов с остатком другого куска, после чего процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

2.2.4.* Системы неравенств с двумя переменными с модулями



Возможно, не существует открытий ни в элементарной, ни в высшей математике, ни даже, пожалуй, в любой другой области, которые могли бы быть сделаны... без аналогии.

Пойа Дьёрдь (1887–1985),
венгерский и американский математик

В предыдущих пунктах мы научились решать линейные неравенства с одной и двумя переменными, их системы, познакомились с графическим решением неравенств с одной переменной с модулем. Использование графиков помогает и в решении систем неравенств с модулями с *двумя переменными*. Как и раньше, выведем общий алгоритм их решения, основываясь на конкретном примере.

Пример 1.

Решить систему неравенств
$$\begin{cases} |x+3| + y < 4 \\ x - |2y+4| \geq -5 \end{cases}$$

Решение:

Найдём графическое решение первого неравенства $|x+3| + y < 4$.

1-й случай.

Если $x+3 \geq 0$, то $|x+3| = x+3$, значит, данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x+3+y < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ y < -x+1 \end{cases}$$

Следовательно, множество решений неравенства составляет пересечение полуплоскостей, первая из которых состоит из точек плоскости, лежащих справа от прямой $x = -3$, включая точки самой прямой, а вторая – из точек, лежащих ниже прямой $y = -x + 1$, без точек этой прямой. (рис. 1).

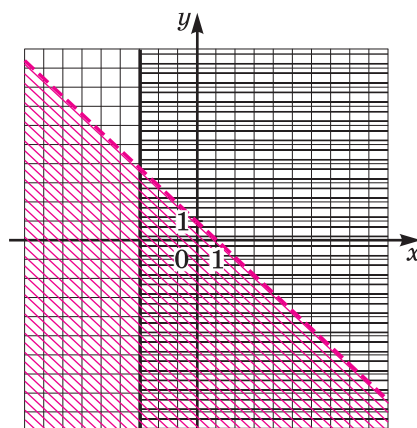


Рис. 1

2-й случай.

Если $x + 3 < 0$, то $|x + 3| = -(x + 3)$, значит, неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x < -3 \\ -(x+3) + y < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ y < x + 7 \end{cases}$$

Множеством решений неравенства является пересечение полуплоскостей, лежащих слева от прямой $x = -3$ и ниже прямой $y = x + 7$, без точек этих прямых (рис. 2).

Решением неравенства $|x + 3| + y < 4$ является объединение двух рассмотренных случаев (рис. 3). При этом граница полученного множества в решение не входит в силу того, что неравенство строгое.

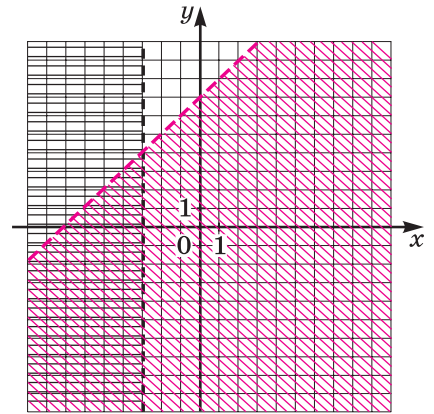


Рис. 2

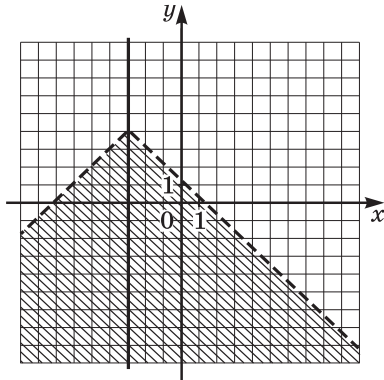


Рис. 3

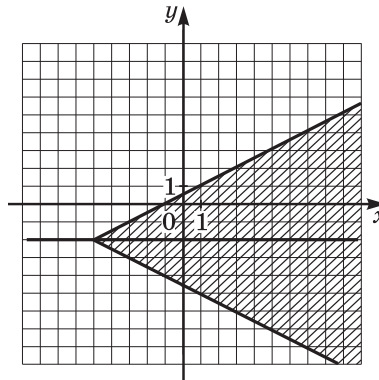


Рис. 4

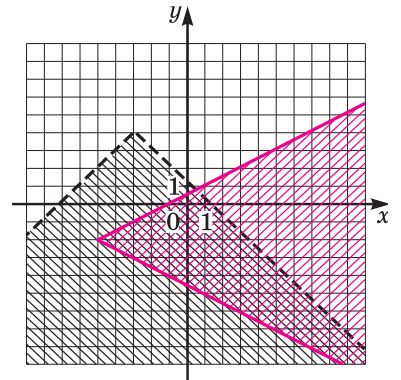


Рис. 5

Аналогично получаем графическое решение второго неравенства (рис. 4), которому, в отличие от предыдущего случая, граница принадлежит.

Чтобы определить решение исходной системы, надо найти пересечение множеств решений первого и второго неравенств, изображённых на рисунках 3 и 4. В пересечении получим треугольник (рис. 5). Одна из вершин треугольника не уместилась на рисунке из-за выбранного масштаба.

Для точной записи ответа нужно ещё найти вершины получившегося треугольника. Каждая из этих вершин является точкой пересечения каких-то двух из трёх прямых: $x + 2y = -9$, $x - 2y = -1$, $x + y = 1$. Поэтому требуется решить три системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} x + 2y = -9 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -10 \\ y = 0,5x + 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y = -9 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -10 \\ x = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -10 \\ x = 11 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ответ: треугольник с вершинами $A(-5; -2)$, $B(11; -10)$ и $C\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, без стороны BC (рис. 6).

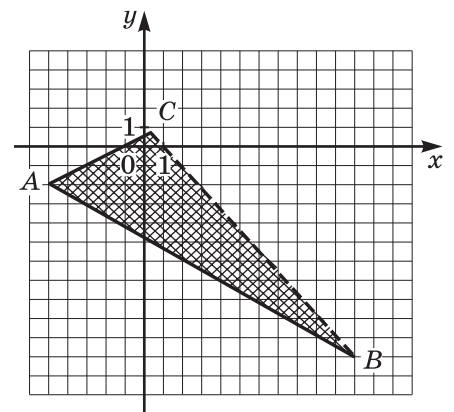


Рис. 6

Теперь мы можем записать общий алгоритм графического решения для неравенств с модулями с двумя переменными.

**Алгоритм графического решения систем неравенств
с модулями с двумя переменными**

1. Изобразить на координатной плоскости графическое решение каждого неравенства системы, выполнив шаги:
 - 1) «Раскрыть» модули, используя определение модуля.
 - 2) Изобразить графическое решение неравенства для каждого выделенного случая.
 - 3) Отобрать только те решения, которые удовлетворяют выделенному случаю.
 - 4) Найти объединение графических решений, полученных в каждом случае.
2. Найти пересечение полученных решений неравенств системы, уточнив при необходимости координаты точек, описывающих данное решение.

Пример 2.

Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} -x - |y| \geq 2 \\ |-y| - 3|x - 1| > 0 \end{cases}$$

Решение:

1. Изобразим на координатной плоскости решение неравенства $-x - |y| \geq 2$.

Для этого раскроем модуль, используя определение модуля.

1-й случай. Если $y \geq 0$, то $|y| = y$, значит, неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ -x - y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ -y \geq 2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq -x - 2 \end{cases}$$

Графическое решение полученной системы изобразим на рис. 7.

2-й случай. Если $y < 0$, то $|y| = -y$, значит, неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} y < 0 \\ -x + y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \\ y \geq x + 2 \end{cases}$$

Графическое решение полученной системы изобразим на рис. 8.

Укажем объединение множеств решений, полученных в обоих случаях (рис. 9).

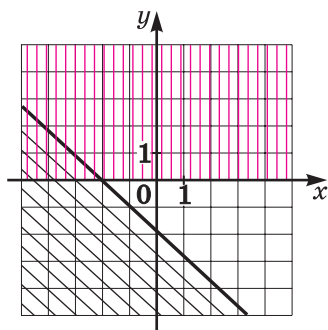


Рис. 7

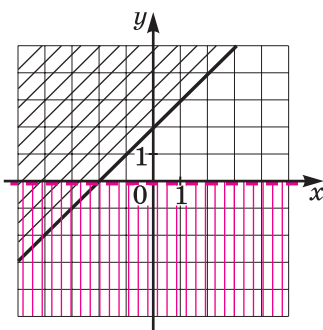


Рис. 8

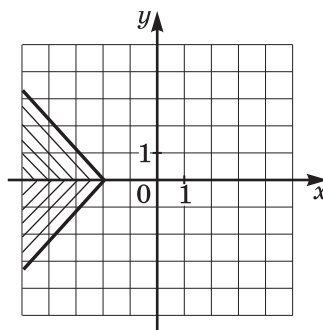


Рис. 9

2. Изобразим на координатной плоскости решение неравенства

$$|-y| - 3|x - 1| > 0.$$

Чтобы раскрыть модули, нам надо рассмотреть в данном случае четыре возможных варианта сочетания знаков выражений под знаком модуля:

- 1) $x - 1 \geq 0, -y \geq 0$;
- 2) $x - 1 \geq 0, -y < 0$;
- 3) $x - 1 < 0, -y \geq 0$;
- 4) $x - 1 < 0, -y < 0$.

Однако, понимая, что на последнем этапе решения системы нам нужно будет найти пересечение искомого множества решений с множеством решений первого неравенства системы, делаем вывод, что первые два случая, где $x \geq 1$, рассматривать не имеет смысла.

Если $x - 1 < 0, -y \geq 0$, то исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ -y \geq 0 \\ -y + 3(x - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ y \leq 0 \\ -y > -3x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ y \leq 0 \\ y < 3x - 3 \end{cases}.$$

Множество решений системы представляет собой заштрихованный на рис. 10 угол, образованный прямыми $y = 3x - 3$ и $x = 1$.

Если $x - 1 < 0, -y < 0$, то исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ -y < 0 \\ y + 3(x - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ y > 0 \\ y > -3x + 3 \end{cases}.$$

Множество решений системы представляет собой заштрихованный на рис. 11 угол, образованный прямыми $y = -3x + 3$ и $x = 1$.

Укажем объединение полученных в обоих случаях решений на рис. 12.

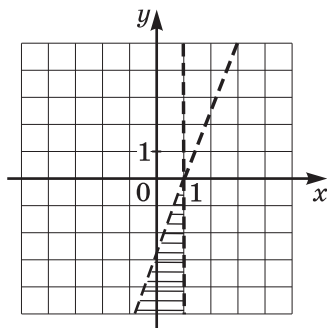


Рис. 10

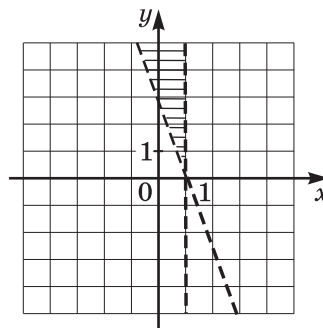


Рис. 11

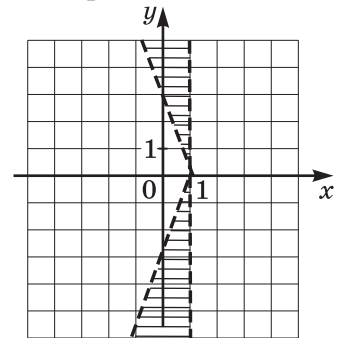


Рис. 12

3. Чтобы определить решение исходной системы, найдем пересечение множеств решений первого и второго неравенств, изображённых на рисунках 9 и 12.

Эти множества не имеют общих точек, значит, система не имеет решений (рис. 13).

Ответ: $\emptyset$.

Пример 3.

Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} x - |2y + x| \geq 2 \\ |x| + 0,5|1 - y| \leq -1 \end{cases}.$$

Решение:

Можно заметить, что во втором неравенстве системы каждое из слагаемых в левой части неотрицательно: $|x| \geq 0$ и

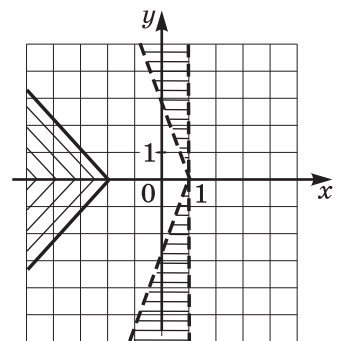


Рис. 13

$0,5|1-y| \geq 0$. Поэтому и их сумма тоже неотрицательна, и неравенство $|x| + 0,5|1-y| \leq -1$ не может иметь места. Значит, система не имеет решений.

Ответ: $\emptyset$.

Приведённые примеры показали, что особенности конкретной системы иногда помогают избежать громоздкого решения. Поэтому прежде чем применять построенный нами алгоритм, нужно проанализировать систему неравенств и попробовать упростить ее решение.

К 258 Рассмотрите неравенства: $x + y < 1$ и $x + |y| < 1$. Что у них общего, чем они отличаются? Найдите графическое решение неравенств.

259 1) Изобразите графическое решение обоих неравенств на одной координатной плоскости:

а) $|x| + y < 2$;

б) $x - |2y| \leq 1$.

2) Укажите пересечение полученных множеств решений этих неравенств.

3) Объясните, как найти решение системы $\begin{cases} |x| + y < 2 \\ x - |2y| \leq 1 \end{cases}$.

260 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - |y| < 6 \\ 3x + |y + 2| > 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 3 - y > 4 \\ x + 1 - 2y \geq 3 \end{cases}$.

261 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x - |y + x| \geq 1 \\ |x| + 5|1 - y| \leq 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - |y - 1| > -2 \\ |x| - |2y + 4| < 6 \end{cases}$.

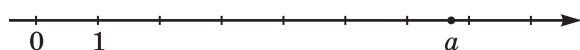
262 При каком значении a площадь фигуры, которая является решением системы неравенств $\begin{cases} |x| + |y| \leq 4 \\ x - y \geq a \end{cases}$, будет равна 2?

263 Запишите математическую модель задачи, обозначив скорость первого автомобиля — x км/ч, а второго — y км/ч.

Скорости двух автомобилей отличаются не более чем на 10 км/ч. Если автомобили выедут навстречу друг другу из городов, расстояние между которыми 300 км, то они встретятся не позже чем через 2 часа. С какой скоростью должны двигаться автомобили?

П 264 Стоимость проезда в пригородном электропоезде составляет 144 рубля. Школьникам предоставляется скидка в 50%. Сколько рублей стоит проезд группы из 4 взрослых и 12 школьников?

265 На координатной прямой отмечено число a . Какое из утверждений относительно этого числа является верным?



а) $2a - 15 > 0$;

в) $11 - 2a < 0$;

д) $a - 8 > 0$;

б) $4 - a > 0$;

г) $7 - a < 0$;

е) $19 - 3a < 0$.



Задачи для самоконтроля к главе 2

266 Сколько зубцов имеет колесо зубчатой передачи, если дуга окружности этого колеса, заключённая между двумя соседними зубцами, равна 12° ?

267 Упростите выражение $\frac{ab}{a+b} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)$ и найдите его значение при $a = 1,25$, $b = \frac{1}{8}$.

268 Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

- а) $\frac{7}{13}$; б) $-\frac{4}{9}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $-\frac{7}{18}$; д) $\frac{2}{33}$; е) $-\frac{7}{17}$.

Д

269 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

- а) 1,(2);
б) $-12,(34)$;
в) $-1,(3)$;
г) $3,0(12)$.



270 Решите системы неравенств:

- а) $\begin{cases} x - |y| > 1 \\ |x| + 3y \leq 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x| + |y+1| > 2 \\ |2x+1| - y < 7 \end{cases}$.

271 Решите задачу, составив систему неравенств.

В школе три восьмых класса. В них количество мальчиков и количество девочек отличается не больше чем на 3. А всего в восьмых классах учится не меньше 75 и не больше 80 детей. Сколько мальчиков и сколько девочек учится в восьмых классах этой школы?

272 Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

- а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{25}{9}$; в) $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{5}{18}$; д) $\frac{13}{99}$; е) $\frac{1}{7}$.

273 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

- а) $-0,(2)$; б) $-1,2(3)$; в) $1,(56)$; г) $12,34(56)$.

С

274* Докажите, что если $a + b + c + d > 0$, $a > c$, $b > d$, то $|a + b| > |c + d|$.

π

Выполните тест № 3 для самостоятельной проверки знаний.

Задачи для самоконтроля к главе 2

275 Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} x + |y| = 2 \\ 3x + |y| = 4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$;
в) $\begin{cases} 2|x| + 3y = 8 \\ 2x - |y| = -4 \end{cases}$; г)* $\begin{cases} |x-1| + y = 4 \\ x - |y-2| = 3 \end{cases}$.

276 Решите задачу, составив систему уравнений:

а) Легковой и грузовой автомобили проезжают расстояние между двумя селами соответственно за 3 ч и 5 ч. Определите их скорости, если скорость легкового автомобиля на 20 км/ч больше скорости грузового.

