



Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова

Алгебра

7 класс

Учебник

(в 3 частях)

Часть 3

Рекомендовано
к использованию при реализации имеющих государственную
аккредитацию образовательных программ начального общего,
основного общего, среднего общего образования



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2019

*Чтобы учебником было удобно пользоваться,
в нём введены следующие обозначения:*



— задачи по новой теме для работы в классе,



— задачи для домашней работы,



— повторение ранее пройденного,



— задачи на смекалку,



— задания базового уровня,



— более сложные задания по новым темам и темам повторения,



— задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,



— завершение доказательства теоремы,



— материал для тех, кому интересно.

Глава 5

Введение в теорию функций

§ 1. Понятие функции и её практическое применение

5.1.1. Функциональная зависимость между величинами



*Понятие функции такое же основное
и первоначальное, как понятие множества.*

Феликс Хаусдорф (1868–1942),
немецкий математик

В обычной жизни мы постоянно сталкиваемся с разнообразными величинами: температурой, стоимостью, массой, количеством предметов, длиной, площадью, объёмом и т. д. При этом, рассматривая некоторую конкретную ситуацию, мы можем обнаружить, что одни величины меняются, а другие остаются неизменными.

Мы уже знаем, что величина, которая может принимать различные числовые значения, называется *переменной величиной*. Так, например, если вы решили проехать на автобусе несколько остановок, то скорость автобуса, масса бензина в его баке и количество пассажиров будут переменными величинами, а количество его колес и окон в течение поездки не изменится, останется постоянным.

Среди переменных величин различают *независимые* и *зависимые* величины. Например, длина пути, проходимого вами со скоростью 50 м/мин, зависит от времени прогулки, которое вы выберете. При этом она однозначно определяется выбранным временем: за 5 мин вы пройдёте 250 м, за 12 мин – 600 м, за 20 мин – 1000 м и т. д.

Похожая ситуация возникнет, если вы захотите купить несколько одинаковых тетрадей или распечатать несколько страниц текста на принтере. Во всех этих примерах мы можем точно и однозначно находить конкретные значения переменных величин с помощью изученных нами формул – в данном случае формул пути, стоимости, работы.

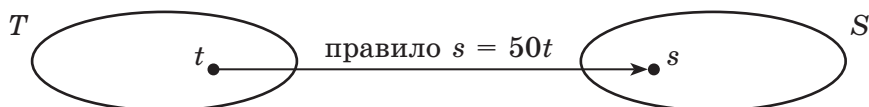
Зависимости между величинами, которые позволяют *однозначно* определять значение искомой величины, занимают среди всех других зависимостей особое место, так как помогают, например, осуществлять планирование, давать прогноз поведения различных величин в тех или иных условиях. Ведь даже в быту нам важно уметь рассчитать стоимость покупки или время, необходимое на ту или иную работу. Что же касается современного производства, то именно точность прогнозирования во многом определяет его результативность и конкурентоспособность.

В связи с особой значимостью таких зависимостей возникает необходимость изучать их отдельно от всех остальных. Для того чтобы выделить их среди всех других зависимостей, их называли *функциональными зависимостями*, или *функциями*.

Прежде чем дать определение функции, вспомним предыдущий пример. Как мы определяли длину пути s м, пройденного за данное время t мин со скоростью 50 м/мин? Мы брали некоторое конкретное значение t мин (5 мин, 12 мин, 20 мин и т. д.), затем, пользуясь правилом $s = 50t$, умножали t мин на 50 м/мин и получали искомое значение s м (250 м, 600 м, 1000 м и т. д.).

Возможные значения переменной t в минутах образуют некоторое множество T . При этом t не может принимать любые значения. Так, например, прогулка не может длиться 1 000 000 мин или (-24) мин. Если же она длилась, например, 30 мин, то множество T можно задать следующим образом: $T = \{t \in \mathbb{Q}: 0 \leq t \leq 30\}$. Переменная s в метрах при этом принимает значения из некоторого множества S : $S = \{s \in \mathbb{Q}: 0 \leq s \leq 1500\}$.

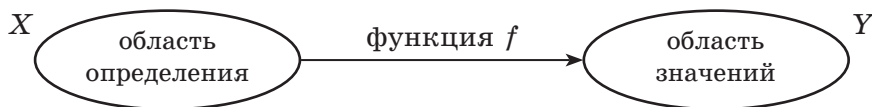
Данная зависимость определяет следующую взаимосвязь между множествами S и T :



где, согласно правилу $s = 50t$, *каждому* элементу t из множества T ставится в соответствие *единственный* элемент s из множества S .

Таким образом, мы приходим к следующему определению понятия функции, где независимая переменная обозначается буквой x , зависимая – буквой y , а правило соответствия – буквой f .

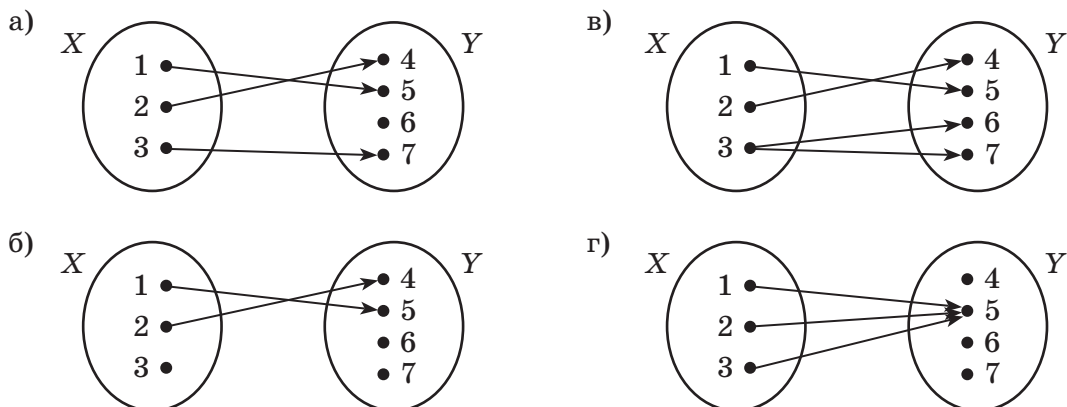
Определение. *Функцией* называется правило f , по которому *каждому* элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие *единственный* элемент y из множества Y . Множество X при этом называется областью определения, а множество Y – областью значений данной функции.



Итак, отличительной особенностью функциональной зависимости (функции) является то, что для каждого элемента из её области определения *существует* и *единственный* соответствующий элемент из области её значений. Если хотя бы одно из этих двух требований не выполняется, то зависимость не является функциональной.

Разберёмся в этом на конкретных примерах.

Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7\}$. На схемах показано, какой элемент множества Y соответствует тому или иному элементу множества X .



Исходя из определения понятия функции, мы можем заключить, что зависимости, заданные схемами a и $г$, являются функциональными, а схемами $б$ и $в$ – нет. Действительно, в случаях a и $г$ для каждого элемента из множества X *существует* и *единственный* соответствующий элемент из множества Y . В случае же $б$ числу 3 из множества X не сопоставлено ни одного элемента из множества Y (то есть нарушено требование *существования* соответствующего элемента), а в случае $в$ числу 3 соответствуют сразу два элемента, 6 и 7, из множества Y (то есть нарушено требование *единственности* соответствующего элемента).

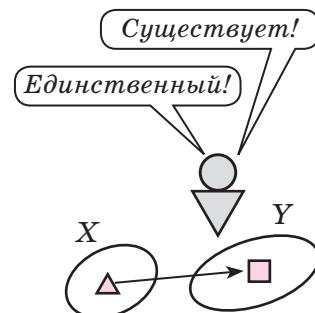
Таким образом, для того чтобы определить, является ли данная зависимость функцией, можно:

1. Указать множество X , являющееся областью определения.

2. Указать множество Y , являющееся областью значений.

3. Убедиться в том, что каждому элементу из области определения X поставлен в соответствие некоторый элемент из области значений Y (*существование*).

4. Убедиться в том, что в области определения X нет элементов, которым поставлено в соответствие более одного элемента из области значений Y (*единственность*).



К

1

Используя данную формулу зависимости между p и q , вычислите значения p для данных q :

а) $p = 3q$, где $q = 1; 3; 5; -3$;

б) $p = \frac{1}{2}q$, где $q = 1; 4; 0; -4$;

в) $p = \frac{4}{q}$, где $q = 1; -1; 2; -2$;

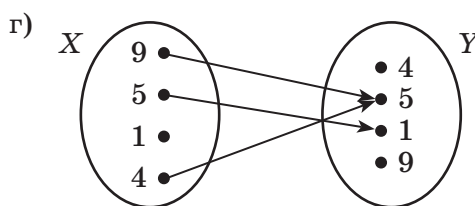
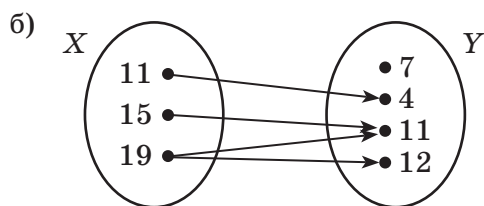
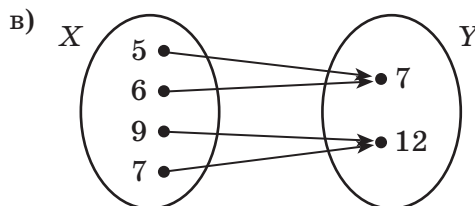
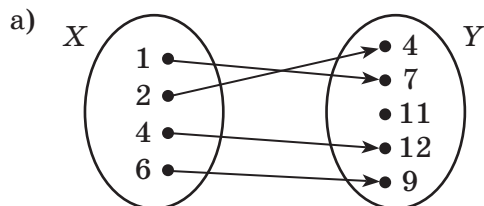
г) $p = 5q^2$, где $q = 1; -1; 0; 2$;

д) $p = 3 + q$, где $q = 0; -3; 1; 3$;

е) $p = 7$, где $q = 1; -5; 7; -8$.

2

1) Зависимости между элементами множеств X и Y заданы приведёнными схемами а) – г). Определите, какие из данных зависимостей позволяют для *каждого* элемента из множества X находить *единственный* соответствующий элемент из множества Y . Обоснуйте свой ответ.



2) Как вы думаете, где используются зависимости, которые позволяют *однозначно определять* элемент множества? Почему важно их выделять и специально изучать? Сравните свой вывод с выводом на с. 3 учебника.

3) Предложите своё название для зависимостей данного вида и дайте свой вариант их определения. Сравните данные вами название и определение с теми, которые приведены на с. 3–4 учебника.

4) Исходя из определения понятия функции, постройте алгоритм, позволяющий установить, является данная зависимость функцией или нет. Сравните его с алгоритмом, приведённым на с. 5 учебника.

3

Зависимость y от x задана таблицей. Найдите её область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функциональной.

а)

x	-2	-1	0	1	3
y	1	2	3	4	5

в)

x	0	1	2	3	5
y	-3	-1	-3	-1	-3

б)

x	5	-3	5	4	3
y	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

г)

x	3	5	7	9	11
y	4	4	5	5	6

4

Задайте зависимость объёма куба V от длины его ребра a . Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $a = 3$ см; б) $a = 2$ м; в) $a = \frac{1}{2}$ дм; г) $a = 10$ мм; д) $a = \frac{1}{4}$ м.

5

Задайте зависимость пройденного с постоянной скоростью 5 км/ч пути S (в км) от времени движения t (в часах). Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $t = 3$ ч; б) $t = 15$ мин; в) $t = 1$ ч 20 мин; г) $t = 3$ ч 30 мин.

6

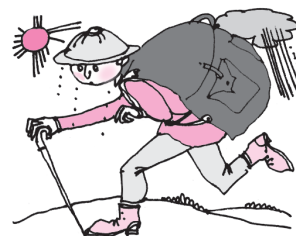
Зависимость задали следующим образом: каждому целому числу поставили в соответствие его остаток при делении на целое число a . Определите, является ли данная зависимость функциональной. Укажите область определения и область значений этой зависимости для указанных значений a .

а) $a = 5$; б) $a = 8$; в) $a = 11$; г) $a = -3$; д) $a = -5$.

7

а) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 + 6x + 12$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно 3?

б) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 - 2$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно -6?



π

8

Запишите высказывания на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите истинные высказывания, а для ложных – постройте их отрицания.

- а) Некоторые целые числа при делении на 6 дают остаток (-1) .
- б) Все целые числа при делении на 17 дают остаток 9.
- в) Каждое целое число делится само на себя.
- г) Можно найти такое целое число, делителем которого является 7.
- д) Все целые числа, делящиеся на 5, составные.
- е) Есть чётные числа, кратные 7 и 5.
- ж) Все целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 2, кратны 5.
- з) Существуют целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 7 дают остаток 5.

9

- а) В доме 190 квартир, в которых живут 572 человека. Докажите, что в этом доме есть хотя бы одна квартира, в которой живут не менее 4 человек.
- б) Семь покупателей купили 20 пирожных. Докажите, что хотя бы два покупателя купили одинаковое количество пирожных.

10

Решите уравнение:

- а) $5 - (3,25x - 4,6) = 5x - (5 - 0,4x) + 0,75x - (2x - 9) + 0,6x$;
- б) $5,7y + (7,2 - 0,9y) = 34,15 + 3,45y - (18,2 - 6,3y) - 3,8$;
- в) $1,2a - 5,3 = 0,5a - (0,75a - (5,4 - 1,85a)) - 8,7a + 7,3$;
- г) $7,1 - (6,9b - 0,9) - 1,4 - (5,7b + 3,9) = 34,5 + 3,4b - 7,8$.



11

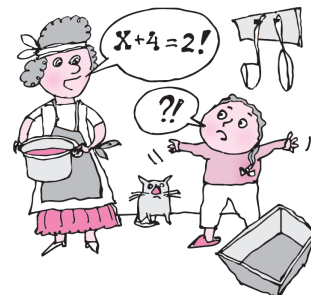
Постройте математическую модель и решите задачу:

- а) Сумма двух натуральных чисел равна 36. Первое число при делении на 11 даёт остаток 6, а второе число при делении на 11 даёт остаток 8. Найдите эти числа.
- б) Величина первого угла треугольника на 10° больше величины второго и на 10° меньше величины третьего. Найдите величину большего угла этого треугольника.
- в) Длина ломаной $ABCD$ равна 13,5 см. Известно, что AB равно $\frac{1}{6}$ расстояния между её началом и концом, BC на 5,1 см больше AB , а CD на 3,6 см меньше BC . Найдите длину звена AB этой ломаной.

12

Упростите выражение:

- а) $\left(\frac{4}{5}abc^2 - \frac{5}{8}ab^2c + 5abc\right) - \left(\frac{14}{25}abc^2 - \frac{13}{32}ab^2c + 3abc\right)$;
- б) $\left(\frac{2}{7}xy^2 - \frac{4}{15}x^2y + \frac{5}{12}x^2yz\right) - \left(\frac{3}{14}xy^2 - \frac{2}{5}x^2y + \frac{1}{4}x^2yz\right)$;
- в) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{5}c\right) + \left(\frac{3}{4}a - \frac{2}{9}b - \frac{3}{25}c\right) - \left(\frac{5}{8}a - \frac{4}{27}b + \frac{9}{125}c\right)$;
- г) $\left(3\frac{1}{6}mn - 2\frac{1}{3}m\right) - \left(\frac{2}{9}mn - 5\frac{1}{15}m\right) - \left(3\frac{5}{18}mn + 3\frac{8}{45}m\right)$.



13 Не вычисляя частного, определите, делится ли число a на b :

- а) $a = -56\ 353$, $b = -3$; г) $a = -397\ 542$, $b = 9$; ж) $a = 415\ 644$, $b = -8$;
 б) $a = -516\ 972$, $b = 3$; д) $a = -914\ 679$, $b = -9$; з) $a = 843\ 512$, $b = -12$;
 в) $a = 2\ 578\ 312$, $b = -6$; е) $a = -921\ 432$, $b = -4$; и) $a = -965\ 115$, $b = -15$.

14 Какое выражение нужно подставить вместо A , чтобы равенство превратилось в тождество?

- а) $3^{17} \cdot 3^{54} = A$; г) $A \cdot (9^8)^5 = 9^{51}$;
 б) $A : 8^{23} = 8^{35}$; д) $(7^6)^9 : A = 7^{48}$;
 в) $5^{34} \cdot A = 5^{51}$; е) $A : (4^8)^9 = 4^5$.

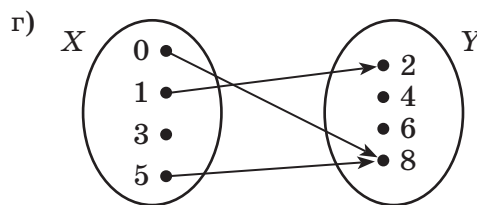
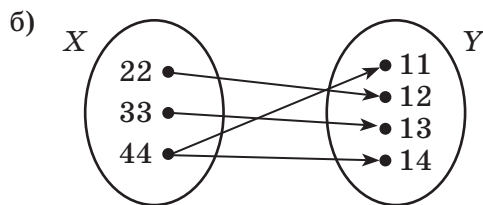
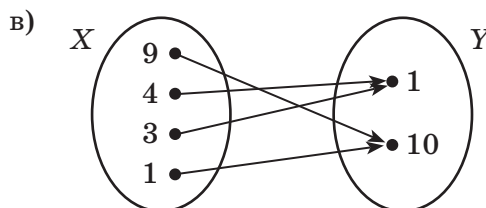
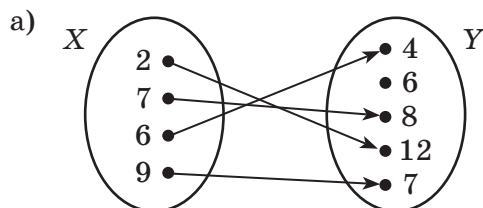


15 Докажите, что:

- а) При любых натуральных a и b число 7 не может быть корнем уравнения $2ax^2 + bx + 4 = 0$.
 б) Число 12 не может быть корнем уравнения $ax^3 + 3bx^2 + 4x + 7 = 0$ при любых натуральных a и b .

2

16 Зависимости между элементами множеств X и Y заданы приведёнными ниже схемами. Определите, какие из указанных зависимостей являются функциональными, и обоснуйте свой ответ.



17 Зависимость y от x задана таблицей. Найдите её область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функцией.

а)

x	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1

г)

x	1	3	5	7	9
y	-2	-2	-2	-2	-2

б)

x	1	2	1	2	1
y	2	4	6	8	10

д)

x	-2	-2	-2	-2	-2
y	1	3	5	7	9

в)

x	1	3	5	8	9
y	3	3	5	5	0

е)

x	2	4	0	4	2
y	0	2	4	6	8

18 Задайте зависимость выполненной работы A (в ед.) от времени работы t (в мин), если известно, что производительность равна 20 ед. в мин. Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $t = 10$ мин; б) $t = 2$ ч; в) $t = 90$ с; г) $t = 2$ сут.; д) $t = 1$ ч 20 мин.

19 Задайте зависимость стоимости C (в р.) купленных по цене 30 р. за килограмм яблок от массы покупки p (в кг). Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $p = 5$ кг; б) $p = 500$ г; в) $p = 1$ кг 300 г; г) $p = 2$ кг 800 г.

20 Функцию задали следующим образом: каждому рациональному числу q поставили в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее этого числа. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $q = 3,2$; б) $q = 7,4$; в) $q = 5\frac{1}{2}$; г) $q = -3,3$; д) $q = -5,6$.

21 а) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 + 8x + 21$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно 5?

б) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 - 3$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно -5 ?

22 а) В пончиковой компании Антона и Ксюши 76 магазинов, торгующих пончиками, в которых работают 305 человек. Докажите, что среди этих магазинов есть хотя бы один магазин, в котором работает не менее 5 человек.

б) Восемь экспедиторов пончиковой компании доставили 27 заказов. Докажите, что хотя бы два экспедитора доставили одинаковое количество заказов.

23 Решите уравнение:

а) $6,7 - (6,8x - 0,6) = 6,9x - (1,9x - 5,3) + 0,8x - (2x + 9) + 0,4x$;

б) $4,3y + (6,2 - 1,5y) = 2,3 + 4,4y - (7,2 + 2,3y) - 2,9$.

24 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма двух натуральных чисел равна 55. Первое число при делении на 14 даёт остаток 2, а второе число при делении на 14 даёт остаток 11. Найдите эти числа.

б) Величина первого угла треугольника на 30° больше второго и на 60° меньше третьего. Найдите величину большего угла этого треугольника.

25 Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{7}klm^2 - \frac{4}{3}kl^2m + 7klm\right) - \left(\frac{3}{21}klm^2 - \frac{4}{9}kl^2m + 5klm\right);$

б) $\left(\frac{1}{7}p + \frac{1}{11}r + \frac{1}{4}q\right) - \left(\frac{2}{7}p - \frac{2}{11}r - \frac{3}{4}q\right) - \left(-\frac{5}{7}p + \frac{4}{11}r + \frac{9}{4}q\right).$

26 Не вычисляя частного, определите, делится ли число a на b :

а) $a = -78\ 514$, $b = -3$; г) $a = -357\ 615$, $b = -15$;

б) $a = -854\ 328$, $b = 4$; д) $a = 743\ 216$, $b = -8$;

в) $a = -516\ 915$, $b = 9$; е) $a = 493\ 532$, $b = -12$.



27 Какое выражение нужно подставить вместо A , чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $2^{36} \cdot 2^{43} = A$;

в) $4^{28} \cdot A = 4^{35}$;

д) $(5^2)^6 : A = 5^9$;

б) $A : 3^{76} = 3^{29}$;

г) $A \cdot (7^3)^4 = 7^{39}$;

е) $A : (6^7)^{11} = 6^{13}$.

28 Докажите, что:

а) При любых натуральных a и b число 11 не может быть корнем уравнения $ax^2 + 5bx - 9 = 0$.

б) Число 4 не может быть корнем уравнения $ax^3 + 3bx^2 + 2x + 7 = 0$ при любых натуральных a и b .

в) Ни один из корней уравнения $2ax^3 + 6bx^2 + 15 = 0$ не делится на 6 при любых натуральных a и b .

29 Найдите три числа, дающих при делении на B такие же остатки, как A :

$$A = \frac{\left(9\frac{1}{4} - 7\frac{2}{5}\right) \cdot 25 - 15}{\left(3\frac{1}{8} + 4\frac{3}{20} - 1\frac{5}{48} - 5\frac{2}{5}\right) : 3\frac{1}{12}} + \frac{60 - 40 \cdot \frac{1}{10}}{7 + 1 : \frac{3}{7}};$$

$$B = \frac{\left[\left(\frac{23}{36} + \frac{31}{63}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{21}\right)\right] \cdot 48 : \left(\frac{3}{5} : \frac{7}{8}\right)}{\left(\frac{19}{26} + \frac{14}{39} - \frac{1}{6}\right) \cdot 54\frac{1}{6} : \left(8\frac{4}{7} : \frac{12}{35}\right)}.$$



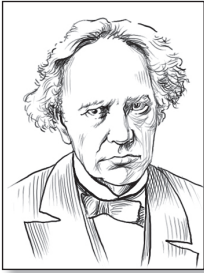
С

30* В классе 27 учеников. Может ли каждый из них дружить ровно с девятью другими учениками этого класса?

31* Четыре пары супругов играли в боулинг. Диана выиграла три очка, Лиза – два, Ника – четыре, а Анжела – одно. Семён выиграл столько же очков, сколько и его жена, Петр – вдвое больше своей жены, Николай – в три раза больше своей жены, а Константин – в 4 раза больше своей жены. Всего было выиграно 32 очка. Как зовут жену Николая?

32* Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошёл отряд солдат. В лодке могут переправиться через реку как один, так и оба мальчика, либо один солдат. Смогут ли мальчики помочь солдатам переправиться через реку?

5.1.2. Способы задания функции



Я верю, что числа и функции анализа не являются произвольным созданием нашего разума; я думаю, что они существуют вне нас в силу той же необходимости, как и объекты реального мира...

Шарль Эрмит (1822–1901),
французский математик

Функция – одно из важнейших понятий математики, и нам важно теперь научиться обозначать функции, а также выяснить, каким образом можно задать функцию.

Как мы уже знаем, для обозначения функций пользуются буквами, чаще всего x , y и f . Буквой x обозначают произвольный элемент области определения X , буквой y – соответствующий ему элемент области значений Y , а буквой f – правило, устанавливающее соответствие между x и y .

Поскольку значение y зависит от x , а x мы выбираем произвольно из области определения, x – это **независимая переменная**, или, как говорят иначе, **аргумент функции**, а y – **зависимая переменная**.

Все три буквы, x , y и f , объединяют записью

$$y = f(x),$$

которая читается как «игрек равно эф от икс».

Разумеется, вместо букв x , y и f могут быть использованы любые другие буквы. Например, запись $s = g(t)$ означает, что s является функцией от t и правило зависимости s от t обозначено буквой g .

Функция определена (или *задана*), если нам известно правило соответствия и множество значений переменной, к которому это правило надо применять.

Таким образом, для того чтобы *задать функцию*, необходимо:

1. Указать её область определения X .
2. Указать правило f , по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется единственное значение функции y .

Какими же способами может быть задана функция?

Задание функции с помощью словесного описания

Зададим функцию f следующим образом: «всем неотрицательным рациональным числам поставим в соответствие число 1, а всем отрицательным – число (-1) ».

Областью определения этой функции является множество всех рациональных чисел. И каждому из них указанное правило сопоставляет *единственное* число: любому положительному числу и нулю – число 1, а любому отрицательному числу – число (-1) . Например:

$$f(4) = 1 \qquad f(-5) = -1 \qquad f(0) = 1.$$

Таким образом, функция полностью определена. Вместе с тем данный способ задания функции является достаточно громоздким, трудным для восприятия и осознания, а главное – неудобным для последующего исследования функции и работы с ней.

Поэтому возникает необходимость в других способах задания функции.

Табличный способ задания функции

Можно задать функцию, указав все значения независимой переменной и для каждого из них – соответствующее значение зависимой переменной. Такой способ задания функции называется *табличным*.

Пусть областью определения функции f является множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и каждому значению $x \in X$ сопоставлено значение y , указанное в соответствующем столбце таблицы:

x	1	2	3	4	5
y	-2	3	4	-2	5

Таким образом, для каждого значения $x \in X$ *существует* и *единственное* соответствующее значение y . Например, $f(2) = 3$, а $f(4) = -2$.

Табличный способ задания функции удобен тем, что соответствующие значения x и y можно определить сразу, без дополнительных усилий. Однако при достаточно большом количестве элементов множества X данный способ становится слишком громоздким. А если множество X имеет бесконечное число элементов, то табличный способ не даст полной информации о характере исследуемой зависимости.

Аналитический способ задания функции (с помощью формулы)

Функция $y = \frac{5}{x^2}$ задана формулой, показывающей, как для каждого значения x из области её определения вычислить соответствующее значение y .

Если область определения явно не указана, то мы будем считать, что функция задана для всех допустимых значений x , то есть тех значений x , при которых указанная формула имеет смысл.

Так как выражение $\frac{5}{x^2}$ имеет смысл для всех x , не равных нулю, то областью определения нашей функции является множество всех известных нам чисел, кроме нуля. И для каждого x из области её определения *существует* и *единственное* соответствующее значение y , которое мы можем вычислить по формуле, задающей функцию. Например:

$$f(3) = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}; \quad f(-0,5) = \frac{5}{(-0,5)^2} = \frac{5}{0,25} = \frac{5 \cdot 4}{1} = 20.$$

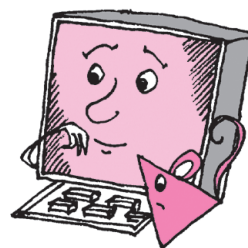
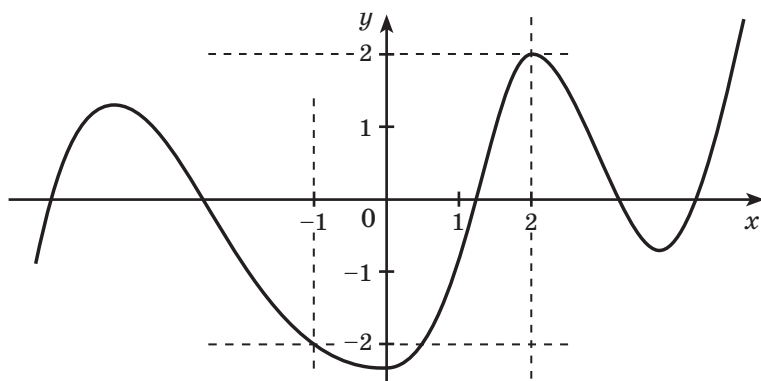
Аналитический способ задания функций очень удобен. Однако зависимость между величинами не всегда может быть задана формулой. В этом случае можно задать функцию графически.

Графический способ задания функции

На практике функция изначально может задаваться некоторым графиком. Например, метеорологические приборы автоматически регистрируют значение температуры в каждый заданный момент времени. Результатом их работы являются графики изменения температуры в зависимости от времени.

Графический способ задания функции основан на следующем. На координатной плоскости Oxy для каждого значения x из области определения функции строится точка, координата которой на оси Ox (*абсцисса*) равна выбранному значению x , а координата на оси Oy (*ордината*) равна соответствующему значению функции.

Построенные таким образом точки плоскости образуют множество точек, называемое **графиком функции**.



Используя график функции, найти её значение в некоторой точке x можно следующим образом:

1. Найти абсциссу, равную x .
2. Провести через неё прямую, параллельную оси Oy .
3. Найти точку пересечения этой прямой с графиком функции.
4. Провести через найденную точку пересечения прямую, параллельную Ox .
5. Определить ординату этой точки пересечения.

Найденная ордината будет равна значению функции в точке x . Например, на графике, представленном выше, $f(2) = 2$, а $f(-1) = -2$.

К

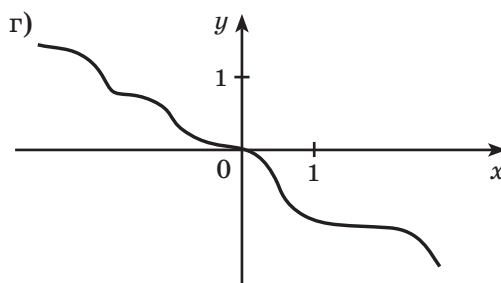
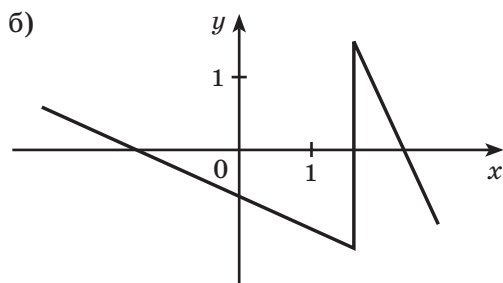
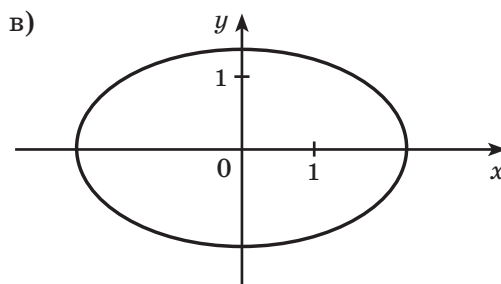
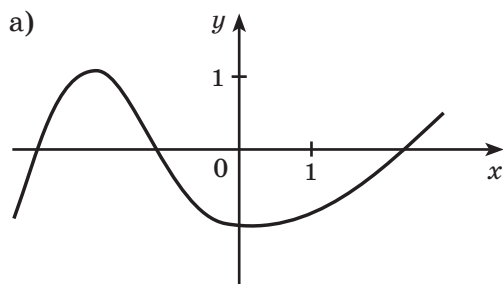
33

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

- а) $x = 2$; б) $x = -1,5$; в) $y = 4$; г) $y = -3,5$; д) $x = 0$; е) $y = 0$.

34

Зависимости заданы графически. Исходя из определения понятия функции, установите, какие из этих зависимостей являются функциональными, а какие – нет.



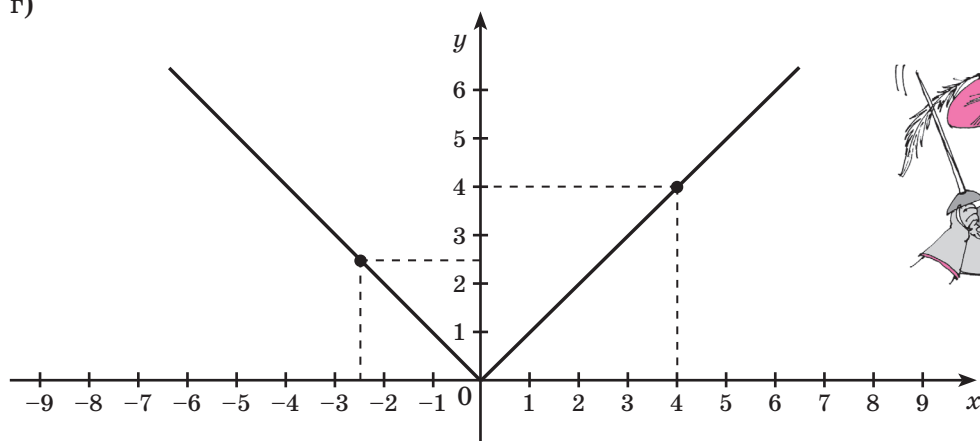
- 35** 1) Прочитайте запись: $y = f(x)$. Что означают в этой записи буквы x , y , f ? Запишите несколько других обозначений функции и прочитайте свои записи.
2) Что значит задать (определить) функцию? Что необходимо сделать, чтобы задать функцию? Сравните свой вывод с выводом на с. 11 учебника.

- 36** 1) Определите, какие из приведённых ниже зависимостей являются функциями.
а) Каждому рациональному числу ставится в соответствие его модуль.
б) $y = |x|$, $x \in \mathbb{Q}$.

в)

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6

г)



Как для каждой из указанных функций найти $f(4)$, $f(-2,5)$, $f\left(1\frac{3}{4}\right)$?

Что вы замечаете?

- 2) Какие способы задания функции были использованы? В чём преимущества и недостатки каждого из них? Сравните свои выводы с выводами на с. 11–13 учебника.

- 37** 1) Функции заданы словесным описанием. Найдите область определения и область значений каждой функции. Определите их значения в точках x_1 , x_2 и x_3 .

- а) Всем чётным числам поставлено в соответствие число 3, а всем нечётным числам – число (-3) .

$$x_1 = 24; x_2 = 17; x_3 = 128.$$

- б) Всем целым числам поставлено в соответствие число 1, а всем нецелым числам – число (-1) .

$$x_1 = -7; x_2 = 15,5; x_3 = -2,1.$$

- в) Всем правильным дробям поставлено в соответствие число 2, а всем неправильным дробям – число 4.

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{8}{7}; x_3 = \frac{4}{5}.$$

- 2) Можно ли задать каждую из трёх данных функций с помощью формулы, таблицы и графика?

38) Функция задана формулой. Найдите её область определения.

а) $y = x^2$; в) $y = \frac{3}{x-9}$; д) $y = \frac{14}{x^2}$; ж) $y = \frac{9x+7}{(2x-5)(4x+9)}$;
 б) $y = 2x+3$; г) $y = \frac{7x+5}{3}$; е) $y = \frac{2x}{3x-8}$; з) $y = \frac{11(x-5)}{x^3(2x+6)}$.

39) Функция задана формулой. Найдите её значение в точках x_1 , x_2 и x_3 .

а) $y = 7x - 5$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; в) $y = 3x^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -0,5$;
 б) $y = \frac{4}{2x-7}$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$; г) $y = \frac{4x-3}{5}$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0,75$; $x_3 = -2$.

40) Функция задана формулой: 1) $y = 2x$; 2) $y = -x$; 3) $y = 2 - x$; 4) $y = -|x|$.

Задайте данную функцию с помощью:

- а) словесного описания;
 б) таблицы значений от -3 до 3 с шагом 1.

(Шагом называют разность между двумя соседними значениями аргумента.)

41) Функция задана с помощью таблицы. Задайте её словесным описанием и графически.

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	3	6

в)

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	2	1	0,5	0	-0,5	-1	-2

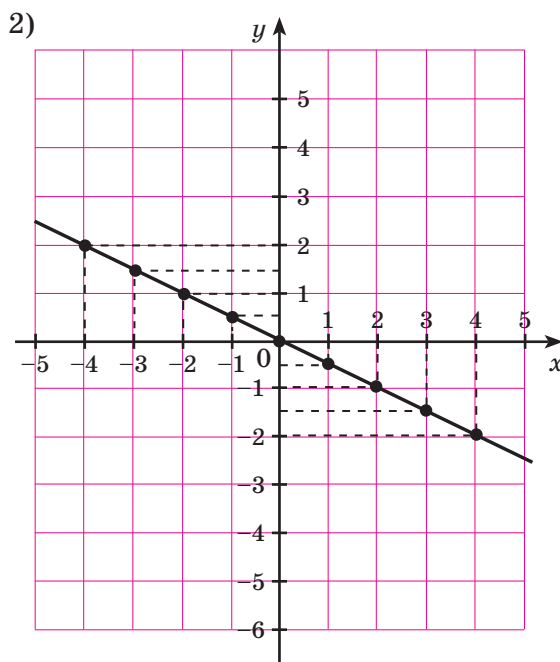
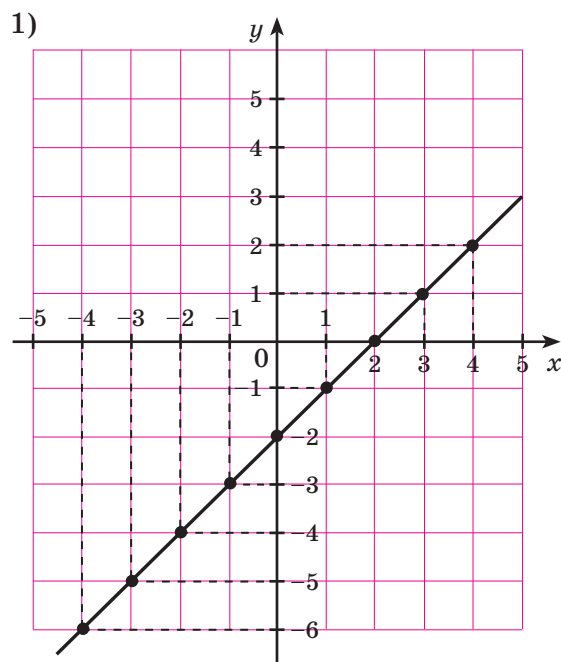
б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3

г)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

42) Функция задана с помощью графика. Задайте эту функцию: а) таблицей значений от -4 до 4 с шагом, равным 1; б) словесным описанием; в) формулой.



43 Составьте таблицу значений функции:

- а) $y = 3x$ для x от -4 до 4 с шагом 1 ; в) $y = 3x + 5$ для x от -2 до 2 с шагом $0,5$;
 б) $y = -4x$ для x от -6 до 6 с шагом 2 ; г) $y = 4 - 3x$ для x от $-4,5$ до $4,5$ с шагом $1,5$.

Используя таблицы, постройте графики этих функций для указанных значений x .

44 Функция задана с помощью таблицы. Задайте эту функцию словесным описанием и графически.

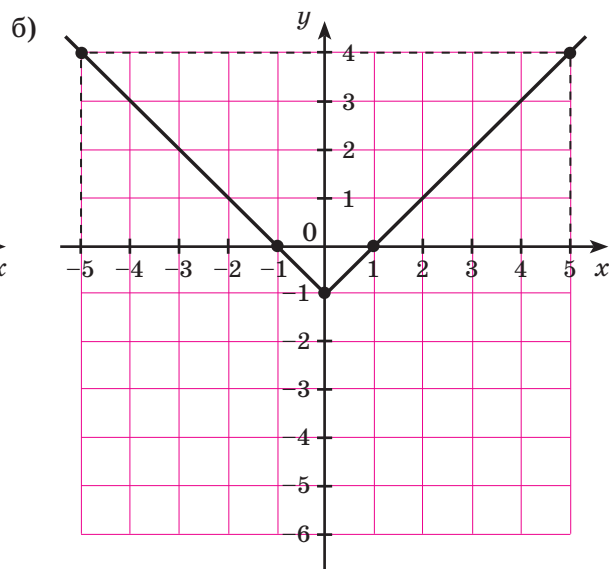
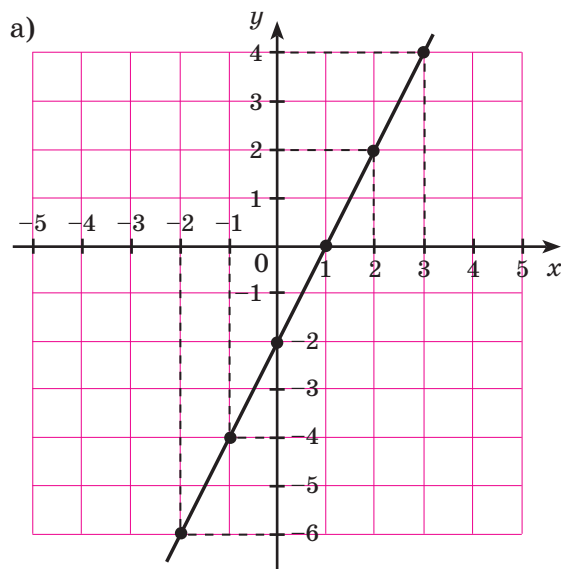
а)

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
y	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9

б)

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
y	-27	-8	-1	-0,125	0	0,125	1	8	27

45 Задайте функцию аналитически, используя её график.



46 Функция задана формулой. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно y_1 , y_2 и y_3 .

- а) $y = 5x - 6$; $y_1 = 0$; $y_2 = 5$; $y_3 = -2$; в) $y = \frac{7}{x}$; $y_1 = 1$; $y_2 = -1$; $y_3 = 2$;

- б) $y = \frac{11}{3x - 8}$; $y_1 = 1$; $y_2 = -2$; $y_3 = 3$; г) $y = \frac{9x - 5}{2}$; $y_1 = 0$; $y_2 = 2$; $y_3 = -2,5$.

π

47 Запишите следующие выражения на математическом языке:

- а) произведение квадрата суммы чисел 7 и a и разности квадратов чисел b и c ;
 б) частное куба суммы чисел 9 , x , y и суммы кубов чисел 3 и z ;
 в) удвоенная разность кубов чисел 6 и p , умноженная на куб суммы чисел 2 и q ;
 г) квадрат разности чисел r и s , делённый на разность кубов чисел t и k ;
 д) произведение неполного квадрата суммы чисел m и n и разности квадратов чисел a и b ;
 е) шестая степень суммы чисел 4 , m , n , k ;
 ж) сумма шестых степеней чисел x , y и z .

48 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{5}{511}$ и $\frac{7}{949}$;

б) $\frac{3}{1691}$ и $\frac{4}{2047}$;

в) $\frac{7}{2813}$ и $\frac{2}{3589}$.

49 Решите уравнение:

а) $(a + 7)^2 - 4 = 0$;

б) $(7b - 5)^2 - 64 = 0$;

в) $64(c + 5)^2 - 4c^2 = 0$.

50 Упростите выражение:

а) $3a^4 - (4a^3b - 7a^2b^2 - ab^3) - (2a^4 + 6ab^3 - a^3b - b^4) - (-3a^3b + 6a^2b^2 - 5ab^3)$;

б) $x^4 + 3x^3y - (6x^2z - 3rx + s) + 4x^4 - (6x^3y - 5x^2z + 3rx - 2s) + (-5x^4 + 6x^3y + 5x^2z - s)$;

в) $2a^2(a - b) + 3a(a - b)^2 - 5(a - b)^3 + c - (-4(a - b)^3 + 2a(a - b)^2 + a^2(a - b) + c)$;

г) $3x^2 + 4y^2 - (x + y)^2 - 2x(x + y) - 3y^2 + 4xy$.

51 Докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c :

а) $a = 200\,000$, $b = 200\,056$, $c = 8$;

в) $a = 599\,615$, $b = 600\,000$, $c = 11$;

б) $a = 399\,996$, $b = 400\,009$, $c = 13$;

г) $a = 900\,312$, $b = 900\,632$, $c = 32$.

52 а) Из Москвы и Владивостока, расстояние между которыми 9000 км, вылетели одновременно навстречу друг другу два самолета, Су-34 и Ил-96. Через 3 часа расстояние между ними было равно 1170 км. Найдите скорости, с которыми летели оба этих самолета, если скорость Су-34 была в два раза больше скорости Ил-96.

б) Из Москвы в Самару вышел теплоход со скоростью 20 км/ч. Через 3 часа из Москвы в том же направлении вышел второй теплоход, который передвигался со скоростью 24 км/ч. Чему равно расстояние между Москвой и Самарой, если в Самару оба теплохода прибыли одновременно?

в) Праздничная колонна демонстрантов движется по улице со скоростью 3 км/ч. Водитель машины с телевизионными камерами, двигавшейся навстречу колонне со скоростью 15 км/ч, заметил, что путь от начала и до конца колонны занял у него 2 минуты. Определите длину праздничной колонны.

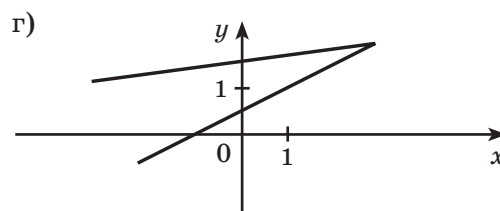
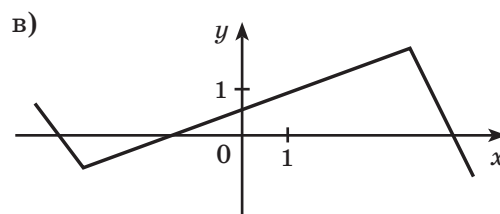
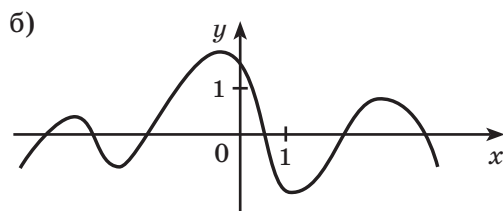
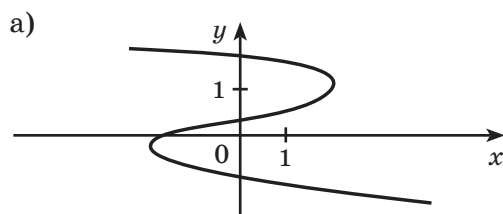
53 Докажите, что:

а) $a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a$ для любого целого числа a делится на 3;

б) $b^5 - 5b^3 + 4b$ для любого целого числа b делится на 5.

Д

54 Зависимости заданы графически. Определите, какие из них являются функциональными, а какие – нет.



55 Функция $y = f(x)$ задана следующим образом: всем числам, кратным 3, поставлено в соответствие число 0; всем числам, дающим остаток 1 при делении на 3, поставлено в соответствие число 1, а всем остальным целым числам поставлено в соответствие число 2. Найдите область определения и область значений этой функции. Вычислите её значения в точках 26, 70, -1, 12, -8.

56 Функция задана с помощью таблицы. Задайте её графически.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2



57 Функция задана формулой: 1) $y = -2x$; 2) $y = |2x|$.

Задайте данную функцию с помощью:

а) таблицы значений от -3 до 3 с шагом 1;

б) графика функции.

(Шагом называют разность между двумя соседними значениями аргумента.)

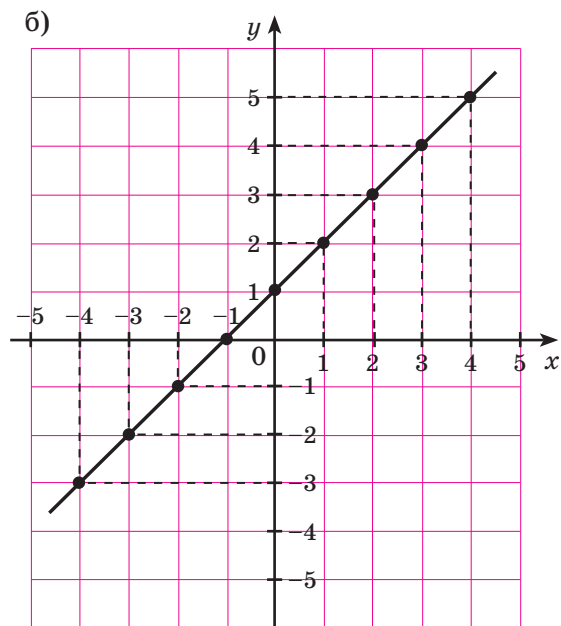
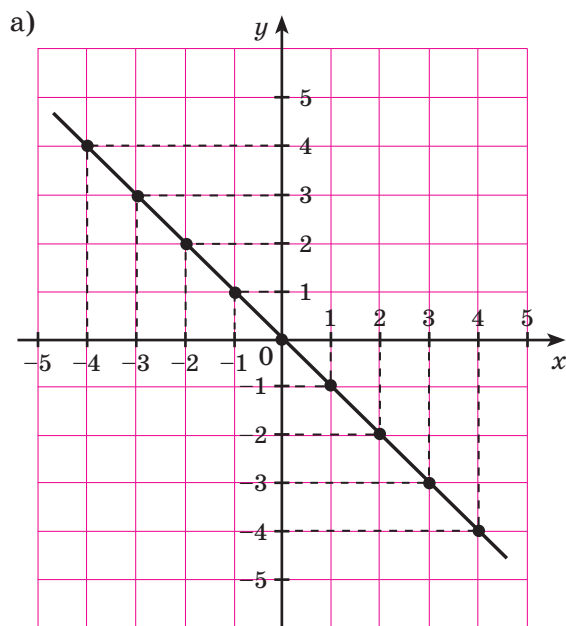
58 Функция задана формулой $y = \frac{7x-28}{4}$. Найдите её значение в точках 0, 2, 4, -1, -3.

59 Составьте таблицу значений функции:

а) $y = 5x$ для x от -2 до 2 с шагом 0,5; в) $y = 2x + 7$ для x от -3 до 3 с шагом 1;

б) $y = -7x$ для x от -9 до 9 с шагом 3; г) $y = 6 - x$ для x от -7,5 до 7,5 с шагом 2,5.

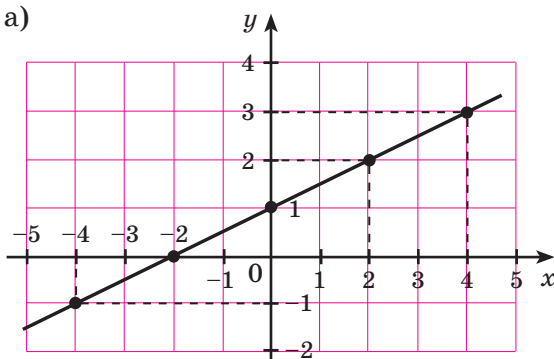
60 Функция задана с помощью графика. Задайте эту функцию таблицей значений от -4 до 4 (с шагом, равным 1) и формулой.



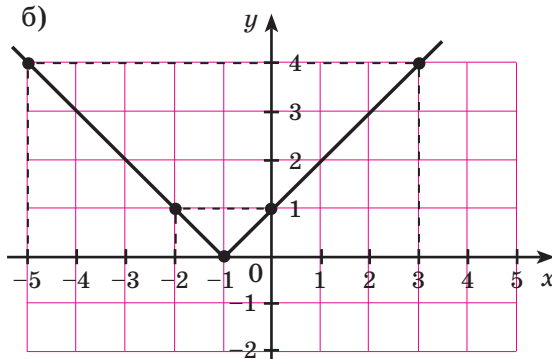
61 Функция задана формулой $y = \frac{17}{2x-3}$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 1, 3, -2.

62 Задайте функцию аналитически, используя её график.

а)



б)



63 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{2}{589}$ и $\frac{4}{899}$;

б) $\frac{3}{287}$ и $\frac{5}{697}$;

в) $\frac{1}{559}$ и $\frac{2}{817}$.

64 Решите уравнение:

а) $(x - 7)^2 - 36 = 0$;

б) $(5y + 3)^2 - 81 = 0$;

в) $16(z - 3)^2 - 9z^2 = 0$.

65 Упростите выражение:

а) $x^4 - (4x^3y - 7x^2y^2 - xy^3) - (2y^4 + 6xy^3 - x^3y - y^4) - (-3x^3y + 6x^2y^2 - 5xy^3)$;

б) $5y^2(x + y) - 7y(x + y)^2 + 3(x + y)^3 + 2x^2y - (4(x + y)^3 - 8y(x + y)^2 + 4y^2(x + y))$.

66 Докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c .

а) $a = 54\,316$, $b = 54\,393$, $c = 11$;

б) $a = 154\,217$, $b = 154\,649$, $c = 18$.

67 а) Из двух филиалов пончиковой компании Антона и Ксюши, расстояние между которыми равно 750 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Через 2 часа расстояние между ними было равно 450 км. Найти скорость, с которой ехали оба автомобиля, если скорость одного из них была в 1,5 раза больше скорости другого.

б) Когда Антон ехал на работу, он обратил внимание на колонну автомобилей, ехавших по встречной полосе. Машины в колонне двигались со скоростью 5 км/ч. При этом Антон заметил, что путь от начала и до конца колонны занял у него 12 минут. Чему равна длина этой колонны, если Антон ехал со скоростью 60 км/ч?