б) Участвуя в соревнованиях по теннису, две команды забили 41 мяч. Каждый участник из первой команды забил по 3 мяча, а каждый из второй – по 4 мяча. Сколько ребят было в каждой команде, если в первой команде на два участника больше, чем во второй?

в) Один раствор содержит 20% (по объёму) соляной кислоты, а второй – 70% кислоты. Сколько литров первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 л 50%-го раствора соляной кислоты?

г) Сумма цифр числа равна 15. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

д) Сумма двух чисел равна 128, а их разность составляет 75% от их суммы. Найдите эти числа.

е*) От турбазы до озера 8 км. Дорога сначала идёт в гору, затем по лесу, потом под гору. До озера туристы шли 1ч 27 мин, а обратно 1ч 51 мин. Скорость их в гору 4 км/ч, лесом 5 км/ч, а под гору – 6 км/ч. Сколько километров туристы шли лесом в одном направлении?

277 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x+8>0 \\ 2x-1>0 \end{cases};$

б) $\begin{cases} 12x-4<0 \\ 18-3x\leq 0 \end{cases};$

в) $\begin{cases} 3x-16\leq 0 \\ -7x-28<0 \end{cases};$

г) $\begin{cases} 5(x+1)-3(x-7)-7<7+2(x-3); \\ 4(3+5x)<3x-5(x+2) \end{cases};$

д) $\begin{cases} \frac{2x+1}{3}-3>x-\frac{4-2x}{5} \\ \frac{x}{3}-\frac{7}{6}>\frac{5x}{3}-\frac{11}{6} \end{cases}.$

278 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x+2>-3-5x \\ 4x+2>-5-4x; \\ -3+5x<2x+5 \end{cases};$

б) $\begin{cases} 3x+7\geq -1-5x \\ 2(x+2)\geq -5+4x. \\ -2+5x<x+6 \end{cases}.$

279 Решите двойное неравенство с помощью системы неравенств:

а) $-3\leq 2x-3\leq 1;$

б) $-1<3-5x<0.$

280 Решите совокупность неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-7>1 \\ 5-2x>2(1-2x); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{2x+1}{3}-\frac{1-x}{5}>1; \\ -4x-3<0 \end{cases};$

в) $\begin{cases} \frac{4-x}{4}<\frac{3-x}{3} \\ 12-5x<x \end{cases}.$

281 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-|x|\leq 3; \\ 3x-5\leq 7 \end{cases};$

б) $\begin{cases} 5x-|2x-1|+1>8 \\ |x|-3>1 \end{cases}.$

282 Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $2x-6\leq 0;$

б) $\frac{1}{4}x-y+3<0;$

в) $\frac{3}{5}x+3y-9>0;$

г) $-2\leq y\leq 3.$

283 Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 4,5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{9}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 3 \\ \frac{18}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -3 \end{cases}$.

284 Выясните, при каких значениях b система:

а) $\begin{cases} 15x + by = 3 \\ 5x + 10y = 1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений;

б) $\begin{cases} bx - 8y = 12 \\ 2x - 6y = 15 \end{cases}$ не имеет решений;

в) $\begin{cases} 3x + 7y = 20 \\ bx + 14y = 15 \end{cases}$ имеет единственное решение.

285 Решите систему уравнений с тремя переменными:

а) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 7 \\ z + x = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y + z - x = 2 \\ z + x - y = 8 \\ x + y - z = 12 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 12 \\ z + 2x = 7 \end{cases}$.

286 Найдите $(x_1 - y_1) \cdot (x_2 - y_2)$, если $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ решения системы уравнений

$$\begin{cases} |x + y| = 1 \\ (x^2 - y^2)(x - y) = -4 \end{cases}$$

287 Найдите все x , удовлетворяющие условию:

а) $\begin{cases} -3x > x - 16 \\ 3x - 1 < 5 \\ 2x - 5 > 7 \\ 5x + 8 > 4 + x \end{cases}$; б) $\begin{cases} x < 10 \\ 3 - 4x < 23 \\ x \geq 0 \\ 2x - 5 < 19 \end{cases}$.



288 Найдите наибольшее целочисленное решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} 6,5 - 1,5x > 2x - 4 \\ |x - 1| + |x - 2| < 3 - x \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x - 2| < 6 - 2x \\ |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| > 10 \end{cases}$.

289 Решите систему неравенств графически: $\begin{cases} 2|x - 1| + |x - 3| - 1 - 2x < 0 \\ |x + 1| - 1 \geq 3 \end{cases}$.

290 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств и запишите хотя бы два решения системы:

а) $\begin{cases} 3x - y > 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + 4y - 12 \geq 0 \\ x - y \leq -3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} -3x + y - 2 < 0 \\ -x + y \leq 0 \end{cases}$.

291 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases} |x - 1| + y < 2 \\ 3x + |y + 1| \geq 0 \end{cases}$$

292 Решите систему $\begin{cases} \frac{1}{4}x - y - 1 = 0 \\ 3x + y = 25 \end{cases}$, используя теорему о целочисленных точках графика уравнения.

Глава 3

Исследование нелинейных процессов

§ 1. Представление о некоторых нелинейных процессах

3.1.1. Степенные функции и их графики



Без сомнения, тесные связи с физической реальностью важных разделов математики... вдохновляют и стимулируют математическую мысль.

Рихард Курант (1888–1972),
немецкий и американский математик и педагог

Наблюдая за различными величинами и на уроках, и в жизни, мы замечаем, что изменение одной из величин влечёт определённое изменение другой. Это говорит о существовании зависимости между этими величинами. Мы уже знакомились с линейными зависимостями, однако многие величины связывает более сложная, нелинейная зависимость.

Рассмотрим, например, зависимость площади квадрата S , выраженной в квадратных сантиметрах, от длины его стороны a , выраженной в сантиметрах. Опишем, как изменяется площадь квадрата при увеличении длины его стороны в таблице, воспользовавшись формулой $S = a^2$.

a	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
S	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25

В верхней строке таблицы мы выписали лишь некоторые возможные значения длины стороны a , однако она может принимать любые положительные значения. Таким образом, знакомая нам формула $S = a^2$ каждому положительному числу a ставит в соответствие *единственное* число S . Поэтому мы можем говорить о существовании **функциональной зависимости**, которая в более привычных обозначениях имеет вид: $y = x^2$, где x – независимая переменная, а y – зависимая переменная.

Конечно, сторона квадрата не может быть отрицательной и лишь условно можно считать, что она может быть равна 0. Тем не менее мы можем расширить область определения функции $y = x^2$ до множества всех чисел: $X = (-\infty; +\infty)$. Построим её график для общего случая, используя приведённую выше таблицу и равенства $(-x)^2 = x^2$ и $0^2 = 0$.

Соединим отмеченные точки плавной кривой, которая и представляет собой график функции $y = x^2$, где x – любое число (рис. 1). Эта кривая располагается в первой и второй координатных четвертях ($y \geq 0$ при любом значении x) и называется **параболой**, а её точка $(0; 0)$ называется **вершиной параболы**.

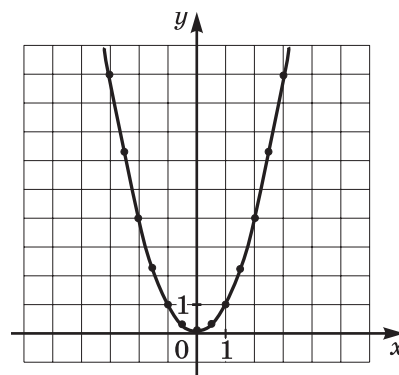


Рис. 1

Сформулируем *свойства функции $y = x^2$ и её графика*. Заметим, например, что при увеличении x по модулю значение y , оставаясь положительным, возрастает значительно «быстрее», чем x . Так, при увеличении $|x|$ от 1 до 10 значение y увеличивается с 1 до 100. При уменьшении по модулю числа x число y , оставаясь положительным, наоборот, уменьшается значительно «быстрее», чем x . Если $x = 0,1$, то $y = 0,01$; если $x = 0,01$, то $y = 0,0001$ и т. д.

Из этого следует, что при удалении от начала координат ветви параболы резко поднимаются вверх и, выбрав единичный отрезок в 1 см, уже при $x = 6$ мы не сможем отметить значение функции $y = x^2$ на стандартном листе А4. И наоборот, приближаясь к вершине, парабола всё ближе «прижимается» к оси абсцисс (в отличие от графика $y = |x|$, который имеет в точке $(0; 0)$ «уголок»).

Свойство 1. При удалении от начала координат график функции $y = x^2$ круто поднимается вверх, а приближаясь к вершине, «прижимается» к оси абсцисс.

* * *

Определение 1. *Касательной к параболы $y = x^2$* называется прямая, не параллельная оси ординат и имеющая с параболой ровно одну общую точку.

Ось абсцисс имеет с параболой $y = x^2$ единственную общую точку – начало координат; ось абсцисс не параллельна оси ординат. Поэтому ось абсцисс – касательная к параболы $y = x^2$ в её вершине.

Свойство 2. График $y = x^2$ касается оси абсцисс в начале координат.

Если провести карандашом по графику $y = x^2$ слева направо, то до начала координат мы как бы «спускаемся с горы», а после начала координат мы «пойдём в гору». То есть на промежутке $(-\infty; 0]$ с увеличением значений x значения функции уменьшаются (говорят, что функция на этом промежутке *убывает*). А на промежутке $[0; +\infty)$, наоборот, с увеличением значений x значения функции тоже увеличиваются (говорят, что функция на этом промежутке *возрастает*).

Свойство 3. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = x^2$ *убывает*, а на промежутке $[0; +\infty)$ – *возрастает*.

При противоположных значениях аргумента функция принимает одинаковые значения. Поэтому график данной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 1). Такие функции называют *чётными функциями*.

Свойство 4. Функция $y = x^2$ является *чётной*, её график симметричен относительно оси ординат.

* * *

Определение 2. Функция называется чётной, если при замене знака её аргумента значение функции не меняется.

$$\forall x \in X: f(-x) = f(x), \text{ где } X - \text{область определения функции}$$

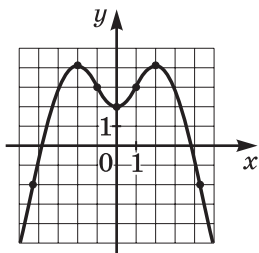


Рис. 2

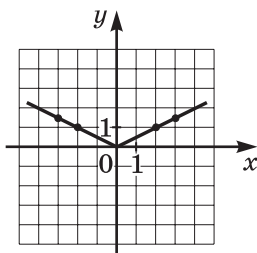


Рис. 3

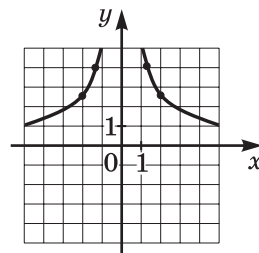


Рис. 4

Если график чётной функции содержит точку плоскости с координатами $(x; y)$, то он содержит и точку $(-x; y)$. Это означает, что график любой чётной функции симметричен относительно оси ординат. Примеры графиков чётных функций приведены на рис. 2–4.

Анализируя зависимость объёма куба V от длины его ребра a , перейдём к рассмотрению функции $y = x^3$, распространив область определения, как и в предыдущем случае, на множество всех чисел: $X = (-\infty; +\infty)$.

Заполним таблицу, учитывая, что $(-x)^3 = -x^3$.

x	0	$\pm 0,5$	± 1	$\pm 1,5$	± 2	± 3
y	0	$\pm 0,125$	± 1	$\pm 3,375$	± 8	± 27

Отметим на рисунке точки, указанные в таблице, и соединим их плавной кривой. Получим график функции $y = x^3$, который мы будем называть *кубической параболой* (рис. 5). Кубическая парабола располагается в I и III координатных четвертях (знак y всегда совпадает со знаком x).

Сформулируем свойства функции $y = x^3$ и её графика. Заметим вначале, что при неограниченном увеличении $|x|$ значение $|y|$ возрастает ещё «быстрее», чем у параболы. Так, при увеличении $|x|$ от 1 до 10 значение $|y|$ увеличивается с 1 до 1000 (у параболы с 1 до 100). А уже при $x = 3$ на рисунке не умещается значение $y = 27$.

Аналогично при уменьшении $|x|$ значение $|y|$ уменьшается значительно «быстрее», чем у параболы. Например, если $x = 0,1$, то $y = 0,001$; если $x = 0,01$, то $y = 0,000001$. В силу этого ветви кубической параболы ещё более крутые, чем у параболы, а при приближении к началу координат кривая $y = x^3$ ещё более тесно «прижимается» к оси абсцисс, чем парабола $y = x^2$.

Свойство 1. При удалении от начала координат кубическая парабола поднимается вверх ещё круче, а при приближении к началу координат – «прижимается» к оси абсцисс ещё ближе, чем обычная парабола.

В этом случае также говорят, что график касается оси абсцисс в начале координат, но здесь касание происходит более хитро: касательная протыкает график (одна часть графика лежит по одну сторону от касательной, другая – по другую сторону). Как говорят, график имеет в начале координат *перегиб* относительно оси абсцисс. Следует отметить, что такое определение касательной, с которым мы сталкивались раньше, годится только для некоторых очень простых кривых линий (окружность, парабола). С определением касательной для более сложных случаев мы сможем познакомиться позже, нам оно пока недоступно. Отметим лишь, что касательная к графику $y = x^3$ может, помимо точки касания, иметь и другую общую точку с графиком, в которой она пересекает его.

Свойство 2. Кубическая парабола имеет перегиб в начале координат.

Если двигаться по графику $y = x^3$ слева направо, мы «пойдём в гору»: с увеличением значений x значения функции $y = x^3$ увеличиваются. Другими словами, функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения. Такие функции называются *возрастающими*. Функции, которые убывают на всей области определения, называются *убывающими*.

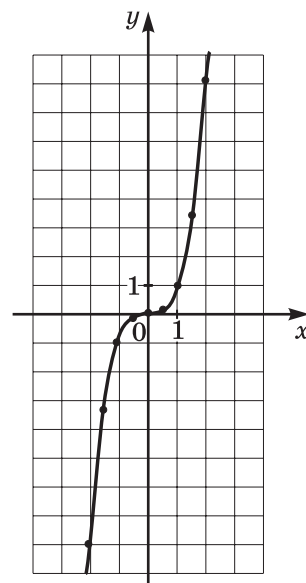


Рис. 5



Свойство 3. Функция $y = x^3$ является *возрастающей* на всей области определения $X = (-\infty; +\infty)$.

При противоположных значениях аргумента значения функции также противоположны, так как $(-x)^3 = -x^3$. Поэтому график данной функции симметричен относительно начала координат (рис. 7). Такие функции называют *нечётными* функциями.

Свойство 4. Функция $y = x^3$ является нечётной, её график симметричен относительно начала координат.

* * *

Определение 3. Функция называется *нечётной*, если при замене знака её аргумента значение функции изменяет свой знак.

$$\forall x \in X: f(-x) = -f(x), \text{ где } X - \text{область определения функции}$$

Если график нечётной функции содержит точку плоскости с координатами $(x; y)$, то он содержит и точку $(-x; -y)$. Это означает, что график любой нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Примеры графиков нечётных функций приведены на рис. 6–9.

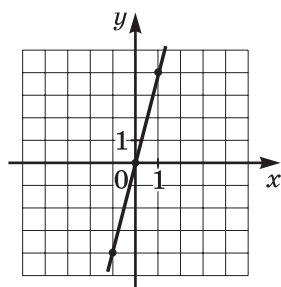


Рис. 6

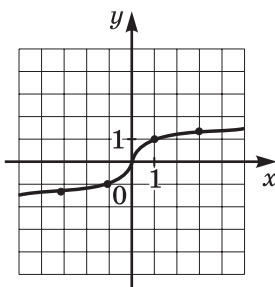


Рис. 7

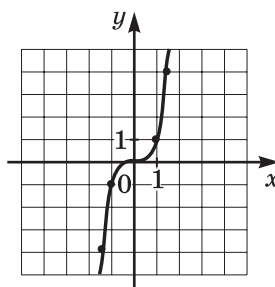


Рис. 8

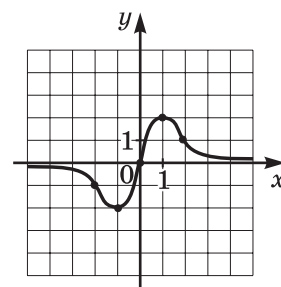


Рис. 9

Обратим внимание на то, что функция $y = x^2$ – чётная, а функция $y = x^3$ – нечётная. Связано ли это с тем, что 2 – чётное число, а 3 – нечётное? Оказывается, связано! Попробуем установить эту взаимосвязь, рассмотрев обобщённую *степенную* функцию $y = x^n$, где n – произвольное натуральное число.

Определение 4. Функцию вида $y = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$, называют *степенной функцией с натуральным показателем*. (Далее для простоты такие функции мы будем называть просто степенными функциями.)

Чётные степени противоположных чисел равны: $(-x)^2 = x^2$, $(-x)^4 = x^4$, $(-x)^6 = x^6$ и т. д. Поэтому функция $y = x^n$ с любым чётным коэффициентом $n = 2, 4, 6$ и т. д., подобно функции $y = x^2$, чётная.

Напротив, нечётные степени противоположных чисел противоположны: $(-x)^3 = -x^3$, $(-x)^5 = -x^5$, $(-x)^7 = -x^7$ и т. д. Значит, функция $y = x^n$ с любым нечётным коэффициентом $n = 3, 5, 7$ и т. д., подобно функции $y = x^3$, нечётная (при $n = 1$ функция $y = x^1$ или $y = x$, также нечётна).

Именно отсюда и произошли термины «чётная функция» и «нечётная функция». Однако свойством чётности или нечётности обладают и функции, которые не являются степенными. Так, известная нам функция $y = |x|$ является чётной, хотя она не содер-



жит никакой чётной степени. Существуют также функции, которые не являются ни чётными, ни нечётными. Примером такой функции служит линейная функция $y = kx + b$, где $k, b \neq 0$.

* * *

Какими же ещё свойствами обладают степенные функции и их графики?

Все графики функций $y = x^n$ при чётном n имеют примерно такой же вид, как парабола $y = x^2$, а при нечётном – как кубическая парабола $y = x^3$, но при этом существенно отличаются от них.

Действительно, с увеличением показателя n при неограниченном увеличении $|x|$ соответствующие значения $|y|$ возрастают ещё более резко, чем для функций $y = x^2$ и $y = x^3$. И наоборот, при неограниченном уменьшении $|x|$ соответствующие значения $|y|$ уменьшаются значительно быстрее, чем для функций $y = x^2$ и $y = x^3$. Поэтому чем больше n , тем «круче» становятся ветви графика и тем «теснее прижимается» он к оси абсцисс в начале координат.

Если n чётное, то функции $y = x^n$ подобно функции $y = x^2$ убывают при $x \in (-\infty; 0]$, возрастают при $x \in [0; +\infty)$ и касаются оси абсцисс в начале координат. А если n нечётное, то функции $y = x^n$, как и $y = x^3$, являются возрастающими на всей числовой прямой $(-\infty; +\infty)$ и имеют в начале координат перегиб.

Графики всех степенных функций проходят через начало координат $(0; 0)$ и точку $(1; 1)$. Их симметричность зависит от чётности показателя.

Построим для примера график функции $y = x^4$. Функция чётная, поэтому достаточно составить таблицу для неотрицательных значений x и воспользоваться симметрией графика относительно оси ординат.

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	0,0625	1	5,0625	16

Отметим на графике точки и соединим их плавной линией. Мы видим, что график по форме напоминает параболу со всеми её свойствами, но это – не парабола: у данного графика более «сжатый» и «приплюснутый» вид (рис. 10).

Анализируя шаги, предпринятые нами для построения графиков степенных функций и свойства этих функций, можем записать следующий алгоритм.

Алгоритм построения графика функции $y = x^n$, $n \in N$

1. Заполнить таблицу, задав несколько положительных значений x и вычислив соответствующие им значения y по формуле $y = x^n$.

x	0	1			
y	0	1			

2. Отметить точки с координатами $(x; y)$, полученными в таблице.
3. Для чётного n построить точки, симметричные отмеченным относительно оси ординат, они имеют координаты $(-x; y)$. Для нечётного n построить точки $(-x; -y)$, симметричные отмеченным относительно начала координат.
4. Соединить полученные точки плавной линией, учитывая, что чем больше n , тем теснее «прижимается» график к оси абсцисс в начале координат.

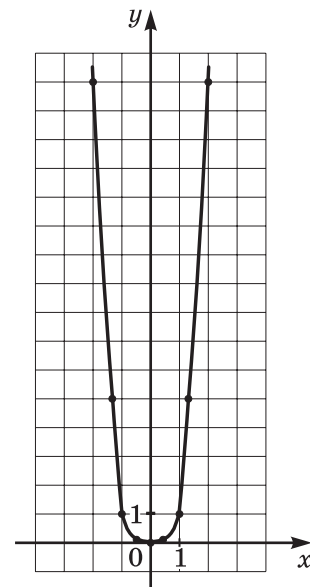


Рис. 10

К

293 Найдите значение выражения (устно):а) a^2 , если $a = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, 7, -7$;б) b^3 , если $b = 0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, -1, 4, -4$.**294**

Расположите положительные значения выражений в порядке возрастания. Что означает понятие, полученное в ответе?

У	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	В	$(-4)^3$	К	2^3	Ф	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	Ц	$(-3)^2$	Я	5^4
		И	$(-5)^2$	Н	2^2			А	$(-2)^3$	Д	-1^8

295

- 1) Запишите формулу зависимости площади квадрата S в см^2 от длины стороны a в см .
- 2) Если задуманное число b умножить на само себя, то получится число r . Запишите формулу зависимости числа r от b .
- 3) Участок перед домом имеет форму квадрата. Длина участка равна h метров. Площадь готового рулонного газона для этого участка составила $G \text{ м}^2$. Запишите формулу зависимости площади газона G в м^2 от длины участка $h \text{ м}$.
- 4) Запишите формулу, с помощью которой можно вычислить квадрат целого числа, обозначив это число буквой z , а его квадрат — c .
- 5) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их всех с помощью одной формулы. Является ли эта зависимость функциональной?
- 6) Задайте эту функцию таблично:

x	0	0,5	-0,5	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
y											

Нужно ли, вычислив значение функции от числа x , вычислять значения функции от $-x$?

7) Постройте график функции, используя полученную таблицу. Сравните его с графиком, изображённым на с. 97 учебника. Прочитайте в учебнике, как называется полученная кривая.

8) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на с. 98 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

296

- 1) Запишите формулу зависимости объема куба V в м^3 от длины стороны a в м .
- 2) Если задуманное число b дважды умножить на само себя, то получится число r . Запишите формулу зависимости числа r от b .
- 3) Аквариум имеет форму куба. Высота аквариума равна h дециметрам. Запишите формулу зависимости объёма аквариума G в литрах от высоты аквариума h в дм .
- 4) Запишите формулу, с помощью которой можно вычислить куб целого числа, обозначив число буквой z , а его куб — c .
- 5) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их всех с помощью одной формулы. Является ли эта зависимость функциональной?
- 6) Задайте эту функцию таблично:

x	0	0,5	-0,5	1	-1	1,5	-1,5	2	-2	3	-3
y											

Нужно ли, вычислив значение функции от числа x , вычислять значения функции от $-x$?

7) Постройте график функции, используя полученную таблицу. Сравните его с графиком, изображённым на с. 99 учебника. Прочитайте в учебнике, как называется полученная кривая.

8) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на с. 99–100 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

297 Функция задана формулой $f(x) = x^8$. Сравните:

- а) $f(5)$ и $f(3)$; в) $f(-5)$ и $f(-3)$; д) $f(-2,5)$ и $f(2,5)$; ж) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ и $f\left(\frac{1}{4}\right)$;
б) $f(-5)$ и $f(3)$; г) $f(0)$ и $f(-6,3)$; е) $f(0,4)$ и $f(1)$; з) $f(-31,2)$ и $f(32)$.

298 Функция задана формулой $f(x) = x^{11}$. Сравните:

- а) $f(6,6)$ и $f(8)$; в) $f(-15,4)$ и $f(-10,1)$; д) $f(3,2)$ и $f(-3,2)$; ж) $f\left(\frac{1}{8}\right)$ и $f\left(\frac{1}{10}\right)$;
б) $f(6)$ и $f(-8,5)$; г) $f(-3)$ и $f(0)$; е) $f(0,2)$ и $f(0,7)$; з) $f(-0,3)$ и $f(-1)$.

299 Изобразите схематически график функции $y = x^4$. Как вы думаете, каковы минимальное и максимальное значения функции на отрезке:

- а) $[-1; 1]$; б) $[-3; 3]$; в) $[0; 2]$?

300 Изобразите схематически график функции $y = x^7$. Как вы думаете, каковы минимальное и максимальное значения функции на отрезке:

- а) $[-1; 1]$; б) $[0; 2]$; в) $[-2; 1]$?

Укажите, на каких промежутках из области определения функция положительна, отрицательна.

301 Первая координатная четверть представлена на листе формата А4 в масштабе 1 единица в 1 см. Оцените, при каком наибольшем натуральном n на листе поместится точка графика $y = x^n$: а) с абсциссой 1,5; б) с абсциссой 1,2.

302 Приведите пример чётной функции, пример нечётной функции. Может ли функция быть одновременно и чётной, и нечётной?

303 Какие из указанных функций являются чётными, какие нечётными, а какие ни теми, ни другими?

- а) $y = x^2$; д) $y = 13x^4 - x^{10}$; и) $y = |x|$;
б) $y = x^5$; е) $y = x^3 - x$; к) $y = x^2 - 5x + 6$;
в) $y = 2x^2 + 5x^6$; ж) $y = x^7 - 7$; л) $y = -x$;
г) $y = x^8 + 5$; з) $y = -3x + 3$; м) $y = 0,2x^9 + 0,8x^{11}$.

Заполните таблицу:

Чётные функции	Нечётные функции	Функции, не являющиеся ни чётными, ни нечётными

304 Изобразите схематически графики функций с заданной областью определения. Исследуйте эти функции на чётность.

- а) $y = x^2, x \in [-4; 4]$; д) $y = x, x \in (-3; 3]$;
б) $y = x^4, x \in [-2; 2]$; е) $y = x^3, x \in [-2; 0]$;

в) $y = x^6$, $x \in (-3; 3)$;

ж) $y = x^5$, $x \in [0; +\infty)$;

г) $y = x^8$, $x \in [-1; 1)$;

з) $y = x^7$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Проанализируйте результаты своей работы, обращая внимание на симметричность области определения данных функций. Предположите, каким свойством должна обладать область определения чётной или нечётной функции.

305 Среди функций с заданной областью определения укажите чётные функции, а затем нечётные функции. Функции с какой областью определения целесообразно проверять? Сделайте вывод.

а) $y = x^{10}$, $x \in [-1; 1]$;

г) $y = x^9$, $x \in [-3; -1]$;

б) $y = x^{12}$, $x \in (-\infty; 1]$;

д) $y = x^{11}$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

в) $y = x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

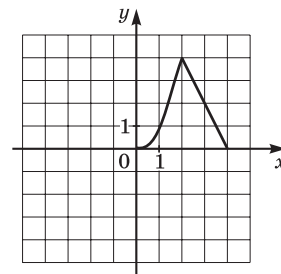
е) $y = |x|$, $x \in [-2; 3]$.

306 На рисунке построена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения: $[-4; 4]$. Дополните график, если известно, что $y = f(x)$ – чётная функция.

1) Найдите $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-4)$.

2) Выделите красным цветом часть кривой, на которой функция возрастает.

3) Укажите, при каких значениях x функция возрастает.



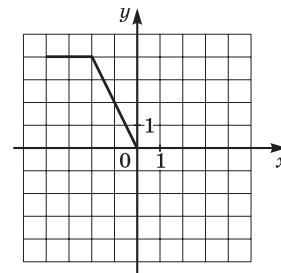
307 На рисунке построена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения $[-4; 4]$. Дополните график, если известно, что $y = f(x)$ – нечётная функция.

1) Найдите $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$.

2) Выделите красным цветом часть кривой, на которой функция убывает.

3) Укажите, при каких значениях x функция убывает.

4) Выделите зелёным цветом часть кривой, на которой функция постоянна. Укажите, при каких значениях x функция постоянна.



308 Постройте графики функции $y = x^2$ и $y = x^3$.

«Прочитайте» каждый график по следующему плану:

1. Укажите область определения функции: $D(y)$.
2. Если возможно, укажите область значений функции: $E(y)$.
3. Пользуясь симметрией области определения функции, выясните, может ли функция являться чётной или нечётной. Если может, докажите её чётность либо нечётность.
4. Укажите, на каких промежутках из области определения функция равна 0, положительна, отрицательна.
5. Укажите, на каких промежутках из области определения функция возрастает (убывает, постоянна).
6. Если возможно, укажите наибольшее, наименьшее значение функции.

309 Постройте график функции с заданной областью определения. «Прочитайте» график по плану.

а) $y = x^{14}$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

д) $y = x^{11}$, $x \in (-1; 1]$;

б) $y = x^6, x \in (-1; 1)$;

е) $y = x^5, x \in [-1; +\infty)$;

в) $y = x^4, x \in [1; 2)$;

ж) $y = x^9, x \in (-\infty; -1]$;

г) $y = x^2, x \in [-3; 1]$;

з) $y = x^3, x \in [-2; -1) \cup [1; 2)$.

310 Постройте графики $y = x^2, x = 0, x = 3, x = 5, y = 0, y = 3, y = -5, y = 5x$ и ответьте на вопросы.

а) Сколько общих точек имеют эти прямые с параболой?

б) Какие из прямых имеют с параболой только одну общую точку? Все ли из них являются касательными?

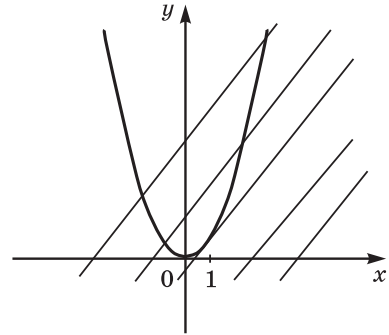
Докажите, что любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает параболу ровно в одной точке.

311 Проанализируйте рисунок и ответьте на вопросы.

а) На какие группы можно разбить эти прямые?

б) Какая из этих прямых является касательной к параболе?

Сравните определение касательной к параболе и касательной к окружности, известное из курса геометрии. Чем они отличаются?



312 Сколько общих точек имеют графики функций:

а) $y = x^3$ и $y = 0$;

б) $y = x^3$ и $y = 8$;

в) $y = x^3$ и $y = -8$?

313 Может ли прямая:

а) пересечь график функции $y = x^3$ в трёх различных точках;

б) пересечь график функции $y = x^3$ ровно в одной точке?

314 Постройте в одной координатной плоскости графики функций:

а) $y = x^2$ и $y = 1$;

б) $y = x^2$ и $y = x$;

в) $y = x^2$ и $y = 2x - 1$.

Сколько общих точек имеют графики функций? Укажите, при каком значении аргумента значения функций совпадают.

315 Воспользовавшись результатами выполнения предыдущего задания, решите уравнение:

а) $x^2 = 1$;

б) $x^2 = x$;

в) $x^2 = 2x - 1$.

316 Решите графически уравнение:

а) $x^3 = -1$;

б) $x^2 = 4x - 3$;

в) $x^5 = x$;

г) $x^6 = |x|$.

317 Докажите, что при всех значениях x : а) $|x|^2 = x^2$; б) $|x|^3 = |x^3|$.

318 Докажите, что:

а) сумма и произведение чётных функций – чётные функции;

б) сумма нечётных функций – нечётная функция;

в) произведение нечётных функций – чётная функция.

Можно отметить связь этих утверждений с теми фактами, что сумма двух чётных или двух нечётных чисел – чётное число. Попробуйте отразить на языке чётности или нечётности функций те факты, что произведение двух чётных чисел – чётное число, а произведение двух нечётных чисел – нечётное число.

π

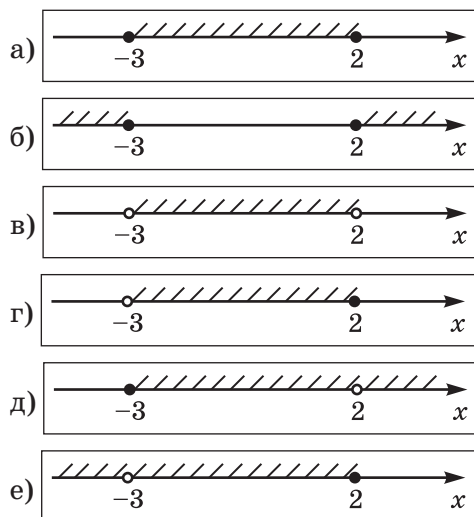
319 Без помощи калькулятора сравните рациональные числа:

- а) $0,59$ и $\frac{7}{12}$; в) $0,(76)$ и $0,767$; д) $0,(62)$ и $\frac{13}{21}$;
 б) $-\frac{7}{15}$ и $-0,(45)$; г) $-0,384$ и $-0,(38)$; е) $-0,1(7)$ и $-\frac{1}{6}$.

320 Определите, при каких значениях переменных имеет смысл выражение:

- а) $-\frac{1}{x}$; б) $\frac{a-1}{(a+1)(a-1)}$; в) $\frac{2mn}{(2n-5)} : \frac{(m+1)}{3mn}$.

321 Установите соответствие между изображением числового промежутка на числовой прямой и его аналитической записью.