68 Докажите, что:

а) $a^3 + 3a^2 + 2a$ для любого целого числа a делится на 3;

б) $b^4 + 2b^3 + b^2$ для любого целого числа b делится на 4.

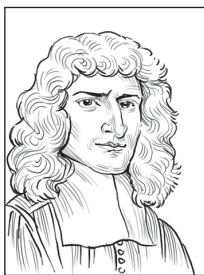
69 Докажите, что числа A и B имеют одинаковые остатки при делении на 7.

$$A = \left[\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{225} \right) \cdot 9 + 0,16 \right] : \left(\frac{1}{3} - 0,3 \right); \quad B = (50 - 11,409 : 0,3) : (4,2 : 12 - 0,21 \cdot \frac{2}{3}).$$

C

70* Путешественник отправился из своего родного города A в самый удалённый от него город B . Из города B он отправился в самый удалённый от него город C и так далее. Докажите, что если C не совпадает с A , то путешественник, передвигаясь и далее таким способом, никогда не вернётся домой.

5.1.3. Функциональная зависимость и кодирование информации*



*Математика – это непреложная основа наук
и плодотворный источник всяческой полезности
в человеческих делах...*

Исаак Барроу (1630–1677),
английский математик и физик

Как известно, кодирование информации необходимо для конфиденциальной передачи данных. Оно основано на том, что по определённому правилу меняется форма первоначального сообщения так, чтобы его смог прочесть только адресат, знающий правило, применённое при шифровке. Сегодня **криптография** (от др.-греч. *kryptos* – скрытый, *graphos* – писание) – наука о шифрах и их дешифровке – является основой информационной безопасности как отдельных компаний и корпораций, так и целых стран.

Фактически при кодировании информации задаётся некоторая функция, правило преобразования текста. Это правило называют **ключом шифра**. Например, каждой букве алфавита ставится в соответствие свой индивидуальный символ – цифра, буква, картинка, прочий знак. Данная функция преобразовывает исходное сообщение в зашифрованное.

Один из самых распространённых типов шифров, использовавшийся ещё Юлием Цезарем, получил название **шифра сдвига**. Процесс кодирования в этом случае состоит в том, что каждой букве алфавита (далее мы будем говорить только о русском алфавите) ставится в соответствие другая буква, отстоящая от первоначальной на заданное ключом число позиций. Так, например, в шифре сдвига с ключом 6 алфавит сдвинут на 6 букв. Этот шифр можно задать следующей таблицей:

А	→	Ё	Ё	→	Л	Л	→	С	С	→	Ч	Ч	→	Э	Э	→	Г
Б	→	Ж	Ж	→	М	М	→	Т	Т	→	Ш	Ш	→	Ю	Ю	→	Д
В	→	З	З	→	Н	Н	→	У	У	→	Щ	Щ	→	Я	Я	→	Е
Г	→	И	И	→	О	О	→	Ф	Ф	→	Ъ	Ъ	→	А			
Д	→	Й	Й	→	П	П	→	Х	Х	→	Ы	Ы	→	Б			
Е	→	К	К	→	Р	Р	→	Ц	Ц	→	Ь	Ь	→	В			

Отметим, что знаки препинания и пробелы в шифровках обычно не ставятся. Имеющему ключ это не мешает прочесть текст, а тем, кому он не предназначен, создаст дополнительные трудности и, значит, сделает шифр более надежным. При этом текст передаваемого сообщения должен быть составлен таким образом, чтобы он понимался однозначно. Однако при желании можно зашифровать с помощью указанного шифра и знаки препинания, и пробелы. Для этого к алфавиту надо просто добавить желаемые символы и после этого производить сдвиг.

Для того чтобы разобраться с тем, как кодируется текст с использованием шифров этого типа, зашифруем с помощью шифра сдвига с ключом 6 следующую фразу:

КАЖДОМУ ЧЕЛОВЕКУ СВОЙСТВЕННО ОШИБАТЬСЯ, НО НИКОМУ,
КРОМЕ ГЛУПЦА, НЕ СВОЙСТВЕННО УПОРСТВОВАТЬ В ОШИБКЕ.

Получим следующую шифровку:

РЁМЙФТЩЭКФСЗКРЩЧЗФПЧШЗКУУФФЮОЖЁШВЧЕУФУОРФТЩ
РЦФТКИСЩХЬЁУКЧЗФПЧШЗКУУФЩХФЦЧШЗФЗЁШВЗФЮОЖРК.

Зашифрованная фраза мало похожа на оригинал, однако расшифровать её не сложно. Ведь букв русского алфавита всего 33, а значит, существует всего 32 возможности сдвига. Поэтому, проверяя на первых буквах кода разные варианты сдвига, достаточно быстро можно найти ключ шифра.

Попробуем, например, прочитать зашифрованную с помощью шифра сдвига фразу:

ЖСФХГХСЪРСТУСФХСМНСЖ

Предположим, что ключ кода 1. Тогда букве Ж должна соответствовать стоящая перед ней буква Ё, букве С – буква Р, букве Ф – буква У. Начало нашей фразы получится ЁРУ. Судя по всему, ключ 1 не подходит.

Положив ключ кода 2, получим начало фразы ЕПТ, которое также не напоминает никакое слово русского языка. А взяв ключ кода 3, мы получим следующую фразу:

ДОСТАТОЧНО ПРОСТОЙ КОД

Таким образом, основным недостатком шифра сдвига является простота его расшифровки. В целях устранения этого недостатка был придуман тип шифров, называемый *шифром замены*. В нём каждой букве русского алфавита произвольным образом ставится в соответствие некий символ: буква, цифра, картинка и вообще произвольный знак. Например, возможен следующий ключ:

А → 1	Ё → *	Л → 7	С → ?	Ч → 9	Э → #
Б → С	Ж → 5	М → 0	Т → Д	Ш → №	Ю → \$
В → 2	З → Б	Н → (	У → Ъ	Щ → Е	Я → &
Г → Р	И →)	О → 4	Ф → 8	Ъ → И	
Д → 3	Й → +	П → Г	Х → !	Ы → К	
Е → А	К → В	Р → 6	Ц → 3	Ь → @	

Шифрование состоит в том, что буквы первоначального сообщения заменяются символами согласно ключу. Для тех, у кого есть ключ, написание и расшифровка сообщений достаточно просты. А вот без ключа расшифровать их непросто, так как количество возможных вариантов такого шифра равно

$$33! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 33 \approx 9 \cdot 10^{36},$$

поэтому даже с помощью быстродействующего компьютера на дешифровку перебором вариантов будет потрачено столько времени, что сообщение уже будет неактуально.

И тем не менее такие шифры научились расшифровывать. Идея дешифровки состоит в том, что различные буквы русского языка встречаются в осмысленных текстах с разной частотой. Например, гласная А встречается чаще согласной М. Проанализировав частоту появления в текстах разных символов, были составлены таблицы средней частоты появления каждой буквы. Так, в приведённой ниже таблице указана средняя частота появления букв русского алфавита в тексте из 1000 букв. Из неё, например, видно, что на 1000 букв русского текста приходится в среднем 28 букв Л.



Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота
А, И	75	Е+Ё	88	Л	42	Р	48	Ц	5
Б, Ъ+Ъ	17	Ж	9	М	31	С	54	Ч	15
В	46	З, Ы	20	Н, Т	63	У	25	Ш, Ю	7
Г	16	Й	12	О	109	Ф	2	Щ, Э	4
Д	31	К	34	П	28	Х	11	Я	22

Анализируя с помощью данной таблицы частоту появления символов в зашифрованном тексте, а также их взаимное расположение и учитывая особенности построения слов русского языка, можно существенно сократить количество возможных вариантов ключей, а значит, сократить время перебора и в конечном счете расшифровать сообщение. В связи с этим учёные-криптографы до сих пор продолжают создавать разные виды шифров.

Одним из видов шифров, позволяющих усложнить расшифровку, являются *шифры перестановки*. В них исходный текст разбивается на группы, состоящие из одинакового числа букв. Внутри каждой группы буквы определённым образом переставляются.

Если группа достаточно длинная, то число возможных перестановок букв достаточно велико. К тому же пытающемуся расшифровать зашифрованные сообщения такого вида без ключа неизвестно, на группы какой длины разбивался текст. Поэтому расшифровка таких сообщений дело более сложное, хотя и возможное.

Зашифруем с помощью шифра перестановки следующую фразу:

**УМ ЗАКЛЮЧАЕТСЯ НЕ ТОЛЬКО В ЗНАНИИ, НО И В УМЕНИИ
ПРИЛАГАТЬ ЗНАНИЕ НА ДЕЛЕ**

Начиная с первой буквы фразы, разобьём текст на группы по 10 букв в каждой. Затем нарисую таблицу с 10 столбцами и в первой её строке запишем числа от 1 до 10 в произвольном порядке. Теперь запишем в клетках таблицы по строчкам, начиная со второй строки, буквы шифруемого текста без пропусков и знаков препинания:

2	5	9	3	1	8	4	7	10	6
У	М	З	А	К	Л	Ю	Ч	А	Е
Т	С	Я	Н	Е	Т	О	Л	Ь	К
О	В	З	Н	А	Н	И	И	Н	О
И	В	У	М	Е	Н	И	И	П	Р
И	Л	А	Г	А	Т	Ь	З	Н	А
Н	И	Е	Н	А	Д	Е	Л	Е	

И наконец, выписывая буквы этой таблицы по столбцам в указанном порядке (сначала из столбца, отмеченного числом 1, затем – числом 2 и т. д.), мы получим следующую шифровку:

**КЕАЕААУТОИИНАННМГНЮОИИЬЕМСВВЛИЕКОРАЧЛИИЗЛ
ЛТННТДЗЯЗУАЕАЬНПНЕ**

Ключом к расшифровке текстов данного типа является набор цифр, указанный в первой строке таблицы. Зная его, получатель без труда расшифрует текст. Если же ключ не известен, восстановить исходный текст достаточно сложно, ведь буквы остались теми же и анализ частоты встречаемости букв здесь не поможет.

Тем не менее математические методы помогают расшифровывать и такие шифры без знания ключевого слова. Мы с вами пока этими методами, к сожалению, не владеем. Но для желающего что-то узнать не существует препятствий, и тот, кто захочет научиться этому, с радостью пройдёт весь путь обучения и научится решать множество полезных и красивых задач.

К

71 Выполните вычисления и расположите ответы примеров в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам. Вы узнаете название профессии, которая в буквальном переводе с итальянского языка означает «кладущий в ящик»:

К $5 \cdot 7 \cdot 3 - 35 \cdot 4$

Н $33 \cdot 34 - 34 \cdot 35$

С $(104 - 28) : 4$

Р $127 - 91 + 23 + 111$

О $52 + 68 - 22$

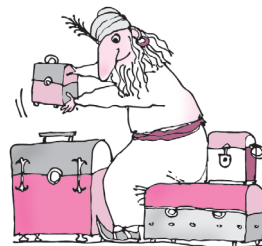
С $37 : 4 - 17 : 4$

Т $13 \cdot 21 - 29 \cdot 7$

А $(999 - 459) : 9$

А $(125 - 75) : 25$

И $98 \cdot 21 - 21 \cdot 128$



72

1) Прочитайте на с. 20 учебника, как называется наука о шифрах и их дешифровке, что означает данное слово в переводе с древнегреческого.

2) Зашифруйте название науки о шифрах и их дешифровке, сопоставляя каждой букве этого слова некоторый вычислительный пример.

3) Прочитайте на с. 20–22 учебника, как шифрование связано с понятием функции, что называется ключом шифра, какие бывают виды шифров.

73

Зашифруйте шифром сдвига с ключом 4 следующее высказывание великого древнегреческого философа и учёного Аристотеля:

ВСЕГО ПРИЯТНЕЕ ДЛЯ НАС ТЕ СЛОВА, КОТОРЫЕ ДАЮТ НАМ
КАКОЕ-НИБУДЬ ЗНАНИЕ

74

Расшифруйте высказывание одного из семи особо чтимых древнегреческих философов (семи мудрецов) Бианта Приенского, если известно, что оно зашифровано с помощью шифра сдвига:

ИШСЕГМЕЧЙСИЙОЦЖШГ.

75

Шифр замены задан следующим ключом:

А	→	☺
Б	→	*
В	→	α
Г	→	β
Д	→	θ
Е	→	γ

Ё	→	ε
Ж	→	κ
З	→	δ
И	→	η
Й	→	λ
К	→	μ

Л	→	π
М	→	σ
Н	→	τ
О	→	χ
П	→	φ
Р	→	ψ

С	→	ω
Т	→	!
У	→	↑
Ф	→	↓
Х	→	←
Ц	→	↔

Ч	→	∞
Ш	→	≡
Щ	→	☀
Ъ	→	♥
Ы	→	♠
Ь	→	♣

Э	→	♦
Ю	→	♪
Я	→	□

Зашифруйте с его помощью высказывание известного итальянского учёного Джордано Бруно:

СТРЕМЛЕНИЕ К ИСТИНЕ – ЕДИНСТВЕННОЕ ЗАНЯТИЕ,
ДОСТОЙНОЕ ГЕРОЯ

76

Зашифруйте шифром перестановки с ключом 78145236 высказывание известного английского учёного и философа Роджера Бэкона:

ТОТ, КТО НЕ ЗНАЕТ МАТЕМАТИКИ, НЕ МОЖЕТ УЗНАТЬ
НИКАКОЙ ДРУГОЙ НАУКИ И ДАЖЕ НЕ МОЖЕТ ОБНАРУЖИТЬ
СВОЕГО НЕВЕЖЕСТВА

- 77) Расшифруйте высказывание крупнейшего французского философа, писателя и историка Вольтера, зная, что оно зашифровано шифром перестановки с ключом 514362:

ИНЕШБЬУЕДВЛЕОТСОВВХЗИНКЕТИЕШДЙНААЬЛЛРТГЬЮДБХО

- 78) Используя таблицу частоты появления букв в текстах, расшифруйте высказывание немецкого философа Вильгельма Гумбольдта, если известно, что оно зашифровано шифром замены и знаком * обозначена буква О, а символом С – буква А:

AB@!\$&@@@& ☼C@1!91 *DC☼E\$CF! @C G&K*\$&DC !CD*&
2KC5*!\$*J@*& \$K91@9& DCD*& @*K@N& *DC☼E\$C&! @C
PJ9J*QA *@9 JC@@@&9\$CF! BJCG@*& @C@!J*&@9& P*@!&P&@@*
*2K&5GCF! @*5J&\$CF! P*Q@9BCF! QAT

- π 79) Какие высказывания являются общими, какие – высказываниями о существовании, а какие – ни теми ни другими? Определите их истинность. Для ложных высказываний постройте отрицание.

- Частное от деления числа 75 само на себя равно 1.
- Существуют целые числа, которые при делении их на себя дают в частном 2.
- Все целые числа при делении их на себя дают в частном 3.
- Существует такое целое число, которое в сумме с 6 даёт 17.
- Число 3 является решением уравнения $3x - 9 = 0$.
- Все решения уравнения $(x + 3)(2x - 9) = 0$ могут быть записаны как обыкновенные дроби.
- Число 4 меньше 5.
- Все рациональные числа, меньшие 5, больше (-100) .
- Существуют рациональные числа, меньшие 7 и большие 2.

- 80) Упростите выражение:

- $(2a^2 - (3a^2 - 4) + 2a^2 - (2 + a^2))^2$;
- $(3x - y)^3 - (3x + y)^3$;
- $p^2(q - r) + r(1 - p) + p(pr + r) - pq(p + 1)$;
- $(m + 2)(3 - m) + (4 - m)(m + 1) + (m - 4)(m + 4)$.



- 81) Сократите дроби при допустимых значениях переменных:

- $\frac{55x^{12}y^{34}z^{23}}{11x^{11}y^{35}z^{22}}$;
- $\frac{36p^{10}q^{15} - 54p^8q^{12}}{18p^{10}q^{12}}$;
- $\frac{81a^{54}b^{33}c^{65}}{27a^{56}b^{34}c^{65}}$;
- $\frac{21a^4b^8 + 49a^8b^4}{35a^5b^5}$;
- $\frac{102m^{69}n^{35}k^{70}}{6m^{78}n^{70}k^{34}}$;
- $\frac{32x^4y^6 - 40x^8y^9}{56x^6y^6 - 24x^8y^8}$.

- 82) а) Два числа относятся одно к другому как 5 к 7. Если меньшее из них разделить на 3, то результат будет на 16 больше частного большего числа и числа 9. Найдите эти числа.

- б) Отец завещал трём своим сыновьям крупную сумму денег. Наследство было разделено между старшим, средним и младшим сыновьями в отношении 9 : 7 : 3. Какую сумму денег завещал отец своим сыновьям, если младший получил 270 тыс. р.?

83 Выполните указанное действие по модулю m :

- а) $9 + 7, m = 4$; г) $74 - 11, m = 5$; ж) $4 \cdot 9, m = 13$;
 б) $11 + 15, m = 9$; д) $35 - 96, m = 6$; з) $48 \cdot 52, m = 17$;
 в) $26 + 38, m = 7$; е) $49 - 85, m = 11$; и) $6^7, m = 19$.

84 Найдите остаток от деления a на b :

- а) $a = 298^{892}, b = 11$; б) $a = 564^{465}, b = 7$; в) $a = 351^{153}, b = 6$.

85 Зашифруйте шифром сдвига с ключом 7 следующее высказывание известного французского математика Рене Декарта:

ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ УСОВЕРШЕНСТВОВАТЬ УМ, НАДО
БОЛЬШЕ РАЗМЫШЛЯТЬ, ЧЕМ ЗАУЧИВАТЬ

86 Расшифруйте высказывание итальянского физика, философа и математика Галилео Галилея, если известно, что оно зашифровано с помощью шифра сдвига.

КЦИЦШРЪДЧЫЪЗХХЦЫФММЪЙЩЖТРСКИЦШРЪДЖЩХЦХМФХЦКРМ

87 Шифр замены задан следующим ключом:

А	→	1	Ё	→	7	Л	→	С	С	→	І	Ч	→	О	Э	→	U
Б	→	2	Ж	→	8	М	→	D	Т	→	J	Ш	→	P	Ю	→	V
В	→	3	З	→	9	Н	→	E	У	→	K	Щ	→	Q	Я	→	W
Г	→	4	И	→	!	О	→	F	Ф	→	L	Ъ	→	R			
Д	→	5	Й	→	A	П	→	G	Х	→	M	Ы	→	S			
Е	→	6	К	→	B	Р	→	H	Ц	→	N	Ь	→	T			

Зашифруйте с его помощью высказывание известного английского физика Уильяма Гроуе:

ИСТИННАЯ НАУКА НЕ ЗНАЕТ НИ СИМПАТИЙ, НИ АНТИПАТИЙ;
ЕДИНСТВЕННАЯ ЦЕЛЬ ЕЁ – ИСТИНА

88 Зашифруйте шифром перестановки с ключом 951427836 высказывание известного немецкого философа Фридриха Ницше:

КТО ХОЧЕТ НАУЧИТЬСЯ ЛЕТАТЬ, ТОТ ДОЛЖЕН СПЕРВА НАУЧИТЬСЯ
СТОЯТЬ, И ХОДИТЬ, И БЕГАТЬ, И ЛАЗИТЬ, И ТАНЦЕВАТЬ:
НЕЛЬЗЯ СРАЗУ НАУЧИТЬСЯ ПОЛЕТУ

89 Расшифруйте высказывание древнегреческого философа Платона, зная, что оно зашифровано шифром перестановки с ключом 3572461.

ИВНТНСМИНБОВЖСЛНОСЕЕЕВАТУАСГЕТООСОСНВАЧИДНТОСЬ
ИЙТЗОНЕЕАНР

90 Расшифруйте высказывание известного итальянского художника и учёного Леонардо да Винчи, если известно, что оно зашифровано шифром замены и символ А обозначает букву Т, символ В – букву А, а символ Т – букву С:

ABC D⊙ CBC FGHIGJ⊙KL⊙ FLJL N⊙O PQGRGISTARLV
FW⊙RWBJB⊙ATV R TCPXKG⊙ FLABKL⊙ ABC OBKVAL⊙ KBPCGY
N⊙O TAWBTAL OBTGWV⊙A FBZVAS CGAGWBV TABKGRLATV
K⊙TFGTGNKGY PTRBLRBAS AG XAG GKB FGHIGJB⊙A

91 Упростите выражение:

а) $(2a + b)^3 - (2a - b)^3$;

б) $5p^2 - q(p + q) - (3(-q^2 + p^2 - 2pq) - (-4pq - 4(q^2 + 2pq)))$.

92 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{18a^9b^7 + 24a^7b^9}{36a^7b^7}$; б) $\frac{75m^{57}n^{69}k^{39}}{25k^{39}m^{58}n^{68}}$; в) $\frac{45x^9y^5 - 54x^7y^6}{27x^7y^7 - 63x^9y^9}$.

93 В пончиковой компании Антона и Ксюши часть прибыли за 2010 год решили потратить на выплаты дивидендов собственникам. Было принято решение разделить её между Антоном, Ксюшей и прочими акционерами в отношении 5 : 4 : 2. Какую сумму денег получил Антон, если выплаты прочим акционерам составили 120 тыс. р.?

94 Выполните указанное действие по модулю m :

а) $12 + 16, m = 5$; в) $26 - 51, m = 8$; д) $21 \cdot 19, m = 15$;

б) $39 + 41, m = 9$; г) $44 - 97, m = 7$; е) $4^8, m = 11$.

95 Найдите остаток от деления a на b :

а) $a = 417^{714}, b = 7$;

б) $a = 318^{813}, b = 11$;

в) $a = 596^{695}, b = 5$.

С

96*

Встретились два бывших одноклассника – биолог и математик. Биолог предложил математику определить возраст его сыновей и сообщил, что произведение полных лет трёх его сыновей равно 36. Математик на это ему ответил, что этих данных ему недостаточно, чтобы определить возраст каждого из его детей. Тогда биолог сообщил, что сумма возрастов его детей равна номеру школы, в которой они учились. Математик на это ответил, что и этих данных ему мало. Хитрый биолог добавил тогда, что старший его сын рыжий. После этого математик правильно определил возраст сыновей биолога. Сможете ли вы определить возраст сыновей биолога и номер школы, в которой учились биолог и математик?

97*

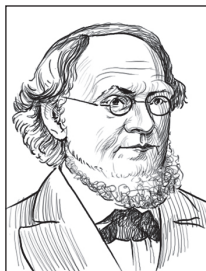
В университете имени М. В. Ломоносова преподаватели Антонова, Бирюкова, Кузьмина, Дудкин, Иванов и Филатов преподают шесть разных предметов: высшую математику, физику, программирование, отечественную историю, общую психологию и английский язык. Известно, что:

1. Преподаватели программирования и общей психологии – женщины.
 2. Иванов старше Филатова, но преподавателем он работает меньше, чем преподаватель высшей математики.
 3. Будучи студентами, Антонова и Бирюкова учились в педагогическом институте. Все остальные преподаватели окончили университет имени М. В. Ломоносова.
 4. Филатов – отец преподавателя физики.
 5. Преподаватель английского языка старше всех, при этом преподавателем он работает дольше всех.
 6. Преподаватель английского языка работает в университете им. М. В. Ломоносова с того момента, как окончил его. Преподаватели психологии и отечественной истории – его бывшие студенты.
 7. Антонова старше преподавателя программирования.
- Определите, кто какой предмет преподаёт.



§ 2. Линейные процессы и линейная функция

5.2.1. Прямая пропорциональность



Математика – это наука о связи величин.

Герман Гюнтер Грассман (1809–1877),
немецкий физик, математик и филолог

Решая задачи и наблюдая за поведением различных величин на практике, мы видели, что между некоторыми из них существуют определённые зависимости. Так, пройденный путь зависит от скорости и времени движения, площадь круга зависит от его диаметра, площадь квадрата зависит от длины его стороны и т. д.

При этом мы замечали, что у многих зависимостей, описывающих, казалось бы, совершенно разные процессы, имеется много общего. Например:

1. Если мы движемся с постоянной скоростью 70 км/ч, то при увеличении времени движения в два раза пройденный нами путь тоже увеличится в два раза.

2. Если мы покупаем помидоры по цене 70 р. за килограмм, то, увеличив массу покупки в два раза, мы заплатим за неё в два раза больше.

3. Если некоторый рабочий производит 70 деталей в час, то, увеличив время своей работы в два раза, он заметит, что количество сделанных им деталей также увеличилось в два раза.

И таких примеров можно привести огромное количество. Общее же у них то, что с увеличением (уменьшением) одной из величин в несколько раз другая величина увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Обобщённое описание и последующее исследование зависимостей между величинами позволяет создать общие способы решения разнообразных задач данного вида. Так изучение чисел позволяет нам применять их свойства, не задумываясь о том, что именно мы считаем – тетради, деньги, размеры дома или скорость ракеты.

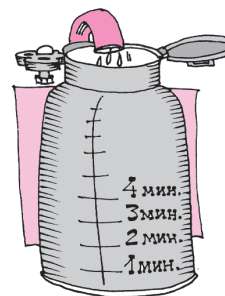
Мы уже знаем, что рассмотренный тип зависимости называется **прямо пропорциональной** зависимостью. Такая зависимость может быть записана с помощью единой формулы:

$$y = kx,$$

где x и y – соответствующие значения независимой и зависимой величин, а число k называется *коэффициентом пропорциональности*.

При положительных k и x данное равенство показывает, что при увеличении (уменьшении) значения x в несколько раз значение y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Итак, мы можем дать следующее определение прямо пропорциональных величин.



Определение. Две величины x и y называются *прямо пропорциональными*, если они связаны формулой $y = kx$, где k – некоторое число. Число k называется *коэффициентом пропорциональности*.

Напомним, что название данной зависимости связано с тем, что, в соответствии с равенством $y = kx$, если $y_1 = kx_1$, а $y_2 = kx_2$, то

$$\frac{y_1}{x_1} = k, \frac{y_2}{x_2} = k \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Таким образом, величины y_1 , x_1 , y_2 и x_2 образуют *пропорцию*.

Прямо пропорциональная зависимость является одной из самых простых. Но большинство величин в реальной жизни ведут себя иначе. Например, сторона квадрата не прямо пропорциональна его площади: если увеличить сторону квадрата в 2 раза, его площадь увеличится не в 2, а в 4 раза. Чтобы изучить поведение более сложных зависимостей, нам надо сначала разобраться с более простыми.

Во-первых, заметим, что, согласно равенству $y = kx$, каждому рациональному числу x сопоставляется единственное число y . Значит:

Прямо пропорциональная зависимость $y = kx$, где k – произвольное число, является функциональной зависимостью, или *функцией*. Областью определения данной функции являются все известные нам числа.

Построим график прямой пропорциональности, взяв в качестве примера зависимость $y = 1,5x$. Для этого составим таблицу соответствующих значений переменных x и y :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-4,5	-3	-1,5	0	1,5	3	4,5	6

Затем отметим точки с вычисленными координатами $(x; y)$ на координатной плоскости Oxy (рис. 1).

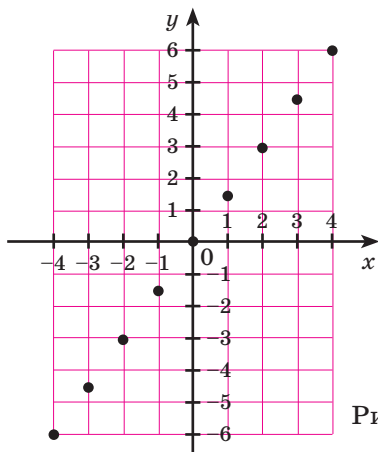


Рис. 1

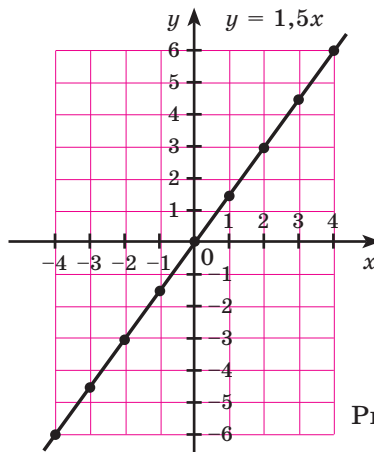
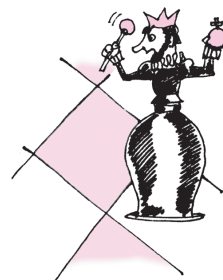


Рис. 2



Можно доказать, что все полученные точки принадлежат некоторой прямой (рис. 2), то есть верна следующая теорема.

Теорема. Графиком функции $y = kx$ является прямая линия.

Доказательство данной теоремы будет получено позднее в курсе геометрии, пока нам для этого не хватает знаний.

Так как график прямой пропорциональности – это прямая, а через две различные точки можно провести ровно одну прямую, то для построения графика функции $y = kx$ нам достаточно найти лишь две точки, принадлежащие этой прямой.

Заметим, что при любом коэффициенте пропорциональности k , если $x = 0$, то и $y = 0$. Значит:

График функции $y = kx$ всегда проходит через начало координат – точку $O(0; 0)$.

Следовательно, чтобы построить график $y = kx$, нам надо найти ещё лишь одну точку, принадлежащую этому графику. Например, чтобы построить график функции $y = -0,5x$, можно взять значение $x_1 = 4$, найти соответствующее значение $y_1 = -0,5 \cdot 4 = -2$, а затем провести прямую через полученную точку $(4; -2)$ и начало координат (рис. 3).

Таким образом, мы можем записать следующий алгоритм построения графика прямой пропорциональности.

Алгоритм построения графика функции $y = kx$

1. Отметить на координатной плоскости Oxy точку O с координатами $(0; 0)$.
2. Выбрать некоторое значение $x_1 \neq 0$.
3. Вычислить значение $y_1 = kx_1$.
4. Отметить на координатной плоскости Oxy точку A с координатами $(x_1; y_1)$.
5. Через точки O и A провести прямую.

Расположение графика функции $y = kx$ на координатной плоскости зависит от знака коэффициента k . Так, если $k > 0$, то знаки соответствующих значений x и y всегда одинаковы, поэтому график $y = kx$ располагается в I и III координатных четвертях (рис. 4). Аналогично при $k < 0$ знаки x и y всегда различны, поэтому график данной функции располагается во II и IV координатных четвертях (рис. 5).

Если $k = 0$, то при всех значениях x значение $y = 0$. Значит, графиком прямой пропорциональности в этом случае является ось Ox .

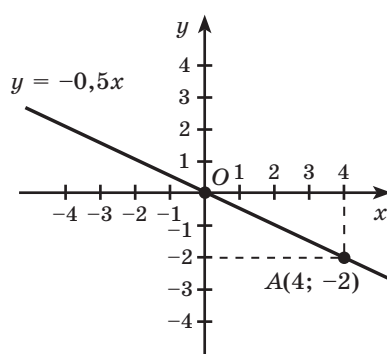


Рис. 3

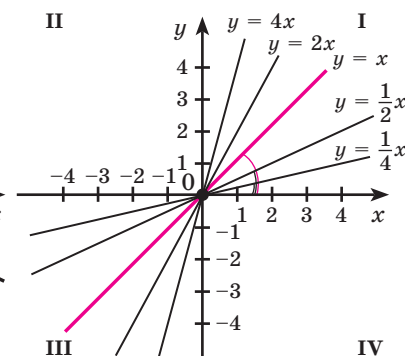


Рис. 4

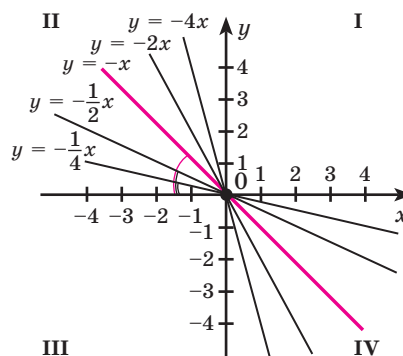


Рис. 5

Наблюдая за тем, как при изменении k ведёт себя график прямой пропорциональности, можно заметить различные закономерности, например:

1) Если $k \neq 0$, то областью значений прямой пропорциональности является множество всех известных нам чисел, а если $k = 0$, то область значений состоит из одного числа 0.

2) График функции $y = x$ ($y = -x$) является биссектрисой I и III (II и IV) координатных углов.

3) С увеличением $|k|$ острый угол между графиком $y = kx$ и осью абсцисс Ox увеличивается (график становится «круче»), а с уменьшением $|k|$ — уменьшается (график более «пологий»).

Можно наблюдать и многие другие закономерности расположения графика прямой пропорциональности $y = kx$: например, его симметрия относительно начала координат; особенности его расположения относительно координатных осей и другие.

К

98

Функции заданы таблично. Задайте эти функции формулами и постройте их графики в одной системе координат Oxy .

а)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

б)

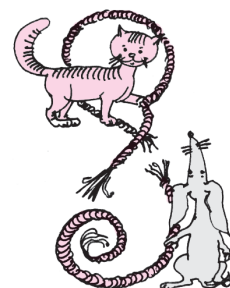
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

в)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3

г)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Чему равно множество значений каждой из этих функций? Через какую общую точку проходят все их графики?

99

1) Запишите формулу зависимости длины пути в километрах, пройденного с постоянной скоростью 3 км/ч, от времени движения в часах. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

2) Запишите формулу зависимости стоимости в рублях пользования Интернетом по цене 500 р. в месяц от количества месяцев подключения к Интернету. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

3) Зачем нужны обобщённые описания процессов? Задайте предыдущие две зависимости единой обобщённой формулой. Как называется такая зависимость? Почему? Какие её общие свойства вам известны? Найдите её область определения и докажете, что она является функцией.

4) Сопоставьте свои выводы с определением и выводами на с. 27–28 учебника.

100

Выберите из предложенных зависимостей те, которые являются прямой пропорциональностью, и укажите коэффициент пропорциональности k .

- а) $y = -2x$; в) $y = 0,5x$; д) $y = x : 7$; ж) $y = 3x^2$; и) $y = 0 \cdot x + 4$;
 б) $y = x + 3$; г) $y = 0 \cdot x$; е) $y = 2 : x$; з) $y = 5x$; к) $y = 0 - 3x$.

101

- 1) Запишите формулу зависимости стоимости покупки яблок по цене 1,5 тыс. р. за центнер от массы купленных яблок. Докажите, что данная зависимость является прямой пропорциональностью, и постройте её график. Что вы замечаете?
- 2) Какое минимальное количество точек нужно отметить на координатной плоскости для построения графика прямой пропорциональности? Почему? Какие точки лучше взять?
- 3) Исходя из своих наблюдений, составьте алгоритм построения графика прямой пропорциональности.
- 4) Сравните свои выводы и алгоритм с выводами и алгоритмом на с. 28–29 учебника.

102

Пользуясь алгоритмом построения графика прямой пропорциональности, постройте на одной координатной плоскости графики зависимости $y = kx$, если:

а) $k = 1$; $k = 3$; $k = \frac{1}{3}$; $k = 6$; $k = \frac{1}{6}$; б) $k = -1$; $k = -3$; $k = -\frac{1}{3}$; $k = -6$; $k = -\frac{1}{6}$.

Что вы замечаете? Сравните свои выводы с выводами на с. 29–30 учебника.

103

Не строя графика зависимости $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если:

а) $k = 2,3$; б) $k = -6,7$; в) $k = -1,9$; г) $k = 5,6$; д) $k = -6,4$.

104

Определите коэффициент пропорциональности функции $y = kx$, проходящей через точку А. Опишите расположение её графика в координатной плоскости.

а) А (2; 10); в) А (0,5; -2); д) А (-4; 0,5); ж) А (1,2; 6);
б) А (-3; 12); г) А (-0,4; -8); е) А (3; -1,5); з) А (-7; -1,4).

105

1) Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = x$ и $y = -x$ и два графика прямой пропорциональности, один из которых проходит через точку А, а другой – через точку В. Задайте данные функции аналитически (формулой). Что вы замечаете?

а) А (4; 1), В (4; -1); в) А (4; 10), В (-4; 10); д) А (-3; -8), В (3; -8);
б) А (-2; 8), В (2; 8); г) А (5; -2), В (-5; -2); е) А (4; 1,5), В (-4; 1,5).

2) Проанализируйте расположение на координатной плоскости каждого из построенных графиков и их взаимное расположение.

106

1) Прямая пропорциональность задана таблицей. Определите коэффициент пропорциональности данной зависимости и найдите недостающие в таблице значения. Задайте зависимость аналитически (формулой) и постройте её график.

а)

x	-5		-1	0	2	4
y		-6		0	4	

в)

x	-6		-2	2		5
y	1,5	1			-0,75	

б)

x	-8		-2	0	2	6
y		9	3	0		

г)

x	-4		-1	3	5	6
y		6			-15	

2) При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

107 График прямой пропорциональности проходит через точку $A(p; q)$. Найдите коэффициент пропорциональности и опишите особенности расположения данного графика на координатной плоскости. Затем постройте график и проверьте свои выводы.

- а) $p = 2, q = -2$; в) $p = -5, q = 2,5$; д) $p = 1, q = 0,3$;
б) $p = 3, q = 1,5$; г) $p = -8, q = -1,6$; е) $p = 0,25, q = -2$.

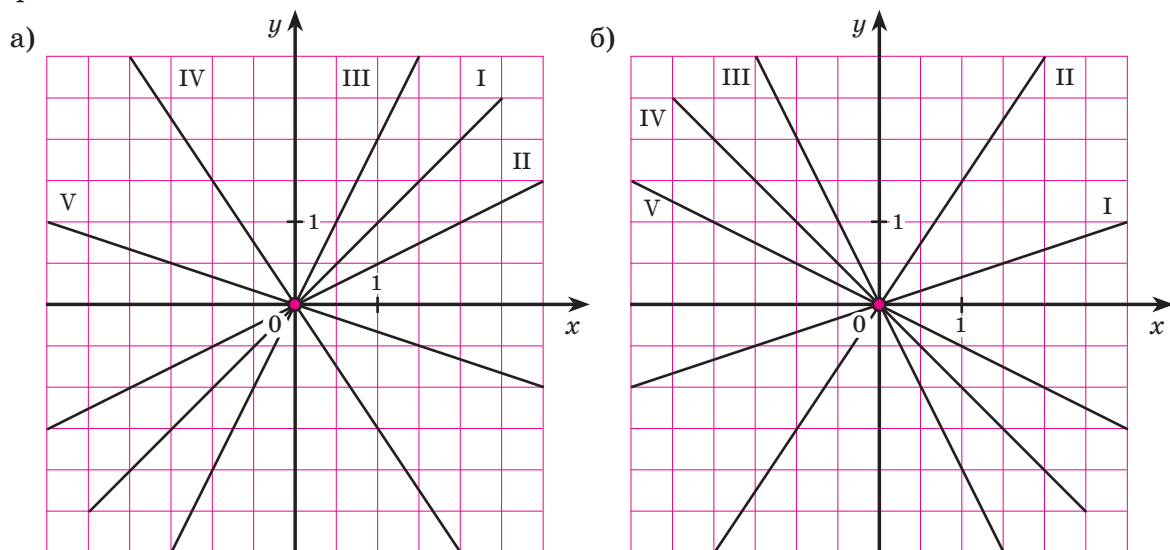
108 Для прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

- а) $k = 0,5; a = 6,5; b = -1,5$; в) $k = \frac{1}{7}; a = 1,4; b = -2$; д) $k = 3; a = 4; b = 15$;
б) $k = -2; a = -2,5; b = 8$; г) $k = -0,4; a = -2,5; b = 4$; е) $k = -\frac{5}{9}; a = -1,8; b = -3,5$.

109 Принадлежат ли графику функции $y = kx$ точки A и B , если:

- а) $k = 2, A(0; 2), B(-3; -6)$; г) $k = -3, A(-2; 6), B(3; 9)$;
б) $k = 0,4, A(0,4; 0), B(-2; 0,8)$; д) $k = -1, A(-4; 4), B(0,5; -0,5)$;
в) $k = 4, A(0; 0), B(-1,5; 6)$; е) $k = -0,5, A(-0,5; 2), B(4; 2)$.

110 Задайте аналитически (формулой) каждую из функций, представленных на графике:



111 График прямой пропорциональной зависимости проходит через точку A . Проходит ли он через точку B ?

- а) $A(4; 2), B(-6; 3)$; в) $A(8; -2), B(12; -3)$; д) $A(-2; -0,5), B(-4; -1)$;
б) $A(-9; 4,5), B(7; 3,5)$; г) $A(-1,5; 6), B(-2; -8)$; е) $A(5; 1), B(-6; -1,2)$.

112 Прямая проходит через начало координат и точку A . Является ли эта прямая графиком функции $y = kx$, если:

- а) $k = 3, A(2; 6)$; в) $k = 4, A(-2; -8)$; д) $k = -1,5, A(3; -4)$;
б) $k = -2, A(-1; -2)$; г) $k = -0,5, A(2; -1)$; е) $k = 2,1, A(3; 6,3)$?

π **113** Вычислите отношения:

- а) $2,6 : 5,2$; б) $9 : 0,06$; в) $0,7 : 2\frac{1}{3}$; г) $2,25 : 0,9$.

114

Точка C принадлежит отрезку AB . Что показывают отношения $\frac{AC}{AB}$, $\frac{AB}{AC}$? Какие ещё отношения можно составить?

115

Измерьте длины сторон треугольников ABC и DBE и вычислите отношения $\frac{DB}{AB}$, $\frac{BE}{BC}$, $\frac{DE}{AC}$ (рис. 6). Что вы замечаете? Как можно назвать данные величины?

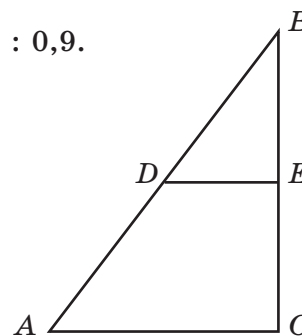


Рис. 6

116

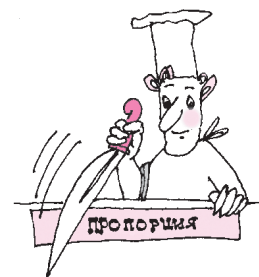
Прочитайте пропорцию разными способами: $5 : 10 = 6 : 12$. Назовите её крайние члены, средние члены, основное свойство пропорции. Докажите, что опять получится пропорция, если:

- а) поменять местами крайние члены;
б) поменять местами средние члены;
в) заменить каждое отношение обратным.

Какие ещё преобразования помогут получить из этих же чисел новую пропорцию?

117

Дана пропорция: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Какие другие пропорции, членами которых являются те же числа a , b , c и d , можно записать?

**118**

Решите уравнение:

- а) $\frac{0,8}{x} = \frac{0,21}{\frac{7}{8}}$; б) $3,6 : \frac{9}{1,1} = 0,44 : y$; в) $\frac{2}{2a+1} = \frac{2a-1}{40}$; г) $\frac{2d+16}{3d} = \frac{d}{6}$.

119

Решите задачу методом пропорций:

- а) На пошив 12 одинаковых платьев израсходовали 49,8 м ткани. Сколько таких же платьев можно сшить из 74,7 м этой ткани?
б) Для окраски 15 м^2 пола требуется 2,1 кг краски. Сколько краски потребуется для окраски пола прямоугольной комнаты длиной 6,3 м и шириной 4,5 м?
в) Из 158 л молока получается 3,2 кг сливочного масла. Сколько нужно взять молока, чтобы приготовить 16 кг сливочного масла?
г) Маятник часов делает 198 качаний за 2 мин 24 с. Сколько качаний он сделает за 3 мин 12 с?

120

Не проводя вычислений, сравните значения числовых выражений:

- а) $|195 - 271| \cdot |189 - 193|$ и $(195 - 271)(189 - 193)$;
б) $|512 - 415| \cdot |277 - 396|$ и $(512 - 415)(277 - 396)$;
в) $(213 - 378) \cdot |567 - 613|$ и $|213 - 378| \cdot (567 - 613)$;
г) $|476 - 245| \cdot (345 - 678)$ и $(476 - 245) \cdot |345 - 678|$.



121 Решите уравнение:

а) $|x - 2010| + |2010 - x| = 2012$; б) $|x - 365| + |2x - 730| = 36$.

122 Определите, какой цифрой оканчивается число:

а) 399^{993} ; б) $514^{415^{10}}$.

123 Выберите из предложенных зависимостей те, которые являются прямой пропорциональностью, и укажите коэффициент пропорциональности k .

а) $y = 1,2x$; в) $y = 0 \cdot x$; д) $y = 8 : x$; ж) $y = -4x^2$; и) $y = 5x + 6$;

б) $y = -2x + 1$; г) $y = 3x + 0$; е) $y = x : 15$; з) $y = x$; к) $y = -0,8x^3$.

124 Пользуясь алгоритмом построения графика прямой пропорциональности, постройте на одной координатной плоскости графики зависимости $y = kx$, если:

$k = 1$; $k = -1$; $k = 2$; $k = -2$; $k = \frac{1}{2}$; $k = -\frac{1}{2}$.

Какие закономерности в расположении данных графиков вы наблюдаете?

125 Не строя графика зависимости $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если:

а) $k = 7,8$; б) $k = -3,5$; в) $k = -9,6$; г) $k = 2,4$.

126 1) В таблице задана прямая пропорциональность. Определите коэффициент пропорциональности данной зависимости и найдите недостающие в таблице значения. Задайте зависимость аналитически (формулой) и постройте её график.

а)

x	-5		-1	0	3	4
y		-12	-3	0		

б)

x	-8		-4	-2	1	3
y		9		3		

2) При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

127 График прямой пропорциональности проходит через точку $A(p; q)$. Найдите коэффициент пропорциональности и опишите особенности расположения данного графика на координатной плоскости. Затем постройте график и проверьте свои выводы.

а) $p = -5, q = 5$; б) $p = 3, q = -9$; в) $p = -4, q = -1,6$.

128 Определите коэффициент пропорциональности функции $y = kx$, проходящей через точку A . В каких координатных четвертях расположен её график?

а) $A(3; 12)$; б) $A(1,5; -3)$; в) $A(-7; 3,5)$; г) $A(1,8; 9)$.

129 Для прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $k = 3; a = 4; b = -5$; в) $k = -0,8; a = -1,5; b = 3$;

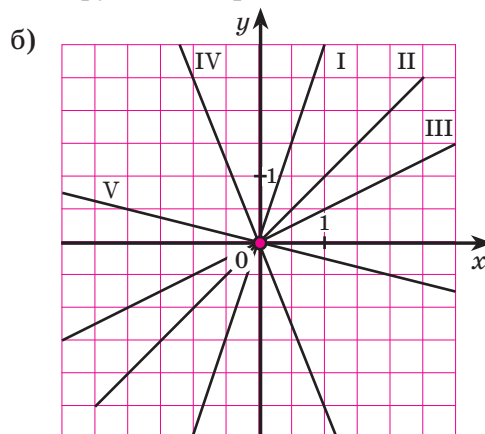
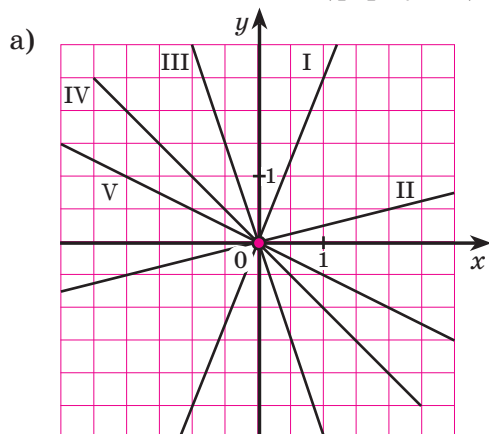
б) $k = -1,5; a = -3; b = 6$; г) $k = 5; a = 2; b = 7$.

130 Принадлежат ли графику функции $y = kx$ точки A и B , если:

а) $k = 0,3, A(0; 4), B(-1; -0,3)$; в) $k = -0,4, A(-2; 8), B(3; -1,2)$;

б) $k = 1,2, A(0,5; 0,6), B(-1; -1,2)$; г) $k = -2,1, A(-3; 6,3), B(0,7; -0,3)$.

131 Задайте аналитически (формулой) каждую из функций, представленных на графике:



132 График прямой пропорциональной зависимости проходит через точку А. Проходит ли он через точку В?

- а) А (6; -2), В (-12; 4); б) А (5; 2,5), В (-7; 3,5); в) А (-4; -1), В (2; 0,5).

133 Дана пропорция: $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$. Какие другие пропорции, членами которых являются те же числа x, y, m и n , можно записать?

134 Решите уравнение:

- а) $x : 2,8 = 1\frac{2}{7} : 3,6$; б) $\frac{25}{10,8} = \frac{y}{0,54}$; в) $\frac{k+1}{2} = \frac{8}{k+1}$; г) $\frac{c+4}{2} = \frac{15c+24}{9c}$.

135 Решите задачи методом пропорций:

а) В пончиковой компании Антона и Ксюши для выпечки 270 кг пончиков расходуют 217,5 кг муки. Сколько муки нужно приготовить для выпечки 801 кг пончиков?

б) Из 0,3 тонны свежего винограда изготавливают 35 кг изюма для пончиков. Сколько изготовят изюма из 2,1 тонны свежего винограда?

136 Решите уравнение:

- а) $|x - 3| + |3 - x| = 16$; б) $|x - 516| + |516 - x| = 1032$.

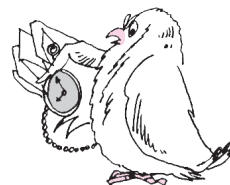
137 Определите, какой цифрой оканчивается число:

- а) 429^{924} ; б) $356^{653^{14}}$.

138 Найдите остаток от деления А на В:

$$A = \left(54\frac{3}{5} : 2\frac{1}{2} - 20\frac{8}{15} \cdot 7\frac{1}{2} \right) : \left(3\frac{13}{21} \cdot 8\frac{2}{5} - 29\frac{2}{5} \right) + \frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{5} - \frac{21}{25};$$

$$B = \frac{7}{9} \cdot 1\frac{2}{7} + 43\frac{3}{4} : 11\frac{2}{3} - 3\frac{18}{25} + 1\frac{1}{45} \cdot \left(37\frac{1}{2} : 2\frac{1}{12} - 1\frac{3}{23} \cdot 9 \right) - \frac{3}{100}.$$



139* Кого больше, спортсменов или школьников, и во сколько раз, если каждый десятый школьник – спортсмен, а каждый сотый спортсмен – школьник?

140* Андрей и Толик весят вместе 40 кг, Толик и Миша – 50 кг, Миша и Ваня – 90 кг, Ваня и Дима – 100 кг, Дима и Андрей – 60 кг. Сколько весит Андрей?

5.2.2. Линейная функция и её график



Какие же именно математические предметы мы называем прекрасными и изящными...? Это те, элементы которых расположены так гармонично, что ум без труда может охватить целое, проникая в то же время и в детали.

Жюль Анри Пуанкаре (1854–1912),
французский математик, механик, физик, философ

Разобравшись с прямой пропорциональностью, рассмотрим теперь более сложную зависимость между величинами. Для этого решим следующую задачу.

Задача. Тане надо купить x тетрадей и альбом. Одна тетрадь стоит 25 р., а один альбом – 200 р. Сколько денег должна заплатить Таня за всю покупку?

Решение:

Чтобы узнать стоимость Таниной покупки, надо сложить стоимость тетрадей и альбома. Тетради стоят $25x$ р., а альбом – 200 р. Значит, всего Таня должна заплатить $25x + 200$ р.

Анализируя полученное выражение, мы замечаем, что зависимость между количеством купленных тетрадей и стоимостью всей покупки не является прямой пропорциональностью – она не может быть описана формулой $y = kx$. Но её можно записать в виде $y = kx + b$, где k и b – некоторые числа. Зависимости такого вида называются *линейными*.

Определение 1. Зависимость между величинами x и y называется *линейной*, если данные величины связаны формулой $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа.

В рассмотренной нами выше задаче для каждого натурального значения x мы можем найти соответствующее значение стоимости покупки:

если $x = 1$, то $25x + 200 = 25 \cdot 1 + 200 = 225$ рублей;

если $x = 2$, то $25x + 200 = 25 \cdot 2 + 200 = 250$ рублей и т. д.

В общем случае равенство $y = kx + b$ каждому рациональному числу x сопоставляет единственное число y . Значит, линейная зависимость является функциональной (то есть функцией). А областью определения данной функции, которая получила название *линейной*, являются все известные нам числа.

Определение 2. Функция вида $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, называется *линейной функцией*.

Рассмотрим частные случаи функции $y = kx + b$, когда k и (или) b принимают значения, равные нулю:

Значения коэффициентов	Вид функции	Особенности функции
$b = 0$	$y = kx$	Прямая пропорциональность
$k = 0$	$y = b$	Графиком является прямая $y = b$, параллельная оси Ox .
$k = 0, b = 0$	$y = 0$	Графиком является ось Ox .

Таким образом, если $b = 0$, то линейная функция превращается в прямую пропорциональность, а если $k = 0$, то графиком линейной функции является прямая $y = b$,

параллельная оси абсцисс Ox . Если же $k = 0$ и $b = 0$ одновременно, то её графиком является сама ось абсцисс Ox .

Согласно определению, линейными являются, например, следующие функции:

$$y = 0,5x + 3; y = 2x; y = -0,7x; y = -4x - 1; y = 2; y = -0,1.$$

Чтобы построить график функции, например $y = 0,5x + 3$, построим сначала знакомый нам график прямой пропорциональности $y = 0,5x$. Это прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 0)$ и $(2; 1)$ (рис. 7).

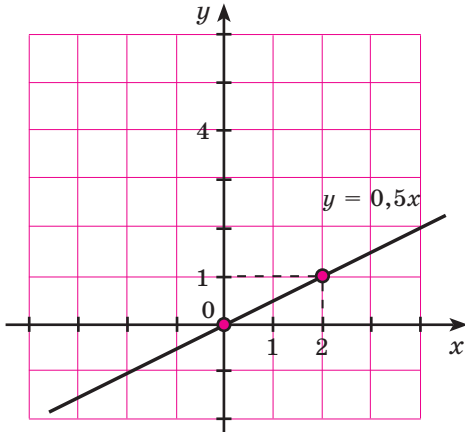


Рис. 7

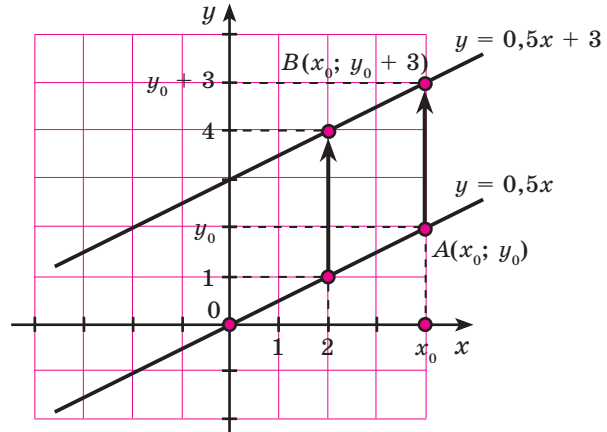


Рис. 8

Для того чтобы построить график функции $y = 0,5x + 3$, заметим, что он получается сдвигом графика $y = 0,5x$ вдоль оси Oy на 3 единицы вверх (рис. 8). Действительно, найдём значение этих функций в произвольной точке x_0 :

Функция	Значение аргумента	Значение функции	Соответствующая точка графика
$y = 0,5x$	x_0	$y_0 = 0,5x_0$	$A(x_0; y_0)$
$y = 0,5x + 3$	x_0	$0,5x_0 + 3 = y_0 + 3$	$B(x_0; y_0 + 3)$

Таким образом, ордината любой точки B графика $y = 0,5x + 3$ на 3 единицы больше, чем ордината точки A графика $y = 0,5x$ с той же абсциссой x_0 . Значит, если мы сделаем параллельный перенос графика $y = 0,5x$ на 3 единицы вверх вдоль оси Oy , то получим график $y = 0,5x + 3$.

Аналогично рассуждая, можно показать, что

График линейной функции $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, может быть получен из графика функции $y = kx$ путём его параллельного переноса вдоль оси Oy на b единиц вверх, если b – положительно, или на $|b|$ единиц вниз, если b – отрицательно.

Итак, график линейной функции также является прямой. Значит, как и в случае прямой пропорциональности, для его построения нам достаточно найти лишь две точки, принадлежащие этому графику.

Построим, например, график функции $y = -\frac{x}{3} - 1$. Мы можем построить этот график двумя способами.

Способ 1

Этот способ удобен, когда нами уже построен график $y = -\frac{x}{3}$.

Так как коэффициент b нашей линейной функции равен $-1 < 0$, график функции $y = -\frac{x}{3} - 1$ получается из графика функции $y = -\frac{x}{3}$ параллельным переносом вдоль оси Oy на $|-1| = 1$ единицу вниз (рис. 9).

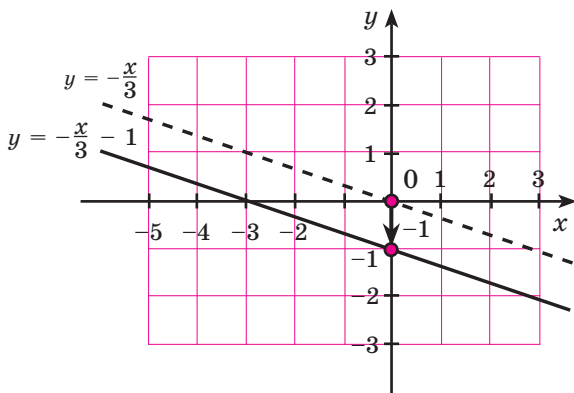


Рис. 9

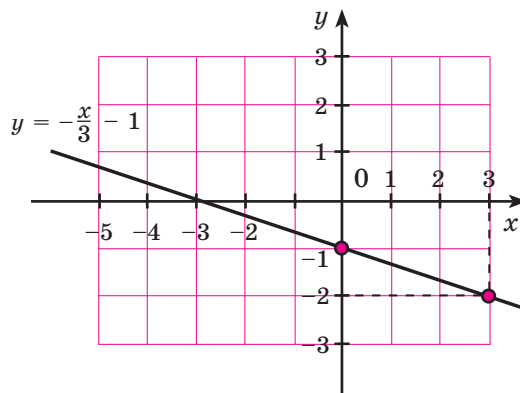


Рис. 10

Способ 2

Этот способ удобен для построения произвольного графика линейной функции.

Найдём две точки, принадлежащие графику функции $y = -\frac{x}{3} - 1$.

Обычно выбирают одну точку с абсциссой 0, а вторую – произвольно, с учётом удобства вычислений, например:

$$\text{если } x = 0, \text{ то } y = \frac{1}{3} \cdot 0 - 1 = -1,$$

$$\text{если } x = 3, y = -\frac{1}{3} \cdot 3 - 1 = -2.$$

Значит, указанный график проходит через точки с координатами $(0; -1)$ и $(3; -2)$.

Построим эти две точки и проведём через них прямую. Полученная прямая и будет являться графиком указанной зависимости (рис. 10).

Таким образом, мы можем записать следующий алгоритм построения графика линейной функции.

**Алгоритм построения графика функции $y = kx + b$**

1. Выбрать два различных значения x : x_1 и x_2 .
2. Вычислить значение $y_1 = kx_1 + b$.
3. Вычислить значение $y_2 = kx_2 + b$.
4. Отметить на координатной плоскости Oxy точку A с координатами $(x_1; y_1)$.
5. Отметить на координатной плоскости Oxy точку B с координатами $(x_2; y_2)$.
6. Через точки A и B провести прямую.

Отметим, что данный алгоритм построения графика линейной функции может использоваться при любых k и b . А значит, с его помощью может быть построен и график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ (случай, когда $b = 0$), и график прямой $y = b$ (случай, когда $k = 0$).

Способ построения графика линейной функции с помощью графика прямой пропорциональности даёт возможность провести исследование взаимного расположения графиков линейной функции.

Графики линейных функций $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$ могут быть получены параллельным переносом вдоль оси Oy одного и того же графика $y = kx$ (рис. 11). При этом прямые $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$ будут параллельны одной и той же прямой $y = kx$, а, значит, параллельны друг другу. Поэтому графики линейных функций с одинаковыми коэффициентами при x параллельны.

Если линейные функции имеют разные коэффициенты при x , то прямые будут пересекаться.

Понятно, что если все коэффициенты линейных функций будут одинаковы, то их графики будут совпадать.

Это можно отразить в следующей таблице:

Связь между коэффициентами функций	Взаимное расположение графиков
$k_1 \neq k_2$	Прямые пересекаются
$k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$	Прямые параллельны
$k_1 = k_2, b_1 = b_2$	Прямые совпадают

Отметим, что коэффициент при x принято называть *угловым коэффициентом*, потому что угол, образованный лучом Ox и частью прямой, расположенной в верхней полуплоскости, зависит только от этого коэффициента.

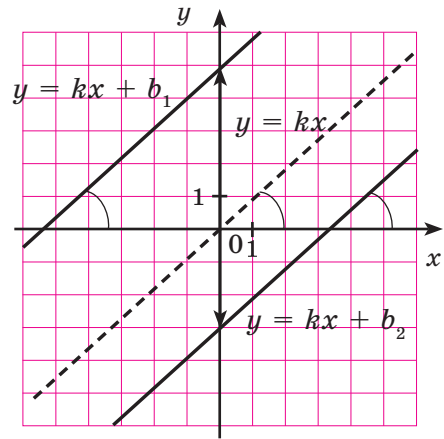


Рис. 11

К

141

1) Из приведённых ниже функций выберите те, которые являются прямой пропорциональностью:

$$y = 4x - 2; \quad y = -\frac{x}{3}; \quad y = 5x^2; \quad y = 9 : x; \quad y = x; \quad y = -x + 1; \quad y = 2x.$$

2) Для каждой из выбранных функций назовите коэффициент пропорциональности и опишите особенности расположения её графика на координатной плоскости. Постройте все данные графики на одной координатной плоскости и проверьте правильность своих рассуждений.

142

1) а) На овощной базе было 5 т картофеля. Ежедневно на базу привозили по 2 т картофеля. Запишите формулу зависимости количества картофеля на базе в тоннах от количества дней завоза картофеля.

б) После того как Михаил прошёл 4 км, он пошёл со скоростью 3 км/ч. Запишите формулу зависимости длины пути в километрах, пройденного Михаилом, от времени его движения со скоростью 3 км/ч (в часах).

в) До начала наполнения бассейна в нём было 3 м³ воды. После включения насоса в бассейн ежечасно стало поступать 0,5 м³ воды. Запишите формулу зависимости объёма воды в бассейне в м³ от времени работы насоса в часах.

г) Температура воды в чайнике равна 20 °С. После того как чайник поставили на огонь, температура воды в нём стала ежеминутно повышаться на 10 °С. Запишите формулу зависимости температуры воды в чайнике в °С от времени его нагревания в минутах.

2) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их все с помощью одной общей формулы. Является ли эта зависимость функциональной?

3) Рассмотрите частные случаи построенной зависимости, когда один или сразу оба коэффициента равны нулю. Что вы замечаете? Сравните свои наблюдения и выводы с выводами на с. 36 учебника.

143

Выберите из предложенных зависимостей между переменными y и x линейные функции, запишите их в виде $y = kx + b$ и определите коэффициенты k и b . Найдите область определения и область значений этих функций.

а) $y = -x + 5$;

г) $y = x : 2$;

ж) $y = -8$;

б) $y = 4 - 3x$;

д) $y = 7 : x - 2$;

з) $y = x^2 + 5$;

в) $y = 12x$;

е) $y = 0,5x + 1$;

и) $y = \frac{5 - 8x}{2}$.



144

1) Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = 0,5x$ и $y = 0,5x + 3$. Что вы замечаете? Сопоставьте свои выводы с выводами на с. 37 учебника.

2) Найдите два способа построения графика линейной функции и примените их для построения графика функции $y = -\frac{x}{3} - 1$.

3) Используя свой опыт построения графика функции $y = -\frac{x}{3} - 1$, составьте общий алгоритм построения графика линейной функции и сравните его с алгоритмом, приведённым на с. 38 учебника.

145

Линейная зависимость задана аналитически (формулой). Заполните таблицу и постройте её график. В точках с какими координатами этот график пересекает ось абсцисс, ось ординат? В каких координатных четвертях он расположен?

а) $y = x + 2$

в) $y = -2x + 3$

д) $y = 0,4x - 2$

x	0	-4
y		

x	0	-2
y		

x	0	5
y		

б) $y = -x + 4$

г) $y = 3x - 5$

е) $y = -2\frac{1}{3}x - 4$

x	0	4
y		

x	0	2
y		

x	0	-3
y		

146

Пользуясь формулой, задающей линейную зависимость, заполните пустые клетки таблицы:

а) $y = 3x - 9$

б) $y = -6x + 7$

в) $y = 0,5x - \frac{2}{3}$

x	-1	
y		-6

x	2,5	
y		0

x	1	
y		-2

147

Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = -1$. Составьте таблицу и запишите в ней результаты вычислений.

а) $f(x) = 2x + 7$;

в) $f(x) = 9 - 4x$;

д) $f(x) = 1,5x - 2$;

ж) $f(x) = 6x - 13$;

б) $f(x) = -3x + 8$;

г) $f(x) = 0,5x + 3$;

е) $f(x) = 11 - 3,5x$;

з) $f(x) = 15 - 9x$.

148 Постройте график функции $y = f(x)$. При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

а) $f(x) = x - 2$; б) $f(x) = -2x + 3$; в) $f(x) = -0,5x + 1,5$; г) $f(x) = 0,8x - 4$.

149 Постройте график функции. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = x - 3$; $a = -5$; $b = -2$; в) $f(x) = -0,5x + 4$; $a = -2$; $b = 6$;

б) $f(x) = -2x - 1$; $a = -2$; $b = 5$; г) $f(x) = 1,5x + 2$; $a = 4$; $b = -2,5$.

150 Постройте график функции $y = f(x)$, заданной на множестве $a \leq x \leq b$. Отметьте цветным карандашом на оси Ox область определения, а на оси Oy – область значений данной функции.

а) $f(x) = 4x + 3$, если $a = -2$, $b = 1$; в) $f(x) = -3x + 1$, если $a = -2$, $b = 3$;

б) $f(x) = 5 - 2x$, если $a = -1$, $b = 5$; г) $f(x) = 0,5x + 2$, если $a = -4$, $b = 2$.

151 Постройте на одной координатной плоскости графики трёх данных функций. Что вы замечаете?

а) $y = -x$; $y = -x + 1$; $y = -x - 2$; б) $y = 2x$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 4$.

Определите по графикам, на сколько единиц изменяется (уменьшается или увеличивается) значение функции, если значение аргумента увеличивается на 1, уменьшается на 2.

152 1) Как расположены относительно прямой $y = 5x$ графики функций:

$y = 5x - 1$; $y = 5x + 2$; $y = 5x - 6$; $y = 5x + 4$?

2) Как расположены относительно прямой $y = -7x$ графики функций:

$y = 6 - 7x$; $y = -7x - 9$; $y = -7x + 11$; $y = -3 - 7x$?

153 1) Как по графику функции $y = kx$ найти значение коэффициента k ?

2) Проанализируйте взаимное расположение графиков линейных функций на рис. 12 и задайте данные функции аналитически (формулами).

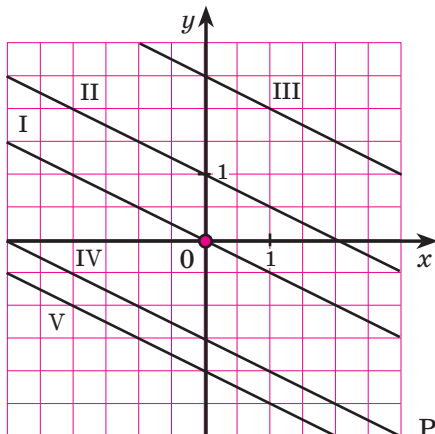


Рис. 12

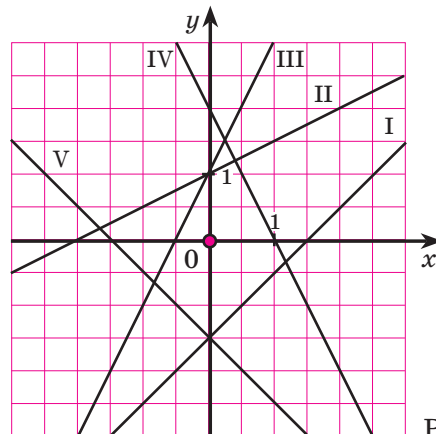


Рис. 13

- 154** Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$. Используя получившийся график, постройте график линейной зависимости $y = kx + b$, если:
- а) $k = 1, b = -4$; в) $k = -3, b = 2$; д) $k = 4, b = -2$;
 б) $k = 0,5, b = 6$; г) $k = -1, b = -3$; е) $k = -1,5, b = 8$.
- Определите по графикам, на сколько единиц изменяется значение функции, если значение аргумента увеличивается на 2, уменьшается на 1.
- 155** Задайте формулой каждую из функций, графики которых представлены на рис. 13.
- 156** Не строя графика функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку A .
- а) $f(x) = -6x - 11, A(-2; 1)$; в) $f(x) = 2,8x + 10, A(5; 4)$;
 б) $f(x) = -7x + 30, A(-4; 2)$; г) $f(x) = -5 + 9x, A(6; 49)$.
- 157** При каких значениях b график функции $y = 3x + b$ проходит через точку A ?
- а) $A(1; 4)$; б) $A(-1; -5)$; в) $A(2; 12)$; г) $A(-3; 0)$.
- 158** Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy .
- а) $f(x) = 2x + 12$; в) $f(x) = 2,8x - 7$; д) $f(x) = 1,1x + 4,4$;
 б) $f(x) = -3x + 21$; г) $f(x) = -6x - 4,2$; е) $f(x) = -15x - 4,5$.
- 159** На одной координатной плоскости Oxy постройте графики линейных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найдите координаты их точки пересечения.
- а) $f(x) = 2x - 1, g(x) = -x + 2$; в) $f(x) = -x + 3, g(x) = 1,5x - 2$;
 б) $f(x) = 6 - 3x, g(x) = 2x - 4$; г) $f(x) = -0,5x + 1, g(x) = -5 - 2x$.
- 160** Постройте график функции $y = 2x - 4$ и определите по графику, как изменяется значение функции y , когда:
- а) x возрастает от 2 до 5; в) x убывает от 3 до -2;
 б) x убывает от 1 до -1; г) x возрастает от -3 до 4.
- 161** В одной координатной плоскости постройте графики линейных функций:
- а) $y = 2; y = -1; y = 5; y = -1,7; y = 0$; б) $y = 1; y = 4,2; y = -3,6; y = -2,5$.
- Для каждой функции определите значения коэффициентов k и b .
- 162** Найдите три точки, принадлежащие графику функции $y = f(x)$, координаты которых являются целыми числами.
- а) $f(x) = 0,5x + 1,5$; б) $f(x) = 4,2x - 3,6$; в) $f(x) = 2,7x + 8,1$.
- 163** В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx + b$, если:
- а) $k > 0, b > 0$; в) $k < 0, b > 0$; д) $k > 0, b = 0$; ж) $k = 0, b > 0$;
 б) $k > 0, b < 0$; г) $k < 0, b < 0$; е) $k < 0, b = 0$; з) $k = 0, b < 0$;
- 164** Определите знаки k и b , если график линейной функции $y = kx + b$ расположен в следующих четвертях координатной плоскости:
- а) в I, II и III четвертях; в) в I, III и IV четвертях;
 б) в I, II и IV четвертях; г) во II, III и IV четвертях.

165 Может ли график линейной функции располагаться на координатной плоскости только:

- а) в I и II четвертях; в) в I и IV четвертях; д) во II и IV четвертях;
 б) в I и III четвертях; г) во II и III четвертях; е) в III и IV четвертях?

166 В таблице значений некоторой линейной функции два из пяти значений заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их.

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	-1	4	1

б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	7	-2	-1	5

167 Постройте на одной координатной плоскости Oxy графики:

$$y = 4x; \quad y = 2 - 5x; \quad y = 4x - 3; \quad y = -2 - 5x; \quad y = 4x + 3; \quad y = -5x.$$

Какие из этих прямых пересекаются? Какие прямые параллельны друг другу?

Можно ли было определить взаимное расположение графиков, не выполняя построений? Сравните свои предположения с выводами на с. 39 учебника.

168 Не выполняя построения графиков функций, определите, какие из графиков параллельны, какие пересекаются, а какие совпадают:

- а) $y = 2x + 3$; в) $y = -2x + 5$; д) $y = 5 + 3x$; ж) $y = 3 + 2x$;
 б) $y = 3x + 2$; г) $y = 2x$; е) $y = 2x - 5$; з) $y = 5x + 3$.

π

169 Вычислите рациональным способом:

- а) $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{12}$; в) $3\frac{9}{14} \cdot 7 + 2\frac{5}{18} \cdot 9$; д) $35\frac{5}{6} : 5 + 42\frac{7}{12} : 7$;
 б) $5\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6} - 1\frac{5}{18}$; г) $7\frac{4}{5} \cdot 5 - 6\frac{9}{16} \cdot 8$; е) $54\frac{9}{10} : 9 - 72\frac{8}{15} : 8$.

170 Запишите в стандартном виде многочлен, противоположный данному:

- а) $2a + 3b + 4c + (2b - 3c + 4d) - (2c + 3d - 4a)$;
 б) $4,25p^2q - 3,75pq^2 - (-1,3pq^2 + 2,8p^2q)$;
 в) $3m^2 - 1 + (6m^4 - 5m^2 + 2) - (2m^4 - 3m^2 - 5)$;
 г) $0,75y^2 + (0,75xy^2 - 0,8yx^2 - 1,2y^2) - (0,3xy^2 - 0,2yx^2 + 0,25xy^2)$.

171 Найдите сумму многочленов P и Q и запишите получившийся многочлен в стандартном виде:

- а) $P = 2,1x^3 + 3 + (6 - 4x^3)$, $Q = (0,5x^3 + 0,4x^2) - (0,4x^3 - 0,5x^2)$;
 б) $P = 0,2a^2 + 0,25b^2 - (5,1a^2 + 0,5b^2)$, $Q = (0,6a^2 + 0,7b^2) + (0,4a^2 - 0,3b^2)$;
 в) $P = 5p^2 + 6pq + 4q^2 - (7p^2 + 3pq + 5q^2)$, $Q = 4p^2 - 6pq + 9q^2 + (-3p^2 + 7pq - 8q^2)$;
 г) $P = 3x^2y + 3y^2x - 3y^3 - (2x^2y + y^2x - 2y^3)$, $Q = 6x^2y + 7y^2x - 9y^3 - (5x^2y + 7y^2x - 6y^3)$.

172 Решите уравнение:

- а) $x + \frac{2x - 7}{2} - \frac{3x + 1}{5} = 5 - \frac{x + 6}{2}$; в) $\frac{x - 4}{5} + \frac{3x - 2}{10} = \frac{2x + 1}{3} - 7$;
 б) $\frac{2y - 5}{6} + \frac{y + 2}{4} = \frac{5 - 2y}{3} - \frac{6 - 7y}{4} - y$; г) $\frac{4y}{3} - 17 + \frac{3y - 17}{4} = \frac{y + 5}{2}$.

173 Смешали 300 г воды и 60 г соли. Сколько воды надо добавить к этому раствору, чтобы получить раствор, концентрация соли в котором 10%?

174 Смешали 30 л 45%-го раствора кислоты с 10 л 60%-го раствора той же кислоты. Определите процентную концентрацию кислоты в получившемся растворе.

175 Сумма двух рациональных чисел равна 2490. Найдите эти числа, если 6,5% одного из них равны 8,5% другого.

176 Разность двух рациональных чисел равна 438. Найдите эти числа, если 2,25% одного из них равны $8\frac{1}{3}\%$ другого.

177 Решите уравнение:

а) $3|x - 2| + 5|x - 4| = 10$; б) $6|x + 4| + 7|x - 3| = 15$.

178 Определите, какой цифрой оканчивается число:

а) $918^{819^{18}}$; б) $676^{676^{21}}$.

Д

179 Линейная зависимость задана аналитически (формулой). Заполните таблицу и постройте её график. В каких точках этот график пересекает ось абсцисс, ось ординат? В каких координатных четвертях он расположен?

а) $y = -x - 2$

x	0	-3
y		

б) $y = 2x - 5$

x	0	3
y		

в) $y = -0,6x + 4$

x	0	-5
y		

180 Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, $f(x) = -2$. Составьте таблицу и запишите в ней результаты вычислений.

а) $f(x) = 6x - 8$;

б) $f(x) = -0,4x + 2$;

в) $f(x) = -3x - 7$.

181 Постройте график функции $y = f(x)$. При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

а) $f(x) = x + 3$;

б) $f(x) = -2x - 4$;

в) $f(x) = 0,5x + 2$.

182 Постройте график функции. Найдите по графику: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = -3x - 6$; $a = -3$; $b = 9$;

б) $f(x) = 1,5x + 5$; $a = -4$; $b = 11$.

Проверьте точность своих ответов с помощью вычислений.

183 Постройте график функции $y = f(x)$, заданной на множестве $a \leq x \leq b$. Отметьте цветным карандашом на оси Ox область определения, а на оси Oy – область значений данной функции.

а) $f(x) = -x + 1$, если $a = -4$, $b = 3$;

б) $f(x) = 1,2x - 3$, если $a = -5$, $b = 0$.

184 Не строя график функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку A .

а) $f(x) = 6x - 7$, $A(3; -11)$;

в) $f(x) = -3x + 12$, $A(-5; -3)$;

б) $f(x) = 4,2x + 3$, $A(1; 7,2)$;

г) $f(x) = -9x - 7$, $A(-6; -47)$.

185 Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$. Используя получившийся график, постройте график линейной зависимости $y = kx + b$, если:

а) $k = -2, b = 1$; б) $k = 1, b = 4$; в) $k = -\frac{2}{3}, b = -3$; г) $k = 0, b = 2$.

186 При каких значениях b график функции $y = -2x + b$ проходит через данную точку?

а) $A(1; 2)$; б) $B(-1; -4)$; в) $C(2; 3)$; г) $D(-2,5; 0)$.

187 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :

а) $f(x) = 3x + 15$; б) $f(x) = 3,2x - 16$; в) $f(x) = 1,3x + 3,9$.

188 В таблице значений некоторой линейной функции два из пяти значений заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их.

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	-13	5	-3	-2	7

б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	-2	5	4	11

189 Найдите сумму многочленов P и Q и запишите её как многочлен стандартного вида:

а) $P = 4a^2 - 7 + (8 - 2a^2)$, $Q = (7a + 4a^2) - (4a - 7a^2)$;

б) $P = 3b^2 + 4bc - (3b^2 - 2bc - 4b^2)$, $Q = -5b^2 - 3bc + (9b^2 - 7bc - 5b^2)$.

190 Решите уравнение:

а) $\frac{3x-2}{11} - \frac{x}{3} = \frac{3x-5}{7} - \frac{5x-3}{9}$; б) $\frac{5y+1}{6} + \frac{3y-1}{5} = \frac{9y+1}{8} - \frac{1-y}{3}$.

191 Для приготовления глазури для пончиков в пончиковой компании Антона и Ксюши смешали 500 кг воды и 200 кг сахара. Сколько воды надо добавить к этому раствору, чтобы получить раствор, концентрация сахара в котором 5%?

192 Сумма выручек двух филиалов пончиковой компании Антона и Ксюши за март была равна 765 тыс. р. Найдите выручку каждого из этих филиалов, если известно, что 15% выручки одного филиала равно 10% от выручки другого.

193 Решите уравнение $7|x+4| - 9|x-7| = 21$.

194 Определите, какой цифрой оканчивается число $217^{712^{31}}$.

195 Постройте график функции $y = Ax + B$, где

$A = (0,1955 + 0,187) : 0,085 + 15,76267 : (100,6 + 42,697) - 1,51$;

$B = (86,9 + 667,6) : (37,1 + 13,2) : 3 + (9,09 - 9,0252) \cdot (25,007 - 12,507) - 0,81$.

196* Докажите, что среди любого количества людей в некотором зале хотя бы двое имеют одинаковое число знакомых среди присутствующих.

5.2.3. Кусочно-линейные функции



Математика – это то, посредством чего люди управляют природой и собой.

Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987), русский математик, один из основоположников современной теории вероятностей

В предыдущем пункте мы познакомились с линейной функцией $y = kx + b$, где k и b – некоторые числа, научились строить её график. При этом процессы, которые описывает данная функция, характеризовались двумя постоянными величинами k и b , которые не меняли своих значений на всей области определения линейной функции (множестве всех известных нам чисел).

Однако на практике цены на товары, скорость движения автомобиля и другие величины обычно со временем меняются, поэтому для описания таких процессов нам нужны будут уже другие функции. Тем не менее, если в течение некоторых промежутков времени данные величины k и b все же сохраняют своё постоянное значение, процесс на каждом из этих промежутков остаётся линейным, и поэтому он может быть описан целиком так называемой *кусочно-линейной* функцией.

Для того чтобы пояснить сказанное, рассмотрим следующую задачу.

Задача. Пешеход вышел из пункта A и в течение первых двух часов шёл со скоростью 3 км/ч. Затем он остановился у кафе и обедал в течение часа, а потом продолжил путь и следующие 2,5 часа шёл со скоростью 4 км/ч. Запишите формулу зависимости пути пешехода s (в километрах) от времени его движения t (в часах) и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ost .

Решение:

Формула зависимости пути s пешехода от времени движения t позволит нам определить, какой путь он прошёл в каждый указанный в задаче момент времени.

Для того чтобы вывести данную формулу, разобьём всё время движения пешехода на три временных промежутка, на каждом из которых его скорость была постоянной и, значит, процесс движения был линейным:

- 1) движение в течение первых 2 часов: $0 \leq t \leq 2$;
- 2) обед – отсутствие движения, или движение со скоростью 0 км/ч: $2 < t \leq 3$;
- 3) движение в течение следующих двух с половиной часов: $3 < t \leq 5,5$.

Далее для каждого промежутка построим формулы зависимости пути s км от времени движения t ч и вычислим пройденный путь:

№	Время движения	Скорость движения	Формула зависимости пути s км от времени движения t ч	Путь, пройденный в конце данного промежутка времени
1	$0 \leq t \leq 2$	3 км/ч	$3t$	$3 \cdot 2 = \underline{6}$ (км)
2	$2 < t \leq 3$	0 км/ч	$\underline{6} + 0 \cdot (t - 2) = 6$	$\underline{6}$ (км)
3	$3 < t \leq 5,5$	4 км/ч	$\underline{6} + 4(t - 3) = 6 + 4t - 12 = 4t - 6$	$4 \cdot 5,5 - 6 = 22 - 6 = \underline{16}$ (км)

Таким образом, зависимость пути s (в километрах), пройденного пешеходом, от времени его движения t (в часах) может быть записана на каждом временном интервале с помощью своей линейной функции:

1) $s = 3t$ – линейная функция, область определения которой состоит из всех значений t , удовлетворяющих неравенству $0 \leq t \leq 2$;

2) $s = 6$ – линейная функция с областью определения $2 < t \leq 3$;

3) $s = 4t - 6$ – линейная функция с областью определения $3 < t \leq 5,5$.

Зависимости такого рода обычно записывают короче:

$$s(t) = \begin{cases} 3t, & \text{если } 0 \leq t \leq 2; \\ 6, & \text{если } 2 < t \leq 3; \\ 4t - 6, & \text{если } 3 < t \leq 5,5. \end{cases}$$

Полученная зависимость s от t определена на множестве $0 \leq t \leq 5,5$, являющемся объединением всех трёх рассмотренных временных промежутков. Областью её значений являются все значения s , удовлетворяющие неравенству $0 \leq s \leq 16$. И так как каждому значению t из области определения ставится в соответствие единственное значение s из области её значений, данная зависимость является функцией.

Вместе с тем данная функция не является линейной, так как на всей области определения она не может быть представлена в виде $s = kt + b$, где k и b – некоторые числа. Но на каждом её «куске», то есть промежутке времени, на котором тип движения не меняется, функция является линейной, поэтому её и называют *кусочно-линейной*.

Для того чтобы дать точное определение кусочно-линейной функции, нам необходимо вначале уточнить понятие *числового промежутка* – множества чисел, удовлетворяющих некоторому неравенству.

Составим таблицу, в которой рассмотрим все типы числовых промежутков, их названия, обозначения и геометрическое представление с помощью числовой прямой.

Числовые промежутки

Название	Тип неравенства	Множество точек числовой прямой	Обозначение
Открытый луч	$x > 5$		$(5; +\infty)$
Замкнутый луч	$x \geq 5$		$[5; +\infty)$
Интервал	$2 < x < 5$		$(2; 5)$
Полуинтервал	$2 < x \leq 5$		$(2; 5]$
Отрезок	$2 \leq x \leq 5$		$[2; 5]$

Заметим, что новым для нас в этой таблице является лишь название числовых промежутков и их обозначение: знаки $+\infty$ и $-\infty$ обозначают соответственно плюс бесконечность и минус бесконечность, круглая скобка говорит о том, что числовой промежуток является *открытым* (соответствующая точка ему не принадлежит), а квадратная – о том, что он *замкнутый* (соответствующая точка ему принадлежит).

Теперь, систематизировав информацию о числовых промежутках, дадим определение кусочно-линейной функции.

Определение. Если область определения функции может быть разбита на конечное число непересекающихся числовых промежутков, объединение которых даёт всю область определения, и на каждом из этих промежутков функция линейная, то такая функция называется **кусочно-линейной**.

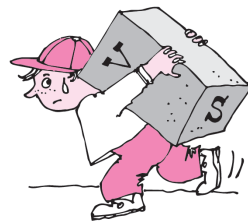
Пользуясь определением и алгоритмом построения графика линейной функции, запишем алгоритм построения графика кусочно-линейной функции.

Алгоритм построения графика кусочно-линейной функции $y = f(x)$

1. Выделить непересекающиеся числовые промежутки, составляющие всю область определения функции, на каждом из которых функция является линейной.
2. Для каждого числового промежутка выбрать два значения x , принадлежащих ему.
3. Вычислить значения y , соответствующие выбранным значениям x .
4. Записать выбранные значения x и вычисленные значения y как упорядоченные пары – координаты точек, принадлежащих графику $y = f(x)$.
5. Построить на координатной плоскости Oxy полученные точки.
6. Для каждого числового промежутка провести через построенные точки соответствующую часть прямой – график $y = f(x)$ на этом промежутке.

Построим теперь с помощью данного алгоритма на координатной плоскости Ost график зависимости s от t из задачи на с. 46:

$$s(t) = \begin{cases} 3t, & \text{если } 0 \leq t \leq 2; \\ 6, & \text{если } 2 < t \leq 3; \\ 4t - 6, & \text{если } 3 < t \leq 5,5. \end{cases}$$



1. Областью определения T функции $s(t)$ является множество всех t , для которых $0 \leq t \leq 5,5$. Значит, $T = [0; 5,5]$.

Вся область определения T разбита на 3 числовых промежутка:

$$T_1 = [0; 2], \quad T_2 = (2; 3], \quad T_3 = (3; 5,5].$$

При этом:

$$T_1 \cap T_2 = \emptyset; \quad T_1 \cap T_3 = \emptyset; \quad T_2 \cap T_3 = \emptyset; \quad T_1 \cup T_2 \cup T_3 = T.$$

2. Выбираем для каждого промежутка T_1 , T_2 и T_3 принадлежащие ему два значения t :

$$1) t_1 = 0; t_2 = 2; \quad 2) t_3 = 2,5; t_4 = 3; \quad 3) t_5 = 4; t_6 = 5,5.$$

3. Вычислим значения функции $s(t)$ в выбранных точках:

$$\begin{array}{lll} 1) s_1 = 3 \cdot 0 = 0; & 2) s_3 = 6; & 3) s_5 = 4 \cdot 4 - 6 = 10; \\ s_2 = 3 \cdot 2 = 6; & s_4 = 6; & s_6 = 4 \cdot 5,5 - 6 = 16. \end{array}$$

4. Запишем координаты точек, принадлежащих графику функции $s(t)$:

$$1) A_1(0; 0); A_2(2; 6); \quad 2) B_1(2,5; 6); B_2(3; 6); \quad 3) C_1(4; 10); C_2(5,5; 16).$$

5. Построим на координатной плоскости Ost полученные точки.

6. Для каждого числового промежутка проводим через построенные две точки соответствующую часть прямой – график функции $s(t)$ на этом промежутке (рис. 14).

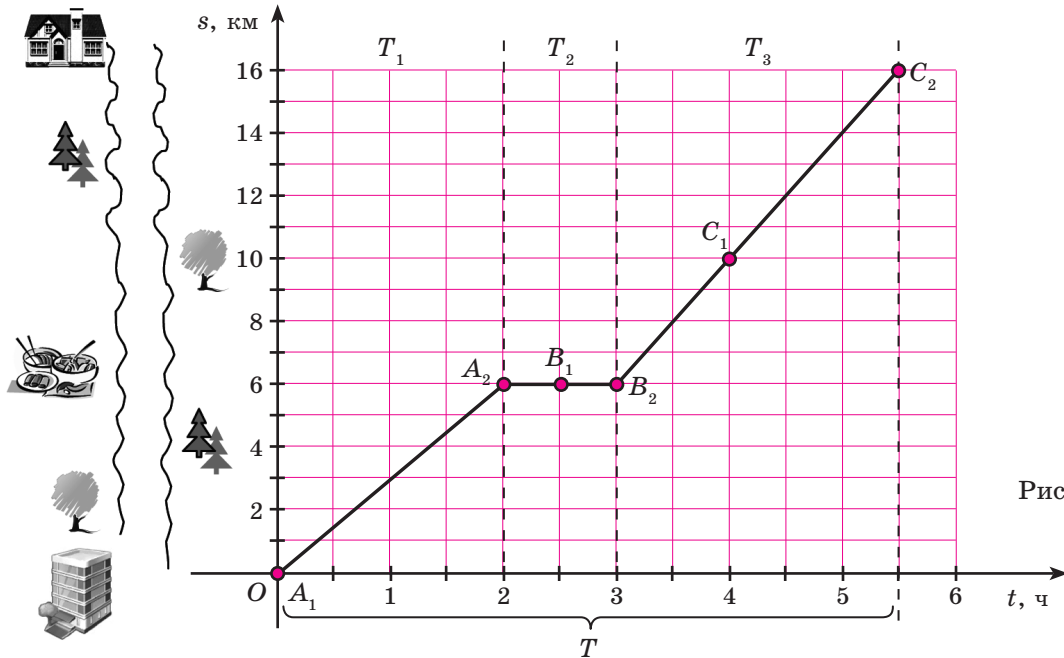


Рис. 14

Таким образом, наша задача полностью решена.

Рассмотрим ещё один пример кусочно-линейной функции – зависимость $y = |x|$.

Вспомним определение модуля числа, докажем, что данная зависимость является функцией, и построим график этой функции.

По определению, модуль числа x равен x при $x \geq 0$ и равен $-x$ при $x < 0$. Значит, согласно определению, мы можем записать зависимость $y = |x|$ в виде:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Данная зависимость каждому числу x ставит в соответствие единственное число y . Значит, эта зависимость является функцией, область определения X которой – множество всех известных нам чисел. А так как модуль числа всегда больше или равен нулю, областью значений Y этой функции являются все известные нам неотрицательные числа:

$$X = (-\infty; +\infty), \quad Y = [0; +\infty).$$

Для того чтобы построить график функции $y = |x|$, воспользуемся нашим алгоритмом.

1. Разобьём область определения X на два промежутка: $x < 0$ и $x \geq 0$:

$$X_1 = (-\infty; 0), \quad X_2 = [0; +\infty).$$

При этом: $X_1 \cap X_2 = \emptyset$; $X_1 \cup X_2 = X$.

2. Выберём для каждого числового промежутка X_1 и X_2 по два принадлежащих ему значения x :

$$1) x_1 = -1; x_2 = -2; \quad 2) x_3 = 0; x_4 = 1.$$

3. Вычислим значения y , соответствующие выбранным значениям x :

$$1) y_1 = -(-1) = 1; y_2 = -(-2) = 2; \quad 2) y_3 = 0; y_4 = 1.$$

4. Запишем координаты точек, принадлежащих графику функции $y = |x|$:

$$1) A_1(-1; 1); A_2(-2; 2); \quad 2) B_1(0; 0); B_2(1; 1).$$

5. Построим на координатной плоскости Oxy полученные точки.

6. Для каждого числового промежутка проводим через две точки часть прямой – график $y = |x|$ на этом промежутке (рис. 15).

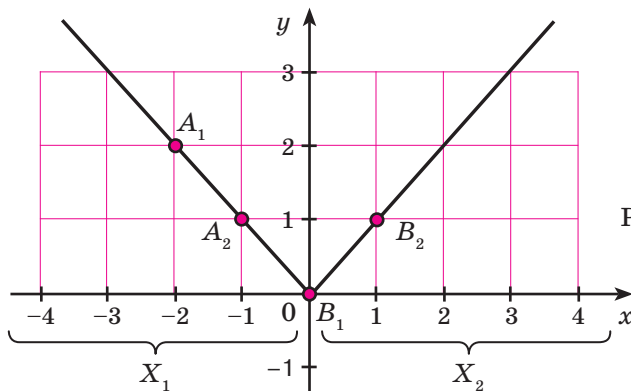


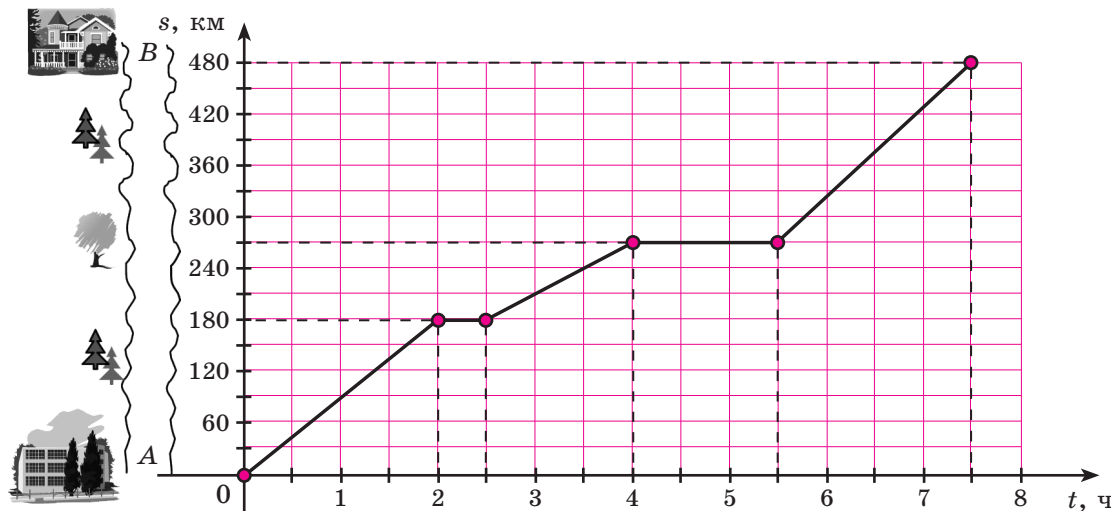
Рис. 15



К

197

На рисунке изображён график движения автомобилиста по дороге из пункта А в пункт В. Пользуясь графиком, ответьте на вопросы:



а) Чему равно расстояние от А до В? За какое время автомобилист проехал этот путь?

б) Сколько остановок он сделал в пути? На каком расстоянии от пункта А? Чему равна их продолжительность?

в) Чему была равна скорость автомобилиста на каждом участке пути? На каком участке она была наибольшей, наименьшей?

г) Какой путь проехал автомобилист за первые 3 часа своего пути?

д) С какой средней скоростью передвигался автомобилист из А в В?

е) Является ли зависимость пути автомобилиста от времени его движения функциональной? Является ли она линейной?

198

1) Пешеход вышел из пункта A и в течение первых двух часов шёл со скоростью 3 км/ч. Затем он остановился у кафе и обедал в течение часа, а потом продолжил путь и следующие 2,5 часа шёл со скоростью 4 км/ч. Запишите формулу зависимости пути s км пешехода от времени его движения t ч. Является ли данная зависимость функциональной? Является ли она линейной?

2) Сравните полученную вами формулу зависимости с формулой на с. 47 учебника. Прочитайте определение кусочно-линейной функции и объясните, почему зависимости подобного вида получили такое название.

3) Используя определение кусочно-линейной функции, данное на с. 48, запишите алгоритм построения графика кусочно-линейной функции.

4) Сравните полученный вами алгоритм с алгоритмом, приведённым на с. 48 учебника, и примените его для построения на координатной плоскости Ost графика движения пешехода в рассматриваемой задаче.

199

Используя неравенства, задайте промежутки, изображённые на рисунке. Как называется каждый из этих промежутков? Запишите их обозначения.



200

На числовой прямой Ox изобразите указанные промежутки и запишите их обозначения:

- а) $x < 2$; в) $x \geq 4,5$; д) $-5,4 \leq x \leq -2,3$; ж) $-7,6 < x \leq -0,9$;
 б) $x > -3$; г) $x \leq 6,7$; е) $3,1 < x < 7,4$; з) $-1,2 \leq x < 6,3$.

201

Какие из чисел a , b , c и d расположены в указанном промежутке?

- а) $-6,3 \leq x \leq 2,1$, $a = -7$, $b = -6$, $c = 0$, $d = 2,4$;
 б) $-7 \leq x < 0$, $a = -7$, $b = -4$, $c = 0$, $d = 1$;
 в) $5 < x \leq 11,5$, $a = 5$, $b = 9$, $c = 11$, $d = 12$;
 г) $1 < x < 7$, $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$.



202

Постройте график кусочно-линейной функции:

а)
$$y = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \geq -3; \\ -x - 4, & \text{если } x < -3; \end{cases}$$

б)
$$y = \begin{cases} 3, & \text{если } x \geq -1; \\ 1 - 2x, & \text{если } x < -1; \end{cases}$$

в)
$$y = \begin{cases} 5, & \text{если } x \geq 3; \\ \frac{4}{3}x + 1, & \text{если } x < 3; \end{cases}$$

г)
$$y = \begin{cases} -x + 6, & \text{если } x \geq 4; \\ 2, & \text{если } 1 \leq x < 4; \\ 2x, & \text{если } x < 1; \end{cases}$$

$$д) \quad y = \begin{cases} 3, & \text{если } x \geq 3; \\ x, & \text{если } -1 \leq x < 3; \\ -1, & \text{если } x < -1; \end{cases}$$

$$е) \quad y = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \geq -1; \\ 2x + 4, & \text{если } -2 \leq x < -1; \\ -x - 2, & \text{если } x < -2. \end{cases}$$

203 Принадлежат ли графику кусочно-линейной функции точки A и B , если:

$$а) \quad y = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x \geq 0,5; \\ 1 - 2x, & \text{если } x < 0,5; \end{cases} \quad A(1; 1), B(-4; -9);$$

$$б) \quad y = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \geq 0; \\ 1 - x, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad A(2; 3), B(-5; -4);$$

$$в) \quad y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \geq 0; \\ -x - 1, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad A(5; 4), B(-7; 6);$$

$$г) \quad y = \begin{cases} 3x - 6, & \text{если } x \geq 2; \\ 6 - 3x, & \text{если } x < 2; \end{cases} \quad A(4; -6), B(-2; 12);$$

$$д) \quad y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 1; \\ 2 - x, & \text{если } x < 1; \end{cases} \quad A(3; 3), B(-2; -2);$$

$$е) \quad y = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x \geq 0; \\ -2x - 1, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad A(0; 1), B(-4; -9).$$



Постройте графики этих функций.

204 а) Туристы в течение первых 4 часов похода шли со скоростью 5 км/ч. После этого они сделали привал и отдыхали в течение 1 часа. Следующие 3 часа после привала они шли со скоростью 4 км/ч. Запишите формулу зависимости пути s туристов в км от времени их движения t в часах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ost .

б) Бассейн в течение первых 2 часов наполнялся со скоростью 2 м³ в час. В течение следующих 3 часов скорость наполнения увеличили до 4 м³ в час, а последние 2 часа он наполнялся со скоростью 5 м³ в час. Запишите формулу зависимости объёма воды в бассейне V в м³ от времени его наполнения t в часах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ovt .

в) В течение первых 3 часов своего рабочего дня рабочий выпускал детали со скоростью 6 деталей в час. Затем, поняв, как ускорить выпуск, он в течение двух часов до обеденного перерыва выпускал 10 деталей в час. Обеденный перерыв длился час, а после обеда рабочий в течение 3 часов выпускал детали со скоростью 8 деталей в час. Запишите формулу зависимости количества выпущенных рабочим деталей n от времени его работы t в часах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ont .

г) Температура воздуха в сауне до нагревания была равна 20 °С. После того как воздух в сауне начали нагревать, температура его повышалась в течение первых 10 минут на 2 °С в минуту, а в течение следующих 15 минут – на 3 °С в минуту. Запишите формулу зависимости температуры воздуха в сауне T в °С от времени его нагревания t в минутах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости OTt .

205 Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(4)$, $f(-5)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 5$, $f(x) = -4$. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \geq 1; \\ 1 - x, & \text{если } x < 1; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } x \geq -1; \\ x + 3, & \text{если } x < -1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x \geq -3; \\ -3 - x, & \text{если } x < -3; \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x \geq -2; \\ -4 - 3x, & \text{если } x < -2; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 2x - 2, & \text{если } x \geq 1; \\ 2 - 2x, & \text{если } x < 1; \end{cases}$

е) $y = \begin{cases} 2x + 4, & \text{если } x \geq -1,5; \\ -2x - 2, & \text{если } x < -1,5. \end{cases}$

206 Постройте график кусочно-линейной функции. Определите по графику, при каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля.

а) $y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \geq 1; \\ 2, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -2x, & \text{если } x < -1; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x \geq 3; \\ x + 2, & \text{если } -2 \leq x < 3; \\ 4 + 0,5x, & \text{если } x < -2; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 2x + 4, & \text{если } x \geq 0; \\ 2, & \text{если } -1 \leq x < 0; \\ x + 3, & \text{если } x < -1; \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} 3x - 3, & \text{если } x \geq 2; \\ x + 1, & \text{если } 0,5 \leq x < 2; \\ 3 - 3x, & \text{если } x < 0,5; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -x, & \text{если } x \geq 3; \\ 12 - 5x, & \text{если } 2 \leq x < 3; \\ -x + 4, & \text{если } x < 2; \end{cases}$

е) $y = \begin{cases} 4, & \text{если } x \geq 0,5; \\ 4x + 2, & \text{если } -1,5 \leq x < 0,5; \\ -5, & \text{если } x < -1,5. \end{cases}$

207 Постройте график функции $y = f(x)$. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = |x - 4|$, $a = 3$; $b = 5$;

г) $f(x) = 2|x| - 5$, $a = -8$; $b = -1$;

б) $f(x) = |x + 1| - 1$, $a = -2$; $b = 6$;

д) $f(x) = |x - 9| + 1$, $a = 1$; $b = 0$;

в) $f(x) = |3 - x|$, $a = -7$; $b = 1$;

е) $f(x) = |1 - x| + x$, $a = -6$; $b = -4$.

208 Определите, не строя график функции $y = f(x)$, проходит ли он через точку A .

а) $f(x) = |4x - 5|$, $A(1; 1)$;

г) $f(x) = |6x + 9| - x$, $A(-4; 19)$;

б) $f(x) = |4 - 7x| + 1$, $A(2; 11)$;

д) $f(x) = 2x - |3x + 5|$, $A(-3; -2)$;

в) $f(x) = |9x - 8| + 3$, $A(0; 5)$;

е) $f(x) = x + 2 - |2x + 7|$, $A(-1; -2)$.

209 При каких значениях b график функции $y = |5x + b|$ проходит через точку A ?

а) $A(1; 6)$;

б) $A(-1; -3)$;

в) $A(2; 7)$;

г) $A(-3; 4)$.

210 Определите, какие из точек A , B , C и D принадлежат графику функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |3x - 5|$, $A(0; -5)$, $B(1; 2)$, $C(-1; 8)$, $D(-2; -11)$;

б) $f(x) = -|x + 7|$, $A(0; -7)$, $B(2; 9)$, $C(-1; -6)$, $D(-2; -5)$;

в) $f(x) = 2|x - 0,5|$, $A(0; -1)$, $B(1; 1)$, $C(-1; 3)$, $D(-0,5; 0)$;

г) $f(x) = -|5x - 2|$, $A(0; 2)$, $B(-1; -7)$, $C(1; 3)$, $D(2; -8)$.

211 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :

- а) $f(x) = |x + 3|$; в) $f(x) = |x + 1| + 5$; д) $f(x) = |x + 6| + 2$;
 б) $f(x) = |x - 2| + 1$; г) $f(x) = -2|x - 4| - 6$; е) $f(x) = -|x - 7| - 4$.

212 Постройте график кусочно-линейной функции:

- а)
$$y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \geq 2; \\ x, & \text{если } 0 \leq x < 2; \\ -x, & \text{если } -2 \leq x < 0; \\ 3, & \text{если } x < -2; \end{cases}$$
 г)
$$y = \begin{cases} -1, & \text{если } x \geq 3; \\ 5 - 2x, & \text{если } 0,5 \leq x < 3; \\ 2x + 3, & \text{если } -1 \leq x < 0,5; \\ 4, & \text{если } x < -1; \end{cases}$$

 б)
$$y = \begin{cases} 2x - 5, & \text{если } x \geq 2; \\ -1, & \text{если } 1,5 \leq x < 2; \\ 5 - 4x, & \text{если } 0 \leq x < 1,5; \\ 5 + 2x, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$
 д)
$$y = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \geq 5; \\ 3, & \text{если } -2 \leq x < 5; \\ 2x + 10, & \text{если } -3 \leq x < -2; \\ -2x - 2, & \text{если } x < -3; \end{cases}$$

 в)
$$y = \begin{cases} x + 5, & \text{если } x \geq 2; \\ 2x + 2, & \text{если } 0 \leq x < 2; \\ 2, & \text{если } -2 \leq x < 0; \\ 6 + 2x, & \text{если } -4 \leq x < -2; \\ -x - 6, & \text{если } x < -4; \end{cases}$$
 е)
$$y = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x \geq 5; \\ -x + 7, & \text{если } 4 \leq x < 5; \\ x - 1, & \text{если } 3 \leq x < 4; \\ -x + 5, & \text{если } 2 \leq x < 3; \\ x + 1, & \text{если } 1 \leq x < 2; \\ x + 3, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

213 Постройте графики функции $y = f(x)$:

- а) $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$; д) $f(x) = -|1 - x| - |x - 2|$;
 б) $f(x) = |x - 3| + |1 - x|$; е) $f(x) = |x + 1| - |5 - x|$;
 в) $f(x) = |2 - x| - |3 - x|$; ж) $f(x) = |4 - x| + |3 - x|$;
 г) $f(x) = x + |x + 2| - |x - 1|$; з) $f(x) = |5 + x| - |x - 3|$.