- 1) $(-\infty; -3) \cup (-3; 2]$
- 2) $(-3; 2]$
- 3) $[-3; 2]$
- 4) $[-3; 2) \cup (2; +\infty)$
- 5) $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$
- 6) $(-3; 2)$

322 Постройте график функции $y = -2x + 3$. С помощью графика найдите значения, при которых точки графика лежат:

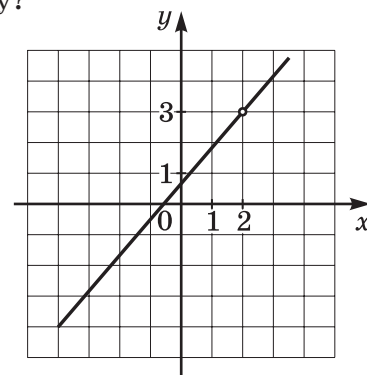
- а) выше оси абсцисс; в) выше прямой $y = 1$;
 б) ниже оси абсцисс; г) ниже прямой $y = 3$.

Проверьте полученные вами результаты, составив и решив соответствующие неравенства.

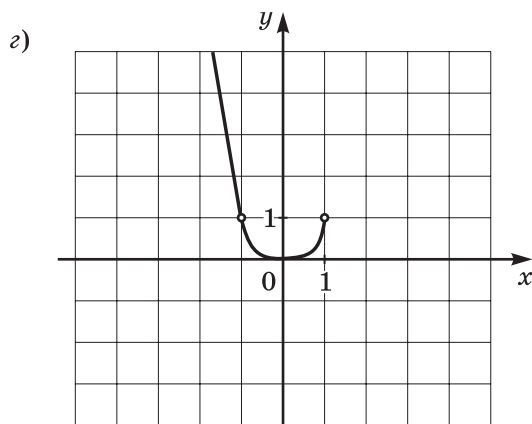
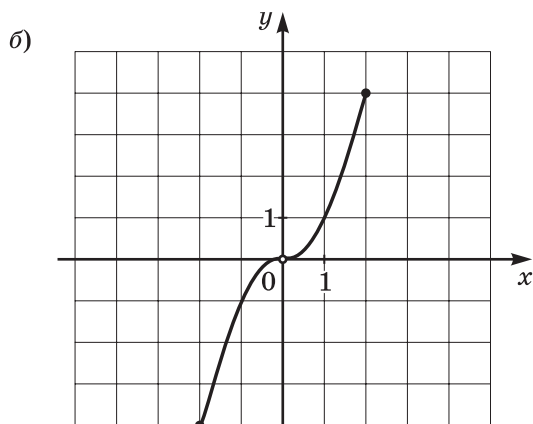
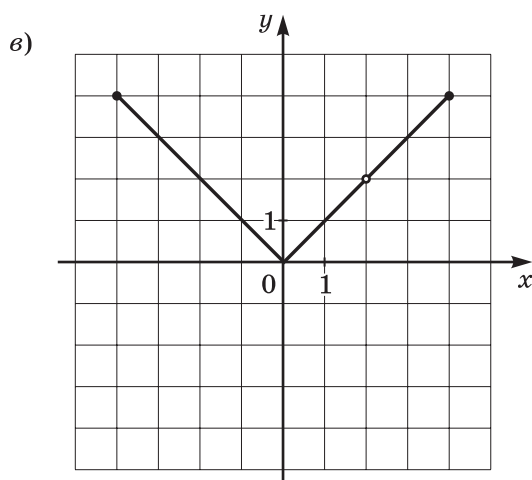
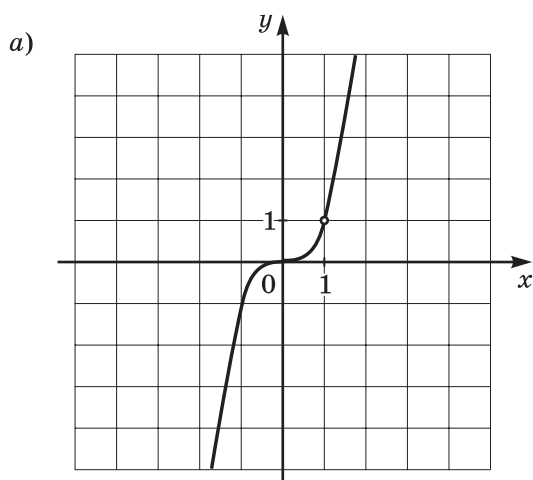
323 Решите неравенство $4(-2x + 1) + 4x < 16$. Из множества решений данного неравенства удалите все целые числа, значения которых больше 0, но меньше 4. Проиллюстрируйте полученное множество на числовой прямой. Каким образом вы отметили, что числа 1, 2, 3 не принадлежат данному множеству?

324 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На графике «выколота» точка с координатами (2; 3). Вспомните смысл «выколотой точки» на схеме, изображающей множество решений неравенства, и ответьте на вопросы:

- 1) Входит ли $x = 2$ в область определения данной функции?
 2) Входит ли $y = 3$ в область значений данной функции?
 3) Какова область определения и область значений данной функции?



325 Найдите область определения функций, графики которых изображены на рисунках а–г.



Д

326 Функция задана формулой $f(x) = x^2$. Постройте график данной функции и «прочитайте» его по плану. Как называется построенная кривая?

327 Функция задана формулой $f(x) = x^2$. Сравните:

а) $f(0,005)$ и $f(-0,005)$;

в) $f(0)$ и $f(-3,0008)$;

б) $f(200)$ и $f(-500)$;

г) $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $f\left(\frac{1}{8}\right)$.

Целесообразно ли использовать для сравнения график функции?

328 Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Сравните:

а) $f(-3)$ и $f(2)$;

б) $f(3,7)$ и $f(7,3)$;

в) $f(-1)$ и $f(0)$;

г) $f\left(-\frac{1}{28}\right)$ и $f\left(\frac{1}{28}\right)$.

Постройте график данной функции и «прочитайте» его. Как называется построенная кривая?

329 Изобразите схематически график функции $y = x^8$. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[-2; 1]$.

330 Изобразите схематически график функции $y = x^5$. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[-1; 2]$.

331 Сколько общих точек имеют графики функций:

а) $y = x^3$ и $y = x^4$;

б) $y = x^4$ и $y = x^6$;

в) $y = x^5$ и $y = x^6$?

332 Решите графически уравнение:

а) $x^2 = -3x - 2$;

б) $x^3 = -x$;

в) $x^8 = 1$;

г) $x^5 = -|x|$.

333 Может ли прямая: а) пересечь график функции $y = x^5$ в трёх различных точках; б) пересечь график функции $y = x^5$ в двух различных точках?

334 Разбейте функции на группы и заполните таблицу:

а) $y = x^4$;

д) $y = 8x^6 - x^3$;

и) $y = -|x|$;

б) $y = x^4 + 3$;

е) $y = x^5 - x^3$;

к) $y = x^4 - 5x^2 + 6$;

в) $y = 10,2x^6 - 3x^2$;

ж) $y = x^9 - 3$;

л) $y = x$;

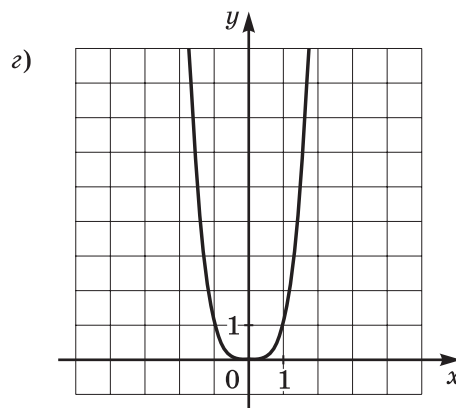
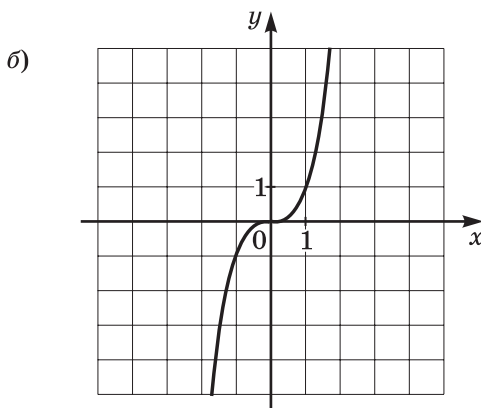
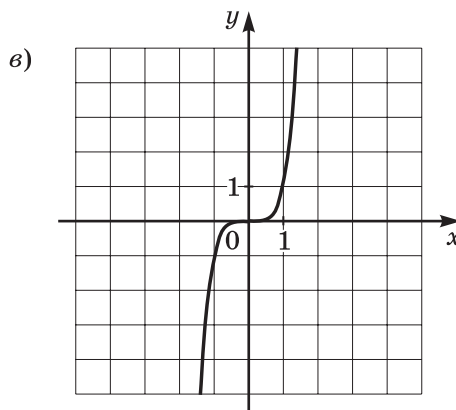
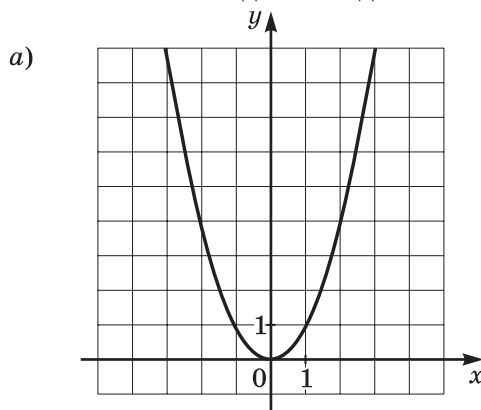
г) $y = (x + 5)^8$;

з) $y = -5x$;

м) $y = 2x^7 - x^3 + x$.

Чётные функции	Нечётные функции	Функции, не являющиеся ни чётными, ни нечётными

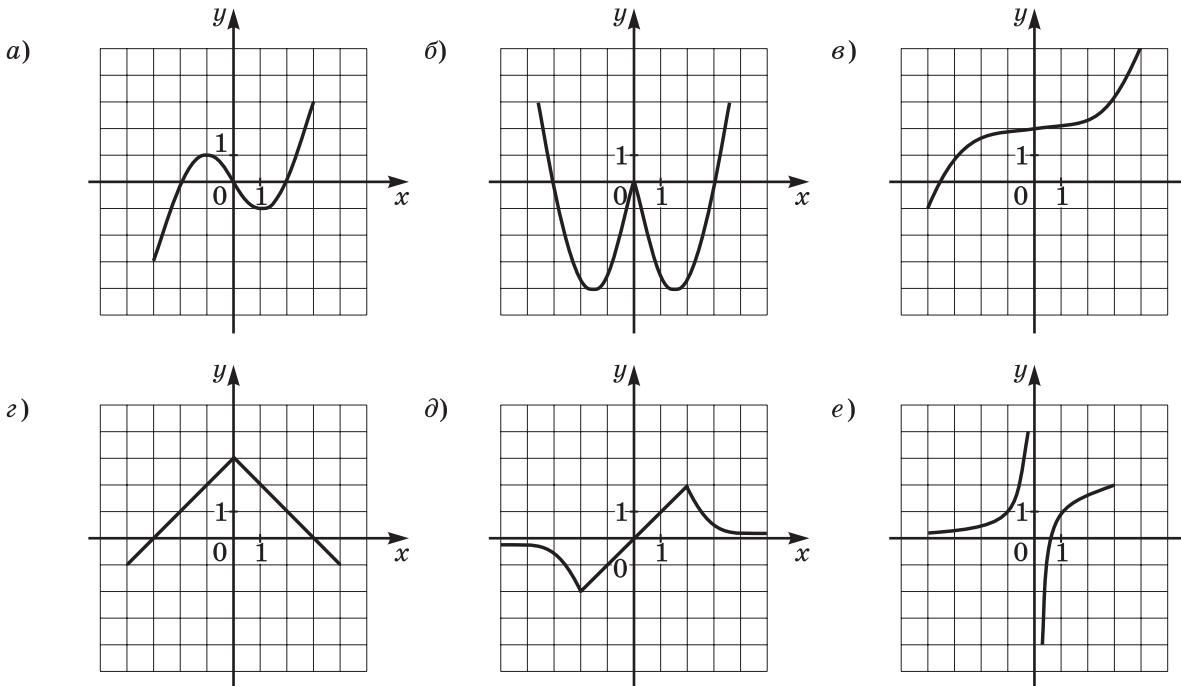
335 Даны графики нескольких степенных функций вида $y = x^k$, где k – натуральное число. Укажите для каждой из них чётность показателя k .



336 Докажите, что модуль чётной функции и модуль нечётной функции являются чётными функциями.

337 Какие из графиков функций, изображенных на рис. а–е, являются графиками:

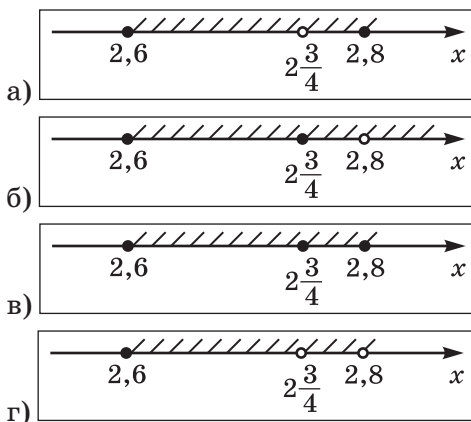
- 1) чётных функций;
- 2) нечётных функций;
- 3) функций, не являющихся ни чётными, ни нечётными?



338 Определите, при каких значениях переменных имеет смысл выражение:

- а) $\frac{1}{2a \cdot 5b}$;
- б) $\frac{x+1}{2}$;
- в) $\frac{2}{x+1}$;
- г) $\frac{3}{a(2a-1)}$;
- д) $\frac{1}{(2-y)(y+1)}$;
- е) $\frac{1}{5x^2y^5} - \frac{1}{(x-2)(y+3)}$.

339 Установите соответствие между изображением числового промежутка на числовой прямой и его аналитической записью.

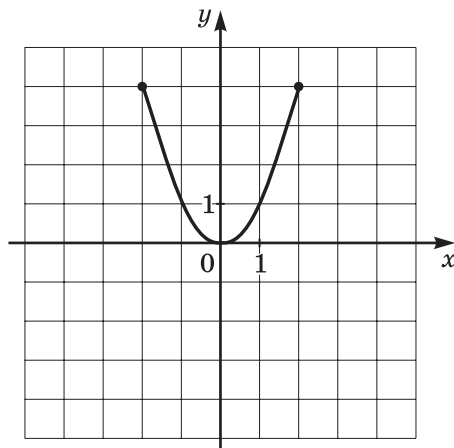


- 1) $\left[2,6; 2\frac{3}{4}\right) \cup \left(2\frac{3}{4}; 2,8\right)$
- 2) $[2,6; 2,8) \cup (2,8; +\infty)$
- 3) $[2,6; 2,8]$
- 4) $\left[2,6; 2\frac{3}{4}\right) \cup \left(2\frac{3}{4}; 2,8\right]$

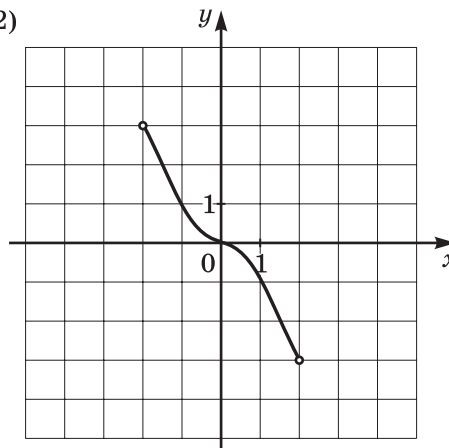
340

Установите соответствие между графиками функции $y = f(x)$, изображёнными ниже, и указанными областями определения.

1)

а) $(-2; 2)$;

2)

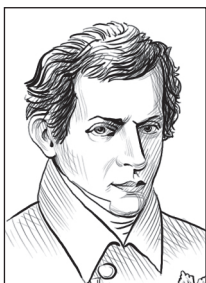
б) $[-2; 2]$.

с

341*

Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 3n^2 + 6n + 8$ является составным.

3.1.2. Обратная пропорциональность и её график



Понятия приобретаются чувствами, врождённым — не должно верить.

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856),
русский математик

В предыдущем пункте мы описали зависимости между величинами, которые можно обнаружить на практике, измеряя длину, площадь и объём реальных фигур. Описав их в общем виде, мы выявили свойства полученных функций, что позволило нам не только обобщить и систематизировать способы решения множества практических задач, связанных зависимостью подобного рода, но и познакомиться с другими функциями, обладающими аналогичными свойствами.

Рассматривая эти функции, мы абстрагировались от практической их стороны и основное внимание уделили исследованию связей между переменными. Тем самым мы начинаем осваивать новый метод познания — **абстракция**. Суть его заключается в познании реальных процессов путем выделения основных, наиболее существенных их сторон в отвлечении от всего внешнего, второстепенного, случайного, несущественного. Часто результатом применения абстракции является вывод новых законов. Именно таким способом были сделаны многие научные открытия, например революционная для начала XIX века неевклидова геометрия Н. И. Лобачевского. Открытие Лобачевского не было признано его современниками, однако ни стена непонимания, ни насмешки не остановили великого русского

математика. Опередив своё время, его теория нашла своё практическое применение только во второй половине XX века, став одним из необходимых условий, например, полёта человека в космос.