π

214 Прочитайте высказывание и определите, истинно оно или ложно. Если высказывание ложно, постройте его отрицание.

- а) $\forall a, b \in \mathbb{Q}: (a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
 б) $\exists a, b \in \mathbb{Q}: (a - b)^3 = a^3 - b^3$;
 в) $\forall a, b \in \mathbb{Q}: (a - b)^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
 г) $\exists a, b \in \mathbb{Q}: a^2 + b^2 = (a + b)^2$;
 д) $\exists a, b \in \mathbb{Q}: a^2 - b^2 = (a - b)^2$;
 е) $\forall a, b \in \mathbb{Q}: a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)$;
 ж) $\exists a, b \in \mathbb{Q}: a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)$.



215 Вычислите:

- а) $(4,32 \text{ кг} : 1,35 + 1,3 \text{ ц} : 26 - 0,04 \text{ т} \cdot 0,0225) : (10,01 \text{ кг} : 13 - 40 \text{ г})$;
 б) $(0,08 \text{ т} \cdot 0,18 + 0,025 \text{ кг} - 3,05 \text{ кг} : 2) : (1,2 \text{ кг} \cdot 2,7 + 1 \text{ кг} 60 \text{ г})$;
 в) $40 \text{ м} \cdot 0,6 - 40 \text{ см} \cdot (15,8 - 12,3) + 0,0005 \text{ км} \cdot (13,4 + 15,4)$;
 г) $10 \text{ м} \cdot (5,463 - 4,908) + 0,1 \text{ см} \cdot (19,4 - 17,4) - 5 \text{ мм} \cdot (14,7 - 11,6)$.

216 Запишите разность многочленов P и Q как многочлен стандартного вида:

а) $P = 5x^3 + 2xy^2 + 3x$, $Q = 2x^3 + 4xy^2 + 5x$;

б) $P = 9p^2 - 7pq - 6q^2 + (-4p^2 + 5pq + 4q^2)$, $Q = 2p^2 - 2pq - 7q^2$;

в) $P = 6m^2 + 3mn + 2n^2 - (3m^2 + 4mn + 3n^2)$, $Q = 3m^2 - 4mn - n^2$;

г) $P = 5a^2b - 3a^2b^2 - ab^2 - (8a^2b - 2a^2b^2 - 2ab^2)$,
 $Q = 2a^2b + 4a^2b^2 - 2ab^2 - (3a^2b + 4a^2b^2 - 5ab^2)$.



217 Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^{32} \cdot a^{11} \cdot a^{15} \cdot (a^4)^7 \cdot (3a)^{22}}{(3a)^{10} \cdot (a^{64} : a^{21}) \cdot a^{42} \cdot (3a)^{11}} + 5a^0$ при $a = 2$;

б) $\frac{7^{56} \cdot (b^{36} : b^{21}) \cdot c^{15} \cdot c^{39} \cdot (bc)^{24}}{c^{12} \cdot b^{19} \cdot (b^{14} : b^9) \cdot (b^5)^3 \cdot (7c)^{55} \cdot c^{10}} - 9(bc)^0$ при $b = -0,4$; $c = -5$.

218 Не вычисляя остатков, докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c :

а) $a = 59\,615$, $b = 59\,783$, $c = 14$;

в) $a = 151\,213$, $b = 152\,293$, $c = 36$;

б) $a = 98\,516$, $b = 99\,096$, $c = 29$;

г) $a = 214\,329$, $b = 216\,649$, $c = 58$.

219 Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом a по модулю m :

а) $a = 2456$, $m = 7$;

д) $a = -36\,148$, $m = 56$;

б) $a = 76\,513$, $m = 12$;

е) $a = 65\,475$, $m = 79$;

в) $a = 97\,342$, $m = 17$;

ж) $a = -112\,764$, $m = 111$;

г) $a = -34\,952$, $m = 23$;

з) $a = 314\,517$, $m = 213$.

220 Решите уравнение:

а) $x^2 - 36 = 0$;

в) $(5z - 2)^2 - 16 = 0$;

д) $(b + 3)^2 - (3b - 4)^2 = 0$;

б) $121 - y^2 = 0$;

г) $81 - (6a + 5)^2 = 0$;

е) $(2c - 3)^2 - (4c + 5)^2 = 0$.

221 а) В результате переработки молока получают сливки, масса которых составляет $\frac{4}{25}$ от первоначальной массы молока. А в результате переработки сливок получают сливочное масло, масса которого равна $\frac{2}{9}$ от первоначальной массы сливок. Сколько надо взять молока, чтобы получить 100 кг сливочного масла?

б) Когда в магазине в течение месяца продали $\frac{5}{12}$ первоначального запаса картофеля, его осталось на 500 кг больше половины первоначального запаса. Сколько килограммов картофеля продали в этом месяце?

в) В городе N мужчины составляют $\frac{9}{10}$ от числа проживающих там женщин. Какую часть составляют мужчины от всего населения города N ?

222 Решите уравнение:

а) $x^2 - 3x - 18 = 0$;

в) $-z^2 + 10z - 24 = 0$;

д) $b^2 + 4b - 32 = 0$;

б) $y^2 - 2y - 35 = 0$;

г) $a^2 + 12a + 27 = 0$;

е) $c^2 - 4c - 77 = 0$.

223 Найдите три значения x , таких, что:

- а) $x \equiv 3 \pmod{9}$; в) $x \equiv 7 \pmod{12}$; д) $x \equiv 16 \pmod{19}$;
 б) $x \equiv 5 \pmod{11}$; г) $x \equiv 14 \pmod{31}$; е) $x \equiv 21 \pmod{45}$.

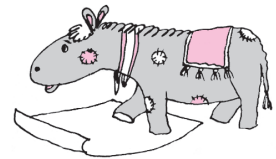
224 Запишите в семеричной системе счисления числа: а) 5; б) 12; в) 29; г) 42.

225 На числовой прямой Ox изобразите указанные промежутки и запишите их обозначения:

- а) $x < 4$; в) $x \geq -6,3$; д) $-2,7 \leq x \leq 0,4$; ж) $-9,2 < x \leq -2,5$;
 б) $x > -7$; г) $x \leq 2,4$; е) $1,5 \leq x \leq 5,1$; з) $-2,7 \leq x < 4,6$.

226 Какие из чисел a , b , c и d расположены в указанном промежутке?

- а) $-9,4 \leq x \leq 0,2$; $a = -9,5$; $b = -9,3$; $c = 0$; $d = 0,3$;
 б) $-3,5 \leq x < 2,1$; $a = -3,6$; $b = -3,3$; $c = 2$; $d = 2,1$;
 в) $6,7 < x \leq 9,8$; $a = 6,6$; $b = 6,9$; $c = 9,3$; $d = 9,8$;
 г) $5,3 < x < 11,6$; $a = 5,2$; $b = 5,3$; $c = 11,4$; $d = 11,6$.



227 Постройте график кусочно-линейной функции:

- а) $y = \begin{cases} 2x - 6, & \text{если } x \geq 3; \\ 6 - 2x, & \text{если } x < 3; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 3 - 2x, & \text{если } x \geq -1; \\ 5, & \text{если } x < -1; \end{cases}$
 в) $y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x \geq 3; \\ 7, & \text{если } -4 \leq x < 3; \\ -2x - 1, & \text{если } x < -4; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x \geq -1,5; \\ 3x + 8, & \text{если } -5 \leq x < -1,5; \\ x - 2, & \text{если } x < -5. \end{cases}$

228 Принадлежат ли графику кусочно-линейной функции точки A и B , если:

- а) $y = \begin{cases} 5x - 2, & \text{если } x \geq -1; \\ -7, & \text{если } x < -1; \end{cases}$ $A(1; 3), B(-2; -12)$;
 б) $y = \begin{cases} 3, & \text{если } x \geq 0; \\ 7x + 3, & \text{если } x < 0; \end{cases}$ $A(1; 10), B(-3; -18)$;
 в) $y = \begin{cases} 5x - 6, & \text{если } x \geq 1,2; \\ -3,6 + 3x, & \text{если } x < 1,2; \end{cases}$ $A(2; 4), B(1; -1)$;
 г) $y = \begin{cases} 4x + 8, & \text{если } x \geq -2; \\ -8 - 4x, & \text{если } x < -2; \end{cases}$ $A(0; -8), B(-3; 4)$?



Постройте графики этих функций.

229 а) Велосипедист в течение первых двух часов ехал со скоростью 10 км/ч. Доехав за это время до прекрасного озера, он решил остановиться и полюбоваться видами. Через 30 минут он продолжил свое путешествие и в течение следующих трёх с половиной часов ехал со скоростью 15 км/ч. Запишите формулу зависимости пути велосипедиста s в км от времени его движения t в часах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ost .

б) Бассейн в течение первых 4 часов наполняли со скоростью 30 м³ в час, в течение следующих 2 часов скорость наполнения увеличили до 40 м³ в час, а последние 2 часа он наполнялся со скоростью 50 м³ в час. Запишите формулу зависимости объёма воды в бассейне V в м³ от времени его наполнения t в часах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ovt .

230 Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(2)$, $f(-7)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 3$, $f(x) = -2$. Постройте график функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x + 7, & \text{если } x \geq -7; \\ -7 - x, & \text{если } x < -7; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} x - 6, & \text{если } x \geq 6; \\ 6 - x, & \text{если } x < 6. \end{cases}$$

231 Постройте график кусочно-линейной функции. Определите по графику, при каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \begin{cases} 5, & \text{если } x \geq 3; \\ x + 2, & \text{если } -7 \leq x < 3; \\ -6, & \text{если } x < -7; \end{cases} & \text{в) } y = \begin{cases} 3x - 14, & \text{если } x \geq 6; \\ x - 3, & \text{если } 2 \leq x < 6; \\ 3x - 7, & \text{если } x < 2; \end{cases} \\ \text{б) } y = \begin{cases} 4x + 8, & \text{если } x \geq -2,5; \\ -x - 4,5, & \text{если } -4 \leq x < -2,5; \\ 2x + 6, & \text{если } x < -4; \end{cases} & \text{г) } y = \begin{cases} -4x + 7, & \text{если } x \geq 2; \\ 2x - 5, & \text{если } -3 \leq x < 2; \\ -3x - 20, & \text{если } x < -3. \end{cases} \end{array}$$

232 Постройте график функции $y = f(x)$. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = |x - 2|, a = 1; b = 6; & \text{в) } f(x) = 3|x - 4|, a = -2; b = -1; \\ \text{б) } f(x) = |x + 3| - 1, a = -3; b = 3; & \text{г) } f(x) = |x - 5| + 1, a = 4; b = -3. \end{array}$$

233 Определите, не строя график функции $y = f(x)$, проходит ли он через точку A :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = |5x - 1|, A(-1; 4); & \text{в) } f(x) = |7x + 2| - 3x, A(-2; 18); \\ \text{б) } f(x) = |6 - 2x| + 5, A(1; 4); & \text{г) } f(x) = 2x - |5x - 4|, A(-3; -5). \end{array}$$

234 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :

$$\begin{array}{lll} \text{а) } f(x) = |x + 5|; & \text{в) } f(x) = |2x + 3| + 4; & \text{д) } f(x) = |5x + 4| + 3; \\ \text{б) } f(x) = |x - 3|; & \text{г) } f(x) = -3|x - 7| - 3; & \text{е) } f(x) = -|4x - 9| - 6. \end{array}$$

235 Постройте график кусочно-линейной функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \begin{cases} 4x - 5, & \text{если } x \geq 2; \\ x + 1, & \text{если } -2 \leq x < 2; \\ -1, & \text{если } -3 \leq x < -2; \\ -4x - 13, & \text{если } -4 \leq x < -3; \\ 3, & \text{если } x < -4; \end{cases} & \text{б) } y = \begin{cases} x - 8, & \text{если } x \geq 5; \\ -x + 2, & \text{если } 2 \leq x < 5; \\ x - 2, & \text{если } 1 \leq x < 2; \\ -x, & \text{если } -3 \leq x < 1; \\ -3x - 6, & \text{если } -4 \leq x < -3; \\ -2x - 2, & \text{если } x < -4. \end{cases} \end{array}$$

236 Постройте графики функции $y = f(x)$:

$$\text{а) } f(x) = |x + 5| - |x - 4|; \quad \text{б) } f(x) = -|2 - x| + |x - 3|.$$

237 Вычислите:

$$\begin{array}{l} \text{а) } 42,2 \text{ кг} - ((6 + 97,28 : 32) \cdot 2500 \text{ г} - 0,016 \text{ ц}) \cdot 1,2 - 15 \text{ т} : 1000; \\ \text{б) } 1 \text{ км} \cdot (0,1509 - 0,1379) + 0,1 \text{ м} \cdot (9,1 - 7,5) - 60 \text{ см} \cdot (27,7 - 24,2). \end{array}$$

238 Запишите разность многочленов P и Q как многочлен стандартного вида:

$$\begin{array}{l} \text{а) } P = 3p^4 + 5pq^3 - 4q, Q = 5p^4 + 7pq^3 - 2q; \\ \text{б) } P = -7x^3 + 4xy + 5y^3 - (2y^3 + 5xy - 9x^3), Q = 2x^3 - 2xy + 2y^3. \end{array}$$

239 Найдите значение выражения:

а) $\frac{x^{25} \cdot x^{31} \cdot x^{19} \cdot (x^3)^6 \cdot (2x)^{34}}{2^{32} \cdot (x^{78} : x^{34}) \cdot x^{36} \cdot x^{46}} + 3x^0$ при $x = -3$;

б) $\frac{5^{49} \cdot (y^{59} : y^{37}) \cdot z^{27} \cdot z^{37} \cdot (yz)^{61}}{z^{35} \cdot y^{26} \cdot (y^{97} : y^{63}) \cdot (z^4)^{10} \cdot (5z)^{49} \cdot y^{23}} - 11(yz)^0$ при $y = -5,6$; $z = 4$.

240 Не вычисляя остатков, докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c :

а) $a = 75\,928$, $b = 76\,468$, $c = 27$;

в) $a = 125\,468$, $b = 127\,108$, $c = 41$;

б) $a = 93\,459$, $b = 94\,479$, $c = 34$;

г) $a = 236\,547$, $b = 239\,997$, $c = 69$.

241 Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом a по модулю m :

а) $a = 5917$, $m = 9$;

в) $a = -43\,619$, $m = 43$;

б) $a = 34\,215$, $m = 17$;

г) $a = -56\,793$, $m = 61$.

242 Решите уравнение:

а) $x^2 - 64 = 0$;

в) $(3z - 4)^2 - 100 = 0$;

д) $(b + 7)^2 - (5b - 3)^2 = 0$;

б) $144 - y^2 = 0$;

г) $49 - (4a + 6)^2 = 0$;

е) $(6c - 1)^2 - (2c + 8)^2 = 0$.

243 а) В краснодарском филиале пончиковой компании Антона и Ксюши женщины составляют $\frac{5}{6}$ от числа работающих там мужчин. Какую часть составляют женщины от всех работников краснодарского филиала пончиковой компании?

б) Когда в магазине в течение недели продали $\frac{7}{18}$ первоначального запаса пончиков, пончиков осталось на 50 кг больше половины первоначального запаса. Сколько пончиков продали на этой неделе?

244 Найдите три значения x таких, что:

а) $x \equiv 4 \pmod{7}$;

б) $x \equiv 12 \pmod{15}$;

в) $x \equiv 21 \pmod{32}$.

245 Запишите в пятеричной системе счисления числа: а) 4; б) 19; в) 27; г) 38.

246 Решите уравнение:

а) $x^2 - 3x - 54 = 0$;

в) $a^2 - 19a + 60 = 0$;

б) $y^2 + 15y + 56 = 0$;

г) $-b^2 - 3b + 70 = 0$.

247 Докажите, что $|A| = |B|$:

$$A = -\frac{(4,561 + 5,439) \cdot 0,1}{(7,01 - 5,01) : 0,5} + \frac{(4,45 - 2,2) : 0,3}{(0,823 + 0,177) \cdot 30};$$

$$B = 56 : \left[\frac{6 : (0,4 - 0,2)}{2,5 \cdot (0,8 + 1,2)} + \frac{(34,06 - 33,81) \cdot 4}{3,42 : (28,57 - 25,15)} \right] - 8.$$



248* Три бегуна участвовали в соревнованиях. В момент, когда первый и второй бегуны были в одном месте, третий отставал от них на 6 км. А когда третий догнал первого, второй отставал от них на 3 км. На сколько километров первый бегун обогнал второго в тот момент, когда второго бегуна догнал третий?

249* Число 100 разделили на некоторое натуральное число и получили в остатке 4. Число 90 разделили на то же самое число и получили в остатке 18. На какое число делили эти числа?

Задачи для самоконтроля к главе 5

- 250** Зависимость y от x задана таблицей. Найдите её область определения и область значений. Определите, является ли эта зависимость функцией.

а)

x	-4	-1	0	2	5
y	-1	4	-1	9	6

б)

x	1	2	3	2	4
y	1	2	3	4	5

- 251** Задайте зависимость пути s (в километрах), который проехал автобус с постоянной скоростью 60 км/ч, от времени движения t (в часах). Укажите её область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение величины зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной:

а) $t = 5$ ч; б) $t = 2$ ч 30 мин; в) $t = 3$ ч 20 мин; г) $t = 4$ ч 45 мин.

- 252** Зависимость задана словесным описанием: всем целым числам, кратным 6, поставлено в соответствие число 2, а всем целым числам, которые не делятся на 6, поставлено в соответствие число -2. Найдите её значения в точках $x_1 = 25$; $x_2 = -48$; $x_3 = -216$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Является ли данная зависимость функцией?

- 253** Функция задана с помощью таблицы. Задайте её графически.

а)

x	-5	-3	0	2	4
y	6	4	2	0	-2

б)

x	-9	-4	0	3	5
y	-5	-3	2	4	6

- 254** Функция задана формулой. Найдите её область определения.

а) $y = -5x + 4$; б) $y = \frac{4}{2x - 7}$; в) $y = \frac{3x + 6}{5}$; г) $y = \frac{6(x - 4)}{2x(x + 8)}$.

- 255** Функция задана формулой. Найдите её значения в точках x_1 , x_2 и x_3 .

а) $y = -3x + 4$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$; б) $y = 4x^3$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

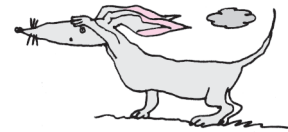
- 256** На координатной прямой Ox изобразите следующие промежутки:

а) $x < 6$; б) $x \geq -3$; в) $-2 < x < 5$; г) $-7 \leq x \leq -4$; д) $-9 < x \leq 2$.

Как они называются? Запишите их обозначение.

- 257** Какие из чисел a , b , c и d расположены в промежутке:

а) $-9,7 \leq x \leq 5,6$, $a = -9,8$, $b = -9,6$, $c = 5,5$, $d = 5,6$;
б) $-4,8 \leq x < 2,7$, $a = -4,8$, $b = -4,9$, $c = 2,8$, $d = 2,7$?



- 258** Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$, если:

а) $k = 2$; б) $k = -3$; в) $k = -0,5$.

- 259** Точка $A(p, q)$ принадлежит графику функции $y = kx$. Найдите коэффициент пропорциональности k и построьте график данной функции, если:

а) $p = 4$, $q = -1$; б) $p = -3$, $q = 7,5$; в) $p = -2$, $q = -8$.

- 260** Принадлежат ли графику функции $y = kx$ точки A и B , если:

а) $k = 4$, $A(0; 4)$, $B(-2; -8)$; б) $k = -5$, $A(-2; 10)$, $B(3; 15)$?

Задачи для самоконтроля к главе 5

- 261** Не строя графика зависимости $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если:
 а) $k = 6,7$; б) $k = -9,4$; в) $k = -5,9$; г) $k = 11,8$.
- 262** Постройте график функции $y = f(x)$.
 а) $f(x) = -2x - 3$; б) $f(x) = 0,5x + 4$; в) $f(x) = 5 - 3x$.
- 263** Не строя графика функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку A :
 а) $f(x) = 4,3x + 9$, $A(-10; 34)$; б) $f(x) = -7x - 8$, $A(-2; 6)$.
- 264** Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$. Используя полученный график, постройте график линейной зависимости $y = kx + b$, если:
 а) $k = -1$, $b = 3$; б) $k = 4$, $b = -2$; в) $k = 2,5$, $b = -4$; г) $k = -1,5$, $b = 6$.
- 265** При каких значениях b график функции $y = -4x + b$ проходит через точку A ?
 а) $A(2; 5)$; б) $A(-3; -8)$; в) $A(1; 7)$; г) $A(-6; 3)$.
- 266** Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :
 а) $f(x) = 6x + 7$; б) $f(x) = -3x + 5$; в) $f(x) = 8x - 9$.
- 267** Постройте график кусочно-линейной функции:
 а) $y = \begin{cases} x + 5, & \text{если } x \geq -2; \\ -x + 1, & \text{если } x < -2; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -2x + 5, & \text{если } x \geq 3; \\ -1, & \text{если } -1 \leq x < 3; \\ 2x + 1, & \text{если } x < -1. \end{cases}$
- 268** Принадлежат ли графику кусочно-линейной функции точки A и B , если:
 а) $y = \begin{cases} 4x - 1, & \text{если } x \geq 2; \\ 9 - x, & \text{если } x < 2; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x \geq -2; \\ -5 - x, & \text{если } x < -2; \end{cases}$
 $A(1; 3)$, $B(-2; -9)$; $A(2; -5)$, $B(-3; -2)$?
- 269** Определите, не строя график функции $y = f(x)$, проходит ли он через точку A :
 а) $f(x) = |2x - 4|$, $A(1; -2)$; б) $f(x) = |3x + 5| + 7$, $A(-4; 14)$.
- 270** Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :
 а) $f(x) = |x + 7|$; б) $f(x) = |x - 11|$; в) $f(x) = |x - 3| + 2$; г) $f(x) = |9 - x| + 5$.
- 271** Постройте график функции $y = f(x)$.
 а) $f(x) = |x - 6|$; б) $f(x) = |x + 5|$; в) $f(x) = 3|x| - 4$; г) $f(x) = |x - 6| + 3$.
- 272** Решите уравнение:
 а) $10,2 - (4,3x - 5,3) + 5,6 = 4,2x - (3,5 - 0,5x) + 0,8x - (3,9x - 4,8) + 0,7x$;
 б) $(a + 8)^2 - 25 = 0$; в) $(3b - 9)^2 - 36 = 0$; г) $16(c + 6)^2 - 9c^2 = 0$.
- 273** Упростите выражение:
 а) $8x^5 - 2y^4 - (6x^3y - 3x^2y^2 - 2xy^3) - (9x^5 + 4xy^3 - 4x^3y - y^4) - (-4x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3)$;
 б) $3p^4 + 5p^3q - (7p^2r - 5pq) + 4q^4 - (3p^3q - 3p^2r + 6pq) + (-4p^4 - 2p^3q + 4p^2r)$.
- 274** Смешали 700 г воды и 50 г сахара. Сколько воды надо добавить к этому раствору, чтобы получить раствор, концентрация сахара в котором 5%?

275 Сократите дроби при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{21x^{21}y^{62}z^{35}}{14x^{20}y^{64}z^{34}}$; б) $\frac{40p^{12}q^{18} - 56p^{18}q^{12}}{64p^{12}q^{12}}$; в) $\frac{42a^9b^{15} - 49a^{15}b^9}{28a^{12}b^9 - 63a^9b^{12}}$.

276 Не вычисляя частного, определите, делится ли число a на b :

а) $a = -38\ 765$, $b = -15$; б) $a = -113\ 256$, $b = 12$; в) $a = 565\ 695$, $b = -45$.

277 Докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c :

а) $a = 58\ 673$, $b = 59\ 513$, $c = 28$; б) $a = 29\ 378$, $b = 32\ 318$, $c = 49$.

278 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{2}{469}$ и $\frac{3}{737}$; б) $\frac{3}{793}$ и $\frac{5}{1159}$; в) $\frac{4}{1219}$ и $\frac{5}{1643}$.

279 Девять врачей посетили 35 больных. Докажите, что хотя бы два врача посетили одинаковое количество больных.

280 Зависимость задали следующим образом: каждому рациональному числу a поставили в соответствие наименьшее целое число, большее этого числа. Определите, является ли данная зависимость функциональной. Найдите значение зависимой переменной для указанных значений независимой переменной a .

а) $a = 10,2$; б) $a = 8,4$; в) $a = -9,6$; г) $a = -3,1$; д) $a = -5,7$.

281 Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 - 15$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно -18 ?

282 Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(3)$, $f(-6)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 7$, $f(x) = -3$. Постройте график функции.

$$y = \begin{cases} -3x - 1, & \text{если } x \geq 1; \\ -x - 3, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

283 Постройте график кусочно-линейной функции:

$$y = \begin{cases} x - 5, & \text{если } x \geq 7; \\ -x + 9, & \text{если } 5 \leq x < 7; \\ x - 1, & \text{если } 3 \leq x < 5; \\ -x + 5, & \text{если } 1 \leq x < 3; \\ x + 3, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -x + 1, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$



284 Постройте графики функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |x + 4| - |x - 5|$; б) $f(x) = -|7 - x| - |x - 6|$.

285 Докажите, что $a^5 - 5a^3 + 4a$ делится на 120 при любом целом a .

286 Выполните указанное действие по модулю m :

а) $16 + 29$, $m = 7$; б) $54 - 96$, $m = 17$; в) $56 \cdot 39$, $m = 19$.

287 Найдите остаток от деления a на b :

а) $a = 341^{143}$, $b = 17$; б) $a = 967^{769}$, $b = 7$; в) $a = 853^{358}$, $b = 11$.

Глава 6

Введение в теорию линейных уравнений и неравенств

§ 1. Линейные уравнения

6.1.1. Линейные уравнения и их решение



Подобно тому, как дар слова обогащает нас мнениями других, так язык математических знаков служит средством ещё более совершенным, более точным и ясным.

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856),
русский математик, создатель одной из
неевклидовых геометрий

Прежде чем начать изучение линейных уравнений, вспомним, что такое уравнение и что значит решить его.

Мы знаем, что если между двумя числами или двумя алгебраическими выражениями стоит знак «=», то получившееся математическое предложение называют **равенством**.

Если равенство верно при любых значениях входящих в него букв или если это верное числовое равенство, то его называют **тождеством**.

Тождествами, например, являются следующие равенства:

$$4 + 5 = 9; a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

В тождествах с переменными вместо знака «=» часто используют знак « $\equiv$ », для того чтобы подчеркнуть, что данное равенство верно при всех значениях переменных. Так, $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$.

Если равенство с переменными не является тождеством, то оно верно лишь при некоторых значениях букв. Такие равенства мы и будем называть **уравнениями**.

Буквы, входящие в уравнение, называют **переменными**. Уравнения могут быть с одной переменной, двумя, тремя и т. д.

Решить уравнение – это значит найти все значения входящих в него переменных, при которых равенство становится тождеством, или показать, что таких значений нет. Значения переменных, которые обращают уравнение в тождество, называют **корнями уравнения**.

Уравнение может иметь один корень, два корня и т. д., а может вообще не иметь корней.

Решая уравнения, мы производим преобразования, заменяя одно уравнение другим, до тех пор пока не получим уравнение самого простого вида, например $x = a$. После чего мы говорим, что число a является корнем исходного уравнения. Но утверждать это мы можем только тогда, когда уверены, что все уравнения, полученные в результате проведенных преобразований, имеют одни и те же корни. Такие уравнения называются **равносильными**.

Определение 1. Два *уравнения равносильны*, если корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, а корни второго уравнения являются корнями первого уравнения.

Так, например, уравнения $4x + 5 = 1$ и $4x = -4$ равносильны, так как имеют один и тот же корень $x = -1$.

А уравнения $4x + 5 = 1$ и $x^2 = 1$ не равносильны, так как первое имеет только один корень $x = -1$, а второе – два корня, $x = 1$ и $x = -1$.

Определение 2. Преобразование уравнения называют *равносильным*, если оно приводит к уравнению, равносильному данному.

Правила равносильных преобразований уравнений основываются на известных нам общих свойствах равенств – рефлексивности, симметричности и транзитивности – и правилах преобразований числовых равенств (правилах «весов»):

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in \mathbb{Q}: \quad a = b &\Leftrightarrow a + c = b + c & a = b &\Leftrightarrow ac = bc \ (c \neq 0) \\ a = b &\Leftrightarrow a - c = b - c & a = b &\Leftrightarrow a : c = b : c \ (c \neq 0) \end{aligned}$$

То есть если два равных числа увеличить, уменьшить, умножить или разделить на одно и то же число (исключая деление на 0), то мы вновь получим два равных числа.

Из данных свойств чисел непосредственно следуют *правила равносильных преобразований уравнений*. При этом необходимо учесть, что при умножении обеих частей уравнения на 0 равносильность может нарушаться. Так, например, уравнение $x = 2$ имеет один корень – число 2, а корнем уравнения $x \cdot 0 = 2 \cdot 0$ является любое рациональное число. Поэтому умножение обеих частей уравнения на 0, наряду с делением на 0, также следует исключить.

Правила равносильных преобразований уравнений

1. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.
2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.
3. Слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую, меняя при этом его знак на противоположный (правило переноса).
4. Для преобразования уравнений можно использовать изученные свойства чисел и действий с одночленами.

Теперь, уточнив понятие уравнения и сформулировав правила равносильных преобразований уравнений, перейдём к изучению общего способа решения одного из видов уравнений.

Ранее при решении задач мы часто сталкивались с уравнениями вида:

$$x + 6 = 0; \quad -2x = 0; \quad 0,3x - 5 = 0.$$

Каждое из этих уравнений содержит одну переменную x . Левую их часть можно записать в виде $kx + b$, где k и b – некоторые числа, а их правая часть равна нулю. Уравнения данного вида получили название *линейных уравнений* по аналогии с названием линейной функции $y = kx + b$, которая задаётся выражением аналогичного вида $kx + b$ и график которой представляет собой прямую линию.

Определение 3. *Линейным уравнением* с одной переменной x называется уравнение, которое имеет вид $kx + b = 0$, где k, b – некоторые числа.

Число k называют *коэффициентом при переменной*, а число b – *свободным членом* линейного уравнения.

Значения k и b в приведённых выше уравнениях:

Уравнение	Значение k	Значение b
$x + 6 = 0$	1	6
$-2x = 0$	-2	0
$0,3x - 5 = 0$	0,3	-5



Решим линейное уравнение $kx + b = 0$ в общем виде. Для этого перенесём слагаемое b в правую часть равенства, поменяв его знак на противоположный:

$$kx + b = 0 \Leftrightarrow kx = -b.$$

При решении полученного уравнения возможны два случая: $k \neq 0$ и $k = 0$.

1) Если $k \neq 0$, то обе части уравнения можно разделить на k , тогда:

$$kx = -b \Leftrightarrow \frac{kx}{k} = -\frac{b}{k} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{k}.$$

Следовательно, при $k \neq 0$ линейное уравнение имеет единственный корень $-\frac{b}{k}$.

2) Если $k = 0$, то уравнение $kx = -b$ равносильно уравнению $0 \cdot x = -b$, которое при $b \neq 0$ не имеет решений, а при $b = 0$ становится тождеством (то есть его решением является любое число).

Таким образом, в зависимости от значений k и b уравнение $kx + b = 0$ имеет следующие корни:

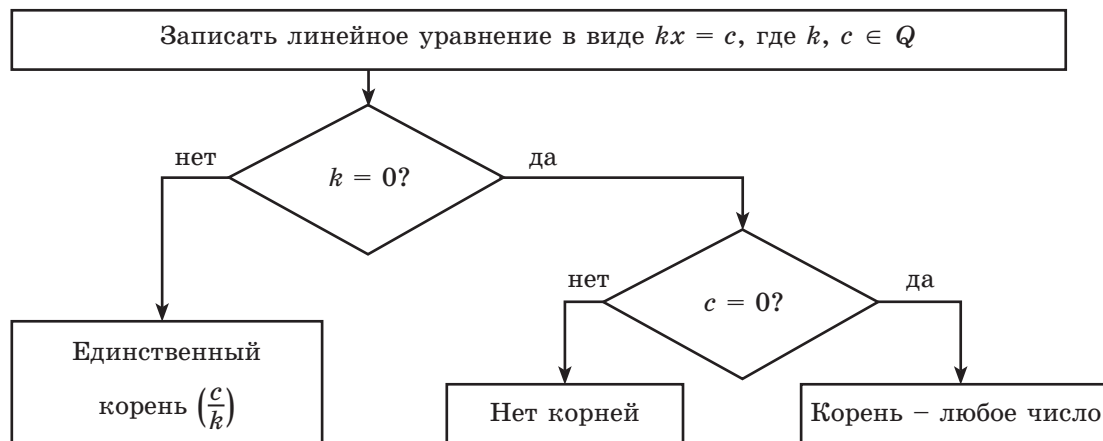
Значение k	Значение b	Корень уравнения
$k \neq 0$	b – любое число	$-\frac{b}{k}$
$k = 0$	$b \neq 0$	Нет корней
$k = 0$	$b = 0$	Корень – любое число



Запишем теперь *алгоритм решения линейного уравнения с одной переменной*, обозначив для простоты $-b = c$. Тогда:

$$kx + b = 0 \Leftrightarrow kx - c = 0 \Leftrightarrow kx = c.$$

Алгоритм решения линейного уравнения с одной переменной



Заметим, что с помощью равносильных преобразований к виду $kx = c$ могут быть приведены самые различные уравнения, например:

$$6x - 5 = 4x + 3; \quad 7x - (2x - 4) = 5x - 1; \quad \frac{4x - 2}{9} = \frac{2x - 1}{4,5}.$$

Поэтому для их решения можно воспользоваться полученным выше алгоритмом.

Пример 1. Решите уравнение $6x - 5 = 4x + 3$.

Решение:

$$6x - 5 = 4x + 3 \Leftrightarrow 6x - 4x = 5 + 3 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 8 : 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: $\{4\}$.

Пример 2. Решите уравнение $7x - (2x - 4) = 5x - 1$.

Решение:

$$7x - (2x - 4) = 5x - 1 \Leftrightarrow 7x - 2x + 4 = 5x - 1 \Leftrightarrow 7x - 2x - 5x = -1 - 4 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -5.$$

Ответ: $\emptyset$.

Пример 3. Решите уравнение $\frac{4x - 2}{9} = \frac{2x - 1}{4,5}$.

Решение:

$$\frac{4x - 2}{9} = \frac{2x - 1}{4,5} \Leftrightarrow \frac{9(4x - 2)}{9} = \frac{9(2x - 1)}{4,5} \Leftrightarrow 4x - 2 = 2(2x - 1) \Leftrightarrow 4x - 2 = 4x - 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0.$$

Ответ: x – любое число.

К

288 1) Решите уравнения:

$$x + 5 = 2; \quad 7 = 8 - y; \quad 4t = 36; \quad n : 3 = 9; \quad 5p - 3 = 17.$$

Какими правилами равносильных преобразований вы пользовались при решении этих уравнений?

2) Дайте определение равносильных уравнений и равносильных преобразований уравнений. Сравните свои определения с определениями 1 и 2 на с. 62–63 учебника.

289

Используя правила равносильных преобразований, докажите, что все приведённые ниже уравнения равносильны между собой:

$$5x = 36 - 7x; \quad x : 0,5 + 11 = x + 14; \quad 18x - 3 - 12x + 2 = 2 + 4x + 3.$$

290

Равносильны ли уравнения?

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| а) $6x + 5 = 0$ и $6x = -5$; | д) $x(4 - x) = 0$ и $x - 4 = 0$; |
| б) $2y - 1 = 0$ и $y = -0,5$; | е) $y^2 = 9$ и $(y - 3)(y + 3) = 0$; |
| в) $2 - 2z = 0$ и $2x - 2 = 0$; | ж) $z(z - 7) = 0$ и $y(y + 3) = 0$; |
| г) $-4z - 1 = 0$ и $1 - 4y = 0$; | з) $z(z + 5) = 0$ и $x(x + 5) = 0$. |

291

1) Запишите в общем виде уравнения:

$$x + 6 = 0; \quad -2x = 0; \quad 0,3x - 5 = 0.$$

Как вы предложили бы назвать уравнения данного вида? Почему? Дайте определение уравнений указанного вида.

2) Сравните свое определение с определением 3 на с. 63 учебника.

292 Найдите линейные уравнения с одной переменной. Выберите уравнения, которые приводятся к линейным равносильными преобразованиями. Запишите их в виде $kx + b = 0$ и определите значения k и b :

$$-3,2x = 4; \quad 8 - \frac{y}{9} = 5; \quad 2x + y = 7; \quad 3 : x + 12 = 0; \quad 0 \cdot a = -2; \quad x^2 = 1.$$

293 1) Решите линейные уравнения. Какие случаи могут возникнуть при их решении?

$$4x - 13 - 8x = -1; \quad 8x - 24 - 3x = 5x + 6; \quad 9 - x + 7 + 4x = 3x + 16.$$

2) Используя результаты предыдущего задания, решите в общем виде линейное уравнение $kx + b = 0$, где $k, b \in \mathbb{Q}$, и предложите свой алгоритм решения произвольного линейного уравнения с одной переменной.

3) Сравните свое решение и алгоритм с таблицей и алгоритмом, приведёнными в учебнике на с. 64.

294 Найдите корни уравнения (устно). Сделайте проверку.

$$\begin{array}{llll} \text{а) } 7x = -2,8; & \text{г) } -b = \frac{1}{9}; & \text{ж) } -z + 5 = 0; & \text{к) } u - 1 = -\frac{1}{5}; \\ \text{б) } -3y = 0,15; & \text{д) } -6 = 0,3c; & \text{з) } 0 = 0,6t + 6; & \text{л) } 2 - 3m = 1; \\ \text{в) } 2,5a = 0; & \text{е) } 0 = \frac{2}{3}d; & \text{и) } -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}k = 0; & \text{м) } \frac{1}{7} = 0,1n + 2\frac{1}{7}. \end{array}$$

295 Решите уравнение:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } 8 - 2a = a - 4; & \text{г) } 7d + 0,9 - 2d = -1,6; & \text{ж) } -\frac{x}{5} + 8 = 13; & \text{к) } \frac{r}{3} + \frac{r}{6} = \frac{r}{2}; \\ \text{б) } 3b - 4b = 15 - b; & \text{д) } m + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + m - \frac{1}{2}; & \text{з) } \frac{y}{3} - 5 = -10; & \text{л) } \frac{s}{3} = \frac{s}{5} + 2; \\ \text{в) } -2 - 0,5c = c - 2; & \text{е) } 3,8n - \frac{1}{5} = 4n + 1,4; & \text{и) } \frac{z}{2} + \frac{z}{3} = 5; & \text{м) } \frac{u}{4} + 5 = \frac{u}{2} - 1. \end{array}$$

296 При каких значениях переменной равны значения указанных выражений?

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 8x - 3 \text{ и } 5x + 6; & \text{в) } 5z - 9 \text{ и } 7z - 13; & \text{д) } 20 - 2b \text{ и } b - 1; \\ \text{б) } 2y - 19 \text{ и } 7y + 31; & \text{г) } 10a - 3 \text{ и } a + 3; & \text{е) } 19 - c \text{ и } 100 - 10c. \end{array}$$

297 Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 3x + 42 + 7x = 15x - 68 + 10; & \text{ж) } -1,4k + 8,7 = 2,5k - 2,1 + 1,5k; \\ \text{б) } -35y + 8 + 30y = 47 - 20y - 39; & \text{з) } 0,8m - 1,2 + 0,3m = 2,4 + 1,1m - 3,6; \\ \text{в) } -2z + 225 + z - 50 = 100 - z; & \text{и) } -3n - 2,7 + 0,2n - 0,5 = 2,8n - 3,2; \\ \text{г) } 7a + 6 - 5a = 4 - 3a + 1 - a; & \text{к) } -4 + 2,4s + 1,6s = -0,9 + 3,4s - 4,06; \\ \text{д) } 10b - 24 - 2b + 18 = -b + 9; & \text{л) } 0,1p - p + 1,8 = -6,2 - 0,9p + 8; \\ \text{е) } -12c - 9 + 8c = 15 - 4c - 6; & \text{м) } 7,5q - 0,15 = 1,6 + 1,8q - 2,2 + 1,2q. \end{array}$$

298 При каких значениях переменной:

$$\begin{array}{l} \text{а) значение выражения } 9a - 5 \text{ равно } 31; \\ \text{б) значение выражения } 15 - 4b \text{ равно } 3; \\ \text{в) значение выражения } 7c - 5 \text{ равно значению выражения } 3c + 3; \\ \text{г) значение выражения } 14d + 23 \text{ противоположно значению выражения } 2 - 19d? \end{array}$$

299 а) На какое рациональное число нужно уменьшить 785 и увеличить 587, чтобы получить одинаковые числа?

б) Найдите рациональное число, среднее арифметическое которого с числом 916 равно 619.

в) Найдите натуральное число, которое больше своей четверти на 81.

г) Найдите целое число, которое на 48 больше противоположного себе числа.

300 Составьте задачу, решение которой может привести к следующему уравнению:

а) $8 + x = 3$;

б) $6 - x = 4$;

в) $x : 4 = 5$;

г) $3x = 7$.

301 Найдите корни уравнения:

а) $x - (5 - x) = 3$;

д) $8(4 - 5a) = 7 - 5a$;

б) $-2y - (-6 + y) = 1$;

е) $2(3b - 4) = -4(b + 3)$;

в) $(z - 2) - (2z + 3) - (5 - z) = 0$;

ж) $36 - 5(c + 8) = 3c - 4$;

г) $12 - (k - 4) = (3k + 9) - (4k - 7)$;

з) $6(2 - d) - 2(5 - 8d) = 10d$.

302 Решите уравнение, предварительно упростив его:

а) $3(x + 8) = 36(x - 3)$;

г) $8(2t + 5) - 72(15 - 2t) = 0$;

б) $14(12 - y) = 7(y - 3)$;

д) $45(15 - 4a) - 15(7a - 12) = 0$;

в) $-5(35 - z) = 15(z - 9)$;

е) $0 = 3(47 - 5b) - 42(10 - 7b)$.

303 При каких значениях переменной:

а) значение выражения $11z - 6$ на 2 меньше значения выражения $5z + 8$;

б) значение выражения $9t - 14$ на 6 больше значения выражения $5 - 6t$;

в) значение выражения $2x + 41$ в 7 раз больше значения выражения $x + 3$;

г) значение выражения $7 - y$ в 3 раза меньше значения выражения $5y + 5$?

304 Составьте уравнение и решите задачу:

а) Матери 36 лет, а её дочери 15 лет. Сколько лет назад мать была в 4 раза старше дочери?

б) В двух автобусах едет 45 человек, причём в одном из них едет в 2 раза больше людей. Сколько человек едет в каждом из этих автобусов?

в) В трёх спортивных секциях, футбола, баскетбола и волейбола, занимается 55 человек. Известно, что футболом занимается в два раза больше человек, чем баскетболом, а волейболом занимается на 5 человек меньше, чем футболом. Сколько человек занимается в каждой из этих секций?

г) В четырёх подъездах дома живут 128 человек. Известно, что в первом подъезде живёт на 12 человек больше, чем во втором, и на 15 человек меньше, чем в третьем. В четвёртом подъезде живёт в 2 раза больше людей, чем в первом. Сколько человек живёт в каждом из этих подъездов?

305 Докажите, что:

а) уравнение $5x = 5(x + 2)$ не имеет корней;

б) корнем уравнения $3y - 4 = 4(y - 1) - y$ является любое число;

в) число 1 является корнем уравнения $z - 7(1 - z) = 9z - 4(1 + z)$;

г) число (-2) не является корнем уравнения $6(b + 2) + 4 = b - 5(2 - b)$.

306 Докажите, что данное уравнение имеет единственный корень:

а) $10s + 2(7s - 2) = 5(4s + 3) + 3s$; б) $8(3t - 2) - 13t = 5(12 - 3t) + 7t$.

307 Докажите, что данное уравнение не имеет корней:

а) $5(x + 1) + 6(x + 2) = 11(x + 3)$; в) $7(3z + 6) + 5(z - 3) - 13(2z - 3) = 0$;

б) $6(y - 1) + 3(8 - y) = 3(y + 2)$; г) $4(5t - 2) - 2(5t + 2) - 10(t + 4) = 0$.

308 Докажите, что решением данного уравнения является любое число:

а) $8(3x - 1) - 9(5x - 11) = 91 - 21x$; в) $7(6z - 1) + 3(2z + 1) = 4(12z - 1)$;

б) $10(8 - 3y) + 11(y - 4) - 36 + 19y = 0$; г) $3(2t + 1) - 4(1 - 3t) + 1 - 18t = 0$.

309 С помощью равносильных преобразований запишите уравнение в виде $kx = c$ и решите его:

а) $(p - 3)(8 - p) = (p - 6)(2 - p)$; г) $(m + 5)(2 + m) - 3(4m - 3) = (m - 5)^2$;

б) $(q - 5)(q + 1) + (q + 2)(6 - q) = 7$; д) $12 - 2(n - 1)^2 = 4(n - 2) - (n - 3)(2n - 5)$;

в) $(r - 3)(4 + r) = 2(3r - 2) + (4 - r)^2$; е) $(6k - 3)(2k + 1) - (11k - 11)(k + 1) = (k - 1)^2$.

310 Решите уравнение:

а) $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$; е) $1 - \frac{2b - 5}{6} = \frac{3 - b}{4}$; л) $\frac{z - 3}{7} - \frac{z - 25}{5} = 7 - \frac{2 + z}{4}$;

б) $\frac{1 - 9y}{5} = \frac{19 + 3y}{8}$; ж) $\frac{3c - 2}{4} = 2 - \frac{5c - 7}{3}$; м) $3 - \frac{3 - 7t}{10} + \frac{t + 1}{2} = 4 - \frac{7 - 3t}{5}$;

в) $\frac{5 - z}{8} = \frac{18 - 5z}{12}$; з) $\frac{d + 17}{5} - \frac{3d - 7}{4} = 3,5$; н) $a = \frac{a - 1}{3} + \frac{2a - 5}{5} - \frac{a + 8}{6} + 7$;

г) $\frac{4t + 33}{21} = \frac{17 + t}{14}$; и) $\frac{x + 2}{9} - 1 = \frac{2x + 1}{18} - \frac{x}{6}$; о) $\frac{b - 2}{2} + \frac{b - 3}{3} - \frac{b - 4}{4} = \frac{b + 4}{6}$;

д) $\frac{5a + 4}{7} - 2 = \frac{3a - 7}{4}$; к) $\frac{y - 2}{6} - \frac{y + 7}{15} = \frac{y}{4} - 2$; п) $\frac{7d - 2}{3} - \frac{4(d + 3)}{5} + 6 = \frac{3(d + 2)}{2}$.

311 а) Три человека разделили между собой некоторую сумму денег. Первый получил $\frac{1}{5}$ часть этой суммы и ещё 190 р., второй — $\frac{1}{4}$ часть суммы и ещё 170 р., а третий — $\frac{1}{3}$ часть суммы и ещё 160 р. Какую сумму денег разделили?

б) Число строк на странице на 15 меньше, чем число букв в каждой строке. Если уменьшить число букв в каждой строке на 3 и убрать после этого 5 строк, то число всех букв уменьшится на 300. Сколько строк на странице и сколько букв в каждой строке?

в) Переднее колесо повозки, длина окружности которого равна 2,4 м, сделало на некотором расстоянии на 2900 оборотов больше, чем заднее колесо, длина окружности которого равна 3,2 м. Найдите, чему равно это расстояние.

г) Из Москвы в Смоленск отправился со скоростью 40 км/ч товарный поезд. Через 1 час после его выхода из Смоленска в Москву со скоростью 80 км/ч отправился пассажирский поезд. На каком расстоянии от Москвы встретятся эти поезда, если расстояние между Москвой и Смоленском 400 км?

312 При каком значении a уравнение $2a + 5x = 7x - 6$ имеет корень, равный:

- а) $x = 1$; б) $x = -2$; в) $x = 0$; г) $x = 0,5$?

313 Запишите три уравнения, корнем которых является число a :

- а) $a = 2$; б) $a = -3$; в) $a = 3,5$; г) $a = -2,5$.

314 Имеет ли уравнение корни при указанном значении a ?

- а) $4x - a = 2(2x - 3)$, $a = 4$; г) $2(x + 6) - a = 2x + 7$, $a = -5$;
 б) $x + 2a = x + 8$, $a = 4$; д) $3x - a = 5(x - 2) - 2x$, $a = -10$;
 в) $5(x + 3) = 5x + 5a$, $a = -3$; е) $6(x - 3) - 3x = 3x + 6a$, $a = -3$.

При каком значении a уравнение будет иметь корни?

315 Какое число нужно подставить вместо a , чтобы уравнение имело указанный корень?

- а) $ax - 5 = 4x - 3$, если корень уравнения $x = 1$;
 б) $2ay - 6 = 9y - 4$, если корень уравнения $y = -1$;
 в) $\frac{z}{a} - \frac{1}{5} = \frac{z}{16} - \frac{1}{20}$, если корень уравнения $z = \frac{4}{5}$;
 г) $\frac{t}{a} - \frac{1}{5} = t - \frac{1}{5}$, если корень уравнения $t = -\frac{3}{5}$.



316 Найдите ошибку в решении уравнения.

Дано уравнение $6x - 14 = 15x - 35$. В левой части уравнения выносим за скобки общий множитель 2, а в правой его части – общий множитель 5. Получаем $2(3x - 7) = 5(3x - 7)$. Делим правую и левую части уравнения на одно и то же выражение $3x - 7$. Получаем, что $2 = 5$ (неверно). Значит, уравнение не имеет решений.

317 При каком значении x указанные равенства не имеют смысла?

- а) $5 = \frac{1}{x-4}$; б) $\frac{7}{x-9} = 2$; в) $\frac{6}{z+4} = 11$; г) $\frac{13}{x} = \frac{7}{9}$.

318 Решите уравнение:

- а) $\frac{5}{x} = 9$; д) $\frac{2}{a-3} = \frac{3}{a-2}$; и) $\frac{p+3}{p-3} = \frac{5}{2}$;
 б) $\frac{5}{6} = \frac{3}{4y}$; е) $\frac{1}{b-1} = \frac{2}{b+1}$; к) $\frac{q}{q-5} = \frac{q-2}{q-6}$;
 в) $\frac{2}{z+5} = \frac{1}{3}$; ж) $\frac{1}{2c+5} = \frac{1}{8c+3}$; л) $\frac{r+1}{r-1} = \frac{r-5}{r-3}$;
 г) $\frac{10}{t-2} = 2$; з) $\frac{4}{d+3} = \frac{7}{3d-1}$; м) $\frac{6}{7(s+1)} = \frac{2}{s+9}$.

319 а) Если от загаданного рационального числа отнять 5, результат умножить на 7, к полученному произведению прибавить 2, результат разделить на 6, а к полученному частному прибавить 4, то снова получится загаданное число. Какое число загадали?

б) Какое рациональное число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{26}{69}$, чтобы она стала равна $\frac{1}{2}$?

320 Какое число можно подставить вместо b , чтобы корнем уравнение было целое число?

а) $\frac{x+1}{2} = b$; б) $\frac{5y-3}{3} = b$; в) $b(z+4) = 15$; г) $b(t-2) = 0,5$.

321 Какое число можно подставить вместо c , чтобы корнем уравнения было чётное число?

а) $\frac{2x-1}{3} = c$; б) $\frac{7y+3}{2} = c$; в) $c(z-5) = 20$; г) $c(t+6) = 1,5$.

322 Решите уравнение:

а) $\frac{m}{2} - \frac{m}{3} + \frac{m}{4} - \frac{m}{6} - \frac{m}{8} - \frac{m}{12} = 11$; д) $x - \frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} - \frac{2 - \frac{x}{4}}{4} = 2$;

б) $n - \frac{3n}{2} + 9 = \frac{2n}{3} + 4 + \frac{5n}{6} - \frac{6n}{5} + \frac{1}{10}$; е) $y + 2 - \frac{2y - \frac{4-3y}{5}}{15} = \frac{7y - \frac{y-3}{2}}{5}$;

в) $\left(\left(p + \frac{2p}{5}\right) + \frac{1}{5}\left(p + \frac{2p}{5}\right)\right) \cdot \frac{1}{5} = 6$; ж) $z - \frac{\frac{z}{2} - \frac{3+z}{4}}{2} = 3 - \frac{0,5\left(1 - \frac{6-z}{3}\right)}{2}$;

г) $\left(\left(q + \frac{3q}{8}\right) \cdot \frac{2}{7} + \left(q + \frac{3q}{8}\right)\right) \cdot 7 = 42$; з) $1 - \frac{t - \frac{1+t}{3}}{3} = \frac{t}{2} - \frac{2t - \frac{10-7t}{3}}{2}$.

323 Найдите корни уравнения:

а) $(x+5)^2 - (x-9)^2 = 140$; д) $5(b-1)^2 - 2(b+3)^2 = 3(b+2)^2 - 7(6b-1)$;

б) $(y-3)^2 - (y-4)^2 = 37$; е) $2c^2 + (c+5)^2 - 2(c+7)^2 = 2(3c-72,5) + (c-6)^2$;

в) $(z-6)^2 = 75 + (z-7)^2$; ж) $(d+1)^3 - (d-1)^3 = 6(d^2 + d + 1)$;

г) $55 + (t+3)^2 = (t+2)^2$; з) $(a+8)^2 + (a-5)^2 = (a-4)^2 + (a-6)^2 + 93$.

324 Найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению:

а) $x + a = 4$; д) $5x + d = 5$; и) $x = \frac{x}{a} + b$;

б) $2 - x = b + 3$; е) $2x - c = a + 3x$; к) $x - a = \frac{x}{b}$;

в) $x - c = 5$; ж) $5x + 3a = 7x - 4c$; л) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$;

г) $x + a = b + 2$; з) $9c - 6x = 3a - 5x$; м) $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = d$.

π 325 Прочитайте высказывания и сформулируйте высказывания, обратные данным. Определите истинность первоначальных высказываний и обратных к ним. Для ложных высказываний постройте их отрицания.

1) $(x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5$ или $x = 3$; 4) $|x| > 7 \Rightarrow x > 7$;

2) $y^2 = 49 \Rightarrow y = 7$; 5) $|x| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6$;

3) $z^3 = -64 \Rightarrow z = -4$; 6) $a > b \Rightarrow b < a$.

326 Найдите значение выражения при данных значениях переменной:

а) $-(5a + 7)(4a - 3) + (2a + 2,5)(10a - 6)$ при $a = 198,56$;

б) $(b + 5)(9b - 3) - (7 + 3b)^2$ при $b = -215,436$.

327 Докажите высказывание:

а) Если a, b, c делятся на n , то $3a - 4c + 5b$ делится на n ($a, b, c, n \in \mathbb{Z}$).

б) Если a делится на 4, b делится на 5, то $5a + 4b$ делится на 20 ($a, b \in \mathbb{Z}$).

в) Если число $x + \frac{1}{x}$ — целое, то число $x^2 + \frac{1}{x^2}$ также целое ($x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$).

г) Если число $x + \frac{1}{x}$ — целое, то число $x^3 + \frac{1}{x^3}$ также целое ($x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$).

328 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $x - 6 > 5$; в) $5 < z \leq 9$; д) $|a - 3| < 5$;

б) $y + 7 \leq -2$; г) $-4 \leq t < -1$; е) $|b + 5| \geq 2$.

329 Разложите многочлен на множители:

а) $x^4 - x^3 + x - 1$;

д) $b^3 + 8c^3 + b^2 - 2bc + 4c^2$;

б) $y^3 + 27 + 7y^2 + 21y$;

е) $d^3 - 4d^2 - 12d + 27$;

в) $z^5 + z^3 - z^2 - 1$;

ж) $m^3 - n^3 - 6m^2 - 6mn - 6n^2$;

г) $a^3 - a^2 - 9a + 9$;

з) $p^3 - 8p^2 - 32p + 64$.

330 Среди следующих пяти множеств найдите все пары «множество — подмножество». Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A, B, C, D, E .

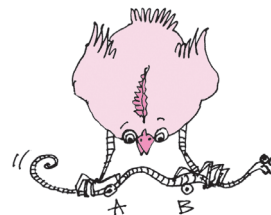
1) A — множество целых чисел, делящихся на 3;

2) B — множество целых чисел, делящихся на 5;

3) C — множество целых чисел, делящихся на 15;

4) D — множество целых чисел, делящихся на 9;

5) E — множество целых чисел, делящихся на 45.



331 а) В магазине имеются пряники по цене 30 р. за кг и по цене 50 р. за кг. В течение дня было продано тех и других пряников на одинаковую сумму. Чему была равна средняя цена за килограмм проданных в этот день пряников?

б) Средний возраст 20 спортсменов и одного тренера равен 25 годам. А средний возраст этих спортсменов — 24 года. Сколько лет тренеру?

332 Докажите следующие утверждения:

а) Не существует наибольшего четного числа.

б) Существует бесконечно много натуральных чисел вида $7n + 3$, где $n \in \mathbb{N}$.

в) Не существует целого числа, которое при делении на 8 даёт остаток 6, а при делении на 16 даёт остаток 4.

333 Разбейте множество $\{1, 3, 7, 9, 25, 65, 70\}$ на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась сумме чисел в другой.

D

334 Решите уравнение:

а) $\frac{x}{9} - 6 = 12$;

в) $3,9z + 4,3z = 1,2z + 28,8 - 7,4z$;

б) $\frac{y}{5} - \frac{y}{6} = 7$;

г) $4,7t - 3,8 = 0,3t - 0,7t - 7,2 + 3,4t$.

335 Найдите корни уравнения:

а) $5(x - 9) = 3(x + 7)$;

г) $(a + 8)(1 - a) = 8 - a(a - 11)$;

б) $6(9 - y) = 7(4 - y)$;

д) $(2 - b)(4 - b) = 17 - (b + 2)(7 - b)$;

в) $z(z - 3) = (4 + z)(z - 5)$;

е) $(11 - 2c)(5c - 6) = 80 - 10(c - 3)^2$.

336 При каких значениях переменной:

а) значение выражения $5a - 38$ равно 12;

б) значение выражения $2c + 45$ равно значению выражения $6c + 17$;

в) значение выражения $7d - 31$ противоположно значению выражения $41 - 8d$;

г) значение выражения $7x - 40$ в 6 раз больше значения выражения $x - 5$;

д) значение выражения $1 - y$ в 7 раз меньше значения выражения $y - 17$;

е) значение выражения $5z - 20$ на 4 меньше значения выражения $19 - 2z$;

ж) значение выражения $t + 31$ на 5 больше значения выражения $106 - 7t$?

337 Докажите, что:

а) уравнение $9x - 3 = 9(x - 1)$ не имеет корней;

б) корнем уравнения $5y - 7 + y = 6(y - 1) - 1$ является любое число;

в) число 5 является корнем уравнения $7z - 12 = 3 + z + 15$;

г) число $-1,5$ не является корнем уравнения $10b - 3 + 4 = 6 + 8b - 2$.

338 Решите уравнение:

а) $x + \frac{5}{2} = \frac{4x + 3}{4} - \frac{1 - 3x}{8}$;

д) $\frac{5a - 14}{25} - \frac{3a - 5}{20} = a - 1,26$;

б) $\frac{3y + 12}{4} = 3 - \frac{5y - 7}{3}$;

е) $\frac{b + 4}{5} - b + 5 = \frac{b + 3}{3} - \frac{b - 2}{2}$;

в) $\frac{7z}{12} + \frac{2 - z}{4} - 1 = \frac{5z - 6}{9} - \frac{1}{2}$;

ж) $\frac{8 - c}{6} - \frac{5 - 4c}{3} = \frac{c + 6}{2}$;

г) $\frac{5t + 1,75}{3} - t - \frac{t - 3}{8} = \frac{t}{16}$;

з) $\frac{9 + 7d}{2} - 1 + \frac{1 - 2d}{7} = 3d$.

339 При каком значении a уравнение $3a - 9x = 4x - 8$ имеет корень:

а) $x = -1$;

б) $x = 3$;

в) $x = 0$;

г) $x = 2$?

340 Запишите три уравнения, корнем которых является число a :

а) $a = 1$;

б) $a = -5$;

в) $a = 4,5$;

г) $a = -0,5$.

341 Имеет ли уравнение корни при указанном значении a ?

а) $8x - a = 4(2x - 5)$, $a = -3$;

в) $3(x - 2) - a = 3x + 11$, $a = 4$;

б) $-3x + 3a = 9 - 3x$, $a = -6$;

г) $9x - a = 3(4x + 4) - 3x$, $a = 7$.

При каком значении a уравнение будет иметь корни?

342 Найдите корни уравнения:

а) $6(x + 3) = 2(x + 23)$;

в) $7(6 - 2t) = 21(4 - t)$;

б) $5(y - 4) = 10(y - 8)$;

г) $4(2z - 8) = 6(6 + 2z)$.

343 а) На сколько нужно уменьшить число 8642, чтобы получить число, записанное теми же цифрами в обратном порядке?

б) Найдите натуральное число, восьмая часть от которого на 3 меньше его шестой части.

в) Найдите целое число, которое при увеличении на 6,25 даёт тот же результат, что и при умножении на 7,25.

344 При каком значении x равенство не имеет смысла?

а) $-3 = \frac{2}{x+6}$;

б) $\frac{12}{x-11} = 7$;

в) $\frac{9}{x+8} = 19$;

г) $\frac{11}{x} = \frac{3}{8}$.

345 Решите уравнение:

а) $\frac{18}{x} = 6$;

в) $\frac{8}{z-5} = \frac{9}{z-6}$;

д) $\frac{5(5+3a)}{6a+3,5} = 2$;

б) $\frac{24}{y} = 4$;

г) $\frac{1}{t-1} = \frac{-2}{t-2}$;

е) $\frac{5(b+2)}{9(b+1)} = \frac{2}{3}$.

346 Какое число нужно подставить вместо a , чтобы уравнение имело указанный корень?

а) $ax + 3 = 7x - 8$, если корень уравнения $x = 1$;

б) $3ay - 5 = 4y - 7$, если корень уравнения $y = -1$;

в) $\frac{2z}{a} - \frac{1}{2} = \frac{3z}{4} - \frac{3}{8}$, если корень уравнения $z = \frac{1}{3}$;

г) $\frac{4a}{3} + \frac{2}{7} = t - \frac{2}{3}$, если корень уравнения $t = -\frac{1}{7}$.



347 Докажите, что данное уравнение не имеет корней:

а) $7(x + 3) + 8(x + 4) = 15(x + 6)$;

в) $9(2z + 2) + 4(z - 7) - 2(11z - 9) = 0$;

б) $3(y - 5) + 5(6 - 2y) = -7(y + 3)$;

г) $3(7t - 4) - 4(6t + 2) + 3(t + 2) = 0$.

348 Докажите, что решением данного уравнения является любое число:

а) $4(2x - 1) - 3(2x - 7) = 17 + 2x$;

в) $9(2z - 1) + 5(3z + 1) = 3(11z - 1) - 1$;

б) $6(3 - 5y) + 12(y - 3) + 18 + 18y = 0$;

г) $7(4t + 5) - 8(4 - 5t) - 3 - 68t = 0$.

349 а) Трёх братьям вместе 48 лет. Средний из них в 2 раза старше младшего. А старшему столько лет, сколько среднему и младшему вместе. Сколько лет каждому из братьев?

б) Пассажирский поезд шёл со скоростью 72 км/ч. Пассажир, смотревший в окно, заметил, что встречный товарный поезд, длина которого равна 500 м, проехал мимо него за 15 с. С какой скоростью ехал товарный поезд?

в) По окружности длиной 378 см движутся навстречу друг другу два муравья, один со скоростью 10 см/с, а другой со скоростью 8 см/с. Через какие промежутки времени будут происходить их встречи? Через какие промежутки времени будут происходить их встречи, если один из муравьёв будет двигаться в противоположном направлении?

350 Какое число можно подставить вместо b , чтобы корнем уравнение было целое число?

а) $\frac{x+3}{5} = b$; б) $\frac{7y-4}{6} = b$; в) $b(z+5) = 21$; г) $b(t-3) = -2$.

351 Какое число можно подставить вместо c , чтобы корнем уравнения было чётное число?

а) $\frac{3x+2}{7} = c$; б) $\frac{4y+9}{7} = c$; в) $c(z-8) = 36$; г) $c(t+7) = -5$.

352 Решите уравнение:

а) $\frac{3x-2}{5-x} = \frac{3(x+3)}{2-x}$; в) $\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{z+2}{3} + 4 \right) + 6 \right) + 8 \right) = 1$;
 б) $\frac{8t-5}{8t+5} = \frac{3t+7}{3t+2}$; г) $\frac{4}{11} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{y-1}{3} + 5 \right) + 3 \right) - 2 - y = 0$.

353 Найдите корни уравнения:

а) $(x+2)^2 - (x-3)^2 = 75$; в) $32 - (a+4)^2 = -(a+8)^2$;
 б) $(y-7)^2 - (y-3)^2 = 96$; г) $(b+10)(10-b) = 20(10-b) - b^2$.

354 Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

а) $-(3a+4)(4a-5) + (6a+21)(2a-7)$ при $a = 63$;
 б) $(b+11)(4b-8) - (9+2b)^2$ при $b = -87,29$.

355 Докажите высказывание:

а) Если a, b, c делятся на n , то $6a - 21c + 15b$ делится на $3n$ ($a, b, c, n \in \mathbb{Z}$).
 б) Если a делится на 7, b делится на 11, то $11a + 7b$ делится на 77 ($a, b \in \mathbb{Z}$).

356 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $x - 3 > 4$; в) $1 < z \leq 7$; д) $|a - 5| < 2$;
 б) $y + 2 \leq -3$; г) $-6 \leq t < -2$; е) $|b + 3| \geq 5$.

357 Разложите многочлен на множители:

а) $x^4 - 3x^3 + 4x - 12$; в) $a^3 + 64c^3 + a^2 - 4ac + 16c^2$;
 б) $y^3 + 64 + 8y^2 + 32y$; г) $b^3 - 7b^2 - 9b + 63$.

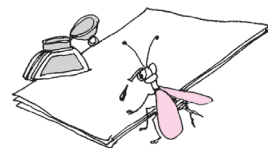
358 В пончиковой компании Антона и Ксюши продаются пончики двух сортов: по цене 60 р. за кг и по цене 30 р. за кг. В течение месяца было продано тех и других пончиков на одинаковую сумму. По какой средней цене продавали пончики в этот месяц?

359 Разбейте множество $\{1, 11, 13, 19, 22, 44\}$ на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась сумме чисел в другой.

360 Докажите, что A делится на B :

$$A = 241,5 : 2,3 - 36 \cdot \left(17,2 \cdot 0,125 - \left(2\frac{32}{45} - 1\frac{7}{60} \right) + 25 : \frac{1}{2} \right);$$

$$B = (0,5 - 0,375) : \frac{1}{8} - \left(3\frac{5}{6} - 3\frac{7}{12} \right) : (0,358 - 0,108) + 15.$$





361*

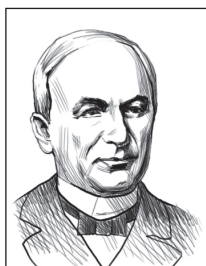
Вызвал царь трёх богатырей – Илью Муромца, Добрыню Никитича и Алёшу Поповича – и спросил их, кто из них убил Соловья-разбойника. Илья Муромец сообщил, что Соловья-разбойника убил Добрыня Никитич. Добрыня Никитич сказал, что Соловья-разбойника убил Алёша Попович, а Алёша Попович сообщил, что Соловья-разбойника убил он. Сможет ли царь определить, кто убил Соловья-разбойника, если он знает, что только один богатырь сказал правду, а остальные соврали?

362*

К переправе подошли три странника и три людоеда. Оказалось, что на переправе имеется только одна лодка, которая может вместить лишь двух человек. Странники боятся остаться в меньшинстве. Только один странник и один людоед умеют грести. Каким образом они могут переправиться с учётом их пожеланий и возможностей?



6.1.2. Решение уравнений с модулями



*Подлинно мы по призванию поэты, только удел наш –
Всё, что свободно творим, строго потом доказать.*

Леопольд Кронекер (1823–1891),
немецкий математик

При решении многих задач возникает необходимость рассматривать несколько разных вариантов возможной взаимосвязи величин. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим следующую задачу:

Задача 1. Частное двух рациональных чисел равно 5. Известно, что одно из этих чисел на 16 больше другого. Найдите эти числа.

Решение:

Обозначим одно из чисел через x , где $x \in \mathbb{Q}$, тогда второе число равно $5x$.

Для того чтобы составить математическую модель задачи, мы должны записать, что разность между большим и меньшим числами равна 16. Возможны два случая: если $5x \geq x$, то мы получим, что $5x - x = 16$; если же $5x < x$, то $x - 5x = 16$. И так как в условии нет уточнения, какой из этих случаев имеется в виду, мы должны рассмотреть оба.

Эти два случая можно объединить, используя понятие модуля числа. Выражение $|5x - x|$ как раз по определению и будет включать оба случая:

$$|5x - x| = \begin{cases} 5x - x, & \text{если } 5x \geq x; \\ x - 5x, & \text{если } 5x < x. \end{cases}$$

Теперь мы можем записать математическую модель нашей задачи короче:

$$\begin{cases} |5x - x| = 16; \\ x \in \mathbb{Q}. \end{cases} \longrightarrow 5x = ? \quad x = ?$$

В итоге исходная задача свелась к решению уравнения $|5x - x| = 16$, содержащего модуль. Пользуясь определением модуля числа, решение этого уравнения можно записать следующим образом.

1) Если $5x \geq x$, то

$$5x - x = 16 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow \underline{x = 4} \Leftrightarrow \underline{5x = 20}.$$

2) Если $5x < x$, то

$$x - 5x = 16 \Leftrightarrow -4x = 16 \Leftrightarrow \underline{x = -4} \Leftrightarrow \underline{5x = -20}.$$

Следовательно, задача имеет два решения: первое – искомые числа равны 4 и 20, второе – искомые числа равны (-4) и (-20).

Ответ: 4 и 20 или -4 и -20.

Рассмотрим теперь общий способ решения уравнения вида $|kx + b| = c$, где x – переменная величина, а $k, b, c \in \mathbb{Q}$ и $k \neq 0$.

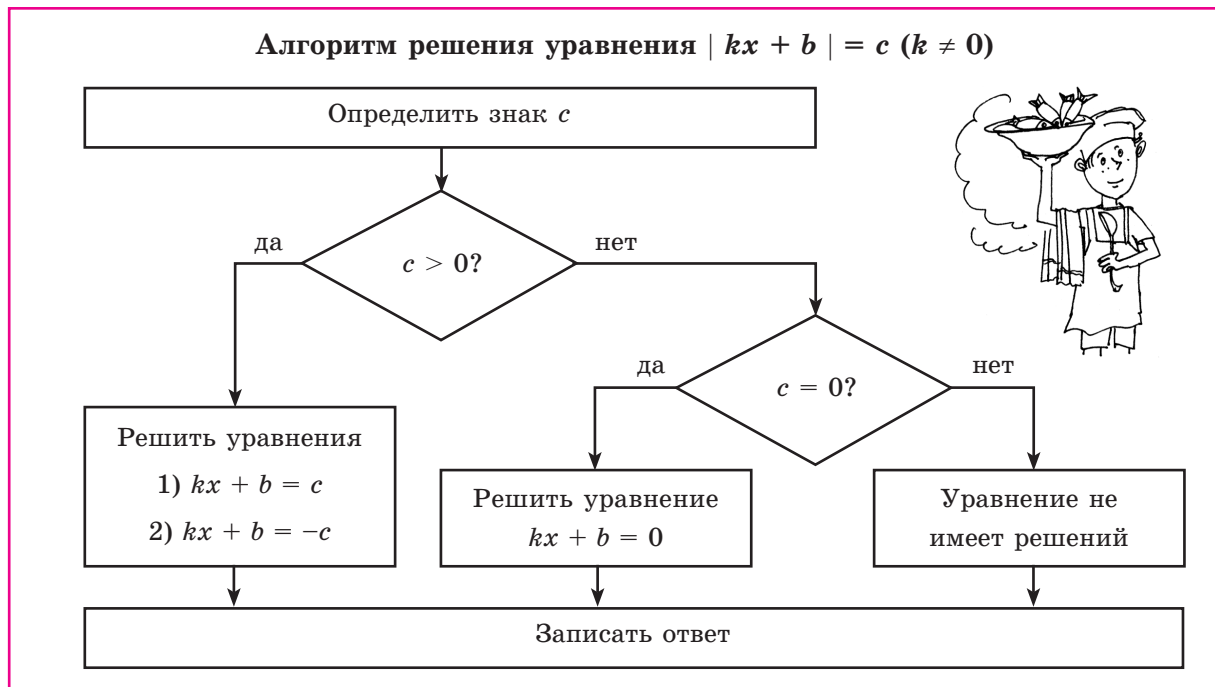
Если $c < 0$, то уравнение $|kx + b| = c$ не имеет решений, так как модуль числа не может принимать отрицательные значения.

Если $c = 0$, то уравнение принимает вид $kx + b = 0$. Значит, при $k \neq 0$ оно имеет единственный корень $x = -\frac{b}{k}$.

Если же $c > 0$, то выражение под знаком модуля может принимать значения c и $-c$. Значит, возможны два случая:

$$1) \quad kx + b = c \Leftrightarrow x = \frac{c - b}{k}; \quad 2) \quad kx + b = -c \Leftrightarrow x = \frac{-c - b}{k}.$$

Алгоритм решения уравнений данного типа можно записать следующим образом.



Рассмотрим теперь более сложное уравнение вида $|ax + b| = |cx + d|$, где a, b, c, d – некоторые числа. Сначала разберём решение конкретного уравнения такого типа, а затем запишем общий алгоритм.

Задача 2. Решите уравнение: $|2x - 5| = |3x + 6|$.

Решение:

Согласно определению модуля, указанное равенство возможно в следующих случаях:

- 1) $2x - 5 = 3x + 6$; 2) $2x - 5 = -(3x + 6)$;
- 3) $-(2x - 5) = -(3x + 6)$; 4) $-(2x - 5) = 3x + 6$.

Заметим, что уравнения 1) и 3) равносильны, значит, они имеют одинаковые корни. Аналогичное наблюдение может быть сделано относительно уравнений 2) и 4). Значит, для решения исходного уравнения нам достаточно найти корни двух уравнений 1) и 2):

- 1) $2x - 5 = 3x + 6 \Leftrightarrow 2x - 3x = 6 + 5 \Leftrightarrow -x = 11 \Leftrightarrow x = -11$;
- 2) $2x - 5 = -(3x + 6) \Leftrightarrow 2x - 5 = -3x - 6 \Leftrightarrow 2x + 3x = 5 - 6 \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -0,2$.

Ответ: $\{-11; -0,2\}$.

Общий алгоритм решения таких уравнений можно записать следующим образом.

Алгоритм решения уравнения вида $|ax + b| = |cx + d|$,
где a, b, c, d – некоторые числа

1. Найти корни уравнения $ax + b = cx + d$.
2. Найти корни уравнения $ax + b = -(cx + d)$.
3. В ответе записать множество найденных корней.

Уравнения с модулями могут иметь более сложный вид, например включать более двух модулей, содержать выражения вне знака модуля. При решении таких уравнений сначала выделяют промежутки, на которых выражения под знаком модуля не меняют свой знак, а затем уже ищут решения на каждом из выделенных промежутков.

Задача 3. Решите уравнение: $|x - 1| + |x + 4| = 5$.

Решение:

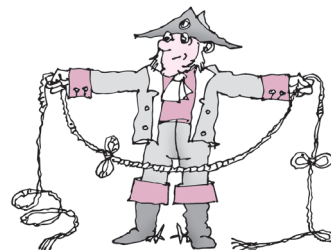
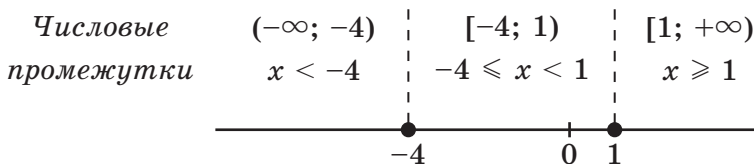
Сначала, пользуясь определением модуля, запишем, что означают выражения, содержащие знаки модуля.

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \geq 1; \\ 1 - x, & \text{если } x < 1; \end{cases} \quad |x + 4| = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x \geq -4; \\ -x - 4, & \text{если } x < -4. \end{cases}$$

Точки 1 и (-4) разбивают числовую прямую на три промежутка:

$$(-\infty; -4), [-4; 1) \text{ и } [1; +\infty).$$

Отметим выделенные промежутки на числовой прямой:



На каждом из указанных промежутков данные выражения с модулем можно записать без знака модуля:

Выражения \ Промежутки	$(-\infty; -4)$	$[-4; 1)$	$[1; +\infty)$
$ x - 1 $	$1 - x$	$1 - x$	$x - 1$
$ x + 4 $	$-x - 4$	$x + 4$	$x + 4$

Будем искать решение нашего уравнения на каждом из выделенных числовых промежутков.

1) $x < -4$, или $x \in (-\infty; -4)$.

На этом промежутке $|x - 1| = 1 - x$, а $|x + 4| = -x - 4$. Значит, исходное уравнение может быть записано в виде:

$$(1 - x) + (-x - 4) = 5 \Leftrightarrow 1 - x - x - 4 = 5 \Leftrightarrow -2x = 8 \Leftrightarrow x = -4.$$

Однако полученное число -4 не принадлежит рассматриваемому промежутку: $-4 \notin (-\infty; -4)$. Поэтому на данном промежутке уравнение не имеет корней.

2) $-4 \leq x < 1$, или $x \in [-4; 1)$.

В этом случае уравнение может быть записано в виде:

$$(1 - x) + (x + 4) = 5 \Leftrightarrow 1 - x + x + 4 = 5 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0.$$

Полученное уравнение верно при любом значении x . Следовательно, любое число, принадлежащее промежутку $[-4; 1)$, является корнем исходного уравнения.

3) $x \geq 1$, или $x \in [1; +\infty)$.

На данном промежутке уравнение принимает вид:

$$(x - 1) + (x + 4) = 5 \Leftrightarrow x - 1 + x + 4 = 5 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

И так как $1 \in [1; +\infty)$, число $x = 1$ является корнем исходного уравнения.

Таким образом, множество корней исходного уравнения представляет собой объединение всех чисел полуинтервала $[-4; 1)$ и числа 1 , то есть числовой отрезок $[-4; 1]$.

Ответ: $x \in [-4; 1]$.

Заметим, что при решении задачи мы использовали числовую прямую лишь для того, чтобы определить на ней взаимное расположение чисел (-4) и 1 и понять, на какие числовые промежутки эти числа разбивают всю числовую прямую. Поэтому при решении уравнений с модулями в дальнейшем мы будем использовать упрощённую модель числовой прямой. На этой модели мы будем отмечать лишь взаимное расположение интересующих нас точек относительно друг друга и не будем фиксировать точные координаты данных точек.

Обобщая рассмотренный нами способ решения уравнения с модулями, приходим к следующему алгоритму.



Алгоритм решения уравнения с модулями

1. Найти в уравнении все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Приравнять каждое из этих выражений к нулю и найти корни полученных уравнений.
3. Отметить найденные корни уравнений на упрощённой модели числовой прямой и определить непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные точки разбивают числовую прямую.
4. Проверить, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую.
5. Установить для всех числовых промежутков, какой вид принимает каждый модуль – самого выражения, содержащегося под знаком модуля, или выражения, противоположного ему.
6. Для каждого числового промежутка записать и решить исходное уравнение без знаков модуля.
7. Отобрать из полученных корней те, которые принадлежат рассматриваемому числовому промежутку.
8. В ответе записать множество всех получившихся корней.



Рассмотрим, как с помощью данного алгоритма можно решить более сложные уравнения, содержащие модули.

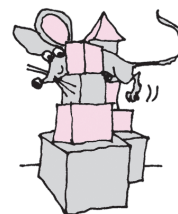
Задача 4. Решите уравнение: $|x - 2| + |x + 6| - |-x - 9| = -2x - 7$.

Решение:

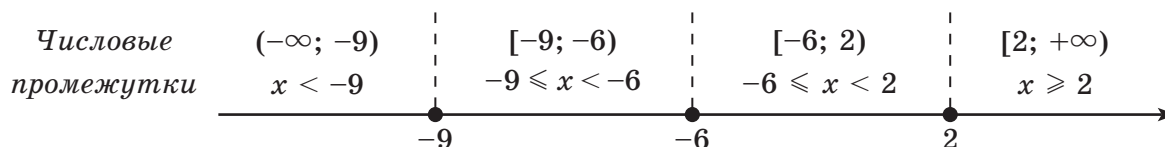
1. Под знаком модуля находятся выражения: $x - 2$, $x + 6$ и $-x - 9$.

2. Найдем корни уравнений:

$$\begin{array}{lll} x - 2 = 0; & x + 6 = 0; & -x - 9 = 0; \\ x = 2; & x = -6; & x = -9. \end{array}$$



3. Отметим найденные корни уравнений на упрощённой модели числовой прямой и определим непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные числа разбивают числовую прямую.



4. Проверим, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую:

$$(-\infty; -9) \cup [-9; -6) \cup [-6; 2) \cup [2; +\infty) = (-\infty; +\infty).$$

5. Установим для всех числовых промежутков, чему равно значение каждого модуля. Для этого можно воспользоваться определением модуля каждого из выражений.

$$\begin{aligned} |x - 2| &= \begin{cases} x - 2, & \text{если } x \geq 2; \\ 2 - x, & \text{если } x < 2; \end{cases} & |x + 6| &= \begin{cases} x + 6, & \text{если } x \geq -6; \\ -x - 6, & \text{если } x < -6; \end{cases} \\ |-x - 9| &= \begin{cases} x + 9, & \text{если } x \geq -9; \\ -x - 9, & \text{если } x < -9. \end{cases} \end{aligned}$$

Полученные результаты запишем в таблице:

Выражения \ Промежутки	$(-\infty; -9)$	$[-9; -6)$	$[-6; 2)$	$[2; +\infty)$
$ x - 2 $	$2 - x$	$2 - x$	$2 - x$	$x - 2$
$ x + 6 $	$-x - 6$	$-x - 6$	$x + 6$	$x + 6$
$ -x - 9 $	$-x - 9$	$x + 9$	$x + 9$	$x + 9$

6–7. Теперь для каждого числового промежутка запишем и решим уравнение, равносильное исходному и не содержащее знаков модуля. Каждый из полученных корней проверяем на принадлежность рассматриваемому числовому промежутку.

1) $x < -9$, или $x \in (-\infty; -9)$;

$$(2 - x) + (-x - 6) - (-x - 9) = -2x - 7;$$

$$2 - \cancel{x} - x - 6 + \cancel{x} + 9 = -2x - 7;$$

$$-x + 2x = -2 + 6 - 9 - 7;$$

$$x = -12;$$

$$-12 \in (-\infty; -9);$$

$$x = -12 \text{ — корень уравнения.}$$

2) $-9 \leq x < -6$, или $x \in [-9; -6)$;

$$(2 - x) + (-x - 6) - (x + 9) = -2x - 7;$$

$$2 - x - x - 6 - x - 9 = -2x - 7;$$

$$-3x + 2x = -2 + 6 + 9 - 7;$$

$$x = -6;$$

$$-6 \notin [-9; -6). \text{ Нет корней.}$$

3) $-6 \leq x < 2$, или $x \in [-6; 2)$;

$$(2 - x) + (x + 6) - (x + 9) = -2x - 7;$$

$$2 - \cancel{x} + \cancel{x} + 6 - x - 9 = -2x - 7;$$

$$-x + 2x = -2 - 6 + 9 - 7;$$

$$x = -6;$$

$$-6 \in [-6; -2);$$

$$x = -6 \text{ — корень уравнения.}$$

4) $x \geq 2$, или $x \in [2; +\infty)$;

$$(x - 2) + (x + 6) - (x + 9) = -2x - 7;$$

$$x - 2 + \cancel{x} + 6 - \cancel{x} - 9 = -2x - 7;$$

$$x + 2x = 2 - 6 + 9 - 7;$$

$$x = -\frac{2}{3};$$

$$-\frac{2}{3} \notin [2; +\infty). \text{ Нет корней.}$$

Таким образом, корнями нашего уравнения являются $x = -12$ и $x = -6$.

8. Ответ: $\{-12; -6\}$.

К

363 1) Найдите расстояние от начала координат O до точек A и B координатной прямой:

а) $A(3)$, $B(8)$; б) $A(-3)$, $B(8)$; в) $A(3)$, $B(-8)$; г) $A(-3)$, $B(-8)$.

2) Как с помощью модуля можно записать расстояние от точек A и B до начала координат?

3) Запишите с помощью знака модуля расстояние между точками A и B и вычислите его.

364 Найдите значение выражения:

а) $|-5| + |-7|$;

г) $|-3,2| \cdot |2|$;

ж) $|-1,1| \cdot |-5| : 11$;

б) $-|4,2| + |3,6|$;

д) $|-6,4| \cdot |-0,5|$;

з) $3,9 : |-1,3| \cdot |4,1|$;

в) $-|1,8| - |-3| + |-1,5|$;

е) $|8,1| : |-3|$;

и) $|-7,6| \cdot |-7| : |-1,9|$.

365 Решите уравнение, пользуясь определением модуля:

а) $|x| = 5$;

в) $|-z| = 2,1$;

д) $|2a| = 0$;

ж) $-|d| = -7$;

б) $|y| = -4$;

г) $|-t| = -3,4$;

е) $|-3b| = 0$;

з) $-|2,1s| = 3$.

366 1) Решите уравнение, содержащее переменную под знаком модуля:

а) $|x - 4| = 2$; б) $|2x + 9| = -1$; в) $|-3 - 6x| = 0$.

2) Предложите свой алгоритм решения уравнения $|kx + b| = c$ при $k \neq 0$, а затем сравните его с алгоритмом, предложенным в учебнике на с. 76.

367 Найдите корни уравнения:

а) $|3x + 5| = 2$; г) $|3 + 2a| = -4$; ж) $|u + 6 - 4u| = 3$;
 б) $|2y - 7| = 5$; д) $|-3c - 18| = 0$; з) $|-3 - 5d + 11| = 12$;
 в) $|-3 - 5z| = 0$; е) $|-6b - 4| = 3$; и) $|-6k - 2 + 7k + 1 - 3k| = -7$.

368 Докажите, что:

- а) число (-2) является корнем уравнения $|x - 3| = 5$;
 б) число 1 не является корнем уравнения $|y + 6| = |3 - y|$;
 в) уравнение $|a - 2| + 1 = 0$ не имеет корней;
 г) уравнение $|5b| = |5b + 10|$ имеет единственный корень;
 д) уравнение $|c - 4| = |4 - c|$ имеет по меньшей мере 10 корней;
 е) уравнение $|2d - 7| = |d - 2|$ имеет ровно два корня.



369 Найдите корни уравнения:

а) $|x + 12| = |x - 10|$; ж) $|4a - 5| = |3a + 6|$;
 б) $|y - 8| = |4 - y|$; з) $|-10b - 27| = |20 - 4b|$;
 в) $|z + 9| = -|z + 3|$; и) $|-7c - 6 - 5c| = -|4 - 3c + 2 - c|$;
 г) $|-s + 5| = |-s - 5|$; к) $|12d + 16 - 8d| = |5 - 4d + 3|$;
 д) $|-3 - r| = -|r - 6|$; л) $|3m + 12| = -|8m + 3 - 9m - 7|$;
 е) $|15 - t| = |t - 15|$; м) $|-14 - 5n - 10 + 8n| = -|6 - 4n + n - 10|$.

370 При каких значениях переменной равны значения указанных выражений?

а) $|7x - 1|$ и $|3x + 4|$; в) $|5z + 2|$ и $|5z - 2|$; д) $|12 + 2b|$ и $|-b - 1|$;
 б) $|2y - 9|$ и $|4y + 3|$; г) $|3 + 8a|$ и $|-8a - 3|$; е) $|-8 + c|$ и $|-10 - 3c|$.

371 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $|a - 7|$ равно 3;
 б) значение выражения $|28 - 4b|$ равно -5 ;
 в) значение выражения $|2c - 6|$ равно значению выражения $|3c + 3|$;
 г) значение выражения $|5d + 4|$ противоположно значению выражения $|2 - 9d|$?

372 Составьте уравнение и решите задачу:

- а) Частное двух рациональных чисел равно 2, при этом одно из этих чисел на 8 больше другого. Найдите эти числа.
 б) Разность двух рациональных чисел равна 3, при этом модуль одного из этих чисел в 2 раза больше модуля другого числа. Найдите эти числа.
 в) Сумма двух рациональных чисел равна 8, при этом модуль одного из этих чисел в 3 раза меньше модуля другого числа. Найдите эти числа.
 г) Одно рациональное число на 5 больше другого, при этом модуль одного из этих чисел равен модулю другого. Найдите эти числа.

373 Найдите корни уравнения:

а) $|x - 1| + |x - 3| = 2$;

д) $|7 - q| + |q - 6| = 4$;

б) $|y + 5| + |y - 2| = 7$;

е) $-|4 + r| - |r + 11| = 17$;

в) $|z| - |z - 2| = 3$;

ж) $|9 - s| - |11 - s| = 10$;

г) $|p - 6| - |p - 4| = 5$;

з) $|8 + t| - |4 - t| = -6$.

374 Докажите, что:

а) число (-1) является корнем уравнения $|x - 3| + |x + 4| = 7$;

б) число 2 не является корнем уравнения $|2y - 1| - |y + 3| = 2$;

в) уравнение $|2a + 5| = |4 - 2a| + 1$ не имеет других корней, кроме $a = 0$;

г) уравнение $|3z - 8| - |3z - 2| = -6$ имеет по крайней мере 5 корней.

375 Решите уравнение:

а) $|5x - 4| - |6x - 9| = 1$;

ж) $|2x + 2| - 1 = |2x + 1| - 1$;

б) $|1 - 4y| - |3y + 9| = 5$;

з) $|2y - 4| + 4 = 3 - |7y + 13|$;

в) $|5 - 12z| + |5z + 18| = -7$;

и) $|4z - 3| - 7 = 2 - |12 + 4z|$;

г) $|2t + 8| - |7 - t| = -1$;

к) $3 - |3 - 5t| = 4 - |5 - 5t|$;

д) $|5a + 4| = 2 + |3a - 6|$;

л) $|2a - 5| + 7 = |a + 8| + 4$;

е) $3 - |2b - 2| = |5 - 2b|$;

м) $|6b - 4| - 2 = 3 + |2b + 9|$.

376 Имеет ли уравнение корни при указанном значении a ?

а) $|3x - a| = |2x - 3|$, если $a = 3$;

г) $|2p + 6 - a| = |2p + 6|$, если $a = -2$;

б) $|y + 2a| = |y + 8|$, если $a = -2$;

д) $|3q - a| = |5q - 2 - 2q|$, если $a = -9$;

в) $|5z + 3| = |5z + 2a|$, если $a = -1,5$;

е) $|6r - 3 - 3r| = |3r + a|$, если $a = 3$.

377 При каких значениях переменной:

а) значение выражения $|2x + 4|$ на 3 больше значения выражения $|x + 5|$;

б) значение выражения $|12y - 6|$ на 7 меньше значения выражения $|5y + 20|$?

378 Найдите корни уравнения:

а) $|x + 8| + |x - 3| + |x + 2| = 1$;

г) $|a - 15| + |a - 21| + |a + 19| = -7$;

б) $|y - 5| - |y + 1| + |y - 4| = -2$;

д) $|b + 7| - |11 - b| = |b + 4| - 6$;

в) $|z + 4| - |z - 6| - |z + 9| = 5$;

е) $|c - 12| = 4 - |c - 2| + |c - 3|$.

379 Докажите, что данное уравнение не имеет корней:

а) $|3x - 6| + |8x - 4| + |5x + 10| = 3$;

г) $6 + |7b - 5| = 5 - |2b + 7| - |4 - 15b|$;

б) $|4y + 1| - |2y + 5| + |6y - 12| = -4$;

д) $-|7 - 6r| - |9r + 5| - |4r - 9| = 5$;

в) $|2z + 7| - |5z - 12| - |3z + 9| = 4$;

е) $|7t - 21| + |9t - 36| + |11t + 22| = -1$.

380 При каких значениях переменной указанные равенства являются истинными высказываниями?

а) $|5x + 10| + |6x - 12| = |9x + 3|$;

в) $|6z - 2| = |2z + 1| + |4z - 8|$;

б) $|6a + 3| - |13 - 2a| = |4a + 12| - 2$;

г) $6 - |5d - 1| - |2d + 3| = |2d - 7|$.

381 Докажите, что данное уравнение имеет не менее десяти решений:

- а) $|5x - 12| - |3x - 1| = |11 - 2x|$; в) $|2c - 9| + 7 = |9 - 6c| - |4c - 7|$;
 б) $|8 - 3y| - |11y - 4| + |3 + 8y| = -1$; г) $|3t + 5| = |1 - 6t| - |6 - 3t|$.

382 Решите уравнение:

- а) $|x + 4| + |x - 1| + |x + 2| + |x - 2| = 3$;
 б) $|y - 7| - |y + 2| + |y - 3| - |y + 5| = -6$;
 в) $|z + 3| - |z - 9| - |z + 7| + |z + 8| = 13$;
 г) $|s + 2| - |s - 4| - |s + 11| - |s - 14| = 7$;
 д) $|a - 17| + |a - 3| + |a + 1| + |a + 12| = -4$;
 е) $|b + 5| - |8 - b| - |4 - b| = |b + 7| - 6$;
 ж) $|c - 1| = 9 - |c - 3| + |c - 2| + |c - 6|$;
 з) $|p + 8| - |p - 7| = |p - 11| - |p - 6| + 14$.



383 Найдите корни уравнения:

- а) $|2x + 6| - |3x - 9| + |5x + 5| + |4x - 6| = 5$;
 б) $|3y - 12| + |2y + 6| + |4y - 6| - |5y + 8| = 4$;
 в) $|5z + 15| + |2z - 7| - |6z + 6| - |7z + 14| = 9$;
 г) $|5a - 20| + |9a - 4| + |6a + 1| + |7a + 15| = -12$;
 д) $|3b + 1| - |4 - 2b| - |6 - 12b| = |4b + 8| - 1$;
 е) $|4c - 1| - |5c - 10| = |3c - 12| + |7c + 14| - 48$.



384 Найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению:

- а) $|x + a| = 2$; б) $|x - p| = 6$; в) $|7x - c| = 4$; г) $|5x + d| = -9$.

π

385 Вычислите рациональным способом:

- а) $\frac{254 \cdot 399 - 145}{254 + 399 \cdot 253}$; в) $2\frac{11}{13} : 2\frac{2}{5} \cdot 18\frac{13}{17} \cdot (15\frac{3}{37} - \frac{558}{37}) : 14\frac{15}{31}$;
 б) $\frac{630 \cdot 137 + 2}{316 + 315 \cdot 136}$; г) $7\frac{5}{98} \cdot 8\frac{14}{93} \cdot (\frac{937}{58} - 16\frac{9}{58}) : 21\frac{5}{93} \cdot 28\frac{7}{14}$.

386 а) Целое число a кратно 7. Может ли остаток при делении этого числа на 14 быть равен 5?

б) Целое число b при делении на 36 даёт остаток 3. Найдите остаток при делении числа b на 2, 3, 4, 6, 9, 12.

в) Число m – чётное, а число n – нечётное. Какой остаток при делении на 2 дают числа: $m^2 + n$, $m + n^2$, $m^2 + n^2$, $m^2 - n^2$?

387 На координатной плоскости Oxy постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

- а) $x > 5$; $y \leq -2$; в) $-5 \leq x < 6$; $2 < y \leq 9$; д) $x \leq -4$; $-2 \leq y \leq 7$;
 б) $x \leq -1$; $y > -3$; г) $4 \leq x < 9$; $y > -6$; е) $|x| \leq 5$; $|y| > 3$.

388 Упростите выражение:

a) $a - (5b + (3c - 3a - (a + b))) + 2a - (b + 3c)$;

$$6) 3x + 4y + ((x + 2xy - y) + (2x + 2xy - (-4xy + 3y)));$$

$$\text{B)} (2m - 3n + k) - (2s - (4n + 3s - (3m + 2k))) - m - (k - s);$$

$$\text{r) } 6p + (4p - (8q - (2p + 4q) - 2q)) - (7q + (9p - (3q + 4p) + 8q) + 6p).$$

389 Разложите многочлен на множители:

a) $a^6 - 2a^3b + b^2$;

д) $n^3 - 6n^2p + 12np^2 - 8p^3$;

$$6) 9p^{10} + 30p^5q^6 + 25q^{12};$$

e) $8x^3 + 60x^2z + 150xz^2 + 125z^3$;

В) $49x^4 - 25y^6$;

ж) $27x^6 - 8y^9$;

г) $4m^8 - 81r^4n^6$;

$$3) m^6n^3 + 64p^3q^9.$$

390 Числа 1712, 1807 и 1940 дают одинаковые остатки при делении на некоторое натуральное число, большее 1. Чему равно это натуральное число?

391 а) Автомобилист за 3 часа проехал $\frac{1}{5}$ часть своего пути. Сколько времени после этого он должен ехать, чтобы ему осталось проехать $\frac{1}{4}$ часть пути, если он едет с постоянной скоростью?

б) Поезд, двигаясь со средней скоростью 60 км/ч, проехал расстояние между двумя городами за 10 часов. На сколько км/ч должна увеличиться средняя скорость поезда, чтобы расстояние между этими городами поезд проезжал за 8 часов?

в) Для того чтобы проехать на автомобиле 75 км, необходимо 4,5 литра бензина. Сколько потребуется бензина, чтобы проехать 650 км, если известно, что расход бензина постоянный?

г) Бригада из 5 землекопов выкопала за 8 часов котлован объёмом 20 м^3 . За сколько времени могла бы выкопать котлован объёмом 100 м^3 бригада из 12 землекопов, если все землекопы работают с одинаковой постоянной производительностью?

392 Докажите следующие утверждения:

а) Если $pq + rs$ делится на $p + r$, то $ps + qr$ также делится на $p + r$ ($p, q, r, s \in \mathbb{Z}$).

б) Если число $x - \frac{1}{x}$ — целое, то число $x^3 - \frac{1}{x^3}$ — целое.

393 Докажите, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 8^3 + 9^3 + 10^3$ делится на 11.

 **394** Решите уравнение:

а) $|x + 9| = 4$; в) $|z - 14| = 8$; д) $|4a - 12| = 7$; ж) $|3c - 6c + 3| = -5$;

б) $|y - 4| = -9$; г) $|11 - t| = 11$; е) $|9 + 2b| = 2$; з) $|5d + 2d - 4 - 6d| = 3$.

395 Найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению:

а) $|x - a| = 2$; б) $|b - x| = -7$; в) $|6x + c| = 4$; г) $|9x - d| = 8$.

396 Найдите множество решений уравнения:

- а) $|x + 7| = |x - 9|$; в) $|z + 3| = -|z + 12|$; д) $-|9b - 18| = -|16 - 8b|$;
 б) $|y - 5| = |11 - y|$; г) $|5a - 1| = |-4a + 0,8|$; е) $|8c + 2 - 4c| = |5 + 3c + 4|$.

397 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $|a + 7|$ равно 6;
 б) значение выражения $|25 - 5b|$ равно 11;
 в) значение выражения $|3c - 18|$ равно значению выражения $|6c + 24|$;
 г) значение выражения $|21d + 35|$ противоположно значению выражения $|12 - 6d|$?

398 При каких значениях переменной равны значения указанных выражений?

- а) $|6x - 3|$ и $|5x + 7|$; б) $|3y - 15|$ и $|5 - y|$; в) $|9z + 27|$ и $-|z + 3|$.

399 Найдите корни уравнения:

- а) $|x - 5| + |x - 2| = 3$; в) $|9 - z| + |z + 1| = 12$;
 б) $|y + 4| + |y - 3| = 2$; г) $-|6 + t| - |t + 12| = 28$.

400 Решите уравнение:

- а) $|7x - 2| + |5x + 2| = 6$; д) $|3x + 5| - 2 = |3x + 6| - 3$;
 б) $|3 - 6y| - |5y + 10| = 4$; е) $|5y - 2| + 3 = 7 - |6y + 12|$;
 в) $|9 - 14z| + |11z + 19| = -11$; ж) $|6z - 3| + 8 = 5 - |3 + z|$;
 г) $|3t + 15| - |4 - t| = -3$; з) $9 - |7 - 2t| = 8 - |2 - t|$.

401 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $|4x + 5|$ на 12 больше значения выражения $|2x - 3|$;
 б) значение выражения $|4y - 8|$ на 2 меньше значения выражения $|2y + 10|$?

402 Составьте уравнение и решите задачу:

- а) Частное двух рациональных чисел равно 8, при этом одно из этих чисел на 21 больше другого. Найдите эти числа.
 б) Одно из двух заданных рациональных чисел на 10 больше другого, а сумма их модулей равна 16. Найдите эти числа.

403 Найдите корни уравнения:

- а) $|x + 3| + |x - 1| + |x + 5| = 3$; в) $|z - 14| + |z - 9| + |z + 18| = -5$;
 б) $|y - 6| - |y + 4| + |y - 7| = -7$; г) $|t + 6| - |5 - t| = |t + 7| - 11$.

404 При каких значениях переменной указанные равенства являются истинными высказываниями?

- а) $|2x - 8| + |3x - 18| + |7x + 14| = 38$; в) $|3z + 9| - |12 - 4z| = |5z + 2| - 4$;
 б) $|5y + 4| - |3y + 21| + |7y - 28| = -2$; г) $|4t - 20| = 8 - |9t - 2| + |10t - 7|$.

405 Решите уравнение:

- а) $|x + 9| + |x - 3| + |x + 7| + |x - 4| = 8$;
 б) $|y - 5| - |y + 4| + |y - 1| - |y + 2| = -6$;
 в) $|z - 14| + |z - 13| + |z + 12| + |z + 11| = -10$;
 г) $|t + 4| - |t - 6| = 6 - |t - 8| + |t - 2|$;
 д) $|4x + 16| - |7x - 14| + |6x + 12| + |3x - 9| = 57$;
 е) $|8y - 24| + |2y + 10| + |5y - 10| - |y + 7| = 11$;
 ж) $|11z + 22| + |3z - 15| - |z + 5| - |4z + 24| = 32$;
 з) $|2t - 4| - |6t - 30| = 7 + |9t - 36| + |8t - 64|$.



406 а) Целое число a кратно 9. Может ли остаток при делении этого числа на 27 быть равен 11?

б) Целое число b при делении на 14 даёт остаток 8. Найдите остаток при делении числа b на 2, на 7.

407 На координатной плоскости Oxy постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

- а) $x > -3$; $y \leq 4$; в) $2 \leq x < 9$; $-3 < y \leq 5$; д) $x > 3$; $-9 \leq y \leq -2$;
 б) $x \leq 5$; $y < -1$; г) $-8 \leq x < -1$; $y \leq 1$; е) $|x| > 7$; $|y| < 5$.

408 Упростите выражение:

- а) $8m - (5m + (7m - (10m - 2m)))$;
 б) $a + (4b - (a - (3c - 3b) + 2c + (a - 2b - c)))$;
 в) $x - (2y + (3z - 3x - (x + z))) - (2x - (y + 3z))$;
 г) $7p - (2p + (q - 3p + (5q - 2p) - 4p) - 2q)$.



409 Разложите многочлен на множители:

- а) $m^6 + 6m^3y^4 + 9y^8$; д) $27p^3 - 27p^2q + 9pq^2 - q^3$;
 б) $4p^{12} - 20p^6z^5 + 25z^{10}$; е) $125n^3 + 75n^2m + 15nm^2 + m^3$;
 в) $16n^6 - 81m^{10}$; ж) $8x^9 + 125y^6$;
 г) $16a^2b^2 - 121c^2d^4$; з) $216a^6x^9 - 125b^3y^9$.

410 Числа 257, 374 и 478 дают одинаковые остатки при делении на некоторое натуральное число, большее 1. Чему равно это натуральное число?

411 а) Пекарь за 2,5 часа выполнил $\frac{1}{12}$ часть полученного заказа. Сколько времени он должен после этого работать до того момента, когда ему останется сделать $\frac{1}{8}$ часть заказа, если он работает с постоянной производительностью?

б) Для того чтобы испечь 16 порций блинов, необходимо 4 яйца. Сколько потребуются яиц, чтобы приготовить 28 порций блинов?

412 Докажите, что $3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 8^3 + 9^3 + 10^3$ делится на 13.

413 Решите уравнение $ax + b = 0$, где:

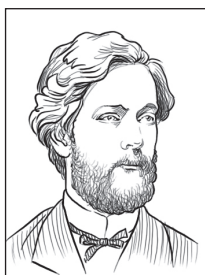
$$a = 48\frac{3}{5} : 6\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12} + 1\frac{75}{94} \cdot \left(1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - 14 : 28\right); \quad b = \left(4\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6} - 6\frac{3}{5}\right) \cdot 15.$$

414* Двенадцать школьников съели на празднике 44 пирожных. Каждый мальчик съел по 4 пирожных, а каждая девочка – по 3. Сколько пирожных на этом празднике съели девочки?

415* Четверо друзей, Миша, Ваня, Петя и Коля, съели вместе 55 конфет, при этом каждый из них съел хотя бы одну конфету. Миша съел больше всех конфет, а Ваня и Петя съели вместе 35 конфет. Сколько конфет съел Миша?



6.1.3. Решение уравнений вида $ax + by = c$ в целых числах*



Математика является отнюдь не только делом рассудка, но и существенным образом делом фантазии.

Феликс Клейн (1849–1925),
немецкий математик

Нам часто приходилось сталкиваться с тем, что самые разные практические задачи приводили к уравнениям, в которых переменные по своему смыслу являлись целыми числами.

Уравнения, решениями которых являются целые числа, интересовали учёных ещё в древности. Так, в III веке новой эры появляется сочинение «Арифметика» александрийского математика Диофанта, которое становится поворотным пунктом в развитии алгебры и теории чисел. И не только потому, что Диофант здесь впервые вводит буквенную символику – язык алгебры. В этой книге он предлагает новые способы решения задач, имеющих большое практическое значение.