Ранее посредством обобщения закономерностей таких процессов, как движение, покупка товаров, работа и пр., мы вывели формулу произведения $a = bc$, дающую общее описание формул движения $s = vt$, стоимости $C = an$, работы $A = wt$ и пр. В результате абстрагирования от практики нами была исследована функция $y = kx$ – прямая пропорциональность, описывающая зависимость y от x при одном постоянном множителе в формуле $a = bc$ (множителе b или c , который мы обозначили k). Благодаря этому мы установили для всех без исключения процессов данного вида различные свойства их протекания, которые мы смогли затем использовать при решении практических задач: например, то, что при увеличении (уменьшении) одной величины в несколько раз, другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Однако взаимосвязь между величинами вида $a = bc$ в случае постоянного значения произведения a осталась без подобного обобщенного исследования. В данном пункте мы заполним этот пробел.

Пусть величина a принимает постоянное значение – например:

- на одном и том же участке пути объекты движутся с разной скоростью;
- на фиксированную сумму денег покупается товар по разной цене;
- заданный объём работы выполняется с разной производительностью.

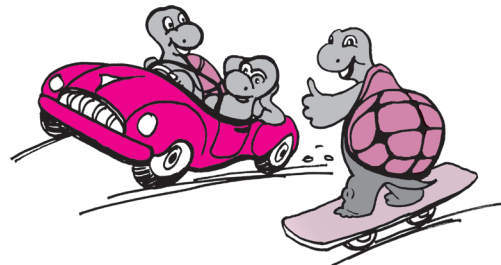


Если в каждом подобном процессе значение постоянной величины a обозначить буквой k , а значения двух других величин – x и y , то зависимость y от x можно записать в виде $y = \frac{k}{x}$. Данная зависимость, как мы уже знаем, называется *обратной пропорциональностью*, а число k называется *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Очевидно, что величины, связанные обратной пропорциональностью, не могут принимать нулевые значения ($k = x \cdot y \neq 0$). Действительно, на практике никакое движение не может осуществляться на нулевом расстоянии и нельзя произвести покупку на 0 рублей.

Само название «обратная пропорциональность» связано с тем, что, в соответствии с равенством $x \cdot y = k$, если $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k$, то $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$ («обратная пропорция»).

Из полученной пропорции, в частности, следует известное нам свойство величин, связанных обратной пропорциональной зависимостью: с увеличением (уменьшением) значений одной величины в несколько раз значения другой величины соответственно уменьшаются (увеличиваются) во столько же раз. Например, если скорость автомобиля в 10 раз *больше* скорости пешехода, то на путь s он потратит в 10 раз *меньше* времени, чем пешеход; а если скорость пешехода в 3 раза *меньше* скорости велосипедиста, то на путь s он потратит в 3 раза *больше* времени, чем велосипедист.



Нетрудно убедиться, что обратная пропорциональность является функциональной зависимостью: каждому значению x , не равному нулю, соответствует единственное значение y . Ясно, что значения величин во всех рассмотренных процессах принимают лишь положительные значения. Однако существуют величины, значения которых могут быть и отрицательными. Поэтому естественно, как и в случае степенной функции, абстрагироваться от реальных процессов и рассмотреть данную функцию на множестве всех допустимых значений переменной.

Уточним определение обратной пропорциональности и исследуем её свойства.

Определение. Функцию вида $y = \frac{k}{x}$, где k – некоторое не равное нулю число, называют *обратной пропорциональностью*. Число k называется *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Так как делить на нуль нельзя, то областью определения X функции $y = \frac{k}{x}$ являются все числа, отличные от нуля: $X = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

При изменении знака аргумента x на противоположный значение функции также меняется на противоположное:

$$f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x).$$

Следовательно, данная функция нечётна, и её график симметричен относительно начала координат.

Свойство 1. Обратная пропорциональность является нечётной функцией; график обратной пропорциональности симметричен относительно начала координат.

Построим график функции $y = \frac{k}{x}$, при $k = 2$. Для этого составим таблицу соответствующих значений переменных x и y для положительных значений x .

x	0,4	0,5	0,8	1	2	2,5	4	5
y	5	4	2,5	2	1	0,8	0,5	0,4

Отметим полученные точки на координатной плоскости Oxy и соединим их плавной линией, а затем симметрично отобразим построенную кривую относительно начала координат.

Мы видим, что график функции $y = \frac{2}{x}$ состоит из двух ветвей. Одна ветвь лежит в I координатной четверти (для её точек $x > 0, y > 0$); другая ветвь лежит в III координатной четверти (для её точек $x < 0, y < 0$) (рис. 1). Эта кривая линия на плоскости, состоящая из двух ветвей, называется *гиперболой*.

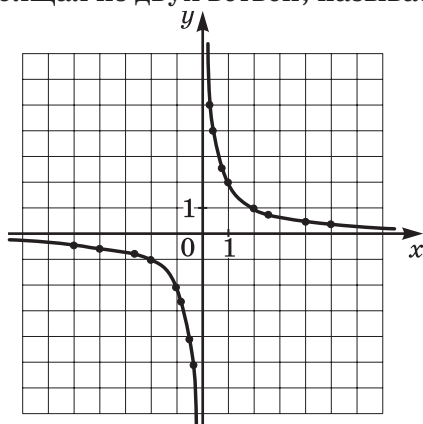


Рис. 1

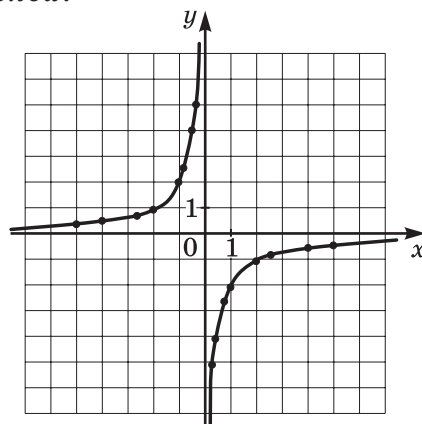


Рис. 2

Ясно, что такой же (расположенной в I и III координатных четвертях) гиперболой будет являться график функции $y = \frac{k}{x}$ при любом положительном значении k .

Если же $k < 0$, то координаты любой точки $(x; y)$, лежащей на графике, имеют разные знаки: если $x > 0$, то $y < 0$; если $x < 0$, то $y > 0$. Поэтому графиком функции $y = \frac{k}{x}$ при любом отрицательном значении k является гипербола, лежащая во II и IV четвертях. На рис. 2 показан график функции $y = -\frac{2}{x}$.

Свойство 2. График $y = \frac{k}{x}$ состоит из двух ветвей. При $k > 0$ они расположены в I и III координатных четвертях, а при $k < 0$ – во II и IV координатных четвертях.

При очень малых значениях $|x|$ соответствующие значения $|y|$ будут очень велики, и наоборот. Например, для функции $y = \frac{2}{x}$, при $x = 0,01$ значение $y = 200$, при $x = 0,001$, $y = 2000$ и т. д. Наоборот, при $x = 100$ значение $y = 0,02$, при $x = 1000$, $y = 0,002$ и т. д. При противоположных значениях x значения y противоположны.

Это означает, что при малых по модулю значениях x график $y = \frac{k}{x}$ неограниченно приближается к оси ординат, но никогда к ней не прикасается и не пересекает её ($x \neq 0$, $y \neq 0$). Если же значения модуля x неограниченно увеличиваются, то график $y = \frac{k}{x}$ неограниченно приближается к оси абсцисс. Такие прямые, к которым график функции неограниченно приближается, являются **асимптотами** данного графика.

Свойство 3. Ось ординат является вертикальной асимптотой графика $y = \frac{k}{x}$, а ось абсцисс – его горизонтальной асимптотой.

Если $k > 0$, то каждая ветвь гиперболы идёт вниз (с увеличением значений x значения y уменьшаются), а при $k < 0$ – вверх (с увеличением x значения y увеличиваются). Значит, функция $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, а при $k < 0$ – возрастает.

Свойство 4. На промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция $y = \frac{k}{x}$ убывает при $k > 0$ и возрастает при $k < 0$.

В отличие от прямой пропорциональности, для построения которой достаточно знать положение двух её точек, гипербола является более сложной линией, и для её построения нужно изобразить как можно больше точек графика. Выявленные общие свойства позволяют сократить трудоёмкость этого процесса и вместе с тем выполнить самопроверку построенного графика. Приведём пример.

Пример.

На рис. 3 восьмиклассник Саша проиллюстрировал, как изменяется длина y стороны прямоугольника площадью в 5 м^2 при увеличении другой его стороны x в несколько раз. Верно ли Саша построил график?

Решение. Описанная зависимость $y(x)$ является обрат-

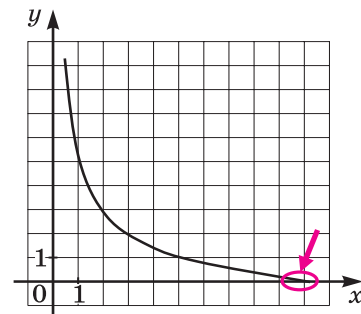


Рис. 3

ной пропорциональностью $y = \frac{5}{x}$, поэтому её график должен являться ветвью гиперболы, расположенной в I координатной четверти.

Однако кривая на рис. 3 имеет общую точку с осью абсцисс, что противоречит свойству 3. Этого достаточно, чтобы сделать вывод, что график построен неверно.

* * *

Отметим ещё одно важное свойство обратной пропорциональности, которое помогает быстрее построить её график и одновременно – проверить правильность своих построений.

Заметим, что если точка $(x; y)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$, то этому графику принадлежит и точка $(y; x)$:

$$y = \frac{k}{x} \Leftrightarrow x = \frac{k}{y}.$$

Легко видеть, что треугольник, образованный точками $(x; y)$, $(y; x)$ и началом координат $(0; 0)$, равнобедренный. Значит, его биссектриса – прямая $y = x$ – является одновременно и его осью симметрии. Поэтому любые две точки $(x; y)$ и $(y; x)$ гиперболы (и следовательно, сама гипербола) симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 4).

Аналогично можно доказать, что гипербола симметрична и относительно биссектрисы II и IV координатных углов – прямой $y = -x$.

Свойство 5. Гипербола симметрична относительно прямых $y = x$ и $y = -x$.

Пользуясь этим свойством, легко установить, что, например, график, изображенный на рис. 5, не является графиком обратной пропорциональности, так как он не симметричен относительно прямой $y = x$.

Анализируя выявленные свойства гиперболы, можем записать следующий алгоритм построения графика функции $y = \frac{k}{x}$.

Алгоритм построения графика функции $y = \frac{k}{x}$

1. Заполнить таблицу, задав несколько положительных значений x и вычислив соответствующие им значения y по формуле $y = \frac{k}{x}$.
2. Отметить на координатной плоскости точки с координатами $(x; y)$, полученными в таблице.
3. Соединить полученные точки плавной линией, учитывая, что оси координат являются асимптотами данного графика.
4. По точкам с координатами $(-x; -y)$ построить вторую ветвь гиперболы, симметричную первой относительно начала координат.

* * *

В завершение построения графика полезно проверить его симметричность относительно прямых $y = x$ и $y = -x$.

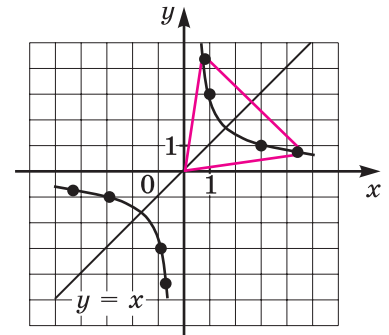


Рис. 4

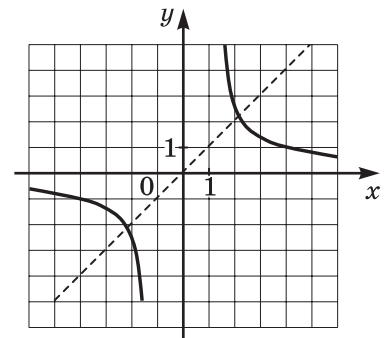


Рис. 5

К

342 Выберите из предложенных зависимостей те, которые являются прямой пропорциональностью, и укажите коэффициент пропорциональности. Для выбранных функций постройте графики.

- а) $y = 5x$; в) $y = x : 5$; д) $y = 5x - 5$; ж) $y = (-0,5)^2 x$;
 б) $y = 5x^2$; г) $y = 0,5x$; е) $y = -1,5$; з) $y = x \cdot (-5)$.

Приведите примеры величин, связанных прямой пропорциональностью.

343

1) Запишите формулу зависимости времени движения в часах, затраченного на 2 км, от скорости движения в км/ч. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

2) Запишите формулу зависимости количества яблок в кг, купленных на 150 рублей, от их цены в рублях. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

3) Какой единой обобщённой формулой можно записать две предыдущие зависимости? Как называется эта зависимость? Какое её свойство вам известно? Докажите, что эта зависимость является функцией.

4) Постройте график функции, описанной под цифрой 1, заполнив таблицу. Сравните его с графиком, изображённым на рис. 1 с. 112 учебника. Прочитайте, как называется полученная кривая.

5) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на с. 112–113 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

344

Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{12}{x}$.

Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 0,04; 0,12; 0,6; 30; 200; 2400.

Определите, принадлежит ли графику функции точка $A(-2; 6)$; $B(-0,5; -24)$; $C\left(\frac{3}{4}; 16\right)$; $D\left(\frac{6}{7}; -14\right)$; $F(-0,05; -240)$.

345

Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что график функции проходит через точку:

- а) $M(1; -2)$; б) $P(-3; -18)$; в) $K\left(\frac{1}{8}; 200\right)$; г) $Q(-10; 14)$; д) $R\left(\frac{4}{9}; -2\frac{1}{4}\right)$.

346

Можно ли указать обратную пропорциональность, график которой проходит через следующие две точки плоскости:

- а) $A(1; 3)$, $B(-2; 1)$; в) $A(1; 3)$, $B(-3; 1)$; д) $A(-2; -2)$, $B(-4; 1)$;
 б) $A(1; 3)$, $B(3; 1)$; г) $A(2; 2)$, $B(4; 1)$; е) $A(2; -2)$, $B(4; 1)$?

347

Постройте графики функций в одной системе координат и сделайте вывод об их взаимном расположении:

- а) $y = \frac{4}{x}$ и $y = -\frac{4}{x}$; б) $y = \frac{6}{x}$ и $y = -\frac{6}{x}$.

348

Не строя графика зависимости $y = \frac{k}{x}$, определите, в каких координатных четвертях он расположен, если

- а) $k = 2$; б) $k = -5$; в) $k = -0,5$; г) $k = 10$.