В чём же особенности задач, рассмотренных Диофантом?

1. Математическими моделями его задач являются уравнения, имеющие целые коэффициенты, с двумя и более переменными.

2. В задачах требуется найти целые решения таких уравнений.

По имени Диофанта уравнения с целыми коэффициентами, которые требуется решить в целых числах, называли **диофантовыми уравнениями**.

Рассмотрим задачу, приводящую к таким уравнениям, и решим ее.

Задача 1. Внук спросил у бабушки, сколько ей лет. Она ответила, что если сложить число её полных лет и обе цифры этого числа, то получится 83. Сколько лет бабушке?

Решение:

Пусть x – количество десятков, а y – количество единиц числа полных лет бабушки. При этом, так как x и y – соответственно первая и вторая цифры её возраста, то $x, y \in \mathbb{Z}$, $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$.

Теперь мы можем записать математическую модель нашей задачи:

$$\begin{cases} 10x + y + x + y = 83; \\ x, y \in \mathbb{Z}, 0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9. \end{cases} \longrightarrow 10x + y = ?$$

Для решения полученного уравнения вначале упростим его:

$$10x + y + x + y = 83 \Leftrightarrow 11x + 2y = 83.$$

Заметим, что $2y$ – число чётное, а 83 – нечётное. Поскольку сумма двух чётных чисел всегда число чётное, $11x$ должно быть нечётным, а значит, и число x – нечётное.

Так как $y \geq 0$, то из уравнения $11x + 2y = 83$ следует, что $11x \leq 83$. А поскольку $y \leq 9$, то

$$11x = 83 - 2y \geq 83 - 2 \cdot 9 \Leftrightarrow 11x \geq 65.$$

Таким образом, $65 \leq 11x \leq 83$. Неравенство сохранится, если каждое из чисел 65 , $11x$ и 83 мы разделим на 11 , поэтому $5\frac{10}{11} \leq x \leq 7\frac{6}{11}$.

По условию, x – целое число. Целыми решениями полученного неравенства являются $x = 6$ и $x = 7$. И так как мы выяснили, что число x – нечётное, единственным его значением является $x = 7$.

Теперь найдём соответствующее ему значение y . Для этого подставим значение $x = 7$ в уравнение $11x + 2y = 83$. Получаем:

$$11 \cdot 7 + 2y = 83 \Leftrightarrow 77 + 2y = 83 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3.$$

Найденное значение y удовлетворяет условиям, заданным в математической модели: $3 \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq 3 \leq 9$. Следовательно, решениями нашего уравнения являются $x = 7$, $y = 3$.

Ответ: бабушке 73 года.

Решая задачу 1, нам удалось не только найти некоторое её решение, но и доказать, что данное решение единственное. Однако уравнения в целых числах часто имеют несколько решений. Иногда в этом случае задачу можно решить, осуществляя перебор всех возможных вариантов.

Задача 2. Для перевозки зерна используются мешки, в которые входит либо 80 кг, либо 60 кг зерна. Сколько надо заготовить тех и других мешков для перевозки 1 тонны зерна таким образом, чтобы все мешки были полными?

Решение:

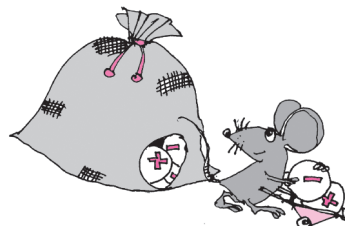
Пусть понадобится x мешков по 80 кг и y мешков по 60 кг. По условию задачи, $x, y \in N_0$, где N_0 – множество неотрицательных целых чисел.

Запишем математическую модель нашей задачи:

$$\begin{cases} 80x + 60y = 1000; \\ x, y \in N_0. \end{cases} \longrightarrow x = ? \quad y = ?$$

Наибольшим общим делителем чисел 80 и 60 является число 20. Число 1000 делится на 20. Поэтому мы можем упростить уравнение, разделив на 20 обе его части:

$$80x + 60y = 1000 \Leftrightarrow 4x + 3y = 50.$$



Теперь заметим, что поскольку $y \geq 0$, из равенства $4x + 3y = 50$ следует, что $4x \leq 50$. Разделив обе части данного неравенства на 4, получим $x \leq 12,5$. И так как по условию $x \in N_0$, x может принимать лишь целые значения из промежутка $0 \leq x \leq 12$.

В то же время равенство $4x + 3y = 50$ мы можем записать в следующем виде:

$$4x + 3y = 50 \Leftrightarrow 4x = 50 - 3y \Leftrightarrow 4x = 48 - 3y + 2 \Leftrightarrow 4x = 3(16 - y) + 2$$

Это означает, что $4x$ при делении на 3 даёт остаток 2. Среди целых x от 0 до 12 таким свойством обладают лишь числа 2, 5, 8, 11. Значит, переменная x может принимать лишь следующие значения:

$$x = 2, x = 5, x = 8, x = 11.$$

Теперь из уравнения $4x + 3y = 50$ для указанных значений x найдём соответствующие им значения y .

$x = 2$	$x = 5$	$x = 8$	$x = 11$
$4 \cdot 2 + 3y = 50$	$4 \cdot 5 + 3y = 50$	$4 \cdot 8 + 3y = 50$	$4 \cdot 11 + 3y = 50$
$y = 14 \in N_0$	$y = 10 \in N_0$	$y = 6 \in N_0$	$y = 2 \in N_0$

Так как все полученные значения y являются неотрицательными целыми числами, то все найденные пары x и y являются решениями нашей задачи.

Ответ: мешки можно заготовить четырьмя различными способами:

Вид мешков	Количество мешков			
	1-й способ	2-й способ	3-й способ	4-й способ
Мешки по 80 кг	2	5	8	11
Мешки по 60 кг	14	10	6	2

Линейные уравнения с двумя переменными x и y , полученные при решении двух рассмотренных задач, в общем виде можно записать так:

$$ax + by = c, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Используемый нами алгоритм решения таких уравнений в общем виде можно записать следующим образом.

**Алгоритм решения уравнений вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$,
в целых числах методом перебора**

1. Найти области значений переменных.
2. Используя свойства делимости или другие свойства чисел, найти все возможные значения одной из переменных.
3. Вычислить соответствующие значения второй переменной.
4. Выбрать из найденных решений уравнения те, которые удовлетворяют условиям задачи.

Однако далеко не всегда при поиске целых решений таких уравнений удаётся выполнить второй шаг – отыскать все возможные значения какой-либо из переменных. Поэтому спектр задач, которые можно решить таким способом, весьма ограничен.

Александрийский математик Диофант ещё в III веке нашей эры придумал и обосновал общий способ поиска целых решений данных уравнений. Способ Диофанта даёт возможность после нахождения всего лишь одного произвольного решения исходного уравнения записать сразу все остальные его решения. А это, в свою очередь, позволяет существенно расширить возможности решения многих задач.



Прежде чем описать данный способ, рассмотрим две теоремы, которые позволяют сразу же определить, имеет ли целые корни уравнение вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, или не имеет. Например, имеет ли смысл искать целые корни следующих уравнений:

$$5x - 7y = -11, \quad 4x + 6y = 9,$$

или сразу можно сказать, что они не имеют целых решений?

Первую из этих теорем мы приведём без доказательства, так как для её обоснования у нас пока недостаточно математических знаний, зато вторую – сможем доказать.

Теорема 1. Целое решение уравнения $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, всегда существует, если c делится на $d = \text{НОД}(|a|; |b|)$.

Коэффициенты уравнения $5x - 7y = -11$ удовлетворяют условию теоремы 1: действительно, $\text{НОД}(5; 7) = 1$, а число -11 , как и любое целое число, делится на 1. Значит, мы сразу можем сказать, что уравнение $5x - 7y = -11$ имеет хотя бы один целый корень.

Однако данная теорема не позволяет сделать никаких выводов о втором уравнении, ведь его коэффициенты не удовлетворяют условию этой теоремы: $\text{НОД}(4; 6) = 2$, а число 9 не делится на 2. В этом случае на помощь приходит теорема 2.

Теорема 2. Уравнение $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, не имеет целых решений, если c не делится на $d = \text{НОД}(|a|; |b|)$.

Доказательство:

Так как $d = \text{НОД}(|a|; |b|)$, то числа a и b можно представить в виде $a = d \cdot a_1$, $b = d \cdot b_1$, где $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ и при этом $\text{НОД}(|a_1|; |b_1|) = 1$. Подставим полученные выражения для a и b в исходное уравнение:

$$ax + by = c \Leftrightarrow d \cdot a_1 x + d \cdot b_1 y = c \Leftrightarrow d(a_1 x + b_1 y) = c.$$

Левая часть полученного равенства делится на d , а правая – нет, так как по условию c не делится на d . Следовательно, не существует таких целых x и y , при которых это равенство было бы возможно, что и требовалось доказать. ▼

Теперь на основании теоремы 2, не решая уравнение $4x + 6y = 9$, мы можем утверждать, что оно не имеет целых решений.

Таким образом, мы научились по коэффициентам линейных уравнений с двумя переменными сразу выделять те из них, которые имеют хотя бы одно целое решение.

Идея поиска всех целых решений уравнений рассматриваемого вида заключается в следующем: сначала надо найти одно произвольное решение данного уравнения. После этого, используя свойства уравнения и найденное решение, можно будет выразить значения x и y через некоторую единую переменную величину (обозначаемую, например, k), принимающую целые значения. Подставляя затем вместо k в зависимости x и y от k все возможные целые значения k , получим все целые решения исходного уравнения.

Проиллюстрируем общий способ поиска целых решений уравнения вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, на примере уравнения $5x - 7y = -11$. Мы уже убедились в том, что оно имеет хотя бы одно решение. Попробуем его найти.

Перебирая различные варианты, убеждаемся в том, что одним из решений данного уравнения является пара чисел $x_0 = 2$, $y_0 = 3$. Действительно:

$$5 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = -11 \text{ (истинно).}$$

Теперь подставим в исходное уравнение вместо числа (-11) полученное выражение $5 \cdot 2 - 7 \cdot 3$ и выполним цепочку равносильных преобразований:

$$5x - 7y = 5 \cdot 2 - 7 \cdot 3 \Leftrightarrow 5x - 5 \cdot 2 = 7y - 7 \cdot 3 \Leftrightarrow 5(x - 2) = 7(y - 3).$$

Так как НОД $(5; 7) = 1$, из полученного равенства следует, что для всех целых x и y , являющихся решением исходного уравнения, $(x - 2)$ кратно 7, а $(y - 3)$ кратно 5. Поэтому если мы разделим обе части последнего равенства на 35, то получим в левой и правой частях некоторое целое число. Обозначим его k :

$$5(x - 2) = 7(y - 3) \Leftrightarrow \frac{x - 2}{7} = \frac{y - 3}{5} = k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Проведённые преобразования показывают, что выражения $\frac{x - 2}{7}$ и $\frac{y - 3}{5}$ равны одному и тому же целому числу k . А значит, приравняв к числу k каждое из выражений, мы сможем получить множество всех решений исходного уравнения:

$$\frac{x - 2}{7} = k \Leftrightarrow x = 7k + 2; \quad \frac{y - 3}{5} = k \Leftrightarrow y = 5k + 3.$$

Итак, решениями исходного уравнения являются пары чисел вида $x = 7k + 2$, $y = 5k + 3$, где $k \in \mathbb{Z}$. Проверим, что эти пары чисел действительно являются решениями первоначального уравнения $5x - 7y = -11$:

$$5(7k + 2) - 7(5k + 3) = -11; \quad 35 + 10 - 35k - 21 = -11; \quad -11 = -11 \text{ (истинно).}$$

Например, при $k = 0$ решениями будут уже известные нам числа $x = 2$, $y = 3$; при $k = 10$ — числа $x = 72$, $y = 53$; при $k = -100$ — числа $x = -698$, $y = -497$ и т. д. Понятно, что простым перебором, который мы использовали при решении задач 1 и 2, множество решений данного линейного уравнения получить просто невозможно, так как каждому целому числу k будет соответствовать своя пара целых x и y , удовлетворяющих исходному уравнению.

Иногда по условию задачи на x и y накладываются некоторые ограничения. В этом случае полученные зависимости x и y от k будут решениями уже не при всех целых значениях k . Поэтому для полного решения задачи из ограничений на x и y надо получить ограничения на k и найти все возможные значения k . После этого для каждого найденного значения k надо найти соответствующие значения x и y .

Например, если в рассмотренном выше уравнении значения x и y должны принадлежать промежуткам $-10 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 20$, где $x, y \in \mathbb{Z}$, то k может принимать лишь целые значения, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$-10 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq 7k + 2 \leq 10; \quad 0 \leq y \leq 20 \Leftrightarrow 0 \leq 5k + 3 \leq 20.$$

Уменьшим в первом неравенстве все его части на 2, а затем разделим их на 7. На основании известных свойств действий с числами неравенство сохранится. Аналогичные преобразования выполним со вторым неравенством:

$$-10 \leq 7k + 2 \leq 10 \Leftrightarrow -12 \leq 7k \leq 8 \Leftrightarrow -1\frac{5}{7} \leq k \leq 1\frac{1}{7} \Leftrightarrow k \in \{-1; 0; 1\};$$

$$0 \leq 5k + 3 \leq 20 \Leftrightarrow -3 \leq 5k \leq 17 \Leftrightarrow -\frac{3}{5} \leq k \leq 3\frac{2}{5} \Leftrightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Поскольку k должно удовлетворять обоим условиям одновременно, следует взять пересечение двух полученных множеств. Значит, $k \in \{0; 1\}$.

Теперь найдём значения x и y , соответствующие найденным значениям k .

Если $k = 0$, то $x = 7 \cdot 0 + 2 = 2$, $y = 5 \cdot 0 + 3 = 3$.

Если $k = 1$, то $x = 7 \cdot 1 + 2 = 9$, $y = 5 \cdot 1 + 3 = 8$.

Значит, уравнение $5x - 7y = -11$ при условии $-10 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 20$, где $x, y \in \mathbb{Z}$, имеет два решения:

$$x = 2, y = 3 \text{ и } x = 9, y = 8.$$

Обобщая рассмотренный способ поиска целых решений линейных уравнений вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм решения уравнений вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, в целых числах

1. Найти $d = \text{НОД}(|a|; |b|)$.

2. Если c не делится на d , записать, что данное уравнение не имеет решений.

3. Если c делится на d , разделить правую и левую части исходного уравнения на d :

$$ax + by = c \Leftrightarrow a_1x + b_1y = c_1,$$

где $a_1 = a : d$; $b_1 = b : d$; $c_1 = c : d$. При этом $\text{НОД}(a_1; b_1) = 1$.

4. Используя свойства делимости целых чисел, найти одно из решений x_0, y_0 уравнения $a_1x + b_1y = c_1$.

5. Записать, что $a_1x + b_1y = a_1x_0 + b_1y_0$.

6. Записать полученное уравнение в виде $\frac{x - x_0}{-b_1} = \frac{y - y_0}{a_1} = k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

7. Выразить x и y через k : $x = -b_1k + x_0$; $y = a_1k + y_0$. И, подставив полученные выражения для x и y в исходное уравнение, сделать проверку.

8. Если на x и y наложены ограничения, то определить множество значений, которые может принимать k .

9. Если множество значений k конечно, то для каждого значения k найти соответствующие значения x и y .

10. Записать ответ.

К

416

1) Ваня загадал натуральное число и сообщил своим друзьям, что загаданное им число двузначное. Если сложить его с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 44. Могут ли Ванины друзья узнать, какое число он загадал?

2) Какой метод решения уравнений был использован при решении данной задачи? В каких случаях можно использовать этот метод?

417

Решите уравнения методом проб и ошибок:

1) $x(2x + 5) = 18$, где $x \in \mathbb{N}$;

2) $x(2x - 9,5) = 70$, где $x \in \mathbb{Q}$.

Чем данные уравнения похожи и чем отличаются? Можно ли решить данные уравнения методом перебора? Где и почему возникают затруднения?

418

1) Составьте математическую модель задачи:

Катя задумала двузначное натуральное число, сумма которого с утроенной цифрой его единиц равна 74. Какое число задумала Катя?

2) Проанализируйте полученное уравнение и докажите, что его можно решить методом перебора. Как сократить перебор, используя свойства делимости? Найдите ответ на поставленный в задаче вопрос.

3) Запишите в общем виде тип уравнения, которое вы решали. Запишите алгоритм его решения, используемый вами, и сравните его с алгоритмом, приведённым на с. 89 учебника.

- 419** а) Задумали два натуральных числа. Известно, что сумма удвоенного первого числа и увеличенного в пять раз второго числа равна 49. Найдите заданные числа.
 б) Задумали два натуральных числа. Известно, что утроенное первое число равно разности между 58 и вторым числом, увеличенным в четыре раза. Найдите заданные числа.
 в) Сумма увеличенного в семь раз первого натурального числа и удвоенного второго натурального числа равна 39. Найдите эти числа.
 г) Разность между 98 и увеличенным в девять раз первым натуральным числом равна увеличенному в пять раз второму натуральному числу. Найдите эти числа.
- 420** Можно ли набрать сумму 1000 р., если имеются купюры достоинством 10 р. и 100 р. и необходимо использовать ровно:
 а) 10 купюр; б) 19 купюр; в) 27 купюр; г) 37 купюр?
- 421** На складе имеется кофе, упакованный в мешки по 20 кг и 40 кг. Отгрузка кофе происходит без вскрытия мешков.
 а) Может ли кладовщик отгрузить клиенту 140 кг кофе?
 б) Какие мешки с кофе должен отгрузить кладовщик и в каком количестве при отгрузке 260 кг, чтобы количество мешков с кофе было минимальным?
 в) Какие мешки с кофе должен отгрузить кладовщик и в каком количестве при отгрузке 380 кг, чтобы количество мешков с кофе вместимостью 40 кг было минимальным?
- 422** У продавца на рынке есть только гири весом 100 г и консервные банки весом 450 г. Как продавцу с их помощью отвесить за одно взвешивание на чашечных весах 2,5 кг сахара, используя в общей сложности наименьшее количество гирек и банок, если он ставит их на одну чашу весов?
- 423** На станцию привезли 420 тонн угля в вагонах вместимостью 15 т и 20 т. Могло ли их быть в сумме:
 а) 26; б) 20; в) 22; г) 29?
- 424** У бабушки есть стеклянные банки вместимостью 0,7 л и 0,9 л. Бабушка разливает в банки сок, заполняя все банки полностью.
 а) Сколькими способами она может разлить в эти банки 20,5 л сока и какие банки она должна при этом приготовить?
 б) Какое количество и каких банок надо заготовить, чтобы разлить 15 л сока, чтобы при этом количество всех банок было минимальным?
 в) Какое количество и каких банок надо заготовить, чтобы разлить 12 л сока, чтобы при этом количество банок по 0,9 л было минимальным?
- 425** а) Целое число даёт при делении на 5 остаток 1, а при делении на 3 – остаток 2. Найдите остаток от деления этого числа на 15.
 б) Найдите все числа, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 4 – остаток 3.
 в) Целое число при делении на 7 даёт остаток 2, а при делении на 8 – остаток 3. Найдите остаток от деления этого числа на 56.
 г) Найдите все числа, которые при делении на 4 дают остаток 2, а при делении на 9 – остаток 5.

426 У вкладчика разорившейся фирмы было более 240 её акций. Поняв, что акции уже ничего не стоят, он разорвал каждую из своих акций на 8 кусочков. Не удовлетворившись этим, он разорвал один из получившихся кусков опять на 8 кусков и рвал таким способом акции далее. Какое наименьшее число акций у него могло быть, чтобы на некотором этапе получилось 2010 кусков?

427 Мише и Маше сейчас вместе 26 лет, причём Маше в три раза меньше лет, чем будет Мише тогда, когда им вместе будет в пять раз больше лет, чем Юре сейчас. Сколько лет сейчас Юре, если ему меньше 14 лет?

428 Числа $m, n, \frac{89}{3m + 7n}$ – натуральные. Найдите все пары чисел m и n , для которых это будет верно.



429 Используя диаграммы Эйлера–Венна, определите правильность логического вывода:

а) Если некоторые функции являются прямо пропорциональными зависимостями, то некоторые прямо пропорциональные зависимости – функции.

б) Если ни одна ломаная линия не является графиком линейной функции, то ни один график линейной функции – не ломаная линия.

в) Если все уравнения вида $kx + b = 0$ – линейные и некоторые линейные уравнения не имеют решений, то некоторые уравнения вида $kx + b = 0$ не имеют решений.

г) Если все решения уравнения $|x + 5| = 3$ – отрицательные числа и некоторые отрицательные числа четные, то некоторые чётные числа не являются решениями уравнения $|x + 5| = 3$.

д) Если ни одно решение уравнения $|x - 3| = 1$ не делится на 5, а некоторые числа, кратные 5, делятся на 10, то некоторые числа, кратные 10, не являются решениями уравнения $|x - 3| = 1$.

е) Если все натуральные числа являются целыми и ни одно натуральное число не является отрицательным, то все целые числа не являются отрицательными.

430 Докажите, что:

а) число $\underbrace{77\dots779}_{1234 \text{ цифры}}$ делится на 9;

б) число $\underbrace{44\dots44264}_{2010 \text{ цифр}}$ делится на 12.

431 В числе 3 985 16□ стерли последнюю цифру. Какой могла быть эта цифра, если число делилось на:

а) 2; б) 3; в) –4; г) 5; д) –6; е) 8; ж) 9; з) –10; и) –12; к) 18?

432 а) В магазине имеются велосипеды и мотоциклы. Известно, что разность между количеством велосипедов и 20% количества мотоциклов равна 40% от суммы количества мотоциклов и 50% количества велосипедов. Чего в магазине меньше – велосипедов или мотоциклов и на сколько процентов?

б) Как изменится цена товара, если сначала её увеличили на 20%, затем уменьшили на 10%, а затем уменьшили ещё на 5%?

в) Один из множителей увеличили на 5%, а другой уменьшили на 5%. Как изменилось произведение?

г) Сторону квадрата изменили так, что его периметр сначала увеличился на 60%, а затем уменьшился на 60%. Как изменилась сторона квадрата?

433 Постройте график функции. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

- а) $f(x) = -x + 5$; $a = -2$; $b = -8$; в) $f(x) = -2,5x + 7$; $a = 4$; $b = 3$;
 б) $f(x) = 3x + 4$; $a = -4$; $b = 6$; г) $f(x) = 4,5x + 2$; $a = 2$; $b = -5$.

434 Найдите значение выражения:

- а) $\frac{a^{15} \cdot a^{36} \cdot a^{21} \cdot (a^4)^6 \cdot (3a)^8}{(3a^2)^7 \cdot (a^{56} : a^{28}) \cdot a^{34} \cdot a^{27}} - 3a^0$ при $a = 2$;
 б) $\frac{7^{56} \cdot (c^{28} : c^3) \cdot b^{27} \cdot b^{63} \cdot (bc)^{68}}{c^9 \cdot b^{34} \cdot (b^{72} : b^{53}) \cdot (b^6)^9 \cdot b^{51} \cdot (7c)^{56} \cdot c^{27}} - 2(bc)^0$ при $b = -6$, $c = 2$.

435 Прямая проходит через точки A и B . Задайте аналитически линейную функцию, графиком которой является эта прямая, и постройте её график:

- а) $A(1; 4)$, $B(-2; -23)$; в) $A(4; 5)$, $B(-2; -7)$; д) $A(0; 1)$, $B(-1; -6)$;
 б) $A(3; 26)$, $B(-4; -16)$; г) $A(1; -16)$, $B(-4; 9)$; е) $A(3; 4)$, $B(-2; 9)$.

436 Докажите, что $5^{16} - 2^{16}$ делится на 21.

Д

437 Можно ли набрать сумму 5000 р., если имеются купюры достоинством 100 р. и 500 р. и необходимо использовать ровно:

- а) 14 купюр; б) 9 купюр; в) 26 купюр; г) 35 купюр?

438 На складе имеется мука, упакованная в мешки по 30 кг и 60 кг. Отгрузка производится без вскрытия мешков.

- а) Может ли кладовщик отгрузить клиенту 210 кг муки?
 б) Какие мешки с мукой и в каком количестве при отгрузке 270 кг должен отгрузить кладовщик, чтобы количество мешков с мукой было минимальным?
 в) Какие мешки с мукой и в каком количестве при отгрузке 390 кг должен отгрузить кладовщик, чтобы количество мешков с мукой вместимостью 60 кг было минимальным?

439 У продавца на рынке есть только гири весом 200 г и 500 г. Как продавцу с их помощью отвесить на чашечных весах за одно взвешивание 4 кг конфет, используя ровно 14 гирек, если он ставит их на одну чашу весов?

440 Папа привез на дачу стеклянные банки емкостью 0,5 и 0,7 л. Мама раскладывает в эти банки варенье так, чтобы все они были полными.

- а) Сможет ли мама разложить в эти банки 12 л варенья?
 б) Какое количество и каких банок должен был привезти папа, чтобы мама могла разложить в них 25 л варенья так, чтобы количество всех банок было равно 44?
 в) Какое количество и каких банок должен был привезти папа, чтобы мама могла разложить в них 17 л варенья так, чтобы при этом количество банок было равно 30?

441 На станцию привезли 650 тонн нефти в цистернах вместимостью 20 т и 25 т. Могло ли их быть в сумме:

- а) 25; б) 29; в) 32; г) 35?

442 а) Целое число даёт при делении на 8 остаток 3, а при делении на 5 – остаток 1. Найдите остаток от деления этого числа на 40.

б) Найдите все числа, которые при делении на 9 дают остаток 2, а при делении на 7 – остаток 4.

443 Числа $k, p, \frac{19}{3k+5p}$ – натуральные. Найдите все пары чисел k и p , для которых это будет верно.

444 Докажите, что:

а) число $\underbrace{22\dots226}_{2344 \text{ цифры}}$ делится на 3;

б) число $\underbrace{55\dots554}_{1991 \text{ цифра}}$ делится на 18.

445 В числе 7 654 32□ стерли последнюю цифру. Какой могла быть эта цифра, если число делилось на:

а) 2; б) 3; в) –4; г) 5; д) –6; е) 8; ж) 9; з) –10; и) –12; к) 18?

446 а) Сторону квадрата сначала уменьшили на 40%, а затем увеличили на 40%. Как и на сколько процентов изменилась его площадь?

б) В коллекции имеются марки и значки. Известно, что разность между количеством значков и 40% количества марок равна 60% от суммы количества марок и 20% количества значков. Чего меньше в коллекции, значков или марок, и на сколько процентов?

в) Как изменится цена товара, если сначала её уменьшили на 60%, затем увеличили на 20%, а затем увеличили ещё на 50%?

г) Один из множителей уменьшили на 10%, а другой уменьшили на 30%. Как изменилось произведение?

447 Постройте график функции. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = 2x - 9$; $a = -3$; $b = -6$;

б) $f(x) = -5x + 3$; $a = 2$; $b = 4$.

448 Найдите значения выражений:

а) $\frac{a^7 \cdot a^{16} \cdot a^{32} \cdot (a^2)^8 \cdot (5a)^6}{(5a^3)^5 \cdot (a^{34} : a^{21}) \cdot a^{19} \cdot a^{29}} - a^0$ при $a = -4$;

б) $\frac{11^{43} \cdot (c^{32} : c^{26}) \cdot b^{31} \cdot b^{29} \cdot (bc)^{52}}{c^8 \cdot b^{37} \cdot (b^{53} : b^{29}) \cdot (b^3)^8 \cdot b^{27} \cdot (11c)^{43} \cdot c^6} + 6(bc)^0$ при $b = 7$, $c = -1$.

449 Прямая проходит через точки A и B . Задайте аналитически линейную функцию, графиком которой является эта прямая, и постройте её график:

а) $A(1; 5)$, $B(-1; 3)$;

б) $A(0; 4)$, $B(-2; 0)$;

в) $A(2; 4)$, $B(-1; -8)$.

450 Докажите, что любой предмет, вес которого выражается целым числом килограммов, большим 7, можно взвесить на чашечных весах, имея лишь 3-килограммовые и 5-килограммовые гири в достаточном количестве.

451 Решите уравнение $|ax + 5| = b$, где:

$$a = \left(\frac{1}{2,5 - 1} - \frac{1}{3\frac{1}{2} - 1} \right) : \frac{4}{15}; \quad b = \left(2\frac{7}{12} + 2\frac{19}{42} \right) \cdot 3 - 64,5 : 6 + 4\frac{2}{7} \cdot 2,1 + 1,3 \cdot 4\frac{1}{6} - \frac{65}{84}.$$

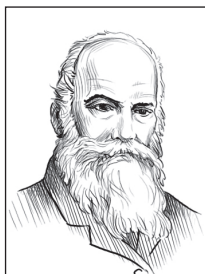
452 Докажите, что $9^{32} - 4^{32}$ делится на 65.

с 453* В ассортименте магазина имеется 40 подарочных наборов 6 различных наименований. Сможет ли покупатель купить в этом магазине 7 одинаковых подарочных наборов?

454* Наташе 12 лет, а её дедушке 60 лет. Через сколько лет дедушка станет в 4 раза старше Наташи?

§ 2. Линейные неравенства

6.2.1. Линейные неравенства и их решение



*В математике есть своя красота,
как в живописи и поэзии.*

Николай Егорович Жуковский (1847–1921),
русский учёный, создатель аэродинамики

Между двумя числами или алгебраическими выражениями могут стоять знаки $>$, $<$, $\geq$ или $\leq$. Получившиеся таким образом математические предложения называют **неравенствами**. При этом если между выражениями стоят знаки $>$ или $<$, то неравенства называют **строгими**, а если в них используются знаки $\geq$ или $\leq$, то неравенства называют **нестрогими**.

Неравенства могут быть всегда истинными или всегда ложными. Примерами таких неравенств являются верные и неверные числовые неравенства, а также неравенства, верные или неверные для любых значений входящих в них букв:

$$5 > 4 \text{ (истинно); } \quad |3a - 2b| < 0 \text{ (ложно); } \quad (a + b)^2 \geq 0 \text{ (истинно).}$$

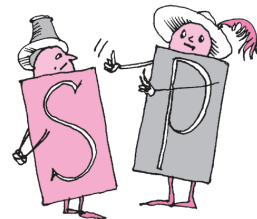
Но есть неравенства, которые при одних значениях переменных истинны, а при других – ложны. И тогда появляется необходимость найти те значения переменных, при подстановке которых неравенство превращается в истинное высказывание. Такие значения переменных называют **решениями неравенства**.

Значит, **решить неравенство** – это найти множество всех его решений либо доказать, что решений нет.

Ранее мы уже решали простейшие неравенства с помощью числовой прямой. И знаем, что решениями неравенств четырёх простейших видов $x > a$, $x < b$, $x \geq c$ и $x \leq d$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, являются следующие числовые промежутки:

Неравенство	$x > a$	$x < b$	$x \geq c$	$x \leq d$
Решение неравенства	Открытый луч $(a; +\infty)$ 	Открытый луч $(-\infty; b)$ 	Замкнутый луч $[c; +\infty)$ 	Замкнутый луч $(-\infty; d]$

А можно ли найти способы решения более сложных неравенств, аналогичные способам, используемым нами при решении уравнений? То есть можно ли с помощью *равносильных преобразований* привести исходное неравенство к одному из четырёх указанных выше простейших видов? Ведь тем самым мы укажем все значения переменной, при которых неравенство истинно. А это и будет означать, что мы решили исходное неравенство.



Прежде чем ответить на этот вопрос, уточним, что имеют в виду, когда говорят о равносильных преобразованиях неравенств.

Определение 1. Два *неравенства равносильны*, если все решения первого неравенства являются решениями второго неравенства и, наоборот, все решения второго неравенства являются решениями первого.

Например, неравенства $x + 3 > -1$ и $x + 5 > 1$ равносильны, так как оба будут верными в том и только в том случае, если $x > -4$. А неравенства $x + 3 > -2$ и $x + 5 > 1$ не являются равносильными, так как, например, при $x = -4$ первое неравенство верно, а второе – нет.

Определение 2. Преобразование неравенства называют *равносильным*, если оно приводит к неравенству, равносильному данному.

Правила равносильных преобразований неравенств основываются на известных нам свойствах чисел:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in \mathbb{Q}: \quad a > b &\Rightarrow a + c > b + c; & a > b, c > 0 &\Rightarrow ac > bc \text{ и } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}; \\ a > b &\Rightarrow a - c > b - c; & a > b, c < 0 &\Rightarrow ac < bc \text{ и } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

То есть если число a больше числа b , то при сложении и вычитании этих чисел с некоторым числом c , а также при умножении и делении их на положительное число c знак неравенства не изменится. Если же данные числа a и b умножить или разделить на отрицательное число c , знак неравенства изменится на противоположный.

Данные свойства неравенств верны и для всех других видов неравенств, строгих и нестрогих. И из них непосредственно следуют *правила равносильных преобразований неравенств*.

Правила равносильных преобразований неравенств

1. Если к обеим частям неравенства прибавить или вычесть одно и то же число, то получим неравенство, равносильное данному.
2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.
3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.
4. Слагаемое можно переносить из одной части неравенства в другую, меняя при этом его знак на противоположный (правило переноса).
5. Для преобразования неравенств можно использовать изученные свойства чисел и действий с одночленами.

Заметим, что первое, четвёртое и пятое свойства равносильных преобразований неравенств полностью совпадают с аналогичными свойствами равносильных преобразований уравнений.

Рассмотрим теперь неравенства:

$$-2x + 1 < 0; \quad 0,4x - 9 \geq 0; \quad -x > 0; \quad 5x + 2 \leq 0.$$

Общее во всех этих неравенствах то, что левая их часть является выражением вида $kx + b$, где k, b – рациональные числа. При этом в каждом из этих неравенств левая часть сравнивается с 0 с помощью знаков $>, <, \geq, \leq$. Такие неравенства называют *линейными неравенствами с одним неизвестным x* .

Определение 3. *Линейным неравенством* с одной переменной x называется неравенство вида:

$$kx + b > 0, \quad kx + b < 0, \quad kx + b \geq 0, \quad kx + b \leq 0,$$

где k, b – некоторые числа.

Решим линейное неравенство в общем виде, рассмотрев для определённости неравенство $kx + b > 0$.

Вначале перенесём слагаемое b в правую часть данного неравенства:

$$kx + b > 0 \Leftrightarrow kx > -b.$$

Для простоты рассуждений обозначим $c = -b$. Тем самым мы переходим к решению неравенства $kx > c$. Это решение будет зависеть от значений k и c . При этом возможны три случая: $k = 0$, $k > 0$ и $k < 0$.

1) Если $k = 0$, то неравенство $kx > c$ преобразуется в неравенство $0 \cdot x > c$. Тогда при неотрицательных значениях c данное неравенство не будет иметь решений, а при отрицательных – его решением будет любое число.

2) Если $k > 0$, то обе части неравенства мы можем разделить на k , сохранив знак неравенства. Получаем:

$$kx > c \Leftrightarrow x > \frac{c}{k}.$$

Значит, решениями неравенства будут все значения x из интервала $\left(\frac{c}{k}; +\infty\right)$.

3) Если $k < 0$, то обе части неравенства мы можем разделить на k , изменив знак неравенства на противоположный. Получаем:

$$kx > c \Leftrightarrow x < \frac{c}{k}.$$

Следовательно, решениями неравенства будут все значения x из интервала $\left(-\infty; \frac{c}{k}\right)$.

Таким образом, как только мы представили линейное неравенство с одной переменной x в виде $kx > c$, мы сразу можем найти его решение.

В случае если неравенство $kx \geq c$ нестрогое, то при $k \neq 0$ число $\frac{c}{k}$ также будет являться его решением. Поэтому в ответе получится не открытый, а замкнутый числовой луч $\left[\frac{c}{k}; +\infty\right)$ или $\left(-\infty; \frac{c}{k}\right]$. Если же $k = 0$, то неравенство $0 \cdot x \geq c$ будет истинно при любом $c \leq 0$ и ложно при $c > 0$.

Таким образом, все полученные результаты решения неравенств $kx > c$ и $kx \geq c$ в зависимости от значений k и c представим в следующей таблице:

Значение k	Значение c	Решения неравенства $kx > c$	Решения неравенства $kx \geq c$
$k = 0$	$c < 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c = 0$	$\emptyset$ (Нет решений)	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c > 0$	$\emptyset$ (Нет решений)	$\emptyset$ (Нет решений)
$k > 0$	c – любое	$\left(\frac{c}{k}; +\infty\right)$	$\left[\frac{c}{k}; +\infty\right)$
$k < 0$	c – любое	$\left(-\infty; \frac{c}{k}\right)$	$\left(-\infty; \frac{c}{k}\right]$

Аналогично рассуждая, можно получить следующую таблицу решений неравенств $kx < c$ и $kx \leq c$:

Значение k	Значение c	Решения неравенства $kx < c$	Решения неравенства $kx \leq c$
$k = 0$	$c < 0$	$\emptyset$ (Нет решений)	$\emptyset$ (Нет решений)
$k = 0$	$c = 0$	$\emptyset$ (Нет решений)	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c > 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$k > 0$	c – любое	$\left(-\infty; \frac{c}{k}\right)$	$\left(-\infty; \frac{c}{k}\right]$
$k < 0$	c – любое	$\left(\frac{c}{k}; +\infty\right)$	$\left[\frac{c}{k}; +\infty\right)$

В итоге мы получили все решения неравенств вида

$$kx > c, \quad kx < c, \quad kx \geq c, \quad kx \leq c,$$

где k, c – рациональные числа.

Таким образом, задача решения рассматриваемых нами в этом пункте неравенств преобразовалась в задачу приведения их с помощью равносильных преобразований к одному из четырёх указанных видов.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите неравенство $2x - 4 < 5x + 8$.

Решение:

Приведём данное неравенство к виду $kx < c$, где $k, c \in \mathbb{Q}$. Для этого слагаемые с переменной x соберём в левой части неравенства, а числа – в правой и упростим полученные выражения:

$$2x - 4 < 5x + 8 \Leftrightarrow 2x - 5x < 4 + 8 \Leftrightarrow -3x < 12.$$

Здесь $k = -3$, а $c = 12$. Разделим обе части полученного неравенства на отрицательное число (-3) , изменив при этом знак неравенства на противоположный:

$$-3x < 12 \Leftrightarrow x > -4.$$

Значит, решением нашего неравенства является открытый луч $(-4; +\infty)$.

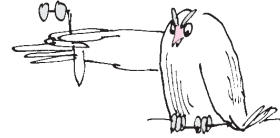
Ответ: $(-4; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $3(x + 4) - 2(x - 8) > x - 5$.

Решение:

Приведём данное неравенство к виду $kx > c$, где $k, c \in \mathbb{Q}$. При этом результаты равносильных преобразований будем записывать друг под другом:

$$\begin{aligned} 3(x + 4) - 2(x - 8) &> x - 5; \\ 3x - 12 - 2x + 16 &> x - 5; \\ 3x - 2x - x &> -5 + 12 - 16; \\ 0 \cdot x &> -9. \end{aligned}$$



Здесь $k = 0$, а $c = -9$. Неравенство $0 \cdot x > -9$ верно при любом значении x . Значит, решением исходного неравенства является вся числовая прямая.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $\frac{2x - 1}{2} \leq \frac{6 - 2x}{3}$.

Решение:

Приведём данное неравенство к виду $kx \leq c$, где $k, c \in \mathbb{Q}$, используя правила равносильных преобразований:

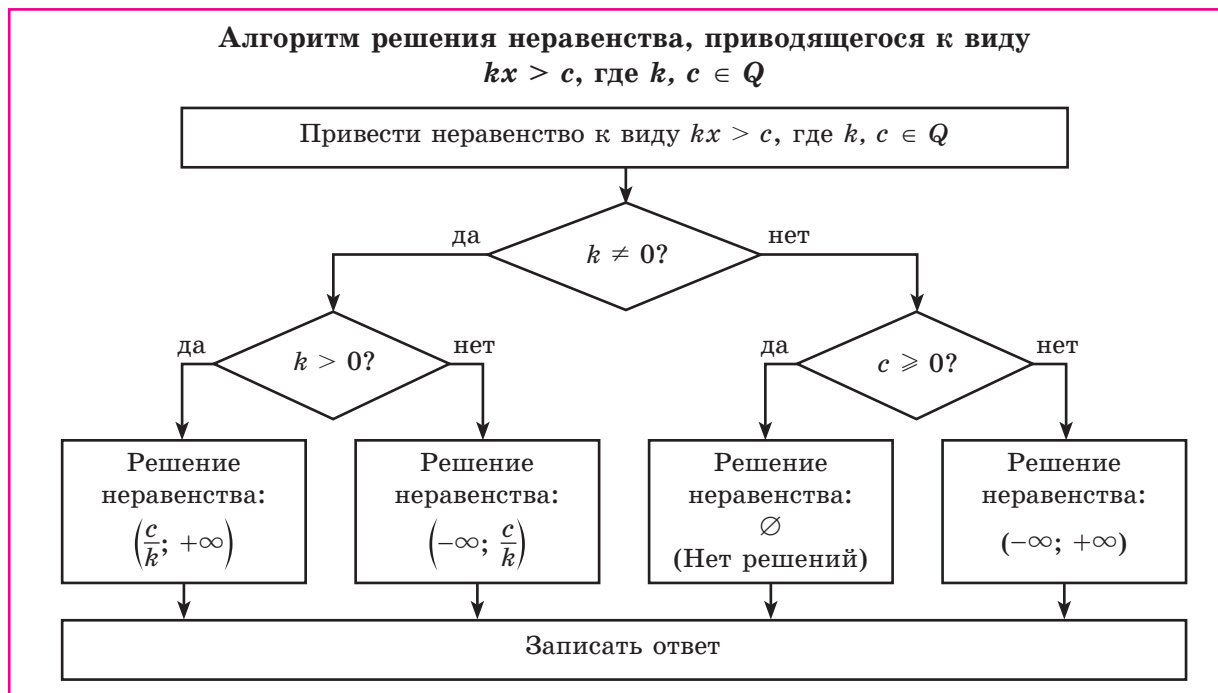
$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{2} \leq \frac{6 - 2x}{3} &\Leftrightarrow 3(2x - 1) \leq 2(6 - 2x) \Leftrightarrow 6x - 3 \leq 12 - 4x \Leftrightarrow 10x \leq 15 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \leq 1,5. \end{aligned}$$

Значит, решением исходного неравенства является замкнутый луч $(-\infty; 1,5]$.

Ответ: $(-\infty; 1,5]$.

Установленные способы решения неравенства, приводящегося к линейному, для каждого из четырёх выделенных в определении случаев можно представить в виде алгоритма.

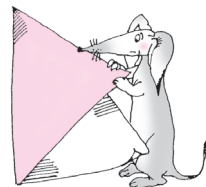
Рассмотрим пример такого алгоритма для неравенства, приводящегося к виду $kx > c$, где $k, c \in \mathbb{Q}$.



К

455 Запишите в виде неравенств следующие высказывания:

- а) сумма чисел 2 и 6 больше 5;
 б) разность квадратов чисел a и b меньше 8;
 в) квадрат суммы чисел c и d больше или равен 25;
 г) разность кубов чисел x и y меньше или равна 32.

**456** Найдите верные высказывания:

- а) $a > a$; в) $a > b \Leftrightarrow b < a$; д) $a > b \Leftrightarrow b \leq a$; ж) $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;
 б) $a \geq a$; г) $a > b \Leftrightarrow b > a$; е) $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$; з) $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

457 Известно, что $a > b, c \leq b$. Используя свойства неравенств, запишите ещё четыре различных неравенства.**458** На числовой прямой Ox изобразите указанные промежутки и запишите их обозначения:

- а) $x < 4$; в) $x \geq 3$; д) $-5 \leq x \leq -2$; ж) $-9 \leq x < -6$;
 б) $x > -5$; г) $x \leq -2$; е) $3 < x < 7$; з) $-2 < x \leq 6$.

459 Изменится ли знак неравенства $2 < 5$, если в левой и правой его частях выполнить следующие преобразования:

- а) прибавить число (-1) ; в) умножить на число 3;
 б) вычесть число 4; г) разделить на число (-2) ?

Запишите полученное неравенство и проверьте свои предположения с помощью вычислений.

460 1) Найдите множества решений неравенств:

$$x \geq 2; \quad x + 3 \geq 5; \quad x - 2 \geq 0; \quad 7x \geq 14; \quad -2x \leq -4; \quad x : 2 \geq 1; \quad -\frac{x}{3} \leq -\frac{2}{3}.$$

Что вы замечаете? Являются ли данные неравенства равносильными?

2) Предложите свои варианты определения понятий «равносильные неравенства» и «равносильное преобразование неравенства». Сравните свои определения с определениями, приведёнными на с. 98 учебника.

3) Проанализируйте преобразования, выполненные вами при решении данных неравенств, и сформулируйте правила равносильных преобразований неравенств. Сравните их с правилами преобразований, приведёнными на с. 98–99 учебника.

461 Равносильны ли неравенства:

- а) $x - 1 < 3$ и $x < 4$; д) $5a < 20$ и $-a > -4$;
 б) $y + 1 > 6$ и $y > 7$; е) $2 - 6b < 5$ и $6b - 2 \leq -5$;
 в) $z < 8$ и $-z > -8$; ж) $8c - 6 > 10$ и $4c > 8$;
 г) $t > 0$ и $4t > 0$; з) $-5d + 7 < -8$ и $-3d < -3$?

**462** Используя правила равносильных преобразований, докажите, что все приведённые ниже неравенства равносильны между собой:

$$x^2 - 5 > x^2 - 2x + 3; \quad -5 > -2x + 3; \quad -2x + 3 < -5; \quad -2x < -8; \quad x > 4.$$

463 Составьте по три неравенства, множеством решений которых служит числовой промежуток:

- а) $(4; +\infty)$; б) $[-2; +\infty)$; в) $(-\infty; -5)$; г) $(-\infty; 6]$.

464 Решите неравенство, пользуясь правилами равносильных преобразований:

- а) $7x < -28$; ж) $4a - 2 > -10$; н) $-3n + 5 > -10n - 9$;
 б) $3y > 36$; з) $10b + 7 < 8$; о) $6p - 2 \leq 8p + 11$;
 в) $-5z \leq -45$; и) $6 \leq 4 - 3c$; п) $11q + 7 \geq 9q + 13$;
 г) $-9p > 63$; к) $12 \geq 5d - 9$; р) $-7r - 9 > 6r + 17$;
 д) $-\frac{5}{6} < -3q$; л) $-12k + 4 > -5$; с) $8s + 7 < -12s - 33$;
 е) $\frac{4}{3}r \geq -32$; м) $7 - 5m \leq -16$; т) $-12t - 4 \leq -9t + 26$.

465 1) Является ли число 1,5 решением неравенства $4x + 3 > 9$? Найдите два решения этого неравенства, большие 1,5. Существуют ли решения этого неравенства, меньшие 1,5?

2) Является ли число -6 решением неравенства $3x - 6 \leq -24$? Найдите два решения этого неравенства, меньшие -6 . Существуют ли решения этого неравенства, большие -6 ?

466 Известно, что $a > 7$. Докажите, что:

- а) $-6a < -42$; в) $3a - 2 > 19$; д) $9 - 4a < 5a - 54$;
 б) $\frac{a}{2} > 3,5$; г) $3 - \frac{a}{4} < \frac{5}{4}$; е) $\frac{3a}{7} - 3 > 11 - \frac{11a}{7}$.

Какие правила равносильных преобразований неравенств вы использовали при доказательстве каждого из утверждений?

467 Решите неравенство $9x + 5 \geq 6x - 11$. Является ли решением этого неравенства число:

- а) -7 ; б) -6 ; в) -5 ; г) $-5\frac{1}{3}$; д) 0 ; е) 5 ; ж) $5\frac{1}{3}$?

468 Решите неравенство:

- а) $0 \cdot x > 5$; в) $0 \cdot z \geq -3$; д) $0 \cdot p < -9$; ж) $0 \cdot r \leq 6$;
 б) $0 \cdot y > -7$; г) $0 \cdot t \geq 8$; е) $0 \cdot q < 11$; з) $0 \cdot s \leq -15$.

469 1) По аналогии с определением линейного уравнения с одной переменной, дайте определение линейного неравенства с одной переменной. Сравните его с определением, приведённым на с. 99 учебника.

2) Решите в общем виде неравенство:

- а) $kx > c$; б) $kx \geq c$; в) $kx < c$; г) $kx \leq c$.

Представьте полученные результаты в таблице в зависимости от значений k и c .

Значение k	Значение c	Решения неравенства			
		$kx > c$	$kx \geq c$	$kx < c$	$kx \leq c$
$k = 0$	$c < 0$				
$k = 0$	$c = 0$				
$k = 0$	$c > 0$				
$k > 0$	c – любое				
$k < 0$	c – любое				

Сравните свою таблицу с таблицами, приведёнными на с. 100 учебника.

470 Решите неравенство и изобразите множество его решений на числовой прямой Ox :

- а) $8x - 3,6 < 4,4$; в) $3x + 16 \geq -5$; д) $7x + 12 \geq 9x - 14$;
 б) $9 - 4x > -7$; г) $-5x - 14 \leq -19$; е) $6 - 8x < -12 - 11x$.

471 Предложите свой алгоритм решения неравенства, приводящегося к виду $kx > c$, где $k, c \in \mathbb{Q}$. Сравните его с алгоритмом, предложенным в учебнике на с. 101.

472 При каких значениях переменной истинно неравенство?

- а) $8x + 23 - 2x > 10 - 6x - 17$; ж) $4x - (32 + 6x - 16) + 3x \leq -10$;
 б) $15x + 3 - 17x \leq 7 - 5x - 19$; з) $9x - 37 - (4x - 25) > 11$;
 в) $30 > 3x - x + 8x + 7x - 2x$; и) $7x - (6 - 5x) \geq 4 - (3x - 2) - x$;
 г) $5x + 8 \leq 6x + 12 + 3x + 2$; к) $12x - (9 + 8x) \leq 5 + (4x + 2)$;
 д) $4x + 18 + 7x < 17 + 11x - 8 + 10$; л) $11x + (12 - 3x) < 14x + 13 - (6x + 4)$;
 е) $16 - 9x - 23 + 7x \leq 22 - 2x - 34$; м) $7 - (4x + 9) + 5x < (15 - 3x) + (x + 7)$.

473 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $3a - 7$ больше 11;
 б) значение выражения $12 - 2b$ меньше 8;
 в) значение выражения $9c - 5$ больше или равно значению выражения $6c + 4$;
 г) сумма значений выражений $4d + 3$ и $2 - 9d$ не больше 2;
 д) разность значений выражений $2x + 4$ и $x + 3$ меньше 15;
 е) значение выражения $11z - 4$ больше утроенного значения выражения $2z + 3$;
 ж) удвоенное значение выражения $7 - y$ не меньше значения выражения $5y + 3$;
 з) удвоенное значение выражения $3t - 5$ меньше или равно утроенному значению выражения $5 - 6t$?

474 Решите неравенство:

- а) $2x - 3(5 - x) > 3$; ж) $2,5a - 4(2a + 1,5) + 0,35 > 4,6(a + 1) - 6a$;
 б) $4(6y - 1) < 19 + 3(8y - 9)$; з) $2,2(2b - 1) - 1,6 \geq 3,1(3 + b) + 4,3(b + 2) - 2,7$;
 в) $7(3 + 5z) + 6 \geq 2(3z - 7) - 17$; и) $1,2(c - 4) - 0,5 < 0,2(2c - 27) - 0,6c + 1,4c$;
 г) $8s - 2(2 - 7s) > 5(4s + 3) + 3s$; к) $5,7d + 8(0,9 - 0,1d) > 3 - 1,3(6 - 3d)$;
 д) $-6(3t - 7) + 13t < 5(9 - 3t) + 10t$; л) $7,3p - 7(0,6p - 1) + 1,3 \leq -10,5 - 11,9(p - 2)$;
 е) $5r - 3(4r - 2) + 7r > -4(2 - 3r)$; м) $-(2,5r + 1) - 3(2,3r - 2) \geq -2(4,7r - 1,2)$.

475 Докажите, что данное неравенство не имеет решений:

- а) $5(x + 1) + 6(x + 2) > 11(x + 2)$; в) $7(3z + 6) + 5(z - 3) - 13(2z + 3) \geq 0$;
 б) $6(y - 1) + 3(8 - y) \leq 3(y + 2)$; г) $4(5t + 2) - 2(5t + 2) - 10(t - 4) < 0$.

476 Докажите, что неравенство верно при всех значениях переменной:

- а) $5(x + 1) - x + 10 > 2 - 4(x - 3) + 8x$; г) $3 - 4(a - 2) - 5a + 4 \geq 5 - 3(a - 3) - 6a$;
 б) $12 - 6(y + 2) + 5y + 9 < 6y - 7(y - 3)$; д) $-2(b + 8) + 6b + 8 \leq 3 - 7b - 9 + 11b$;
 в) $7z + 5 - 4(z + 5) \leq -1 - 2(z - 7) + 5z$; е) $9c - 6 + 3c + 7 > 2(5 - 6c) - 15 + 24c$.

477 При каких значениях переменной значение выражения:

- а) $9x - 45$ положительно; д) $3(c - 4) - (-5c + 4)$ отрицательно;
 б) $5y + 38$ отрицательно; е) $4(8 - m) + 3(6 - 2m)$ неотрицательно;
 в) $5 - 4a$ неположительно; ж) $-5(3n - 1) - 7(3 - n)$ неположительно;
 г) $7b + 28$ неотрицательно; з) $2(-2p + 3) - 5(4 - p) + 6p$ положительно?