- 349** Функции заданы формулами $y = \frac{k_1}{x}$ и $y = \frac{k_2}{x}$, где k_1 и k_2 – положительные числа, причём $k_1 > k_2$. Какой из графиков расположен ближе к началу координат?
- 350** С помощью графика функции $y = -\frac{8}{x}$ найдите три значения аргумента, при которых значения функции:
- а) больше 2; г) меньше 1;
 б) больше 0; д) меньше 0;
 в) больше -4; е) меньше -8.
- 351** Как вы думаете, каковы минимальное и максимальное значения функции $y = \frac{3}{x}$ на отрезке:
- а) $[-3; -\frac{1}{3}]$; б) $[3; 9]$?
- 352** Как вы думаете, каковы минимальное и максимальное значения функции $y = -\frac{3}{x}$ на отрезке:
- а) $[-9; -1]$; б) $[0,3; 0,6]$?
- 353** Исследуйте функцию с заданной областью определения на чётность:
- а) $y = \frac{2}{x}$ при $x \in (-20; 0) \cup (0; 20)$; в) $y = \frac{10}{x}$ при $x \in [-100; 0,01]$;
 б) $y = -\frac{1,5}{x}$ при $x \in (-0,3; 0) \cup (0; 0,3]$; г) $y = -\frac{1,4}{x}$ при $x \in [-7; 0,7]$.
- 354** Какие из следующих функций являются: 1) чётными; 2) нечётными?
- а) $y = -\frac{1}{x}$; б) $y = x + \frac{1}{x}$; в) $y = x^3 - \frac{1}{x}$; г) $y = \frac{3}{|x|}$; д) $y = \frac{5}{x^2}$.
- Будут ли указанные вами функции чётными (нечётными), если ограничить их область определения до множества положительных чисел?
- 355** Дана функция $f(x) = \frac{0,2}{x}$. Найдите:
- а) $f(\frac{1}{5})$; б) $f(2)$; в) $f(-0,04)$; г) $f(-\frac{6}{25})$; д) $10 \cdot f(-0,001)$; е) $f(a)$.
- 356** Дана функция $f(x) = \frac{2}{x}$. Найдите:
- а) $f(-0,5b)$; б) $0,5f(d^2)$; в) $f(m+2)$; г) $\frac{2}{f(t+10)}$.
- 357** Дана функция $f(x) = \frac{5}{x}$. Докажите, что
- а) $\frac{1}{f(x-1)} + \frac{1}{f(x+1)} = \frac{2}{f(x)}$; б) $\frac{1}{f(x-1)} \cdot \frac{1}{f(x+1)} = \frac{1}{5f(x^2-1)}$.
- 358** Решите графически уравнение:
- а) $-\frac{3}{x} = 3$; б) $\frac{5}{x} = -2$; в) $-\frac{6}{x} = 0$; г) $-\frac{1}{x} = 1,5x + 2,5$;
 б) $\frac{1}{x} = x$; г) $\frac{5}{x} = 5x$; е) $-\frac{7}{x} = 3x$; з) $\frac{4}{x} = -x - 4$.
- 359** Решите графически систему уравнений:
- а) $\begin{cases} y = \frac{0,5}{x} \\ y = 1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ y = \frac{2}{3}x \end{cases}$; д) $\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = -x + 6 \end{cases}$; ж) $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x^4 \end{cases}$; и) $\begin{cases} y = -\frac{4}{x} \\ y = |x| \end{cases}$

$$\text{б)} \begin{cases} y = -\frac{2,5}{x}; \\ y = -5 \end{cases}; \quad \text{г)} \begin{cases} y = -\frac{6}{x}; \\ y = -2x - 4 \end{cases}; \quad \text{е)} \begin{cases} y = -\frac{3}{x}; \\ y = 2x + 5 \end{cases}; \quad \text{з)} \begin{cases} y = \frac{1}{x}; \\ y = x^5 \end{cases}; \quad \text{к)} \begin{cases} y = \frac{2}{x}; \\ y = -|x| \end{cases}.$$

360 Определите количество решений системы уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} y = \frac{1,5}{x}; \\ y = x^{10} \end{cases}; \quad \text{б)} \begin{cases} y = -\frac{5}{x}; \\ y = x^{11} \end{cases}; \quad \text{в)} \begin{cases} y = \frac{16}{x}; \\ y = x^9 \end{cases}.$$

361 Касательная к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ определяется как прямая, не параллельная ни оси абсцисс, ни оси ординат, и имеющая с гиперболой ровно одну общую точку. Докажите, что прямая $y = 2 - x$ является касательной к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке $A(1;1)$. Постройте на одном рисунке графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = 2 - x$.

362 Постройте таблицу (для положительных значений x) и графики (для всех значений x из области определения) функций $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = \frac{1}{x^3}$. Докажите, что функция $y = \frac{1}{x^2}$ является чётной, а функция $y = \frac{1}{x^3}$ – нечётной.

363 Закон Ома для участка цепи постоянного тока задаётся формулой $I = \frac{U}{R}$, где I – сила тока в амперах (А), U – напряжение на участке в вольтах (В), R – сопротивление участка (Ом).

а) Докажите, что если напряжение на участке постоянно, то сила тока обратно пропорциональна сопротивлению участка.

б) Постройте таблицу и график для этой зависимости, если $U = 10$ В.

в) Коротким замыканием называется процесс в цепи, когда сопротивление участка внезапно становится очень малым. Что при этом происходит?

364 Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 20 см^2 . Докажите, что длины сторон AB и AD связаны обратной пропорциональностью. Может ли длина стороны AB :

а) быть меньше 1 мм?

б) быть меньше 1 нм ($1 \text{ мм} = 1\,000\,000 \text{ нм}$)?

в) равняться нулю?

г) равняться 1 км?

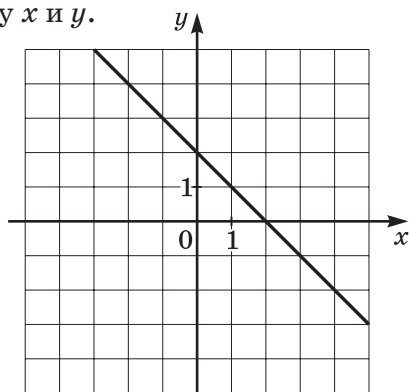
365 Два отрезка с длинами a и b являются сторонами прямоугольника, площадь которого равна 1 см^2 . Отрезок b является радиусом круга. Постройте график зависимости площади круга S (см^2) от длины отрезка a . Длины отрезков измеряются в см, площадь круга радиуса R равна $S = \pi R^2$, где $\pi \approx 3,14$.

366 Докажите, что площадь прямоугольника, одна из вершин которого лежит на гиперболе $y = \frac{k}{x}$, а две стороны, не выходящие из этой вершины, на осях координат, – постоянная величина (не зависит от координатного расположения прямоугольника). Выразите эту величину через коэффициент k .

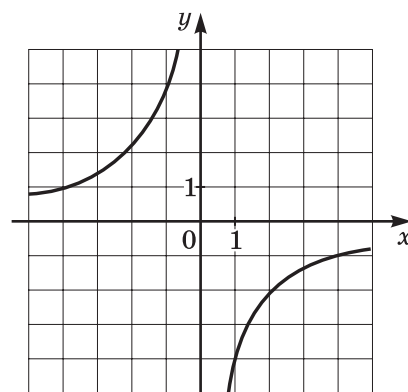
367

На рисунках а–з приведены графики, изображающие некоторые зависимости между x и y .

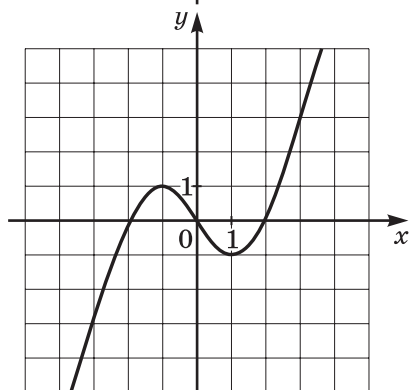
а)



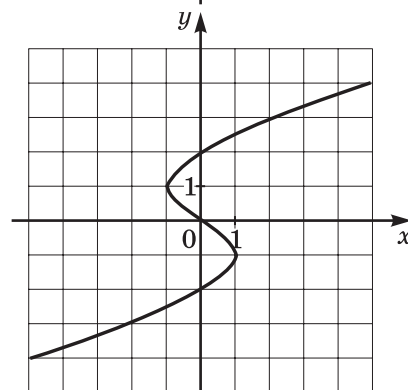
б)



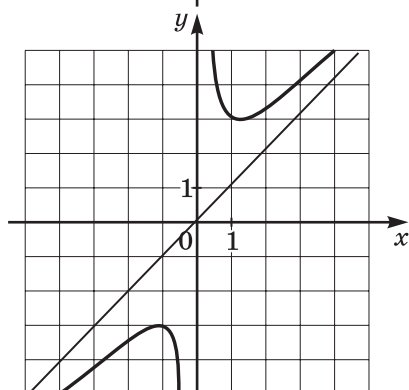
в)



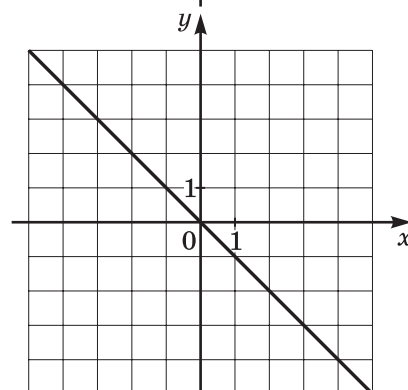
г)



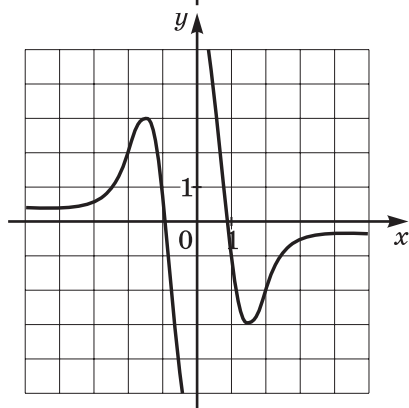
д)



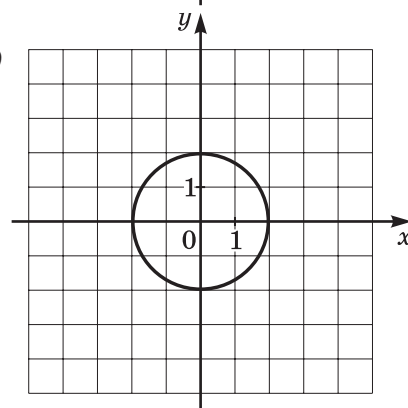
е)



ж)



з)



Для каких из них: 1) зависимость является функцией y от x ; 2) зависимость является прямой пропорциональностью; 3) зависимость является обратной пропорциональностью; 4) начало координат является центром симметрии; 5) график является графиком нечётной функции; 6) график симметричен относительно прямой $y = x$?

 π

368 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\frac{m}{m(m-3)}$; б) $\frac{t+4}{t^2+16}$; в) $\frac{5}{(a+12)a^4}$; г) $\frac{p}{|p|-5}$; д) $\frac{10}{|z|+10}$.

369

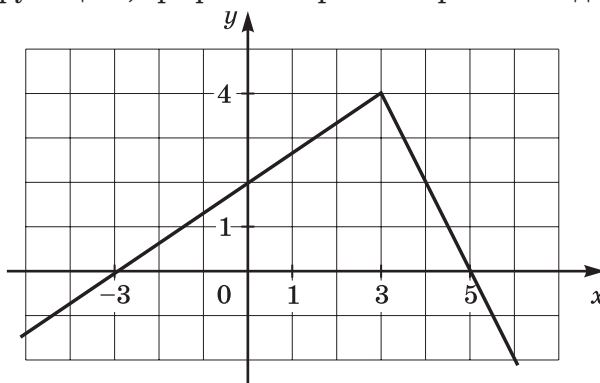
Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \geq 0; \\ -x+1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 4, & \text{если } x \geq 2; \\ 2x, & \text{если } x < 2 \end{cases}$

370

Задайте формулой функцию, график которой изображён на данном рисунке.

**371**

Запишите число в виде периодической дроби:

а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{13}{15}$; в) $-5\frac{4}{22}$; г) $3\frac{17}{34}$.

372

Обратите периодическую дробь в обыкновенную:

а) 0,(61); б) 0,(39); в) 0,2(7); г) -0,3(1); д) 5,1(45); е) -4,3(73).

373

Сравните:

а) 0,11(13) и 0,1113; б) $-1\frac{2}{3}$ и -1,65; в) $\frac{1}{12}$ и 0,0(83);
 б) 0,(23) и 0,233; г) $-\frac{10}{7}$ и -1,428572; е) $\frac{5}{16}$ и 0,312(5).

 $\mathcal{D}$

374 Обратная пропорциональность задана таблицей. Используя таблицу, определите коэффициент обратной пропорциональности k и заполните таблицу:

а)

x	-3		-1	-0,5		2	
y		1,5		-6	6		1

б)

x	2	3	-10			12	
y		-6		-12	3		-3

- 375** Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что график проходит через точку:
 а) $N(0,7; -5)$; б) $F(-1,4; -5)$; в) $P\left(2\frac{3}{8}; \frac{4}{19}\right)$; г) $S(-13; 0,4)$.
- 376** Можно ли указать обратную пропорциональность, график которой проходит через следующие две точки плоскости:
 а) $M(0,2; 5)$, $R(-0,5; -2)$; б) $D(4; -1)$, $F(1; -4)$; в) $Q(5; 2,5)$, $K(2; 5)$.
- 377** Постройте график функции $y = \frac{k}{x}$ при условии, что он проходит через точку $S(-1,6; 5)$.
- 378** Не строя графика зависимости $y = \frac{k}{x}$, определите, в каких координатных четвертях он расположен, если
 а) $k = 11$; б) $k = -10$; в) $k = -0,3$; г) $k = 8$.
- 379** Определите коэффициент обратной пропорциональности для графика функции $y = \frac{k}{x}$, проходящего через точку A . В каких координатных четвертях этот график расположен?
 а) $A(2; 3)$; б) $A(-2; 10)$; в) $A(-3; 21)$; г) $A(20; -1)$.
- 380** С помощью графика функции $y = \frac{18}{x}$ найдите три значения аргумента, при которых значения функции:
 а) больше 9;
 б) больше 0, но меньше 2;
 в) больше -6;
 г) больше -3, но меньше 0.
- 381** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = -\frac{16}{x}$ на отрезке
 а) $[-8; -2]$; б) $[-4; -1]$.
- 382** Исследуйте функцию на чётность:
 а) $y = \frac{1}{x}$ при $x \in [-100; 0) \cup (0; 100]$;
 б) $y = \frac{0,8}{x}$ при $x \in [0,08; 8]$.
- 383** Дана функция $f(x) = \frac{90}{x}$. Найдите:
 а) $f(-5)$; б) $f(0,01)$; в) $f(d+12)$; г) $\frac{1}{9} \cdot f(a)$; д) $f(-10q)$.
- 384** Решите графически уравнение:
 а) $\frac{5}{x} = 2,5$; б) $\frac{-3}{x} = x - 4$;
 в) $\frac{2}{x} = -x + 3$; г) $\frac{5}{x} = 0$;
 д) $-\frac{6}{x} = -1$; е) $-\frac{11}{x} = x$.

385 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \frac{4}{x}; \\ y = 4 \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = \frac{8}{x}; \\ y = x^2 \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = -\frac{5}{x}; \\ y = x + 6 \end{cases}$ ж) $\begin{cases} y = \frac{3}{x}; \\ y = -\frac{1}{3}x \end{cases}$

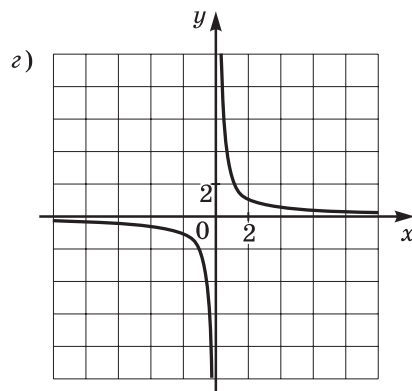
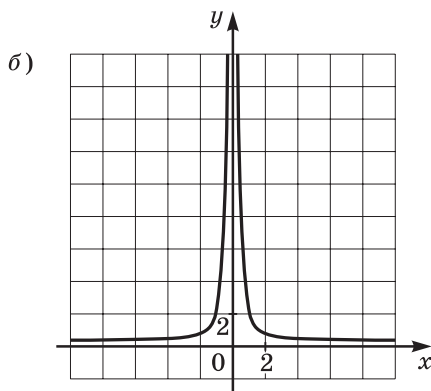
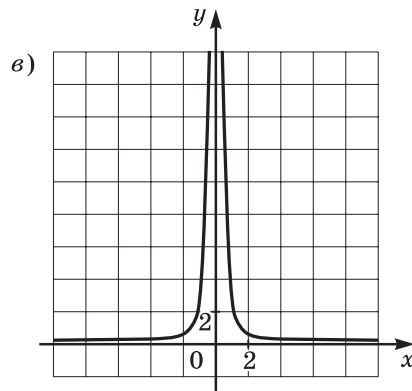
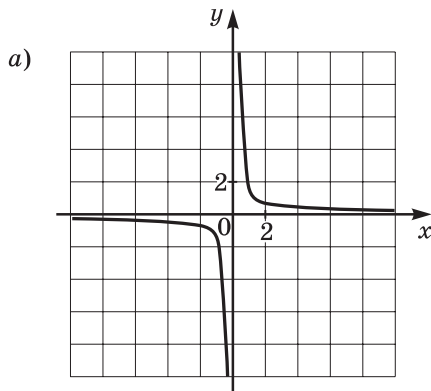
б) $\begin{cases} y = -\frac{8}{x}; \\ y = -2x \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = \frac{16}{x}; \\ y = x^3 \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = \frac{2}{x}; \\ y = -2x + 4 \end{cases}$ з) $\begin{cases} y = -\frac{3}{x}; \\ y = 3x \end{cases}$

386 Изобразите схематически графики функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = bx + m$ так, чтобы они пересекались в одной точке, в двух точках, в трёх точках.

387 В цепи постоянного тока силой 5 А рассматриваются различные участки. Какой будет зависимость напряжения на участке цепи от сопротивления этого участка? Постройте таблицу и график для этой зависимости.

388 Сила взаимодействия между двумя электрическими зарядами в системе СИ вычисляется по формуле $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$, где F измеряется в ньютонах, расстояние r между зарядами – в метрах, величины зарядов q_1 и q_2 – в кулонах (единица заряда в системе СИ), $k = 9 \cdot 10^9$ (в единицах системы СИ). Постройте таблицу и график зависимости силы притяжения между двумя зарядами разного знака в 1 кулон от расстояния между ними, если расстояние меняется от 0,5 м до 1 м с шагом 0,05 м. На оси абсцисс выберите масштаб 0,1 м в 1 см, на оси ординат – 10^{10} ньютонов в 1 см.

389 Даны графики нескольких функций вида $y = \frac{1}{x^k}$, где k – целое ненулевое число. Укажите для каждой из них чётность показателя k .



390 Какие из следующих функций являются: а) чётными; б) нечётными?

1) $y = \frac{14}{x}$; 2) $y = -\frac{7}{x} + 7$ 3) $y = \frac{13}{|x|}$; 4) $y = \frac{9}{x^2}$; 5) $y = -\frac{5}{x^3}$.

391 Постройте график функции:

а) $y = \frac{5}{x^2}$; б) $y = -\frac{12}{x^3}$.

392 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \geq 1; \\ -2x+1, & \text{если } x < 1 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \geq 3; \\ 3, & \text{если } x < 3. \end{cases}$

393 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\frac{n}{n+8}$; б) $\frac{3}{q^8+1}$; в) $\frac{r}{r^2-9}$; г) $\frac{d}{d(d+5)}$; д) $\frac{4h}{|h|-4}$.

394 Сравните:

а) 0,22(15) и 0, 2215; в) $-1\frac{5}{9}$ и -1,55; д) $\frac{1}{15}$ и 0,(6);
б) 0,1(9) и 0,(2); г) $-\frac{3}{11}$ и -0, 271; е) $\frac{4}{30}$ и 0,1(31).

395* Может ли разность двух чисел вида $n^2 + 4n$ равняться 20 202 (n – натуральное число)?

396* Докажите, что $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{999}{1000!} < 1$.

397* На доске написаны четыре числа. Разрешается выбрать любые два из них, прибавить к ним по единице и записать полученные числа вместо выбранных. Можно ли с помощью нескольких таких операций из чисел 1, 3, 5, 10 получить четыре равных числа?

Ответы

5. а) $\emptyset$; б) 1; в) $\{0; 1; -1\}$; г) $\{6; 2; -2\}$. 6. 2960 фунтов стерлингов. 7. а) 840м^3 ; 1440м^3 ; б) 156 уч. 10. а) 4; б) -5; в) 5; г) 4. 11. а) 0,012; б) 0,042; в) $1\frac{1}{3}$; г) $1\frac{1}{6}$; д) -1,6; е) -2,4; ж) $\frac{44}{45}$; з) $\frac{14}{15}$; и) -0,5; к) $-4\frac{1}{3}$; л) $2\frac{1}{8}$; м) $\frac{1}{3}$. 12. 55. 13. а) 1,(3); б) 1,9(7); в) -2,(6); г) 2,6(7); д) 3,8(3); е) -17,12(4); ж) 4,8(0); з) -5,6(81). 14. а) $3\frac{2}{3}$; б) $\frac{13}{99}$; в) $94\frac{289}{900}$; г) $-7\frac{7}{90}$; д) $-7\frac{3}{11}$; е) $17\frac{131}{9900}$. 17. а) в 8 раз; б) в 27 раз; в) в 64 раза; г) в 125 раз. 18. а) 4; б) 64; в) 4; г) -1; д) 0,01; е) 4,5; ж) 4; з) 5; и) $\frac{1}{14}$; к) 1; л) 7; м) 0,8. 19. $1\frac{35}{36}$. 20. 64. 21. 42 кг. 22. а) $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$; б) $\{0; -3; -5\}$. 23. а) 3км/ч; б) 100 дет./ч; в) 35 км/ч. 25. а) 0,16; б) $2\frac{1}{3}$; в) 237; г) -14. 26. $4\frac{2}{3}$. 27. а) $-10\frac{3}{11}$; б) $1\frac{3}{110}$. 28. а) -8; б) -98; в) 16; г) 1. 29. а) 196; б) $\frac{2}{27}$. 34. а) $t^2 - 2t + 1$; б) $y^4 + 10x^2y^2 + 25x^4$; в) $t^3 + 3t^2 + 3t + 1$; г) $y^6 - 15y^4x^2 + 75y^2x^4 - 125x^6$. 35. а) 8099; б) 2496; в) 4891; г) 3721; д) 1521; е) $898\frac{1}{900}$; ж) 27; з) 9261; и) 6859; к) 63,999; л) 1330. 36. а) $-5h^3 + 45k$; б) $-\frac{1}{16}a^3 - \frac{1}{2}a^2 - a$; в) $m^3 + 6m^2 + 12m + 8$; г) $\frac{1}{4}n^4 - 2n^2h^2 + 4h^4$; д) $\frac{8}{9}d^4 - 81d$; е) $1 - 1\,000\,000q^6$. 37. а) $-10d^3 - t$; б) $\frac{25x^2 + y^2}{25x^2 - y^2}$; в) $4b - 3a$; г) $\frac{\frac{1}{4}n^5 + 5m^2}{5m^2 - \frac{1}{4}n^5}$; д) $2k - 5l$; е) $\frac{0,16q^2 - 0,24qr^2 + 0,36r^4}{0,4q - 0,6r^2}$; ж) $\frac{1}{(7c - z)^2}$; з) $\frac{1}{9s + 2v}$. 38. а) $(15 + a)(a - b)$; б) $(c + 1)(a + 2)^2$; в) $(s + c)(c^2 + 4sc + s^2)$; г) $3m^5(4x^2 - 3y^3)^2$; д) $(mn^2 + 2p^3)^3$; е) $(12ab^2 - 17p^3q^4)(12ab^2 + 17p^3q^4)$; ж) $(4x + 0,1y^5)(16x^2 - 0,4xy^5 + 0,01y^{10})$; з) $(8m^2 - 2n^3)(64m^4 + 16m^2n^3 + 4n^6)$. 39. а) $(a - 9)(a - 1)$; б) $(b - 11)(b - 1)$; в) $(c - 1,5)(c + 2)$. 41. а) 896; б) 9801; в) 1030301; г) 1331,125. 42. а) $-a^4 + 0,04a^2$; б) $b^6 - 9c^4$; в) $d^6 + 4d^3p^2 + 4p^4$; г) $\frac{9}{16}r^4 - \frac{3}{2}r^2q^4 + q^8$; д) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$; е) $125s^9 + 15s^6z^2 + \frac{3}{5}s^3z^4 + \frac{1}{125}z^6$. 43. а) $v^6 - v^3$; б) $\frac{1}{125}n^3 - \frac{1}{5}m$; в) $x^6 - 0,9x^4y + 0,27x^2y^2$. 44. а) $3d(d - 3)(d + 3)$; б) $(z - 1)(z - 6)(z + 6)$; в) $(v - h)(v + h + 8)$; г) $m(m + 5p^2)^2$; д) $(7aq^2 - 5n^3l)(49a^2q^4 + 35aq^2n^3l + 25n^6l^2)$; е) $(b^4 - \frac{1}{3}k)^3$. 45. а) $(k - 4)(k + 10)$; б) $(5b - 4t)(5b + 2t)$. 46. а) xy^2 ; б) $\frac{4q^2 - 0,2qm^3 + 0,01m^6}{2q - 0,1m^3}$; в) $\frac{25(x^8 + y^5)}{x^8 - y^5}$; г) $\frac{1}{\left(\frac{1}{9}c + 9x\right)^2}$. 51. а) -3; б) -15; в) $\emptyset$; г) 0; д) -9; е) 5; ж) 0,5; з) 13. 52. а) $\{\pm 2; 15\}$; б) $\{\pm 4; 8\}$; в) $\{-2; -9\}$; г) $\{3; 5\}$. 53. а) $\{8; -22\}$; б) $\emptyset$; в) $\{4; -8\}$; г) $\emptyset$; д) 24; е) $\{2; -1\}$; ж) $\{-1; 3\}$; з) $\{-8; -3,2\}$. 55. а) $\{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$; б) $\{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$; в) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$; г) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. 56. а) $[-0,3; +\infty)$; б) $\left[\frac{5}{8}; +\infty\right)$; в) $(0,8; +\infty)$; г) $(-\infty; -0,5]$; д) $\left(-\infty; \frac{3}{23}\right]$; е) $\emptyset$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $\left(-\infty; -3\frac{1}{3}\right]$; и) $(6,4; +\infty)$; к) $(4; +\infty)$. 58. а) $-\frac{1}{30}$; б) $\frac{9}{14}$; в) любое число; г) 56; д) $4\frac{9}{22}$; е) $\{0,6; 0,2\}$; ж) $\emptyset$; з) 0,2; и) $\{0; 2\}$; к) $\left\{-\frac{1}{7}; 11\right\}$. 59. а) $\{-7; \pm 3\}$; б) $\{\pm 1; 5\}$; в) $\{2; 6\}$; г) $\{-6; -3\}$. 60. а) $(-\infty; 0,5]$; б) $(-\infty; 0,05)$; в) $(-\infty; -3)$; г) $(4; +\infty)$; д) $\left(-\infty; \frac{14}{15}\right]$; е) $(-\infty; -25)$; ж) $\emptyset$; з) $(-26,25; +\infty)$; и) $(-\infty; 0,75)$; к) $\emptyset$. 69. $k = -0,25$. 70. а) проходит; б) не проходит; в) проходит;

г) не проходит. 71. а) $(-1; -4)$; б) $(-2; -2)$. 77. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; д) $(-\infty; 0) \cup (0; 8) \cup (8; +\infty)$; е) $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right) \cup \left(1\frac{1}{3}; 4\right) \cup (4; +\infty)$. 87. а) $\{-2, 5; 7, 5\}$; б) $\emptyset$; в) $\left\{-1; 1\frac{2}{3}\right\}$; г) $\emptyset$; д) $6, 05$; е) $\{-2; 2\}$. 88. а) $\left\{-6\frac{2}{3}; 4\right\}$; б) $\{-10; 6\}$; в) $\emptyset$; г) $\left\{-6, 5; 3\frac{3}{4}\right\}$. 90. а) $\left[-1; \frac{1}{4}\right]$; б) $(-\infty; -2) \cup \left(2\frac{1}{6}; +\infty\right)$; в) $\emptyset$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right) \cup (5; +\infty)$; е) $(1; +\infty)$; ж) $\left[-20; 1\frac{3}{5}\right]$; з) $\left[-3\frac{1}{5}; 26\right]$; и) $\emptyset$; к) $\emptyset$; л) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup \left[9\frac{2}{3}; +\infty\right)$; м) $\emptyset$. 91. а) $\emptyset$; б) $(-\infty; -21, 5) \cup \left(2\frac{7}{16}; +\infty\right)$. 96. а) $\emptyset$; б) $\emptyset$; в) $\emptyset$; г) $\left\{-\frac{1}{11}; 3\frac{10}{13}\right\}$; д) $\{1, 2\}$; е) $\emptyset$. 99. а) $(-6; -2)$; б) $(-\infty; -1, 4) \cup (2, 4; +\infty)$; в) $\emptyset$. 100. а) $\left(-2; 2\frac{2}{3}\right)$; б) $(-\infty; -17] \cup \left[3\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -3)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\emptyset$; е) $(-\infty; 3) \cup [5; +\infty)$. 102. а) 4; б) 91; в) $-\frac{7}{17}$; г) $-0, 16$. 103. а) 9; б) 45. 104. а) 1, 4; б) 2, 8. 105. 1) 4; 2) 216; 3) 2; 4) 5; 5) 3. 106. а) $a^2 + 4ab + 4b^2$; б) $x^6 - 6x^3y + 9y^2$; в) $-m^3 - 3m^2k - 3mk^2 - k^3$; г) $64 + 48d^2 + 12d^4 + d^6$. 107. а) $3a^3 - 48a$; б) $2x^5 - 2x$; в) $4t - t^3$; г) $9c - c^7$; д) $n^3 + 125$; е) $8 - a^3$. 108. а) $z^6 - 1\,000\,000$; б) $a^6 - 1$. 109. а) $(3x + y)^2$; б) $(3a + 5b)^2$; в) $(x - 2y)^2$; г) $(3 - 4a)^2$; д) $(k^2 - 1)^2$; е) $(4s^2 + 6)^2$; ж) $(4 + d)^3$; з) $(6x - y)^3$; и) $(m + 5)^3$; к) $(mn - 1)^3$. 110. а) $(7 + 3a)(x + y)$; б) $4(2d - 3)(d - b)$; в) $(11a - 12b)(11a + 12b)$; г) $(5c - 9d)(5c + 9d)$; д) $(6 + a)(36 - 6a + a^2)$; е) $(n^2 - 4)(n^4 + 4n^2 + 16)$. 111. а) $(a - 7)(a + 3)$; б) $(1 - d)(5 + d)$; в) $(c + 4)(c + 6)$; г) $(a - 1)(a + 2)$. 112. а) $(c + 4)(c + 6)$; б) $(x - 8)(x - 4)$; в) $(a - 5)(a + 6)$; г) $(y + 4)(y + 9)$. 113. а) -6 ; б) $\{-0, 5; 1, 5\}$; в) $\{\pm 0, 4\}$; г) $\left\{0; \frac{1}{3}\right\}$; д) $\{-0, 5; 3\}$; е) $\left\{-\frac{1}{3}; -2\right\}$. 114. а) 8; б) $\{7; 9\}$; в) $\{4; -5\}$. 115. а) $(-\infty; 25)$; б) $(-\infty; -0, 27)$; в) $(-\infty; 0, 2]$; г) $[-20; +\infty)$; д) $\emptyset$; е) $(-\infty; -2]$; ж) $\left[\frac{4}{9}; +\infty\right)$; з) $(-\infty; -1)$. 116. а) $(-12; 4)$; б) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; в) $(-\infty; -32) \cup \left(-\frac{8}{9}; +\infty\right)$. 123. а) 33 уч.; б) 60 000 000. 129. а) $k = 2$; б) $k = 2, b = 3$; в) k – любое число, кроме -7 . 131. а) нет решений; б) одно решение; в) бесконечно много решений; г) одно решение; д) нет решений; е) бесконечно много решений. 132. а) $a = -1$ – нет решений, $a = 1$ – бесконечно много решений; б) $a = 1$ – нет решений, $a = 0$ – бесконечно много решений; в) $a = \frac{1}{2}, b \neq \frac{1}{2}$ – нет решений, $a = 0$ – бесконечно много решений, $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ – бесконечно много решений. 133. а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{124}{99}$; в) $-\frac{73}{90}$; г) $\frac{68\,345}{198}$. 134. а) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$; б) 78 477. 135. а) 1; б) 75. 136. а) одно решение; б) бесконечно много решений; в) нет решений. 137. $a = 1, a = -1$ – бесконечно много решений. 138. а) $\frac{2}{3}$; б) $-\frac{38}{33}$. 139. 81. 141. а) $a = 3: \left(\frac{11}{5}; \frac{1}{5}\right)$; б) $a = 2, b \neq 2: \left(0; \frac{1}{2}\right), a \neq 2, b = 2: (1; 0)$; в) $a = b \neq 3: \left(\frac{2}{a-3}; \frac{a-5}{a-3}\right), a = 5, a \neq b: (1; 0)$. 142. 9, 75. 143. $v_{\text{лодки}} = 20, 5; v_{\text{реки}} = 1, 5$. 144. 2, 5; 1, 5. 145. 100 рублей – маленькие, 200 рублей – большие. 146. 15 белых и 20 желтых. 147. 104 000 и 294 000. 148. 4. 149. 8. 150. $v_1 = 10$ км/ч, $v_2 = 15$ км/ч. 151. 36. 152. 221, 237, 247, 321. 153. а) 13; б) 2, 9; в) 0, 12; г) -2 ; д) 0, 7; е) $-0, 9$; ж) 0, 25; з) $-1, 11$; и) 4, 44. 154. а) 3; -3 ; б) $\emptyset$; в) 0; г) 0, 8; д) $\emptyset$; е) $\emptyset$. 155. а) 2; -6 ; б) 4, 5; -2 ; в) -2 ; г) $-4, 5; \frac{1}{4}$; д) $\emptyset$; е) $\emptyset$. 156. 5; 7. 157. 3 пастуха; 12 коров. 158. 28. 159. а) 1; 5; б) $-10; -2$; в) $-\frac{2}{3}; -14$; г) $\emptyset$. 160. 121; 141. 161. 240 руб. 162. 40 центов. 163. $-\frac{1}{5}$. 164. $(-1; 1)$. 165. а) $(2; -1)$; б) $\left(-\frac{3}{8}; -\frac{7}{12}\right)$; в) $(0, 2; 0, 2); (1; -1); (1; -0, 5); \left(\frac{13}{11}; -\frac{5}{22}\right)$. 166. а) $(1; 1); (-2, 6; 3, 4)$; б) $\emptyset$; в) $\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{6}\right); \left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right)$; г) Система