478 Укажите, если это возможно:

- а) наибольшее решение неравенства $2x - 7 + 9x \leq 4x - 5 + 3x$;
 б) наименьшее решение неравенства $5 - 9y + 6 + 15y > 4y - 12 - 2y$;
 в) наибольшее решение неравенства $3 + 4z - 11 + 6z < 2z - 9 + z$;
 г) наименьшее решение неравенства $5t - 3t + 7 + 13t \geq 8t - 16 - 7t + 6t$;
 д) наибольшее целое решение неравенства $18 - 3p + 9 - 19p > 8p - 7 - 9p$;
 е) наименьшее целое решение неравенства $9 - 2q - 12 + 17q > 9q - 11 + 3q$.

479 Докажите, что:

- а) неравенство $6x > 6(x + 3)$ не имеет корней;
 б) решением неравенства $11y - 5 < 9(y + 1) + 2y$ является любое число;
 в) число $\frac{1}{3}$ является решением неравенства $2z - 5(2 - z) \leq 2(4z - 3) - 5z$;
 г) число (-1) является решением неравенства $4(3t + 1) - 7t > 15 - 9(t + 3)$;
 д) число 6 не является решением неравенства $4a - 7(3 - a) - 6 \geq 3a - 2(7 - 3a)$;
 е) число (-5) не является решением неравенства $16 - 3(b + 2) + 6b < 11b + 5(1 - b)$.

480 Решите неравенство:

- а) $\frac{x}{7} + 4 > 3$; д) $\frac{r}{2} + 2 < \frac{r}{3} - 6$; и) $\frac{3x - 2}{2} > \frac{6x + 1}{3}$; н) $\frac{x + 2}{7} - 1 \leq \frac{2x + 1}{6}$;
 б) $\frac{y}{4} - 5 < 9$; е) $4 - \frac{s}{4} \geq \frac{s}{5} + 7$; к) $\frac{2 - 8y}{5} < \frac{9 + y}{4}$; о) $\frac{y - 2}{6} + 1 > \frac{y + 1}{5}$;
 в) $-\frac{z}{2} + 3 \leq 5$; ж) $\frac{p}{6} - 3 \leq -\frac{p}{9} + 4$; л) $\frac{5 - z}{-2} \leq \frac{8 - 3z}{5}$; п) $1 - \frac{z - 3}{7} < \frac{2 + z}{4}$;
 г) $6 - \frac{t}{3} \geq -4$; з) $3 - \frac{q}{4} > -\frac{q}{7} - 2$; м) $\frac{4t + 7}{-4} \geq \frac{10 + t}{-9}$; р) $\frac{3 - 7t}{-8} \leq 1 - \frac{7 - 3t}{-5}$.

481 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $\frac{2x - 5}{2}$ меньше значения выражения $\frac{7 + 3x}{3}$;
 б) значение выражения $\frac{3 + 4y}{6}$ меньше или равно значению выражения $\frac{11 - 2y}{4}$;
 в) значение выражения $\frac{9x - 11}{8} + 3$ больше или равно значению выражения $5 - \frac{4 - 7x}{5}$;
 г) значение выражения $2 + \frac{2 - 3t}{7}$ больше значения выражения $\frac{6t + 5}{2} + 3$?

482 Запишите три неравенства, решением которых является число c :

- а) $c = 4$; б) $c = -5$; в) $c = 2,3$; г) $c = -3,5$.

483 Запишите три неравенства, равносильных неравенству $4x - 3 < 2y + 1$.

484 Известно, что $5a + 4 \geq 16b - 11$. Докажите, что:

- а) $a \geq 3,2b - 3$; в) $-1,6b \geq -\frac{a}{2} - 1,5$; д) $\frac{a}{3} - 1 \geq \frac{16b}{15} - 2$;
 б) $7,5a + 22,5 \geq 24b$; г) $-a + 1,4 \leq 4,4 - 3,2b$; е) $\frac{15a}{7} + \frac{3-6b}{7} \geq 6b - 6$.

485 Найдите все значения a , при которых неравенство $2a + 5x < 7x - 6$ истинно при:

- а) $x = 3$; б) $x = -1$; в) $x = 0$; г) $x = 8$.

486 Имеет ли неравенство решения при указанном значении a ?

- а) $5x - a > 2(3x - 2)$, $a = 5$; г) $5(t + 3) - 3a \leq 5t + 2$, $a = -7$;
 б) $2y + 3a < 2y + 7$, $a = -3$; д) $9r - a > 7(r - 4) + 2r$, $a = -4$;
 в) $4(z - 7) < 4z + 3a$, $a = -10$; е) $8(s - 7) - 4s \geq 4s + 7a$, $a = 6$.

487 Решите неравенство:

- а) $4(x + 5) > 28(x - 9)$; г) $-14(3t + 12) \leq 49(6 - 7t)$;
 б) $8(y - 5) < 24(7 - y)$; д) $-18(6a - 15) \geq -63(7 - 3a)$;
 в) $6(48 - 2z) > -48(3 - z)$; е) $15(21 - 4b) \leq 60(11 - 5b)$.

488 а) Длина одной стороны прямоугольника на 8 см больше длины другой. Какой может быть длина большей стороны, если периметр этого прямоугольника меньше 32 см?

б) Длина прямоугольника равна 5 см. Какой должна быть ширина этого прямоугольника, чтобы периметр прямоугольника был меньше 18 см?

в) От дома Вани до школы более 1,6 км. С какой средней скоростью должен идти Ваня, чтобы дойти до школы за 24 минуты?

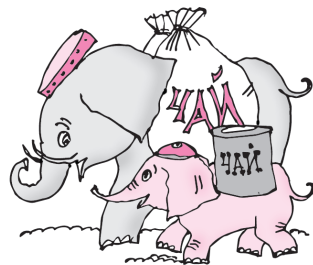
г) Коля и Наташа проплыли в лодке 10 км. При этом часть маршрута они проплыли по течению реки, а оставшуюся часть – против течения реки. Собственная скорость лодки равна 7 км/ч, а скорость течения реки равна 2 км/ч. Сколько километров проплыли Коля с Наташей по течению реки, если на всю дорогу они потратили менее 1,5 часа?

д) Плата за аренду офиса состоит из первоначального взноса и платы за каждый день аренды. На сколько полных дней можно арендовать помещение и заплатить при этом менее 15 000 р., если первоначальный взнос составляет 8000 р., а плата за каждый день аренды составляет 800 р.?

е) Какое количество целых мешков с чаем можно перевезти за один раз на машине грузоподъемностью 3,5 тонны, если масса каждого мешка равна 60 кг?

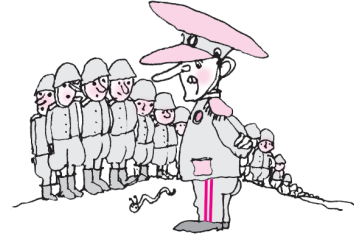
489 Найдите все неотрицательные решения неравенства:

- а) $\frac{x}{2} + 6 > \frac{x}{5} - 7$; в) $9 - 5z - \frac{2z}{5} < 6 - \frac{3z}{4} - 4z$;
 б) $3y - \frac{y}{4} < \frac{y}{7} + 5$; г) $4t + 12 + \frac{3t}{4} > -\frac{7t}{8} - 8t$.



490 Определите знак числа a , если:

- а) $a - 5 \leq b - 5$ и $b < -7$;
 в) $7 - c + 4 < a - 10$ и $c < 19$;
 б) $3a + 4 > 3c - 8$ и $c > 5$;
 г) $4 - a - 9 \geq c + 6$ и $c > -10$.



491 При каких значениях переменной истинно неравенство:

- а) $\frac{3a+2}{7} - 2a > \frac{4a-9}{-4}$; д) $a \leq \frac{a-2}{3} + \frac{3a-4}{5} - \frac{4a-3}{6}$;
 б) $3b - \frac{b-9}{-6} < \frac{5-2b}{4}$; е) $\frac{b-4}{2} + \frac{b-2}{3} - \frac{b-1}{4} \geq \frac{b+3}{6}$;
 в) $\frac{6c-5}{4} \leq 5c - \frac{7c-11}{3}$; ж) $\frac{3c-7}{10} - \frac{8-9c}{14} < \frac{6c+4}{5} - \frac{3-2c}{7}$;
 г) $\frac{d+6}{5} - \frac{3d-11}{4} \geq d$; з) $\frac{6d-2}{3} - \frac{2(d+1)}{5} > \frac{4(d+5)}{2}$.

492 Решите неравенство:

- а) $\frac{m}{2} - \frac{m}{4} - \frac{m}{6} - \frac{m}{8} < 9$; д) $x + \frac{1 - \frac{4x}{3}}{5} - \frac{3 - \frac{6x}{5}}{3} \geq 4$;
 б) $2n - \frac{4n}{5} + 7 > \frac{2n}{3} + 9 - \frac{5n}{6} + \frac{3n}{4} + \frac{1}{20}$; е) $3y + 4 - \frac{2y - \frac{4-3y}{2}}{4} < \frac{5y - \frac{y-3}{4}}{2}$;
 в) $\left(3p + \frac{3p}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(2p + \frac{2p}{3}\right) \cdot 8 \leq 7$; ж) $4z - \frac{\frac{z}{2} - \frac{3+z}{4}}{2} > 5 - \frac{0,5\left(1 - \frac{6-z}{2}\right)}{2}$;
 г) $\left(4q - \frac{3q}{8}\right) \cdot \frac{8}{5} - \left(3q - \frac{2q}{7}\right) \cdot 7 \geq 12$; з) $6 - \frac{t - \frac{1+t}{5}}{2} \leq \frac{t}{10} - \frac{2t - \frac{9-7t}{2}}{5}$.

493 Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

- а) $7 - \frac{x}{3} > \frac{2x}{9} + 9$; $x \in (-11; 4)$; в) $4 + 3z - \frac{7z}{4} < \frac{3z}{2} - 2z$; $z \in [-9; -1]$;
 б) $5y + \frac{2y}{5} < 4 + \frac{5y}{3}$; $y \in [-2; 7]$; г) $7 - \frac{2t}{3} > -\frac{3t}{4} - 2t$; $t \in (-3; 7]$.

494 Найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству:

- а) $x + a < 5$; д) $6x + d > 12$; и) $x < \frac{x}{a} - b$;
 б) $3 - x > b + 4$; е) $3x - c < a + 8x$; к) $x + a > \frac{x}{b}$;
 в) $x - c \leq 3$; ж) $9x + 3a < 6x - 6c$; л) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} < c$;
 г) $x + a \geq b + 7$; з) $8c - 4x > 5a - 7x$; м) $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} > d$.

π

495 Сравните значения числовых выражений:

- а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ и $\frac{7}{8}$; б) $\frac{5}{9} - \frac{1}{3}$ и $\frac{4}{9}$; в) $1 - \frac{11}{12}$ и $\frac{13}{12} - 1$; г) $\frac{5}{6} - \frac{6}{7}$ и $\frac{7}{8} - \frac{8}{9}$.

496

Какие высказывания являются общими, а какие – высказываниями о существовании? Докажите истинные высказывания, а для ложных высказываний постройте их отрицание и убедитесь в истинности отрицаний.

- а) Все элементы множества $\{-2; 0; 4; 5; 9\}$ являются решениями неравенства $x + 4 \geq 0$.
- б) Все решения неравенства $x + 4 \geq 0$ являются элементами множества $\{-2; 0; 4; 5; 9\}$.
- в) Неравенство $2y + 7 < 15$ имеет натуральные решения.
- г) Все решения неравенства $2y + 7 < 15$ – натуральные числа.
- д) Некоторые положительные числа являются решениями неравенства $6a + 4 > 0$.
- е) Все положительные числа являются решениями неравенства $6a + 4 > 0$.

497

Приведите дроби к общему знаменателю:

- а) $\frac{5}{1391}$ и $\frac{7}{2033}$;
- б) $\frac{3}{2921}$ и $\frac{4}{3683}$;
- в) $\frac{7}{5215}$ и $\frac{2}{19817}$.

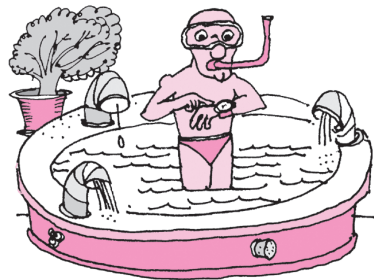
498

а) Строительная компания получила заказ на облицовку здания декоративной плиткой. Первая бригада может выполнить этот заказ за 75 рабочих дней, а вторая может выполнить 20% заказа за 12 рабочих дней. Сколько рабочих дней потребуется этим двум бригадам для выполнения всего заказа, если они будут работать вместе с указанной производительностью?

б) На шоколадной фабрике имеются 18 фасовочных линий, работающих с одинаковой производительностью. Они выполняют дневное производственное задание за 14 часов. Сколько нужно добавить фасовочных линий, чтобы выполнить эту же работу за 9 часов?

в) Для наполнения бассейна используются три трубы. Через первую трубу пустой бассейн наполняется за 27 часов, через вторую – за 18 часов, а через третью – за 54 часа. За какое минимальное время можно наполнить этот пустой бассейн?

г) На заводе по производству мороженого работают 420 рабочих. Профсоюз рабочих принял решение сократить рабочий день с 8 часов до 6 часов. Сколько рабочих необходимо будет принять на завод для того, чтобы сохранить неизменным ежедневный выпуск продукции, считая, что все рабочие работают с одинаковой производительностью?



499

Постройте график кусочно-линейной функции. Определите по графику, при каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля.

$$а) \quad y = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \geq 1; \\ 3, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -3x, & \text{если } x < -1; \end{cases}$$

$$в) \quad y = \begin{cases} 6x - 5, & \text{если } x \geq 2; \\ x + 5, & \text{если } -2 \leq x < 2; \\ 7 + 2x, & \text{если } x < -2; \end{cases}$$

$$б) \quad y = \begin{cases} 4x + 5, & \text{если } x \geq 0; \\ 5, & \text{если } -1 \leq x < 0; \\ x + 6, & \text{если } x < -1; \end{cases}$$

$$г) \quad y = \begin{cases} -2x + 5, & \text{если } x \geq 3; \\ x - 4, & \text{если } 0 \leq x < 3; \\ -3x - 4, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

500 В первые пять дней месяца дорожная бригада отремонтировала дорогу со скоростью 5 км в день. Затем, получив дополнительное оборудование, она в течение 10 дней ремонтировала 15 км в день. После этого в течение 5 дней бригада не работала. В последующие 10 дней бригада ремонтировала дорогу со скоростью 12 км в день. Запишите формулу зависимости длины отремонтированной дороги s (в км) от времени работы бригады t (в днях) и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ost .



501 Найдите сумму многочленов P , Q и R :

$$\begin{aligned} \text{а) } P &= 4a^2 - (9a^2 + 3c), & \text{б) } P &= x^3 + 3xy + 2y^3 - (3x^3 - 2xy + 5y^3), \\ Q &= 7c - (10a^2 + 5c), & Q &= 3x^3 - 5xy - 3y^3 - (5x^3 + 7xy + 4y^3), \\ R &= 5a^2 - (2c - 4a^2); & R &= -4x^3 - 5xy - 2y^3 - (3x^3 - 7xy - 6y^3). \end{aligned}$$

502 Разложите на множители:

$$\begin{aligned} \text{а) } x^7 + x^5 + x^2 + 1; & \quad \text{г) } x^2y^4z^2 - x^2y^2z^4 + x^4y^2z^2 - x^4z^4; \\ \text{б) } y^3 + 27 + 7y^2 + 21y; & \quad \text{д) } (p^2 + 3pq + 4q^2)^2 - (p^2 + 4q^2)^2; \\ \text{в) } a^2b^4 + a^2bc^3 - a^2b^3c - a^2c^4; & \quad \text{е) } (7n^2 - 4n^3 + 3n^6)^2 - (3n^6 - 3n^3)^2. \end{aligned}$$

503 Найдите наибольший общий делитель чисел:

$$\begin{aligned} \text{а) } 3n \text{ и } 3n + 3 \ (n \in \mathbb{Z}); & \quad \text{в) } 24n + 18 \text{ и } 24n + 12 \ (n \in \mathbb{Z}); \\ \text{б) } 6n \text{ и } 6n + 2 \ (n \in \mathbb{Z}); & \quad \text{г) } 7n \text{ и } 14n + 7 \ (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

504 Постройте график функции $y = f(x)$. Определите по графику, при каких значениях x значение y больше нуля, равно нулю, меньше нуля.

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= |x + 3| - |x - 4|; & \text{в) } f(x) &= -|7 - x| - |x - 3|; \\ \text{б) } f(x) &= |x - 5| + |6 - x|; & \text{г) } f(x) &= |x + 4| - |8 - x|. \end{aligned}$$

505 Разложите на множители:

$$\begin{aligned} \text{а) } xy(x - y) - xz(x - z) - yz(z - y); & \quad \text{в) } m^2(n - k) - n^2(m - k) + k^2(m - n); \\ \text{б) } ab(a + b) + ac(a - c) - bc(b + c); & \quad \text{г) } p^3(q - r) + q^3(r - p) + r^3(p - q). \end{aligned}$$

Д

506 Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } 4x &< -32; & \text{д) } 3a - 4 &\geq -13; & \text{и) } -5m + 3 &> -9m - 17; \\ \text{б) } 7y &> 28; & \text{е) } 8b + 5 &< 21; & \text{к) } 8n - 6 &\leq 9n + 14; \\ \text{в) } -\frac{3}{5} &\leq -6z; & \text{ж) } -14c + 9 &> -47; & \text{л) } 5p + 10 &\geq -9p - 18; \\ \text{г) } \frac{2}{3}t &\geq -24; & \text{з) } 9 - 5d &\leq -26; & \text{м) } -6q - 5 &< -8q + 11. \end{aligned}$$

507 Равносильны ли неравенства?

$$\begin{aligned} \text{а) } x - 5 &< -2 \text{ и } x < 3; & \text{в) } 3a < 27 \text{ и } -a > -9; \\ \text{б) } 2y &> 12 \text{ и } -y > -6; & \text{г) } 12b - 15 < 21 \text{ и } -4b > 12. \end{aligned}$$

508

Является ли число:

а) 2,4 решением неравенства $7x - 2 > 19$? Найдите два решения этого неравенства, большие 2,4. Существуют ли решения этого неравенства, меньшие 2,4?б) $-3,5$ решением неравенства $4x + 17 \leq 3$? Найдите два решения этого неравенства, меньшие $-3,5$. Существуют ли решения этого неравенства, большие $-3,5$?

509

Решите неравенство и изобразите множество его решений на числовой прямой Ox :

а) $9x - 7,8 < 10,2$;

в) $-2x - 33 > 8x - 28$;

б) $9,3 - 4x \leq -14,7$;

г) $12x + 26 \leq 3x - 1$.

510

При каких значениях переменной истинно неравенство?

а) $8x + 12 - 3x < 16 - 7x - 8$;

д) $8x - 7(3 + x) + 26 + 4x \leq -18$;

б) $5x + 3 - 11x \geq 9 - 3x - 4$;

е) $11(x - 2) - 8x + 24 > 29$;

в) $27 > 4x - 3x + 9x + 5x - 12x$;

ж) $x - 15 + 7x \geq 1 - 5x + 7(2 - x)$;

г) $6x + 14 \leq 3x + 17 + 9x + 8$;

з) $3(5x - 7) + 4x < 8(4 - x) + 28$.

511

При каких значениях переменной:

а) значение выражения $4a - 9$ больше 5;б) значение выражения $14 - 3b$ меньше 11;в) значение выражения $6c - 8$ больше или равно значению выражения $3c + 9$;г) сумма значений выражений $5d + 2$ и $7 - 11d$ меньше или равна -6 ;д) разность значений выражений $9x + 8$ и $5x + 7$ не меньше 12?

512

Решите неравенство:

а) $3x - 4(7 - x) > 7$;

г) $3,6a + 6(a + 1,4) > 5,3a + 11,4 - 7,7a$;

б) $5(3y - 2) - 9 < 15 - 2(3y - 11)$;

д) $5,8(b - 2) \geq 9,2(1 + b) + 6(1,1b + 0,7)$;

в) $6(2 + 7z) + 12 \geq 4(5z - 9) - 17$;

е) $3,4(2c - 1) \leq 5,7c - 4(c + 3,1) + 4,1c$.

513

Докажите, что:

а) неравенство $7x < 7(x - 5)$ не имеет корней;б) решением неравенства $6y + 12 > 9y + 3(2 - y)$ является любое число;в) число $-\frac{1}{4}$ является решением неравенства $5z - 6(1 - z) \leq 9z - 2(3,5 + z)$;г) число 3 не является решением неравенства $3(6 - a) + 9 + 4a < 3(a + 3) + 2(a - 1)$.

514

Докажите, что неравенство верно при всех значениях переменной:

а) $6(x + 9) - 3x + 12 > 5 - 5(x - 6) + 8x$; б) $8 - 9(y - 2) - 4y + 4 \leq 9 - 5(y - 8) - 8y$.

515

Докажите, что данное неравенство не имеет решений:

а) $7(x + 9) + 2(x + 8) < 9(x + 5)$; б) $4(2z + 3) + 6(z - 7) - 7(2z - 4) \geq 0$.

516

Решите неравенство:

а) $\frac{x}{-9} + 5 > 7$;

в) $12 - \frac{t}{2} \geq -3$;

д) $\frac{p}{2} - 6 \leq -\frac{p}{5} + 4$;

б) $-\frac{z}{4} + 2 \leq -8$;

г) $\frac{r}{4} + 5 < \frac{r}{6} - 7$;

е) $9 - \frac{q}{3} < -\frac{q}{8} - 11$.

517 Решите неравенство:

а) $\frac{4x-3}{4} > \frac{2x+3}{5};$

в) $\frac{2x+5}{2} - 7 \leq \frac{3x+7}{3} - 12;$

б) $\frac{1-3y}{3} < \frac{8+7y}{-4};$

г) $\frac{3y-6}{7} - 15 \geq \frac{2y+5}{-4} - 16.$

518 Имеет ли неравенство решения при указанном значении a ?

а) $7x - a > 2(4x - 3), a = 2;$

в) $6(2t + 4) - 2a \leq 12t + 12, a = -5;$

б) $3(2z - 4) < 6z + 2a, a = -3;$

г) $9(s - 3) - 5s \geq 4s + 3a, a = 4.$

519 Решите неравенство:

а) $7(2x + 6) > 35(3x - 4);$

в) $72(5t + 3) \leq -24(16 - 9t);$

б) $9(3y - 7) < -3(12 - 5y);$

г) $-25(7a - 5) \geq -40(2 - 4a).$

520 а) Длина одной стороны прямоугольника на 3 см больше длины другой. Какой может быть длина большей стороны, если периметр прямоугольника меньше 24 см?

б) От офиса компании до склада менее 27 км. Сколько времени понадобится для того, чтобы проехать на автомобиле от офиса до склада, если средняя скорость движения равна 36 км/ч?

в) Сколько мешков с картошкой можно разместить на складе вместимостью 50 тонн, если масса каждого мешка 28 кг?

521 При каких значениях переменной истинно неравенство?

а) $\frac{4a+7}{3} - 5a > \frac{3a-11}{2};$

в) $5a \geq \frac{2a-1}{3} + \frac{3a-1}{4} + \frac{4a-1}{5} + 2;$

б) $3b - \frac{b-3}{4} < \frac{8-b}{5};$

г) $\frac{b+3}{7} + \frac{b+4}{5} - \frac{b+5}{3} \leq \frac{b-7}{21}.$

522 Найдите все неположительные решения неравенства:

а) $\frac{3x}{4} + 6 > \frac{2x}{7} + 9;$

б) $11 - 6z + \frac{4z}{9} > 9 - \frac{7z}{3} - 2z.$

523 Решите неравенство:

а) $\frac{m}{5} - \frac{m}{4} - \frac{m}{3} - \frac{m}{2} < 53;$

в) $3x + \frac{2 - \frac{7x}{6}}{4} - \frac{4 - \frac{5x}{4}}{6} \geq 5;$

б) $\left(5q - \frac{5q}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} + \left(6q - \frac{6q}{11}\right) \cdot 11 \leq 5;$

г) $7 - \frac{3t - \frac{4+t}{3}}{5} < \frac{5t}{3} - \frac{2t - \frac{11-4t}{5}}{3}.$

524 Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

а) $9 - \frac{x}{4} > \frac{3x}{8} + 11$, где $x \in (-15; 2);$

б) $5 + 8z - \frac{9z}{5} < \frac{5z}{4} + 7z$, где $z \in [-3; 27].$

525 Разложите на множители:

а) $x^3 - 64 + 9x^2 - 36x;$

б) $a^3b^5 - a^3b^3c^2 + a^2b^2c^2 - a^2c^4;$

в) $(3d^5 - 5d^3 + 8d^6)^2 - (3d^5 - 8d^6)^2.$

526 Найдите сумму многочленов P , Q и R :

а) $P = 6m^3 - (5m^2 + 2m)$,

б) $P = a^2 + ab + b^2 - (a^2 - ab + b^2)$,

$Q = 5m - (3m^2 + 2m)$,

$Q = 4a^2 - 2ab + b^2 - (8a^2 + 2ab + 6b^2)$,

$R = 8m^2 - (m - 2m^3)$;

$R = -3a^2 + 2ab - b^2 + (2a^2 - 4ab + 5b^2)$.

527 а) Мастерская по реставрации картин получила заказ от своего клиента. Первый реставратор может выполнить эту работу за 30 рабочих дней, а второй может выполнить 40% заказа за 18 рабочих дней. Сколько рабочих дней потребуется этим двум реставраторам для выполнения всего заказа, если они будут работать вместе и производительность будет та же?

б) В пончиковой компании работают 8 поваров. Они могут выполнить дневное производственное задание за 14 часов. Сколько поваров надо принять в компанию, чтобы они могли выполнить то же самое дневное задание за 8 часов, если производительность всех поваров одинаковая?

528 Первые три часа пути турист прошёл со скоростью 4 км/ч. Затем он увеличил скорость и в течение 2 часов шёл со скоростью 5 км/ч. После этого он сделал привал и отдыхал 2 часа. После привала турист шёл четыре часа со скоростью 3 км/ч. Запишите формулу зависимости длины пути s (в км), пройденного туристом, от времени t (в часах) и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ost .

529 Постройте график кусочно-линейной функции. Определите по графику, при каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля.

а) $y = \begin{cases} 4x, & \text{если } x \geq 1; \\ 4, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -4x, & \text{если } x < -1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 3x - 5, & \text{если } x \geq 2; \\ x - 1, & \text{если } -2 \leq x < 2; \\ 3 + 3x, & \text{если } x < -2. \end{cases}$

530 Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) $2n$ и $2n + 2$ ($n \in \mathbb{Z}$);

б) $5n$ и $10n + 5$ ($n \in \mathbb{Z}$).

531 Постройте график функции $y = f(x)$. Определите по графику, при каких значениях x значение y больше нуля, равно нулю, меньше нуля.

а) $f(x) = |x + 2| - |x - 5|$;

б) $f(x) = -|9 - x| - |x - 2|$.

532 Решите неравенство $ax \geq b$:

$$a = \frac{4,06 \cdot 0,0058 + 3,3044895 - (0,7584 : 2,37 + 0,0003 : 8)}{0,03625 \cdot 80 - 2,43};$$

$$b = \frac{5,7 \cdot 16,2}{20,52} + \frac{127,68 \cdot 0,5}{4,56} + \frac{34,68 \cdot 15,4}{6,8 \cdot 3,57} - 0,5.$$



533* Найдите девять последовательных целых чисел, сумма первых трех из которых равна сумме шести последних.

534*

В трёх домах живут Винни-Пух, Пятачок и Сова. На первом из этих домов находится табличка «Винни-Пух», на втором – «Сова», а на третьем – «Винни-Пух или Пятачок». Известно, что в каждом из домов живёт кто-то один, при этом в нём живёт не тот, чьё имя указано на табличке. Кто в доме с какой табличкой живёт?



6.2.2. Решение неравенств с модулями*



*Стремиться найти истину – заслуга,
даже если на этом пути и блуждаешь.*

Георг Кристоф Лихтенберг (1742–1799),
немецкий учёный и публицист

В предыдущих пунктах мы с вами научились решать линейные уравнения и неравенства, уравнения с модулями, сводящиеся к линейным. Разберёмся теперь с тем, как решать неравенства с модулями.

Прежде всего вспомним, какие числовые промежутки являются решениями простейших неравенств с модулями: $|x| > c$, $|x| \geq c$, $|x| < c$, $|x| \leq c$ ($c \in \mathbb{Q}$).

$c > 0$			$c \leq 0$	
Неравенство	Схема	Множество решений	Неравенство	Множество решений
$ x > c$		$(-\infty; -c) \cup (c; +\infty)$	$ x > c$	Если $c < 0$, то $(-\infty; +\infty)$ если $c = 0$, то $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$ x \geq c$		$(-\infty; -c] \cup [c; +\infty)$	$ x \geq c$	$(-\infty; +\infty)$
$ x < c$		$(-c; c)$	$ x < c$	$\emptyset$
$ x \leq c$		$[-c; c]$	$ x \leq c$	Если $c < 0$, то $\emptyset$ Если $c = 0$, то $\{0\}$

Рассмотрим теперь неравенства, в которых под знаком модуля стоит не x , а выражение вида $kx + b$, где $k, b \in \mathbb{Q}$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите неравенство $|3x + 2| > -2$.

Решение:

При всех значениях переменной x выполняется неравенство $|3x + 2| \geq 0$, а $(-2) < 0$. И поскольку неотрицательное число всегда больше отрицательного, данное неравенство верно при любых значениях x .

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $|7x - 9| \leq -5$.

Решение:

При всех значениях переменной x выполняется неравенство $|7x - 9| \geq 0$, а $(-5) < 0$. И поскольку неотрицательное число не может быть меньше или равно отрицательному числу, данное неравенство всегда неверно.

Ответ: $\emptyset$.

Пример 3. Решите неравенство $|4x - 6| \geq 10$.

Решение:

Модуль числа больше или равен 10, если это число либо больше или равно 10, либо меньше или равно (-10) . Значит,

$$|4x - 6| \geq 10 \Leftrightarrow 4x - 6 \geq 10 \text{ или } 4x - 6 \leq -10.$$

Решим каждое из двух полученных неравенств, а затем найдём объединение множеств их решений.

$$1) 4x - 6 \geq 10 \Leftrightarrow 4x \geq 10 + 6 \Leftrightarrow 4x \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4; +\infty);$$

$$2) 4x - 6 \leq -10 \Leftrightarrow 4x \leq -10 + 6 \Leftrightarrow 4x \leq -4 \Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1].$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $|5x + 1| < 3$.

Решение:

Модуль числа меньше 3, если это число принадлежит открытому интервалу от -3 до 3. Значит,

$$|5x + 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 5x + 1 < 3.$$

Решим полученное двойное неравенство:

$$-3 < 5x + 1 < 3 \Leftrightarrow -3 - 1 < 5x < 3 - 1 \Leftrightarrow -4 < 5x < 2 \Leftrightarrow -0,8 < x < 0,4.$$

Ответ: $(-0,8; 0,4)$.

Что касается неравенств с несколькими модулями, то способ их решения аналогичен способу, который мы использовали при решении уравнений с модулями: сначала надо выделить числовые промежутки, на которых выражения под знаком модуля не меняют свой знак, а затем найти решения неравенств на каждом из выделенных промежутков. Решением неравенства будет объединение всех полученных решений.

Однако прежде чем приступать к решению неравенств с модулями указанным способом, надо внимательно посмотреть на неравенство, так как иногда этого достаточно, чтобы сделать вывод о множестве его решений.

Пример 5. Решите неравенство $|6x + 12| + |4x - 9| \leq -7$.

Решение:

Заметим, что сумма двух модулей всегда число неотрицательное, поэтому она не может быть меньше или равна отрицательному числу. Следовательно, данное неравенство не имеет решений ни при каких значениях x .

Ответ: $\emptyset$.

Пример 6. Решите неравенство $|3x - 4| + |7x - 2| > -11$.

Решение:

Сумма двух модулей всегда число неотрицательное, а поэтому всегда больше отрицательного числа. Значит, данное неравенство верно при всех значениях x .

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Пример 7. Решите неравенство $|x - 3| + |x + 4| > 9$.

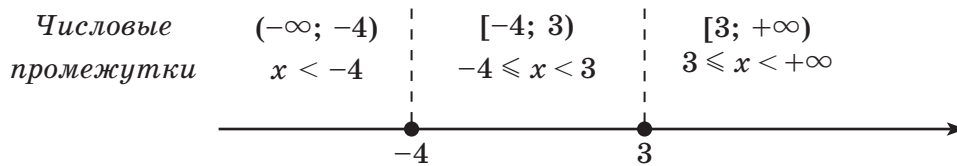
Решение:

Решим неравенство способом, аналогичным тому, который мы использовали при решении уравнений с модулями.

1. Под знаком модуля находятся выражения: $x - 3$; $x + 4$.
2. Найдём корни уравнений:

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3; \quad x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

3. Отметим найденные корни уравнений на упрощённой модели числовой прямой и определим непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные числа разбивают числовую прямую.



4. Проверим, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую:

$$(-\infty; -4) \cup [-4; 3) \cup [3; +\infty) = (-\infty; +\infty).$$

5. Выпишем определение модуля каждого из выражений и установим для всех числовых промежутков, какой вид принимает модуль:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x \geq 3, \\ 3 - x, & \text{если } x < 3; \end{cases}$$

$$|x + 4| = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x \geq -4, \\ -x - 4, & \text{если } x < -4. \end{cases}$$

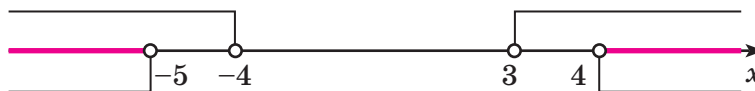


Промежутки	$(-\infty; -4)$	$[-4; 3)$	$[3; +\infty)$
Выражения с модулем			
$ x - 3 $	$3 - x$	$3 - x$	$x - 3$
$ x + 4 $	$-x - 4$	$x + 4$	$x + 4$

6. Теперь для каждого числового промежутка запишем и решим неравенство без знаков модуля, равносильное исходному.

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $x < -4$, или $x \in (-\infty; -4)$ | 2) $-4 \leq x < 3$, или $x \in [-4; 3)$ | 3) $x \geq 3$, или $x \in [3; +\infty)$ |
| $(3 - x) + (-x - 4) > 9;$ | $(3 - x) + (x + 4) > 9;$ | $(x - 3) + (x + 4) > 9;$ |
| $3 - x - x - 4 > 9;$ | $3 - \cancel{x} + \cancel{x} + 4 > 9;$ | $x - 3 + x + 4 > 9;$ |
| $-2x > 9 - 3 + 4;$ | $7 > 9$ (ложно); | $2x > 9 + 3 - 4;$ |
| $-2x > 10;$ | нет решений; | $2x > 8;$ |
| $x < -5$, или $x \in (-\infty; -5).$ | $\emptyset.$ | $x > 4$, или $x \in (4; +\infty).$ |

7. Найдём пересечение каждого числового промежутка и соответствующего ему множества решений.



1) $(-\infty; -5) \cap (-\infty; -4) = (-\infty; -5)$; 2) $[-4; 3] \cap \emptyset = \emptyset$; 3) $[3; +\infty) \cap (4; +\infty) = (4; +\infty)$.

Решением исходного неравенства является объединение множеств решений, полученных на всех числовых промежутках.

8. *Ответ:* $(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$.

Итак, обобщая способ решения неравенства с несколькими модулями, сводящегося к линейному, приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм решения неравенств с модулями

1. Найти в неравенстве все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Приравнять каждое из этих выражений к нулю и найти корни полученных уравнений.
3. Отметить найденные корни уравнений на упрощённой модели числовой прямой и определить непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные точки разбивают числовую прямую.
4. Проверить, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую.
5. Установить для всех числовых промежутков, чему равно значение каждого модуля: самому выражению, содержащемуся под знаком модуля, или выражению, противоположному ему.
6. Для каждого числового промежутка записать и решить исходное неравенство без знаков модуля.
7. Найти пересечение полученных множеств решений и соответствующих числовых промежутков.
8. В ответе записать объединение всех получившихся множеств решений.

К

535 Сравните значения числовых выражений:

- а) $|-4| + |-9|$ и $(-4) + (-9)$; г) $|-4,3| \cdot |9,4|$ и $(-4,3) \cdot |9,4|$;
 б) $-|2,4| + 7,2$ и $(-2,4) + |7,2|$; д) $|-8,2| \cdot |-3,6|$ и $-8,2 \cdot (-3,6)$;
 в) $-6,8 - |-5|$ и $|-6,8| - (-5)$; е) $|7,14| : |-4,5|$ и $(7,14) : |-4,5|$.

536

Решите неравенство, пользуясь определением модуля:

- а) $|x| > 5$; в) $|z| \leq 3$; д) $|-r| < -7$; ж) $|n| < 0$; и) $|a| > 0$;
 б) $|y| < 7$; г) $|-t| \geq 6$; е) $|-p| > -3$; з) $|m| \leq 0$; к) $|b| \geq 0$.

537

Решите неравенство:

- а) $|x + 1| < 5$; г) $|-t + 1| > 9,4$; ж) $|-9c - 7| \leq 36$;
 б) $|y - 2| > 4$; д) $|2a - 5| \leq 11$; з) $|-5d + 2| > -40$;
 в) $|-z + 3| \geq 3,6$; е) $|-3b + 1| < 26$; и) $|-2,1s - 4| > 21$.

538 Докажите, что данное неравенство будет истинным при любых значениях переменной:

а) $|x + 5| \geq -7$; б) $-|y - 6| < 4$; в) $-|9 + 2r| \leq 11$; г) $|29 - 4s| > -51$.

539 Докажите, что данное неравенство не имеет решений:

а) $|a - 9| < -17$; б) $-|b + 12| \geq 15$; в) $-|18 + 3c| > 25$; г) $|38 - 4d| \leq -29$.

540 При каких значениях переменной указанные неравенства являются истинными высказываниями?

а) $|6x + 7 - 2x| < 13$; г) $-|-7t - 16 + 4t| \leq -2$; ж) $|14c + 2c - 8 - 21c| < -3$;
 б) $|2y - 9 + y| > 5$; д) $|5a - 11a + 7| > 8$; з) $|-2d + 7d - 13d| \leq 0$;
 в) $|12 - 4z - 4| \geq 18$; е) $-|-17 - 9b + 23| \leq -6$; и) $|5p + 12 + 3p| > -12$.

541 Решите неравенство:

а) $|x + 7| < |x - 9|$; ж) $|2a - 8| > |6a + 9|$;
 б) $|y - 5| > |11 - y|$; з) $-|4b - 28| \leq |15 - 3b|$;
 в) $|z + 12| \geq -|z + 4|$; и) $|11c - 5 - 6c| < |12 - 4c + 2 - 3c|$;
 г) $-|s + 13| > |s - 2|$; к) $|15d + 21 - 8d| \geq |13 - 4d + 3|$;
 д) $-|8 - r| \leq -|r - 6|$; л) $|8m + 24| > -|7m + 4 - 9m + 8|$;
 е) $|3 - t| < |14 - t|$; м) $-|-4 - 7n - 16 + 22n| \geq |14 - 2n + 8n + 10|$.

542 При каких значениях переменной:

а) значение выражения $|a - 9|$ больше 6;
 б) значение выражения $|47 - 5b|$ меньше 12;
 в) значение выражения $|7c - 21|$ меньше или равно значению выражения $|6c + 24|$;
 г) значение выражения $|3d + 27|$ больше или равно значению выражения $|42 - 6d|$;
 д) сумма значений выражений $|2x + 16|$ и $|x + 9|$ не больше 20;
 е) разность значений выражений $|6y - 48|$ и $|5y + 20|$ не меньше 8.

543 При каких значениях переменной значение выражения:

а) $|2x - 1| + |3x + 12|$ положительно; г) $|4a - 8| - |5a + 15|$ отрицательно;
 б) $|6y - 12| - |9y + 36|$ неотрицательно; д) $|14 + 2b| - |b - 7|$ неположительно;
 в) $|5z + 2| + |9z - 6|$ отрицательно; е) $-|8 + c| - |10 - 2c|$ положительно.

544 Докажите, что:

а) число $(-1,5)$ является решением неравенства $|4x| \geq |4x + 8|$;
 б) неравенство $|y - 7| + 9 < 0$ не имеет решений;
 в) неравенство $|5z - 8| > -27$ верно при всех значениях переменной;
 г) неравенство $|t + 5| + |2 - t| \leq -12$ не имеет решений;
 д) число 3 является решением неравенства $|2a + 5| > |4 - 2a| + 1$;
 е) число 2 является решением неравенства $|4b - 16| \leq |3b - 45|$.

545 Найдите все значения a , при которых неравенство $|3a + 4x| < |6x - 2|$ истинно при:

а) $x = 5$; б) $x = -3$; в) $x = 7$; г) $x = -2$.

546 Решите неравенство:

а) $|x - 2| + |x - 4| \geq 2$;

б) $|y + 9| + |y - 7| < 7$;

в) $|z| - |z - 5| \leq 11$;

г) $|p - 3| - |p - 4| > 5$;

д) $|6 + t| - |4 - t| < -1$;

е) $|3 - q| + |q - 9| \geq 8$;

ж) $-|3 + r| - |r + 7| > 21$;

з) $|4 - s| - |9 - s| \leq 1$;

и) $|m + 2| - 8 < |m + 1| - 3$;

к) $|n - 5| + 6 \geq 17 - |n - 15|$;

л) $|3b - 9| + |2b + 8| > 18$;

м) $|4a + 12| < 9 + |3a - 6|$;

н) $|1 - 2c| - |3c + 9| \leq 6$;

о) $|2d - 10| + 6 \geq |d + 7| + 4$;

п) $|5 - 2k| + |7k + 14| > -13$;

р) $|3m - 21| - 9 > 5 - |6 + m|$;

с) $|5n + 15| - |11 - n| < -4$;

т) $12 - |21 - 3p| \leq 14 - |12 - p|$;

у) $5 - |6q - 18| \geq |9 - q|$;

ф) $|r - 13| - 9 < 4 + |7r + 28|$.

547 Докажите, что при указанном значении a неравенство имеет не менее десяти решений:

а) $|4x - a| < |5x - 2|$, $a = 12$;

б) $|y + 2a| > |y + 7|$, $a = -3$;

в) $|5z + 10| \geq |6z + 2a|$, $a = -4$;

г) $|3p + 9 - a| \leq |7p + 14|$, $a = 6$;

д) $|2q - a| > |9q - 8 - 7q|$, $a = -8$;

е) $|15r - 21 - 8r| \leq |5r + a|$, $a = 15$.

548 Найдите все решения неравенства:

а) $|x + 9| + |x - 6| < |x + 5| - 4$;

б) $|y - 7| > |y + 2| + |y - 3| - 15$;

в) $|z + 5| - |z - 8| \geq |z + 7| + 2$;

г) $|c - 10| \leq 9 - |c - 5| + |c - 3|$;

д) $|a - 6| + |a - 8| + |a + 10| < -19$;

е) $|b + 4| > |15 - b| - |b + 9| - 14$;

ж) $|4t - 8| + |3t - 9| + |6t + 12| \leq 30$;

з) $18 + |6d - 3| - 9 - |2d + 8| \geq |4 - 16d|$.

549 При каких значениях переменной указанные неравенства являются истинными высказываниями?

а) $|6x + 12| + |7x - 14| < |8x + 4|$;

б) $|7a + 2| > |14 - 2a| - |5a + 15|$;

в) $|5x - 12| - |3x - 1| \geq |11 - 2x|$;

г) $|4 - 16y| + |12y - 5| \leq |12 + 4y|$;

д) $|7z - 2| \geq |2z + 1| + |3z - 6| - 9$;

е) $11 - |2d - 8| - |3d + 15| < |6d - 18|$;

ж) $|3c - 9| + 4 \leq |8 - 2c| - |5c - 10|$;

з) $|6t + 4| + 19 > |1 - 3t| - |5 - 2t|$.

550 Решите неравенство:

а) $|x + 5| + |x - 4| + |x + 3| + |x - 2| < 15$;

б) $|y - 8| - |y + 1| + |y - 4| > |y + 6| - 12$;

в) $|z + 9| \geq |z - 3| - |z + 11| + |z + 7| + 21$;

г) $|t + 7| - |t - 9| \leq |t + 8| + |t - 12| - 18$;

д) $|a - 12| + |a - 6| + |a + 5| > |a + 10| - 24$;

е) $|b + 2| - |8 - b| < |9 - b| - |b + 8| - 12$;

ж) $|c - 4| \leq 20 - |c - 2| + |c - 7| + |c - 3|$;

з) $|d + 3| - |d - 5| \geq |d - 6| - |d - 2| + 10$.



551 Найдите все неотрицательные решения неравенства:

- а) $|3x + 9| - |6x - 12| + |5x + 10| + |2x - 7| \leq 16$;
 б) $|4y - 14| + |7y + 21| > |y - 7| - |9y + 18| + 21$;
 в) $|8z + 24| \geq |3z - 15| - |6z + 6| - |11z + 22| - 36$;
 г) $|12a - 48| + |9a - 45| + |7a + 49| < |2a + 11| - 9$;
 д) $|2b + 1| > |5 - 2b| - |7 - 14b| - |9b + 27| + 95$;
 е) $|6c - 3| - |9c - 2| \leq |2c - 8| + |5c + 25| - 40$.



552 Найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству:

- а) $|x + a| < 5$; б) $|x - b| > 9$; в) $|6x - c| \geq 8$; г) $|8x + d| \leq 6$.

553 Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

- а) $|2y + 5| - |3y + 6| + |6y - 12| \leq 7$, где $y \in (-\infty; 25]$;
 б) $-|3 - 2z| > |4z + 8| - |6z - 12| - 5$, где $z \in (-41; +\infty)$;
 в) $|5x + 10| - |4x - 12| + 19 > |3x + 9|$, где $x \in [-1; 58]$;
 г) $|8t - 24| + |7t - 28| \geq |6t + 12| - 14$, где $t \in [-7; 14]$.

π

554 Прочитайте высказывания, записанные на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите истинные высказывания, а для ложных – постройте их отрицания.

- а) $\exists x \in \mathbb{Z}: 5x < 2$; д) $\forall n \in \mathbb{N}: 8n - 9 \geq 0$;
 б) $\forall m, n \in \mathbb{Q}: |m| + |n| > 0$; е) $\exists p, q \in \mathbb{Z}: |2p| < -|3q|$;
 в) $\forall p \in \mathbb{Q}: 7p \geq -|7p|$; ж) $\exists k \in \mathbb{Q}: 6 + k < |6 + k|$;
 г) $\exists b \in \mathbb{Z}: 3|b| + 2 \leq 9$; з) $\forall d \in \mathbb{Q}: 3d + 3 \leq 5d + 5$.

555 Переведите в указанные единицы измерения и вычислите:

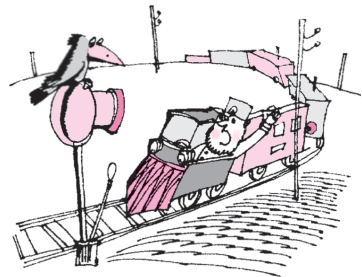
- а) в килограммы: в) в часы:
 $0,563 \text{ т} + 71,52 \text{ кг} + 3480 \text{ г} - 0,09 \text{ ц}$; $90 \text{ мин} + 1,25 \text{ суток} - 10,5 \text{ ч} + 90 \text{ 000 с}$;
 б) в сантиметры: г) в рубли:
 $25,9 \text{ м} + 428,5 \text{ мм} + 10,15 \text{ см} - 16,8 \text{ дм}$; $12,5 \text{ тыс. р.} - 19 \text{ 500 к.} + 129,8 \text{ р.} - 80 \text{ к.}$

556 Какие остатки дают натуральные степени числа a при делении на b ?

- а) $a = 3, b = 7$; в) $a = 7, b = 3$; д) $a = 9, b = 5$;
 б) $a = 3, b = 8$; г) $a = 7, b = 8$; е) $a = 9, b = 7$.

557 а) Два бегуна выбежали одновременно из двух пунктов навстречу друг другу и встретились через 1,5 ч. Найдите расстояние между этими пунктами, если скорости бегунов были равны 12 км/ч и 15 км/ч.

б) Два поезда выехали одновременно в одном направлении из двух разных городов, находящихся на расстоянии 160 км друг от друга. Скорость одного из поездов равна 60 км/ч. Чему равна скорость другого поезда, если поезда встретятся через 8 часов?



в) Из пунктов A и B , находящихся на расстоянии 420 км друг от друга, выехали одновременно в противоположных направлениях два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч. С какой скоростью ехал второй автомобиль, если через 6 часов расстояние между ними стало равно 1440 км?

г) Миша вышел из дома и увидел, что его друг Коля уходит гулять без него. Миша побежал за Колей и через 4 мин догнал своего друга. Какое расстояние было между Мишей и Колей в тот момент, когда Миша побежал за Колей, если скорость Миши была равна 170 м/мин, а скорость Коли – 80 м/мин?

558 Функция задана формулой. Найдите её область определения:

а) $y = x^3 + 8$; в) $y = \frac{5}{2x - 6}$; д) $y = \frac{5 + 3x}{2x^4}$; ж) $y = \frac{2x + 4}{(x + 2)(x + 7)}$;
 б) $y = 5x - 7$; г) $y = \frac{3x + 9}{7}$; е) $y = \frac{4x - 7}{6x - 9}$; з) $y = \frac{3(x - 2)(x + 5)}{x^3(2x + 10)(x - 4)}$.

559 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $(x + 3y) - ((5y - 6x) + 7) - (9x + 8y - 12)$;
 б) $-(7p - 8q) + (-9p - (4q + 9)) - (9q - (8 + 14p)) - (5p - 11q)$;
 в) $4s + 2(3t - (3r - 6s)) - (5s - 3(s - 4(t - 2r))) + 2(4t + 2r - 2(3t + 5s))$;
 г) $-\frac{35}{abc} \cdot (4bc : 5) : (5ab^2c) \cdot (-6bc^3a) \cdot (5ab : 21c^2) : (2ab) \cdot (-bc) : (-c^2)$.

560 Найдите остаток от деления a на b :

а) $a = 333^{555}$, $b = 5$; б) $a = 999^{777}$, $b = 7$; в) $a = 597^{795}$, $b = 11$.

561 Найдите три значения x , таких, что:

а) $x \equiv 4 \pmod{11}$; в) $x \equiv 12 \pmod{49}$; д) $x \equiv 21 \pmod{62}$;
 б) $x \equiv 9 \pmod{35}$; г) $x \equiv 15 \pmod{51}$; е) $x \equiv 37 \pmod{79}$.

562 Функция задана формулой. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно y_1 , y_2 и y_3 .

а) $y = \frac{7}{2 - 4x}$; $y_1 = 2$; $y_2 = 6$; $y_3 = -7$; в) $y = \frac{5x + 6}{2x - 11}$; $y_1 = 2$; $y_2 = -1$; $y_3 = 9$;
 б) $y = \frac{4}{9x - 3}$; $y_1 = 1$; $y_2 = -3$; $y_3 = 5$; г) $y = \frac{12x - 7}{3x + 14}$; $y_1 = 1$; $y_2 = 2$; $y_3 = -1$.

Д

563 Решите неравенство:

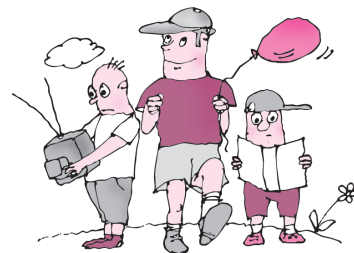
а) $|x| < 7$; в) $|-z + 3| \geq 5$; д) $-|11c + 6| \geq 28$;
 б) $|y| > 9$; г) $|5 + a| \leq 15$; е) $-|6d - 12| < -42$.

564 Докажите, что данное неравенство будет истинным при любых значениях переменной:

а) $|a + 21| \geq -12$; в) $-|14 + 8a| < 25$;
 б) $-|b - 9| \leq 0$; г) $|53 - 6b| > -65$.

565 Докажите, что данное неравенство не имеет решений:

а) $|a - 12| < -6$; в) $-|32 + 11c| > 39$;
 б) $-|b + 29| \geq 31$; г) $|47 - 17d| \leq -44$.



566 При каких значениях переменной указанные неравенства являются истинными высказываниями?

- а) $|7x + 21| < 14$; в) $|9z - 13z + 25| > 16$;
 б) $-\lvert 9y - 36 \rvert \leq -18$; г) $\lvert -3s + 12s - 33 - 15s \rvert \geq 3$.

567 Решите неравенство:

- а) $\lvert x + 11 \rvert < \lvert x - 8 \rvert$; д) $\lvert 3a - 12 \rvert \geq \lvert 7a + 21 \rvert$;
 б) $\lvert y + 7 \rvert \leq -\lvert y + 3 \rvert$; е) $\lvert 15b - 24 - 9b \rvert < \lvert 19 - 7b + 3 - 4b \rvert$;
 в) $-\lvert 14 - z \rvert \leq -\lvert z - 9 \rvert$; ж) $\lvert 8c + 32 \rvert > -\lvert 4c + 8 - 11c + 13 \rvert$;
 г) $\lvert 5 - t \rvert < \lvert 2 - t \rvert$; з) $-\lvert -9 - 11d - 29 + 26d \rvert \leq \lvert 21 - 6d + 14d + 19 \rvert$.