имеет бесконечно много решений: $(-0,5 + 1,5y; y)$, где $y \geq \frac{1}{3}$; или $(x; \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x)$, где $x \geq 0$. **167.** а) $\emptyset$; б) $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{18}\right); \left(-\frac{1}{12}; \frac{1}{18}\right)$. **168.** 71 и 72. **169.** а) 36; б) 1800; в) 7250; г) 2142. **170.** $B = \{6; 12; 36\}$; $C = \{12; 16; 32; 36\}$; а) $B \cap C = \{12; 36\}$, б) $B \cup C = \{6; 12; 16; 32; 36\}$, **171.** а) $(-\infty; -2,5)$; б) $(-0,6; +\infty)$; в) $(-\infty; -20]$; г) $[14; +\infty)$. **172.** а) $[3; +\infty)$, $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -5)$, $(-\infty; -5]$; в) $(3; 9)$, $(-\infty; +\infty)$; г) $[-9; -3]$, $(-\infty; +\infty)$; д) $\{10\}$, $(-\infty; +\infty)$; е) $\emptyset$, $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. **173.** а) $(1; 6)$; $(-7; -30)$; б) система имеет бесконечно много решений: $(0,5 - 1,5y; y)$; в) $(3; 1)$; $(3; -1)$. **174.** а) $(-0,5; +\infty)$; б) $(0,6; +\infty)$; в) $(-\infty; -20]$. **175.** а) $[4; +\infty)$, $(1; +\infty)$; б) $(-3; 3)$, $(-\infty; +\infty)$; в) $\{0\}$, $(-\infty; +\infty)$. **176.** а) $(1; 2)$; б) $(1; 1)$; в) $\left(\frac{11}{5}; -\frac{9}{5}\right); \left(\frac{19}{5}; -\frac{21}{5}\right); (1; -1); \left(\frac{13}{5}; -\frac{17}{5}\right)$; г) $\left(\frac{16}{3}; -\frac{31}{9}\right); \left(-\frac{5}{3}; \frac{11}{9}\right)$. **177.** 6. **178.** сыну – 12 лет, отцу – 36 лет. **179.** $(1; 2; 2)$. **180.** а) система имеет бесконечно много решений: $(x; 19 - 2x; x - 14)$; б) $\emptyset$; в) система имеет бесконечно много решений: $(x; 2 - 5x; 1 - 3x)$. **181.** а) $\left(\frac{2-a}{9}; \frac{2a+2}{9}; \frac{2a-1}{9}\right)$; б) при $a = 1$ – бесконечно много решений: $(x; 2x - 1; x)$, при $a \neq 1$ решений нет. **182.** сыну – 10 лет, отцу – 35 лет, деду – 60 лет. **183.** 12. **184.** а) –36; б) 38. **185.** $\{3; 2; 1\}$. **186.** 10. **187.** а) $[6; +\infty)$; б) $\emptyset$; в) $\emptyset$. **188.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$; в) $(-\infty; 5)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. **189.** 1. **190.** 0. **191.** $m = 34$, $n = 5$; $m = 6$, $n = 33$; $m = -24$, $n = 3$; $m = 4$, $n = -25$. **192.** 6. **193.** а) 4, 5, 6; б) 3, 4, 5, 6, 7. **194.** а) 2300 рублей; б) 3200, 2300 и 1300 рублей. **197.** а) $(5; +\infty)$; б) $[2; 5)$; в) $\emptyset$; г) $(-\infty; 2]$. **199.** а) $[2; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 2] \cup (5; +\infty)$; г) $(-\infty; 5)$. **200.** а) $[2; 5)$; б) $\left[-\infty; \frac{2}{3}\right]$; в) $(-\infty; 2)$; г) $\emptyset$. **201.** а) $(-\infty; 2) \cup [3; +\infty)$; б) $(1; +\infty)$; в) $[-1; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **202.** а) $\emptyset$; б) $\left[-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup (5; +\infty)$; в) $\left[\frac{5}{2}; 3\right] \cup (4; 5)$. **203.** а) $[-6; -5)$; б) $[-10; 2)$; в) $[8; 11]$; г) $\left(-\frac{1}{6}; 0\right)$; д) $(-5; 4]$; е) $\left[-4; \frac{1}{8}\right]$. **205.** а) положительный; б) отрицательный; в) нулевой; г) отрицательный. **206.** а) положительный; б) отрицательный. **208.** $d < a < b < c$. **209.** 6 ручек. **210.** а) НОД = 1, НОК = 6; б) НОД = 2, НОК = 8; в) НОД = 4, НОК = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1008$; г) НОД = 6, НОК = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$. **211.** а) $-\frac{ab}{6}$; б) $n^2 + 0,3n$. **212.** а) $\frac{2b}{3x}$; б) ax ; в) 1. **213.** а) $\emptyset$; б) $(-\infty; 1]$; в) $(-\infty; 3)$; г) $\emptyset$. **214.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[1; +\infty)$; в) $(4; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **215.** а) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; б) $(-\infty; +\infty)$. **217.** а) отрицательный; б) положительный. **219.** а) $\frac{3a}{5b}$; б) $\frac{4m^2y}{x}$; в) $\frac{4b}{15a}$. **220.** $[5; 15)$. **221.** а) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; б) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$; в) $(-\infty; -4) \cup (6; +\infty)$. **223.** а) $\left[\frac{1}{2}; 9\right)$; б) $(3; +\infty)$; в) $(6; +\infty)$. **225.** $\frac{5}{4}$. **226.** 37,5 %. **227.** 7. **228.** $(2x + 1)(2x - 3)(2x + 3)$. **229.** а) да; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) да. **230.** а) является, $\frac{123}{1000}$; б) является, $\frac{1010010001}{1000000000}$; в) является, $\frac{300}{99} = \frac{100}{33}$; г) является, $\frac{1222}{990} = \frac{611}{495}$; д) не является; е) является, $\frac{2523}{999} = \frac{841}{333}$. **231.** а) $(2; +\infty)$; б) $\{4\}$; в) $\emptyset$. **233.** $-\frac{4}{7}$. **234.** 72 %. **235.** $(a + c)(b + c)(b - a)$. **236.** а) да; б) нет; в) да; г) да; д) да; е) нет. **237.** а) является, $\frac{1234}{1000} = \frac{617}{500}$; б) является, $\frac{1020030004}{1000000000} = \frac{255007501}{250000000}$; в) является, $\frac{210}{99} = \frac{70}{33}$; г) является, $\frac{4317}{999} = \frac{1439}{333}$; д) не является; е) является, $\frac{8889}{900} = \frac{2963}{300}$. **238.** 18 литров. **245.** 9,87 м. **246.** 12 500 рублей. **247.** –2. **248.** около 60 учащихся. **250.** а) 2; б) 7; в) 1. **254.** 184 900 рублей. **256.** а) 3; б) 1; в) 7. **257.** 4 кг. **262.** 3,5. **264.** 1440 рублей.

265. а) неверно; б) неверно; в) верно; г) неверно; д) неверно; е) верно. 266. 30 зубцов. 267. $a - b; \frac{9}{8}$.
287. а) $(-1; 2)$; б) $(-5; 12)$. 288. а) 1; б) 0. 289. [3; 6]. 292. (8; 1). 293. а) 0; 0,25; 0,25; 1; 1; 49; 49; б) 0; $\frac{8}{27}$; $-\frac{8}{27}$; 1; -1; 64; -64. 295. 1) $S = a^2$; 2) $r = b^2$; 3) $G = h^2$; 4) $c = z^2$; 5) $y = x^2$. 296. 1) $V = a^3$; 2) $r = b^3$; 3) $G = h^3$; 4) $c = z^3$; 5) $y = x^3$. 299. а) $y_{\text{наиб}} = 1$; $y_{\text{наим}} = 0$; б) $y_{\text{наиб}} = 81$; $y_{\text{наим}} = 0$; в) $y_{\text{наиб}} = 16$; $y_{\text{наим}} = 0$. 300. а) $y_{\text{наиб}} = 1$; $y_{\text{наим}} = -1$; б) $y_{\text{наиб}} = 128$; $y_{\text{наим}} = 0$; в) $y_{\text{наиб}} = 1$; $y_{\text{наим}} = -128$. Функция $y = x^7$ отрицательна при $x \in (-\infty; 0)$, положительна при $x \in (0; +\infty)$. 301. а) $n = 1$; б) $n = 2$. 303. Чётные функции: а, в, г, д, и; нечётные функции: б, е, л, м; функции, не являющиеся ни чётной, ни нечётной: ж, з, к.
305. Чётные: а, в; нечётные: д. 306. 1) 1; 4; 0; 3) $[-4; -2]$ и $[0; 2]$. 307. 1) -2; -4; -4; 3) $[-2; 2]$; 4) $[-4; -2]$ и $[2; 4]$. 312. а) одна; б) одна; в) одна. 313. а) да; б) да. 314. а) две, ± 1 ; б) две, 0, 1; в) одна, 1. 315. а) $\{-1; 1\}$; б) $\{0; 1\}$; в) $\{1\}$. 316. а) $\{-1\}$; б) $\{1; 3\}$; в) $\{-1; 0; 1\}$; г) $\{-1; 0; 1\}$. 319. а) $>$; б) $<$; в) $>$; г) $<$; д) $>$; е) $<$. 320. а) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; в) $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$, $n \in (-\infty; 0) \cup (0; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$. 321. а-3; б-5; в-6; г-2; д-4; е-1. 328. а) меньше; б) меньше; в) меньше; г) меньше. 329. $y_{\text{наиб}} = 256$; $y_{\text{наим}} = 0$. 330. $y_{\text{наиб}} = 32$; $y_{\text{наим}} = -1$. 331. а) 2; б) 3; в) 2. 332. а) $\{-2; -1\}$; б) $\{0\}$; в) $\{-1; 1\}$; г) $\{-1; 0\}$. 333. а) да; б) нет.
334. Чётные функции: а, б, в, и, к; нечётные функции: е, з, л, м; функции, не являющиеся ни чётной, ни нечётной г, д, ж. 335. а) чётный; б) нечётный; в) нечётный; г) чётный. 337. 1) б, г; 2) а, д; 3) в, е. 338. а) $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $b \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; г) $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 0,5) \cup (0,5; +\infty)$; д) $y \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$; е) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$; $y \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$. 339. а - 4; б - 2; в - 3; г - 1. 340. 1 - б; 2 - а. 342. а) 5; в) 0,2; г) 0,5; ж) 0,25; з) -5. 343. 1) $t = \frac{2}{v}$; 2) $n = \frac{150}{a}$; 3) $y = \frac{k}{v}$. 344. 300; 100; 20; 0,4; 0,06; 0,005. Принадлежат: В, С, F. 345. а) $y = \frac{-2}{x}$; б) $y = \frac{54}{x}$; в) $y = \frac{25}{x}$; г) $y = \frac{-140}{x}$; д) $y = \frac{-1}{x}$. 346. а) нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) нет. 348. а) I, III; б) II, IV; в) II, IV; г) I, III. 349. $y = \frac{k_2}{x}$. 351. а) $y_{\text{наиб}} = -1$; $y_{\text{наим}} = -9$; б) $y_{\text{наиб}} = 1$; $y_{\text{наим}} = \frac{1}{3}$.
352. а) $y_{\text{наиб}} = 3$; $y_{\text{наим}} = \frac{1}{3}$; б) $y_{\text{наиб}} = -5$; $y_{\text{наим}} = -10$. 353. а) нечётные; б) ни чётная, ни нечётная; в) ни чётная, ни нечётная; г) ни чётная, ни нечётная. 354. 1) г, д; 2) а, б, в. 355. а) 1; б) 0,1; в) -5; г) $-\frac{5}{6}$; д) -2000; е) $\frac{1}{5a}$. 356. а) $-\frac{4}{b}$; б) $\frac{1}{d^2}$; в) $\frac{2}{m+2}$; г) $t + 10$. 358. а) $\{-1\}$; б) $\{-1; 1\}$; в) $\{-2,5\}$; г) $\{-1; 1\}$; д) $\emptyset$; е) $\emptyset$; ж) $\left\{-1; -\frac{2}{3}\right\}$; з) $\{-2\}$. 359. а) (0,5; 1); б) (0,5; -5); в) (3; 2); (-3; -2); г) (1; -6); (-3; 2); д) (4; 2); (2; 4); е) (-1; 3); (-1,5; 2); ж) (1; 1); з) (1; 1); (-1; -1); и) (-2; 2); к) $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. 360. а) одно; б) нет; в) два.
367. 1) а, б, в, д, е, ж. 2) е; 3) б; 4) б, в, г, д, е, ж, з; 5) б, в, д, е, ж; 6) а, б, е, з. 368. а) $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; -12) \cup (-12; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $(-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$. 371. а) 0,5; б) 0,8(6); в) -5,(18); г) 3,5(0). 372. а) $\frac{61}{99}$; б) $\frac{13}{33}$; в) $\frac{5}{18}$; г) $-\frac{14}{45}$; д) $\frac{283}{55}$; е) $-\frac{433}{99}$.
375. а) $y = -\frac{3,5}{x}$; б) $y = \frac{7}{x}$; в) $y = \frac{0,5}{x}$; г) $y = -\frac{5,2}{x}$. 376. а) да, б) да, в) нет. 378. а) I, III; б) II, IV; в) II, IV; г) I, III. 379. а) $k = 6$; I, III; б) $k = -20$; II, IV; в) $k = -63$; II, IV; г) $k = -20$; II, IV. 381. а) $y_{\text{наиб}} = 8$; $y_{\text{наим}} = 2$; б) $y_{\text{наиб}} = 16$; $y_{\text{наим}} = 4$. 382. а) нечётная; б) ни чётная, ни нечётная. 383. а) -18; б) 9000; в) $\frac{90}{d+12}$; г) $\frac{10}{a}$; д) $-\frac{9}{q}$.
384. а) $\{2\}$; б) $\{1; 2\}$; в) $\{6\}$; г) $\{1; 3\}$; д) $\emptyset$; е) $\emptyset$. 385. а) (1; 4); б) (2; -4); (-2; 4); в) (2; 4); г) (2; 8); (-2; -8); д) (-1; 5); (-5; 1); е) (1; 2); ж) $\emptyset$; з) $\emptyset$. 389. а) нечётный; б) чётный; в) чётный; г) нечётный. 390. а) 3, 4; б) 1, 5.

Предметный указатель

- Абстракция 110
- Асимптота графика 113
- Вершина параболы 97
- Гипербола 112
- Графическое решение линейного неравенства с двумя переменными 84
- Дизъюнкция высказываний 26
- Достаточное условие 12
- Касательная к параболе 98
- Конъюнкция высказываний 26
- Коэффициент обратной пропорциональности 112
- Критерий 21
- Кубическая парабола 99
- Линейное неравенство с одной переменной 68
- Линейное неравенство с двумя переменными 82
- Линейное программирование 85
- Необходимое условие 12
- Обратная пропорциональность 112
- Парабола 97
- Признак 19
- Равносильные предложения 13
- Равносильные преобразования систем неравенств 69
- Решение линейного неравенства с двумя переменными 82
- Решение линейного неравенства с одной переменной:
- открытый луч 68
 - замкнутый луч 68
 - числовая прямая 68
 - пустое множество 68
- Решение системы неравенств 69
- Решение совокупности неравенств 70
- Свойство 19
- Система неравенств 67
- Система трёх уравнений с тремя переменными 61
- Совокупность неравенств 67
- Степенная функция с натуральным показателем 100
- Таблицы истинности 34
- Формулы де Моргана 29
- Функциональная зависимость 97
- Функция $y = x^2$
- возрастание 98
 - убывание 98
 - чётность 98
- Функция $y = x^3$
- возрастание 99
 - нечётность 99

Оглавление

Глава 1. Язык и логика	3
§ 1. Искусство математических рассуждений.....	3
1.1.1. Искусство задавать вопросы.....	3
1.1.2. Необходимость и достаточность.....	12
1.1.3. Свойства и признаки. Критерии	18
§ 2. Сложные предложения	25
1.2.1. Сложные высказывания	25
1.2.2.* Законы логики для сложных высказываний.....	34
Задачи для самоконтроля к главе 1.....	40
Глава 2. Системы линейных уравнений и неравенств	45
§ 1. Системы линейных уравнений	45
2.1.1.* Количество решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными	45
2.1.2. Математические модели задач и системы линейных уравнений с двумя переменными	50
2.1.3. Системы двух уравнений с модулями	56
2.1.4.* Системы линейных уравнений с тремя и более переменными	61
§ 2. Системы и совокупности линейных неравенств	67
2.2.1. Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной.....	67
2.2.2.* Системы неравенств с одной переменной с модулями	75
2.2.3. Линейные неравенства с двумя переменными и их системы. Графическое изображение множества их решений.....	81
2.2.4.* Системы неравенств с двумя переменными с модулями	89
Задачи для самоконтроля к главе 2.....	94
Глава 3. Исследование нелинейных процессов	97
§ 1. Представление о некоторых нелинейных процессах.....	97
3.1.1. Степенные функции их графики	97
3.1.2. Обратная пропорциональность и её график	110
Ответы	123
Предметный указатель	127

* – звездочкой помечены пункты, содержание которых выходит за рамки программы базового курса математики