568 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $\lvert a - 7 \rvert$ больше 11;
 б) значение выражения $\lvert 56 - 8b \rvert$ меньше 8;
 в) значение выражения $\lvert 6c - 30 \rvert$ меньше или равно значению выражения $\lvert 8c + 48 \rvert$;
 г) значение выражения $\lvert 4d + 16 \rvert$ больше или равно значению выражения $\lvert 63 - 7d \rvert$;
 д) сумма значений выражений $\lvert 3x + 15 \rvert$ и $\lvert 2x + 3 \rvert$ меньше 17;
 е) разность значений выражений $\lvert 5y - 45 \rvert$ и $\lvert 2y + 10 \rvert$ больше 29.

569 Найдите все значения a , при которых неравенство $\lvert 4a + 5x \rvert < \lvert 3x - 2 \rvert$ истинно при:

- а) $x = 2$; б) $x = -4$; в) $x = 5$; г) $x = -6$.

570 Решите неравенство:

- а) $\lvert x - 7 \rvert + \lvert x - 5 \rvert > 9$; ж) $\lvert 2a - 3 \rvert + \lvert 3a + 2 \rvert > 7$;
 б) $\lvert y + 4 \rvert + \lvert y - 9 \rvert < 12$; з) $\lvert 5b + 10 \rvert < 5 + \lvert 8b - 16 \rvert$;
 в) $\lvert 2 - z \rvert + \lvert z - 3 \rvert \geq 4$; и) $\lvert 7c - 28 \rvert - 2 \geq 9 - \lvert 12 + c \rvert$;
 г) $-\lvert 6 + t \rvert - \lvert t + 8 \rvert > 12$; к) $\lvert 9d + 18 \rvert + \lvert 17 - d \rvert < -8$;
 д) $\lvert 9 - s \rvert - \lvert 7 - s \rvert \leq 21$; л) $15 - \lvert 25 - 5p \rvert \leq 27 - \lvert 12 - p \rvert$;
 е) $\lvert k - 3 \rvert + 14 \geq 19 - \lvert k + 11 \rvert$; м) $\lvert q - 9 \rvert - 15 < 2 + \lvert 6q + 30 \rvert$.

571 Докажите, что при указанном значении a неравенство имеет не менее десяти решений:

- а) $\lvert 5x - a \rvert < \lvert 5x - 6 \rvert$, $a = 10$; в) $\lvert 2p + 11 - a \rvert \leq \lvert 4p + 24 \rvert$, $a = 9$;
 б) $\lvert y + 2a \rvert \geq \lvert y + 8 \rvert$, $a = -2$; г) $\lvert 7q - a \rvert > \lvert 11q - 12 - 5q \rvert$, $a = -14$.

572 Найдите все решения неравенства:

- а) $\lvert x + 11 \rvert + \lvert x - 3 \rvert < \lvert x + 7 \rvert + 9$; г) $\lvert 3a - 11 \rvert + \lvert 6a - 1 \rvert + \lvert 7a + 9 \rvert < -31$;
 б) $\lvert y - 5 \rvert > \lvert y + 4 \rvert + \lvert y - 2 \rvert - 5$; д) $\lvert 2b + 7 \rvert \geq \lvert 12 - 3b \rvert - \lvert 4b + 10 \rvert - 6$;
 в) $\lvert z + 6 \rvert - \lvert z - 9 \rvert \leq \lvert z + 8 \rvert + 2$; е) $\lvert 5c - 15 \rvert + \lvert 4c - 20 \rvert + \lvert 8c + 16 \rvert \leq 28$.

573 При каких значениях переменной указанные неравенства являются истинными высказываниями?

- а) $\lvert 8x + 24 \rvert + \lvert 5x - 22 \rvert > \lvert 3x + 6 \rvert$; в) $\lvert 4z - 16 \rvert \geq \lvert 3z + 15 \rvert + \lvert 5z - 35 \rvert - 28$;
 б) $\lvert 9 - 2y \rvert + \lvert 3y - 27 \rvert \leq \lvert 18 + 6y \rvert$; г) $\lvert 7t + 14 \rvert - 7 > \lvert 5 - 4t \rvert - \lvert 9 - 3t \rvert$.

574 Решите неравенство:

- а) $|x + 7| + |x - 11| + |x + 10| + |x - 6| < 36$;
 б) $|y - 4| - |y + 8| + |y - 5| > |y + 3| - 24$;
 в) $|z + 12| \geq |z - 9| - |z + 7| + |z + 6| - 5$;
 г) $|t + 11| - |t - 2| \leq |t - 9| - |t - 4| + 3$.

575 Найдите все неположительные решения неравенства:

- а) $|6x + 12| - |2x - 3| + |4x + 2| + |9x - 3| \leq 17$;
 б) $|5y - 1| + |7y + 14| > |y - 6| - |3y + 12| + 2$;
 в) $|2c - 15| - |10c - 9| \geq |3c - 27| + |6c + 18| - 37$.

576 Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

- а) $|3x + 9| - |7x + 14| + |2x - 5| > -6$, где $x \in [-4; +\infty)$;
 б) $9 - |5 - 2y| \leq |3y + 21| - |7y - 14|$, где $y \in (-17; 12]$.

577 Переведите в указанные единицы измерения и вычислите:

- а) в килограммы: $1,79 \text{ т} + 123,4 \text{ кг} + 7600 \text{ г} - 0,12 \text{ ц}$;
 б) в сантиметры: $142,3 \text{ м} + 517 \text{ мм} - 29,7 \text{ см} - 14,3 \text{ дм}$;
 в) в часы: $150 \text{ мин} + 4,5 \text{ суток} - 25 \text{ ч} + 5400 \text{ с}$;
 г) в рубли: $56,9 \text{ тыс. р.} - 27 \text{ 430 к.} + 516,9 \text{ р.} - 130 \text{ к.}$

578 Какие остатки дают натуральные степени числа a при делении на b ?

- а) $a = 2, b = 9$; б) $a = 4, b = 7$; в) $a = 11, b = 5$.

579 а) Два туриста вышли одновременно с двух туристических стоянок навстречу друг другу и встретились через 3 часа. Найдите расстояние между этими туристическими стоянками, если скорости туристов были равны 5 км/ч и 4 км/ч.

б) Из пунктов A и B , находящихся на реке на расстоянии 130 км друг от друга, отплыли одновременно в противоположных направлениях два катера. Скорость первого катера равна 25 км/ч. С какой скоростью плыл второй катер, если через 5 часов расстояние между катерами стало равно 405 км?

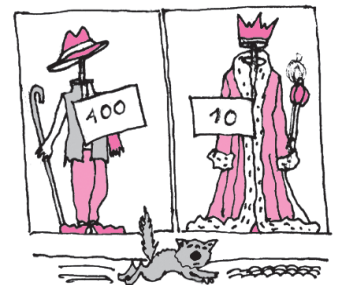
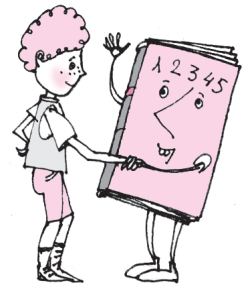
в) Увидев нарушителя, полицейский побежал за ним и догнал его через 15 мин. Какое расстояние было между полицейским и нарушителем в тот момент, когда полицейский начал погоню, если скорость полицейского была равна 200 м/мин, а скорость нарушителя – 180 м/мин?

г) Частное двух рациональных чисел равно 7, при этом одно из этих чисел на 9 больше другого. Найдите эти числа.

д) Одно из двух загаданных рациональных чисел на 4 больше другого, а сумма их модулей равна 12. Найдите эти числа.

е) Как изменилась цена товара, если сначала её увеличили на 40%, затем уменьшили на 20%, а затем ещё раз уменьшили на 25%?

ж) Один из множителей увеличили на 10%, а другой уменьшили на 10%. Как изменилось произведение?



з) Длина одной стороны прямоугольника на 12 см больше длины другой. Какой может быть длина этой стороны, если периметр этого прямоугольника меньше 60 см?

и) В четыре коробки положили 91 пирожное. Известно, что во второй коробке пирожных оказалось в 2 раза больше, чем в первой, и на 2 больше, чем в третьей. А в четвертую коробку положили на 3 пирожных больше, чем в первую. Сколько пирожных в каждой из этих коробок?

580 Функция задана формулой. Найдите её область определения.

а) $y = x^2 - 4$; в) $y = \frac{3}{4x - 5}$; д) $y = \frac{5x + 9}{5x^2}$; ж) $y = \frac{3x - 15}{(x + 7)(x - 5)}$;
 б) $y = 6x - 8$; г) $y = \frac{6x + 7}{12}$; е) $y = \frac{3x - 12}{2x - 11}$; з) $y = \frac{8(x - 6)(x + 9)}{x^2(3x + 27)(x - 14)}$.

581 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $2x + 5y - ((y - 7x) + 7y) - (2x - 6y) - (3x + 9y)$;
 б) $(5a - 3b - (9b - 2a)) + (-3a - (7b + 4a)) - (6a - (8b + 4a)) - (3a - 7b)$;
 в) $2(4p - 3r) - (6t - (5r - 3s)) - (7s - 2(s - 3(t - 5r))) - (7t + 3r - (5t + 9s))$;
 г) $(9mn : 7) : (3nm^3p^2) \cdot (-7mn^3p) \cdot (3pt : 15p^2) : (6mn) : (-mpn^2) \cdot (-5mp^3)$.

582 Найдите остаток от деления a на b :

а) $a = 777^{1111}$, $b = 5$; б) $a = 259^{952}$, $b = 3$; в) $a = 623^{326}$, $b = 11$.

583 Найдите три значения x , таких, что:

а) $x \equiv 5 \pmod{17}$; б) $x \equiv 34 \pmod{51}$; в) $x \equiv 47 \pmod{73}$.

584 Функция задана формулой. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно y_1 , y_2 и y_3 .

а) $y = \frac{9}{5 - 6x}$; $y_1 = 1$; $y_2 = 2$; $y_3 = -2$; б) $y = \frac{3x + 12}{6x - 2}$; $y_1 = 3$; $y_2 = -2$; $y_3 = 4$.

585 Решите неравенство $|bx + 3| \leq a$, где:

$$a = 3\frac{23}{96} - \left(\frac{6 : \frac{3}{5} - 1\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7}}{4\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{11} + 5\frac{2}{11}} - \frac{(\frac{3}{20} + \frac{1}{2} - \frac{1}{15}) \cdot \frac{12}{49}}{3\frac{1}{3} + \frac{2}{9}} \right) \cdot 2\frac{1}{3};$$

$$b = \frac{1\frac{9}{16} \cdot 3\frac{1}{5} + 16\frac{2}{3} - 9 : 2\frac{2}{5}}{17\frac{7}{12} - 6\frac{1}{3}} + \frac{12\frac{2}{3} - 61\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4}}{2\frac{2}{3}} - \frac{25}{27}.$$



586* В актовом зале школы несколько рядов. Если пришедшие на спектакль школьники сядут на каждый ряд по 12 человек, то на последний ряд сядет лишь один школьник. Если же школьники сядут на каждый ряд по 11 человек, то двум школьникам места не хватит. Сколько рядов в актовом зале этой школы и сколько школьников пришло на спектакль?

587* Разбейте число 168 на три не равных друг другу натуральных слагаемых так, чтобы сумма любых двух этих слагаемых делилась на третье.

§ 3. Системы линейных уравнений

6.3.1. Линейное уравнение с двумя переменными и его график



Жизнь непрерывно требует от математика ответа на вопрос, как поступать в том или другом случае, при тех или других сложившихся обстоятельствах. И дело его чести — не уходить от этих требований в пучину абстракций, а по мере сил удовлетворять их.

Вентцель Елена Сергеевна (1907–2002), советский математик, автор учебников по теории вероятностей и исследованию операций

Метод решения задач с помощью уравнений, хорошо известный вам с пятого класса, часто упрощает поиск решения текстовых задач. Особенно в тех случаях, когда алгоритм решения уравнения, полученного при переводе условия задачи на математический язык, известен. Если же алгоритм неизвестен, то используют такие способы решения, как метод проб и ошибок, метод перебора, различные нестандартные приёмы рассуждений, что, как правило, значительно сложнее, чем действия по готовому алгоритму. Поэтому построение новых алгоритмов решения уравнений, описывающих различные классы текстовых задач, всегда расширяет возможности успешного достижения результата.

Рассмотрим решение следующей задачи.

Задача. Таня купила тетрадей на 100 р.: в линейку – по цене 5 р. и в клетку – по цене 9 р. Сколько тетрадей каждого вида купила Таня?

Решение:

Обозначим x – количество тетрадей в линейку, а y – количество тетрадей в клетку. Понятно, что количество тетрадей ни отрицательным, ни дробным числом выразиться не может, и $xy \neq 0$ (хотя бы по одной тетради каждого вида куплено). Следовательно, $x, y \in \mathbb{N}$.

Общая стоимость покупки равна $5x + 9y$, что, по условию задачи, составляет 100 рублей. Получаем уравнение $5x + 9y = 100$. Для ответа на вопрос задачи надо из полученного уравнения найти все натуральные значения переменных x и y .

Ранее мы уже решали уравнения с двумя переменными – для их решения мы использовали метод перебора и свойства делимости. Так, заметив, что y кратно 5 и не превышает 10, мы легко находим пары чисел, которые обращают наше уравнение в верное равенство: $x = 11, y = 5$ и $x = 2, y = 10$.

Ответ: Таня купила 16 тетрадей – 11 по 5 р. и 5 по 9 р.; или 12 тетрадей – 2 по 5 р. и 10 по 9 р.

Однако если с коэффициентами «повезёт» меньше, то перебор может содержать сотни, тысячи и вообще сколько угодно случаев. А если переменные принимают произвольные (не обязательно целые) значения, то перебором такую задачу решить нельзя.

Вместе с тем уравнения вида $ax + by = c$, где a, b, c – некоторые числа, достаточно часто встречаются при решении текстовых задач, и поэтому нам важно научиться их исследовать и вывести общий способ решения. Но вначале уточним понятия линейного уравнения с двумя переменными и его решения.

Определение 1. *Линейным уравнением с двумя переменными x и y называется уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c – некоторые числа.*

Числа a и b называются *коэффициентами при переменных x и y* , а число c – *свободным членом*.

Придавая переменным x и y различные значения, мы будем получать верные или неверные равенства. Если равенство верное, то пара чисел $(x; y)$ является решением данного уравнения, а если неверное – то не является. Например, при $x = 0$ и $y = 0$ уравнение $0,5x + y = 1$ преобразуется в неверное равенство $0 = 1$, а при $x = 4$ и $y = -1$ – в верное равенство $1 = 1$. Следовательно, пара чисел $(4; -1)$ является решением данного уравнения, а пара чисел $(0; 0)$ – не является.

Определение 2. *Решением линейного уравнения $ax + by = c$ называется пара чисел $(x; y)$, которая обращает это уравнение в верное числовое равенство.*

Заметим, что значения переменных x и y в паре для определённости принято указывать в следующем порядке: $(x; y)$.

Теперь разберёмся в том, сколько решений может иметь линейное уравнение с двумя переменными, например уравнение $0,5x + y = 1$. Легко видеть, что, подставляя в данное уравнение произвольные числа x , мы будем получать линейные уравнения с одной переменной y , имеющие единственное решение. Например, если $x = 1$, то $0,5 + y = 1$, то есть $y = 0,5$. Значит $(1; 0,5)$ – это решение данного уравнения. Также решениями данного уравнения являются, например, пары чисел $(-2; 2)$, $(0; 1)$, $(2; 0)$ и т.д.

Ясно, что выписать все решения данного уравнения невозможно, так как таких пар бесконечно много. Но, выразив x через y или, наоборот, y через x , можно записать его решения в общем виде: соответственно $(x; 1 - 0,5x)$, где x – любое число или $(2 - 2y; y)$, где y – любое число.

По общему решению легко указать любые пары конкретных решений. Так, при $x = 1$ решением является пара $(1; 0,5)$, при $y = 5$ – пара $(-8; 5)$ и т.д.

Определение 3. *Общим решением линейного уравнения с двумя переменными называется множество всех пар $(x; y)$ его решений.*

Определение 4. *Решить линейное уравнение с двумя переменными – значит найти его общее решение.*

Во всех рассмотренных случаях коэффициенты a, b и c линейных уравнений с двумя переменными были отличны от нуля. Запишем этот случай и остальные возможные случаи в виде таблицы.

Из таблицы мы видим, что линейное уравнение $ax + by = c$ не имеет решения только в одном случае – когда коэффициенты при x и y одновременно равны нулю, а свободный член отличен от нуля ($a = b = 0, c \neq 0$). Во всех остальных случаях уравнение имеет бесконечное множество решений. Причём если все три коэффициента равны нулю ($a = b = c = 0$), то решением является любая пара чисел.

Коэффициенты			Уравнение	Общее решение
$a \neq 0$	$b \neq 0$	c – любое число	$ax + by = c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -y \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$	$\left(-\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}; y\right),$ где y – любое число, или $\left(x; -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right),$ где x – любое число
$a = 0$	$b \neq 0$	c – любое число	$0x + by = c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$	$\left(x; \frac{c}{b}\right),$ где x – любое число
$a \neq 0$	$b = 0$	c – любое число	$ax + 0y = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$	$\left(\frac{c}{a}; y\right),$ где y – любое число
$a = 0$	$b = 0$	$c = 0$	$0x + 0y = 0$ (истинно)	$(x; y)$, где x, y – любые числа
$a = 0$	$b = 0$	$c \neq 0$	$0x + 0y = c$ (ложно)	$\emptyset$

Приведённая выше таблица классифицирует все случаи решения линейных уравнений с двумя переменными и помогает вывести удобный на практике алгоритм их решения.

**Алгоритм решения линейного уравнения
с двумя переменными $ax + by = c$**

1. Если оба коэффициента при переменных не равны нулю ($ab \neq 0$), выразить одну из переменных через другую и записать ответ.
2. Если один из коэффициентов при переменных равен нулю, а второй – нет ($ab = 0$, но $a \neq 0$ или $b \neq 0$), решить данное линейное уравнение с одной переменной и записать ответ.
3. Если оба коэффициента при переменных равны нулю ($a = b = 0$), определить, истинно или ложно данное равенство, и записать ответ.

Заметим, что форма всех ответов приведена в таблице.

Пример 1. Решить уравнение $4x - 3y = 1$.

Решение:

Первый способ.

Выразим y через x : $4x - 3y = 1 \Leftrightarrow 3y = 4x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{4x-1}{3}$.

Ответ: $\left(x; \frac{4x-1}{3}\right)$, x – любое число.

Второй способ:

Выразим x через y : $4x - 3y = 1 \Leftrightarrow 4x = 1 + 3y \Leftrightarrow x = \frac{1+3y}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{1+3y}{4}; y\right)$, y – любое число.

Пример 2. Решить уравнение $-2x + 0y = -3$.

Решение:

$$-2x + 0y = -3 \Leftrightarrow -2x = -3 \Leftrightarrow x = 1,5.$$

Ответ: $(1,5; y)$, y – любое число.



Каждое решение линейного уравнения с двумя переменными x и y можно изобразить на координатной плоскости точкой с координатами $(x; y)$. Отметив на координатной плоскости все такие точки, мы получим *график* данного уравнения.

Определение 5. Множество точек координатной плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют линейному уравнению с двумя переменными x и y , называется *графиком* этого уравнения.

Что же является графиком линейного уравнения с двумя переменными и как его построить?

Если в уравнении $ax + by = c$ коэффициенты при переменных одновременно не обращаются в нуль¹, то одну из переменных можно выразить через другую. Например, при $b \neq 0$ имеем $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ или $y = kx + d$, где k, d – некоторые числа. Данную зависимость между x и y легко узнать, это хорошо знакомая нам линейная функция. А графиком линейной функции, как известно, является прямая линия.

Отсюда можно сделать важный **вывод**:

Графиком уравнения $ax + by = c$, где a и b одновременно не обращаются в нуль, является прямая линия.

Данный вывод, в частности, иллюстрирует результат, полученный нами ранее:

Любое линейное уравнение с двумя переменными $ax + by = c$, где a и b одновременно не обращаются в нуль, имеет бесконечно много решений.

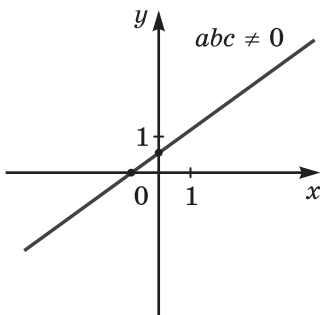


Рис. 16

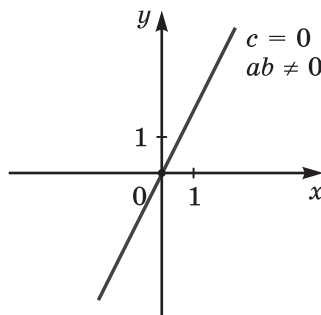


Рис. 17

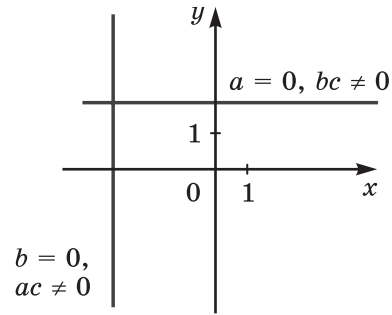


Рис. 18

¹ Условие « a и b одновременно не обращаются в нуль» может быть записано в виде неравенства $a^2 + b^2 > 0$.

В зависимости от значений коэффициентов a , b и c прямая, представляющая собой график уравнения $ax + by = c$ на координатной плоскости, может располагаться по-разному. Так, при $c = 0$ прямая пройдёт через начало координат, при $a = 0$ она будет параллельна оси Ox , а при $b = 0$ – параллельна оси Oy (рис. 16–18).

Если же $a = b = c = 0$, то решением уравнения $0x + 0y = 0$ является любая пара чисел, а графиком уравнения являются все точки координатной плоскости, то есть вся плоскость. А если $a = b = 0$, но $c \neq 0$, то уравнение $0x + 0y = c$ не имеет решений, а его графиком является пустое множество. Поэтому далее мы в основном будем рассматривать лишь случаи, когда a и b одновременно не обращаются в нуль.

Алгоритм построения графика уравнения $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 > 0$

1. Выбрать два произвольных значения *одной* переменной (например, переменной x : x_1 и x_2).
2. Используя уравнение, вычислить соответствующие им значения *другой* переменной (y_1 и y_2).
3. Отметить на координатной плоскости точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.
4. Провести через отмеченные точки прямую.

Пример 3.

Построить графики уравнений:

а) $2x - y = 3$;

б) $0x + 3y = 6$;

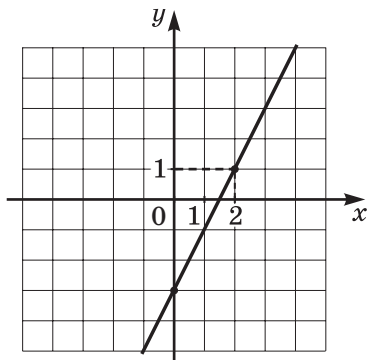
в) $-4x + 0y = 4$.

Решение:

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая. Для каждого уравнения найдём координаты двух точек, принадлежащих графику, отметим их на координатной плоскости и проведём через них прямую линию.

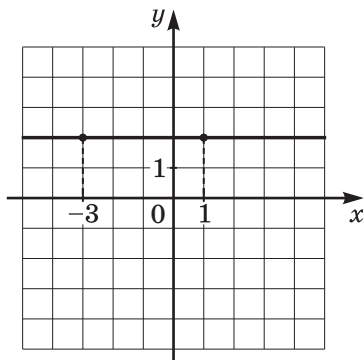
а) $2x - y = 3$

x	0	2
y	-3	1



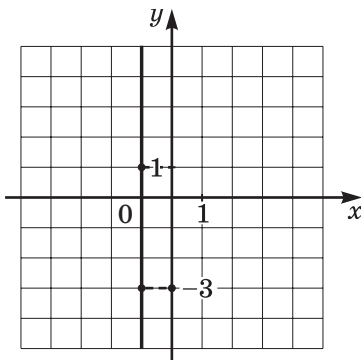
б) $0x + 3y = 6$

x	-3	1
y	2	2



в) $-4x + 0y = 4$

x	-1	-1
y	-3	1



K

588

Выразите из данной формулы каждую переменную через остальные:

а) $C = an$;

в) $a = bc + r$;

б) $P = 2(a + b)$;

г) $V = abc$.

589 Решите задачу и ответьте на вопросы к ней:
Задумали два натуральных числа. Если первое число увеличить в 6 раз, второе в 5 раз и сложить полученные значения, то получится число 45. Какие числа задумали?

1) Какое уравнение было получено при решении задачи? Запишите в общем виде этот тип уравнений.

2) Какие значения могут принимать переменные в уравнении данной задачи? Какой метод был использован для решения уравнения данной задачи? Какие свойства делимости позволили сократить перебор?

590 1) Можно ли использовать метод перебора для решения уравнения, если в задаче № 589 будут задуманы рациональные числа? Почему? Как решить полученное в этом случае уравнение?

2) Подставьте в уравнение два произвольных значения x . Какие уравнения вы получаете? Вычислите соответствующие значения переменной y . Что нужно сделать, чтобы вычислять соответствующее значение переменной было удобнее?

3) Предложите свой способ записи решения линейного уравнения с двумя переменными и сравните его с понятием общего решения уравнения на с. 125.

591 Является ли пара чисел $(4; -1)$ решением уравнения:

а) $2x - 3y = 11$;

б) $-3x + 5y = 17$?

Запишите по два решения для каждого из этих уравнений.

592 Составьте линейное уравнение с двумя переменными со свободным членом, равным вашему:

а) возрасту;

б) росту в сантиметрах;

в) росту в миллиметрах.

593 Как называются данные уравнения? Найдите общее решение каждого уравнения:

а) $x - 6y = -3$;

б) $11x - 2y = 3$;

в) $5x + 4y = 9$;

г) $-x + 5y = 0$;

д) $4x + 0y = 13$;

е) $0x - 3y = 7$.

594 Решите данные уравнения:

а) $\frac{1}{2}x + 2y = 3$;

б) $\frac{-x-y}{5} = 0$;

в) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3}$;

г) $2x + 3y = 7 + 2x + 3y$;

д) $3x + 6y = 1 + 3\left(x + 2y - \frac{1}{3}\right)$.

595 Какая из точек $A(2; 1)$, $B(-2; -1)$ и $C(0; -2)$ принадлежит графику уравнения $x + 2y = -4$?

596 Постройте график уравнения:

а) $x + y = 3$;

б) $x - y - 6 = 0$;

в) $6x + 0y = 3$;

г) $0x + 5y = -8$.

597 Что является графиком уравнения:

а) $0x + 0y = 0$;

б) $0x + 0y = 333$?

598 Переведите условие задачи на математический язык:

а) Автомобиль проехал 1000 км. Часть пути он ехал по трассе со скоростью 120 км/ч, а оставшееся расстояние по городу со скоростью 60 км/ч. Сколько времени он затратил на движение по трассе, а сколько времени на движение по городу?

б) Делая заготовки на зиму, мама сварила 12 литров вишневого компота. У неё были двухлитровые и поллитровые банки. Сколько двухлитровых и поллитровых банок ей потребуется?

в) В каком отношении нужно взять 30% -й и 5% -й растворы перекиси водорода, чтобы получить 15% -й раствор?

Какие из этих задач имеют конечное число ответов?

π

599 Найдите НОД (a ; b):

а) $a = 18, b = 12$;

в) $a = 250, b = 725$;

д) $a = 4000, b = 4608$;

б) $a = 72, b = 600$;

г) $a = 102, b = 63$;

е) $a = 46\,080, b = 17\,017$.

600

Начертите график прямой пропорциональности $y = 4x$. Пользуясь этим графиком, начертите графики линейных функций $y = 4x + 3$ и $y = 4x - 2$.

Что можно сказать о графиках линейных функций с одинаковыми коэффициентами при x ?

Что можно сказать о графиках линейных функций с различными коэффициентами при x ?

601

Не выполняя построения, определите, какие из графиков данных линейных функций параллельны, какие пересекаются, а какие совпадают:

а) $y = 7x + 3$;

в) $y = -7x + 5$;

д) $y = 2 + 3x$;

ж) $y = 3 + 7x$;

б) $y = 3x + 7$;

г) $y = 7x$;

е) $y = 7x - 2$;

з) $y = 2x + 3$.

Д

602 Решите уравнения:

а) $-6x + y = 4$;

б) $5x + 6y = 1$;

в) $7x + 0y = 0$.

603

Постройте графики уравнений:

а) $-5x + 9y = -1$;

б) $10x + 11y = -1$;

в) $-3x + 0y = 0$.

604

Решите задачу: Кирилл задумал двузначное натуральное число. Если из этого числа вычесть удвоенное число его десятков, то получится 24.

а) Какое число задумал Кирилл?

б) Составьте задачу про задуманные числа, которая будет иметь бесконечное число решений.

605

Не выполняя построения графиков линейных функций, определите, какие из графиков параллельны, какие пересекаются, а какие совпадают:

а) $y = -x + 3$;

б) $y = x + 1$;

в) $y = -x + 5$;

г) $y = 1 + x$.

С

606 Попробуйте изобразить графики следующих нелинейных уравнений:

а) $x^2 - y^2 = 0$;

д) $xy = 0$;

б) $x^2 - 4y^2 = 0$;

е) $x^2 + y^2 = 4$;

в) $x^2 + y^2 = 0$;

ж) $x^2 + y^2 = 4x$;

г) $x^4 - y^4 = 0$;

з) $x^2 + y^2 = 2xy$.

607

Найдите последнюю цифру числа 2^{2011} .

6.3.2. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Графическое решение системы



...математические сведения могут применяться умело и с пользой ..., если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно.

Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987),
русский математик, один из основоположников
современной теории вероятностей

Для перевода условия задачи на математический язык часто бывает необходимо составить не одно, а несколько уравнений. В этом случае решением задачи будут значения переменных, которые обращают в верные равенства все составленные уравнения.

Задача 1. Таня купила тетрадей на 100 рублей: тетради в линейку по цене 5 р. и тетради в клетку по цене 9 р. Сколько тетрадей каждого вида купила Таня, если известно, что тетрадей в клетку она купила в 5 раз больше?

Решение:

Эта задача отличается от задачи, рассмотренной нами в предыдущем пункте, тем, что в её условии указывается не одна, а две взаимосвязи между величинами: $5x + 9y = 100$ и $y = 5x$, где x – количество тетрадей в линейку, а y – количество тетрадей в клетку. Для ответа на вопрос задачи нам нужно найти все пары чисел x и y , которые являются решениями обоих уравнений одновременно. В этом случае полученные уравнения называют *системой уравнений* и записывают с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} 5x + 9y = 100; \\ y = 5x. \end{cases} \rightarrow x = ? \quad y = ?$$

Из найденных нами ранее решений первого уравнения $x = 11, y = 5$ и $x = 2, y = 10$ только последняя пара чисел обращает второе уравнение системы в верное равенство. Поэтому решением системы будет пара (2; 10).

Ответ: Таня купила 2 тетради по 5 рублей и 10 тетрадей по 9 рублей.

Итак, если требуется найти значения переменных, которые удовлетворяют сразу нескольким уравнениям, то возникает *система уравнений*. Мы уже встречались с системами уравнений, однако до сих пор не получали общих способов их решения. В данном и следующих пунктах мы познакомимся с методами решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными, которые существенно расширят наши возможности в решении практических задач.

Определение 1. Системой двух линейных уравнений с двумя переменными x и y называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – некоторые числа.

Из приведённого определения следует, что *множеством решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными x и y является множество пар $(x; y)$, которые удовлетворяют каждому из уравнений системы.*

Обозначим множество решений первого уравнения буквой A , а множество решений второго уравнения – B . Множество решений системы этих уравнений составляет пересечение множеств A и B (рис. 19). При этом возможны случаи¹, когда пересечение двух множеств является пустым (рис. 20) или совпадает с каждым из множеств A и B (рис. 21).

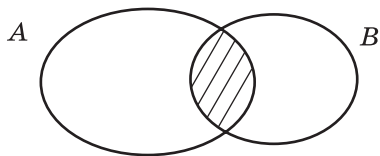


Рис. 19

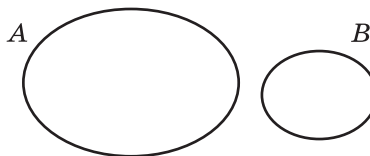


Рис. 20

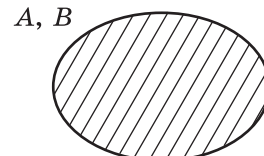


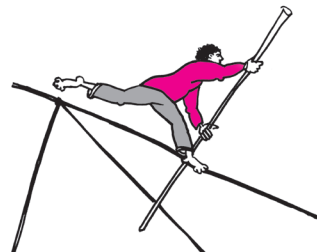
Рис. 21

Графиком линейного уравнения $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 > 0$, является прямая. Следовательно, решение системы линейных уравнений с двумя переменными для указанного случая сводится к нахождению на координатной плоскости общих точек двух прямых. А две прямые на плоскости могут: 1) пересекаться, то есть иметь единственную общую точку; 2) быть параллельными, то есть не иметь общих точек; 3) совпадать, то есть иметь бесконечно много общих точек. Значит, система двух линейных уравнений с двумя переменными может либо иметь единственное решение, либо вообще не иметь решения, либо иметь бесконечное множество решений.

* * *

Если рассматривать системы из линейных уравнений, в которых хотя бы в одном уравнении коэффициенты при переменных одновременно равны нулю, то следует проанализировать взаимное расположение таких графиков линейных уравнений, как пустое множество и вся плоскость целиком.

Если графиком одного уравнения является пустое множество, то и пересечение с этим пустым множеством будет пусто, т. е. система не будет иметь решений. Если графиком одного уравнения является вся плоскость, то решение всей системы будет совпадать с решением другого уравнения системы.



Чтобы найти эти множества решений, можно построить графики соответствующих уравнений системы.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = 1; \\ 5x - y = -6. \end{cases}$

Решение:

Начертим графики каждого из уравнений системы в одной координатной плоскости.

$$2x - 3y = 1$$

x	0	2
y	$-\frac{1}{3}$	1

$$7x - y = -6$$

x	-1	$-\frac{6}{7}$
y	-1	0

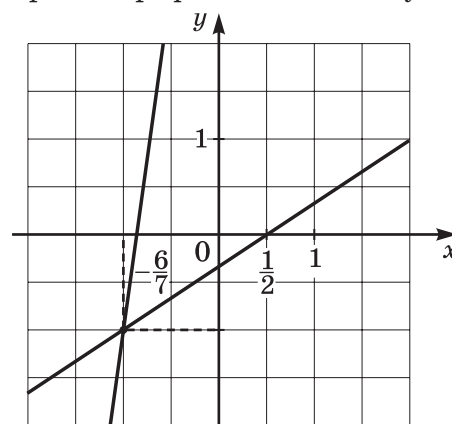


Рис. 22

¹ Будем считать, что среди этих уравнений нет уравнения вида $0x + 0y = 0$.

По рисунку 22 видно, что общая точка этих прямых имеет координаты $(-1; -1)$.

Пара чисел $(-1; -1)$ будет решением системы, потому что эта точка принадлежит графикам обоих уравнений системы, значит, удовлетворяет обоим уравнениям.

Однако найденный нами результат зависит от точности выполнения чертежа. Мы лишь можем утверждать, что приближённым решением системы является точка $(-1; -1)$ на плоскости; возможно, её координаты $(-0,98; -1,02)$. Поэтому найденная пара чисел требует дополнительной проверки. Её можно провести, подставив полученную пару чисел $(-1; -1)$ в каждое уравнение системы.

Получаем верные равенства:

$$2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = 1,$$

$$7 \cdot (-1) - (-1) = -6.$$

Значит, пара чисел $(-1; -1)$ действительно является решением системы.

Ответ: система имеет единственное решение $(-1; -1)$.

Необходимость такой проверки подкрепляется следующим примером.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} x - y = 1; \\ 5x + 7y = 6. \end{cases}$

Начертим графики каждого из уравнений системы в одной координатной плоскости.

$$x - y = 1$$

$$5x + 7y = 6$$

x	0	2
y	-1	1

x	-3	4
y	3	-2

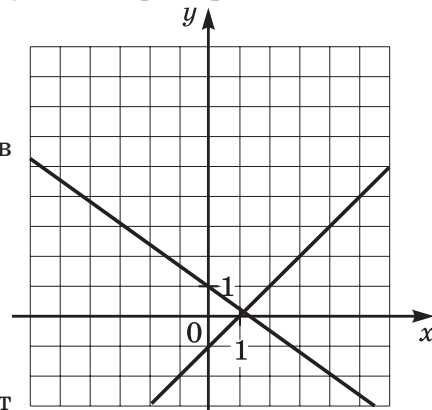


Рис. 23

На рисунке 23 точка пересечения прямых выглядит как точка с координатами $(1; 0)$. Более того, пара чисел $(1; 0)$ является решением первого уравнения системы. Но она не является решением второго уравнения, так как $5 \cdot 1 + 7 \cdot 0 \neq 6$. В действительности решением системы уравнений является пара чисел $\left(\frac{13}{12}; \frac{1}{12}\right)$. А точка с координатами $\left(\frac{13}{12}; \frac{1}{12}\right)$ на рисунке сливается с точкой, имеющей координаты $(1; 0)$.

Пример 3. Решить систему $\begin{cases} 2x + 4y = 6; \\ 3x + 6y = 9. \end{cases}$

Решение:

Для построения прямых вычислим координаты точек их пересечения с осями.

Для обеих прямых эти точки $(3; 0)$ и $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ одинаковы. Через эти точки можно провести только одну прямую – графики совпали (рис. 24). Значит, все решения первого уравнения будут являться решениями второго уравнения, и наоборот.

В ответ запишем общее решение одного из уравнений системы, например первого.

Ответ: система имеет бесконечно много решений $(3 - 2y; y)$, y – любое число.

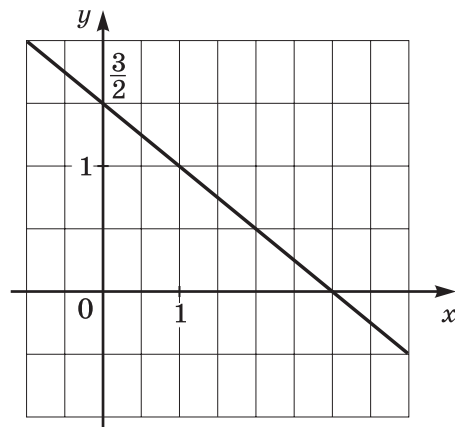


Рис. 24

Пример 4. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = 7; \\ 6x - 9y = 10. \end{cases}$

Решение:

Построив на координатной плоскости прямые $2x - 3y = 7$ и $6x - 9y = 10$, мы видим, что они не пересекаются (рис. 25). Вместе с тем, опираясь только на график, *абсолютно точно* утверждать этого нельзя; можно лишь предполагать, что прямые, скорее всего, параллельны.

Однако не исключено, что они пересекаются в очень далёкой точке. Поэтому, чтобы обосновать их параллельность, нужно проводить дополнительные рассуждения.

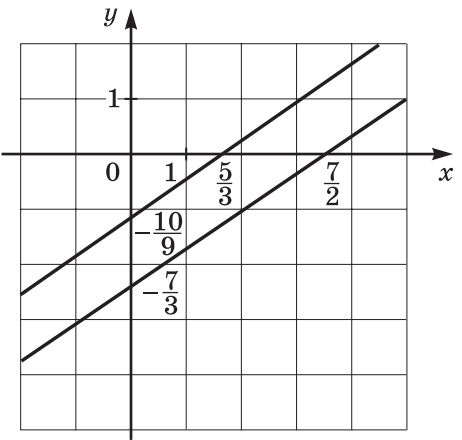


Рис. 25

Перепишем уравнения в виде $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$ и $y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{9}$. Если бы графики уравнений имели общую точку, то для *ложного* равенства $\frac{2}{3}x - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{10}{9}$ нашлось бы решение. Значит, прямые действительно параллельны и система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Обобщая найденные способы решений заданных систем, мы можем вывести следующий *алгоритм графического решения систем линейных уравнений с двумя переменными* для случая, когда оба коэффициента при переменных каждого уравнения одновременно не равны нулю.

Алгоритм графического решения систем линейных уравнений с двумя переменными

1. Построить графики каждого уравнения в одной координатной плоскости.
2. Если прямые параллельны, нужно записать, что система не имеет решений.
3. Если прямые совпадают, нужно записать в ответ общее решение одного из уравнений.
4. Если прямые пересекаются, нужно найти координаты точки пересечения, сделать проверку и записать их в ответ.

* * *

Пример 5. При каких значениях параметра m система $\begin{cases} 2x + y = 3; \\ x + 0,5y = m \end{cases}$

- а) имеет бесконечно много решений;
- б) не имеет решений;
- в) имеет единственное решение?

Решение:

Как мы знаем, количество решений системы линейных уравнений зависит от расположения их графиков на плоскости. Чтобы можно было привлечь соображения, описанные нами в п. 5.2.2, перепишем уравнения этой системы в виде $y = kx + b$:

$$\begin{cases} 2x + y = 3; \\ x + 0,5y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 3; \\ 0,5y = -x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 3; \\ y = -2x + 2m. \end{cases}$$

Коэффициенты при x в данных уравнениях одинаковы, значит, прямые $y = -2x + 3$ и $y = -2x + 2m$ либо совпадают (если $2m = 3$), либо параллельны (если $2m \neq 3$). Таким образом, при $m = 1,5$ система имеет бесконечно много решений, а при $m \neq 1,5$ система решений не имеет. Прямые с одинаковыми коэффициентами при x пересекаться не могут, поэтому данная система не может иметь единственного решения ни при каком значении m .

Ответ: а) при $m = 1,5$; б) при $m \neq 1,5$; в) $m \in \emptyset$.

Решение при помощи графического метода может стать точным, если привлечь некоторые дополнительные соображения, например делимость.

Рассмотрим, например, график функции $y = \frac{p}{q}x$, где p – целое, q – натуральное, $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь (рис. 8).

Заметим, что график функции проходит через точку $(0; 0)$. Через какие целочисленные точки ещё проходит график? (Целочисленной называют точку, у которой обе координаты целые.)

Пусть $m = \frac{p}{q}n$, где m и n – целые. Так как p и q взаимно просты, n нацело делится на q . То есть $n = qt$, где t – целое, и тогда $m = \frac{p}{q}n = \frac{p}{q}qt = pt$. Это означает, что все целочисленные точки графика функции $y = \frac{p}{q}x$ имеют вид $(qt; pt)$, где t – целое. В частности, кроме точки

$(0; 0)$ график проходит через точки $(q; p)$, $(-q; -p)$, $(2q; 2p)$ и т.д. (рис. 26).

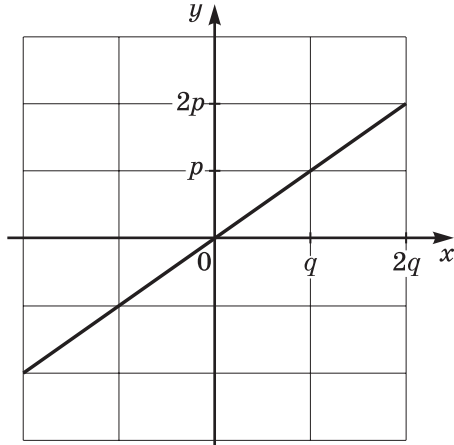


Рис. 26

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть график функции $y = \frac{p}{q}x + r$, где p – целое, q – натуральное, $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь, r – рациональное число, проходит через целочисленную точку $(x_0; y_0)$. Тогда все целочисленные точки этого графика имеют вид $(x_0 + qt; y_0 + pt)$, где t – целое.

Пример 6. Решить систему $\begin{cases} 3x - 4y = 0; \\ x + y = 7. \end{cases}$

Решение:

Перепишем систему в виде $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x; \\ y = -x + 7. \end{cases}$



Прямые не параллельны (и не совпадают). Значит, система имеет единственное решение.

Рассмотрим прямую $y = \frac{3}{4}x$. Она проходит через точку $(0; 0)$, коэффициент при x равен $\frac{3}{4}$. Значит, она проходит через все целочисленные точки вида $(4t; 3t)$, где t – целое.

Теперь рассмотрим прямую $y = 7 - x = 7 - \frac{1}{1}x$. Прямая проходит через точку $(0; 7)$, коэффициент при x равен $-\frac{1}{1}$. Значит, она проходит через все целочисленные точки вида $(0 + t; 7 - t)$, где t – целое.

Таким образом, можно заметить, что первая прямая проходит через точки $(0; 0)$, $(4; 3)$, $(8; 6)$ и т. д., а вторая прямая – через точки $(0; 7)$, $(1; 6)$, $(2; 5)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$, $(5; 2)$ и т. д. Следовательно, обе прямые проходят через точку $(4; 3)$ (рис. 27).

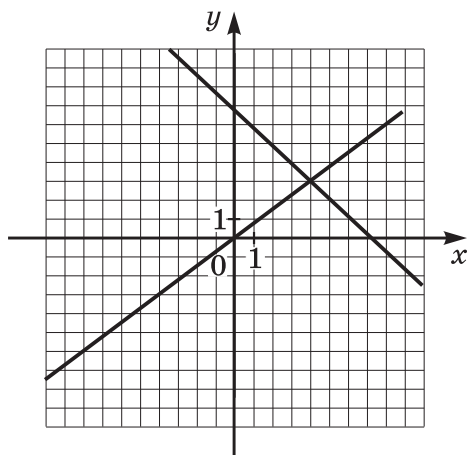


Рис. 27

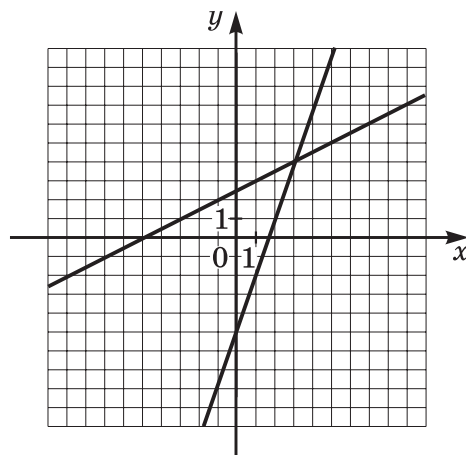


Рис. 28

Так как решение системы единственно, то ответ: (4; 3). Заметим, что решение мы нашли **точно** (а не приблизительно), используя свойства делимости.

Ответ: (4; 3).

Пример 7. Решить систему
$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0; \\ 3x - y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Перепишем систему в виде
$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}; \\ y = 3x - 5. \end{cases}$$

Прямые не параллельны (и не совпадают). Значит, система имеет единственное решение.

Рассмотрим прямую $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$. Она проходит через точку (1; 3). Коэффициент при x равен $\frac{1}{2}$. Значит, она проходит через все целочисленные точки вида $(1 + 2t; 3 + t)$, где t – целое.

Рассмотрим прямую $y = 3x - 5 = \frac{3}{1} \cdot x - 5$. Прямая проходит через точку (0; -5). Коэффициент при x равен $\frac{3}{1}$. Значит, она проходит через все целочисленные точки вида $(0 + t; -5 + 3t)$, где t – целое.

Таким образом можно заметить, что первая прямая проходит через точки (1; 3), (3; 4), (5; 5) и т. д., а вторая прямая – через точки (0; -5), (1; -2), (2; 1), (3; 4) и т. д. То есть обе прямые проходят через точку (3; 4) (рис. 28). А так как решение системы единственно, это и есть ответ.

Ответ: (3; 4).

К

608

Начертите графики линейных уравнений:

а) $x - 2y = 4$;

б) $0,5x + y = 6$.

Запишите координаты общей точки построенных графиков.

609

Является ли пара чисел (0,5; -3,5) решением системы:

а)
$$\begin{cases} x + y = -3; \\ 4x - 2y = 9; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x - y = 4,5; \\ x - y = 3. \end{cases}$$

610

Найдите решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y = 4; \\ 0,5x + y = 6. \end{cases}$$

- а) Как графики уравнений могут помочь в решении этой системы?
 б) Можно ли утверждать, что найденное при помощи графиков решение является точным? Как можно выполнить проверку найденного результата?
 в) Вспомните, как могут располагаться прямые на плоскости. Подойдёт ли способ, который вы использовали при решении этой системы, для решения всех систем? Сравните свои предположения с алгоритмом, приведённым на с. 134.

611 Найдите решение системы графическим способом:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = -14; \\ x - 2y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 3y = 5,5; \\ x + y = 0,5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 4y = 5; \\ x - 2y = 2,5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 3y = 12; \\ 6x + 9y = 18. \end{cases}$

612 Решите систему графическим способом:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 1; \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$$

Удалось ли найти точное решение системы? Какие недостатки графического способа вы видите?

613 При каких значениях параметра m система $\begin{cases} x + 4y = 8; \\ 0,25x + y = 3m \end{cases}$ не имеет решений?

614 1) Подберите несколько целочисленных точек графика уравнения $x - 2y = 6$. Как можно найти их, используя свойства делимости?

2) Как можно применить теорему о целочисленных точках графика уравнения (теорема 1, с. 135) для решения систем? Решите систему, используя эту теорему:

а) $\begin{cases} 2x - 4y = -10; \\ x + y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y = 0; \\ 2x + y = 10. \end{cases}$

π

615 Саша составил линейное уравнение с двумя переменными $1999x + 12y = 3$. Коэффициент при x был равен году его рождения, коэффициент при y был равен порядковому номеру месяца его рождения, а свободный член являлся числом дня рождения. Назовите дату его рождения.

616 Определите знак значения выражения:

а) $(-13)^{111}$; б) $\left(-\frac{7}{9}\right)^{516}$; в) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{999} : (-9,75)^{111} : (-39,7)^{101}$.

617 Найдите значение выражения $(9a - 4c)(3a - 7c) - (4a + 3c)(2a + 9c)$ при $a = 1$, $c = -1$.

618 Напишите несколько линейных функций, графики которых:

- а) параллельны графику функции $y = 3x + 1$;
 б) пересекаются с графиком функции $y = x - 3$.

Что можно сказать о графиках функций $y = 4x + 1$ и $y = 1 + 4x$?

619 Постройте график $y = 2x - 3$ и определите по графику, как изменяется значение функции y , когда:

- а) x изменяется от 0 до 3;
 б) x изменяется от -2 до 0;
 в) x изменяется от -3 до 1;
 г) x изменяется от 2 до 5;
 д) x равен 0.

Д

620 Найдите решение системы графическим способом:

а)
$$\begin{cases} 2x + y = 5; \\ 3x - 2y = -3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 0,2x + y = 5; \\ x + 5y = 5; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} -x + y = 1; \\ x - y = -1. \end{cases}$$

621

Составьте линейное уравнение с двумя переменными так, чтобы коэффициент при x был равен числу твоего дня рождения, коэффициент при y был равен порядковому номеру месяца твоего рождения, а свободный член являлся годом твоего рождения.

622

Определите знак значения выражения:

а) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{400}$;

б) $22^{44} \cdot (-38,12)^{33}$;

в) $(-7,7)^{531} \cdot (-1,21)^{500}$.

623

Найдите значение выражения $(5 + 3b)(5b - 7) - (4 - 3b)(4b - 3)$ при $b = 2$.

С

624* Может ли произведение двух чисел быть меньше наименьшего из сомножителей?

6.3.3. Алгебраические методы решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными: способ подстановки и способ сложения



Люди, которые имеют много дела с математикой, в конце концов приобретают чувство математического изящества используемых приёмов, они становятся способными чувствовать математическую красоту теорий.

Поль Адриен Морис Дирак (1902–1984),
английский физик-теоретик

В предыдущих пунктах мы видели, что графический метод решения систем линейных уравнений, обладая важнейшим качеством наглядности, оказывается при этом недостаточно точным и надёжным для определения количества решений системы. Часто непригоден он и для самого решения систем: например, мы не сможем найти на координатной плоскости точку пересечения прямых, имеющую координаты $(1\,000\,000; -0,01)$. Поэтому для практического решения задач важно иметь алгебраические методы, позволяющие посредством вычислений быстро и точно находить множество решений систем уравнений.

Вернёмся к рассмотренной в предыдущем пункте задаче, которая привела нас к системе двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} 5x + 9y = 100; \\ y = 5x. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что её решениями являются лишь пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие условию $y = 5x$. Поэтому, подставив в первое уравнение вместо y выражение $5x$, мы получим равносильную систему уравнений, так как множество её решений не изменится. Однако теперь первое уравнение преоб-

разовалось к линейному уравнению с одной переменной, из которого мы легко найдём x . А «подставив» полученное значение x во второе уравнение, найдём искомое значение y :

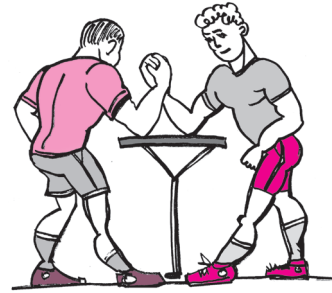
$$\begin{cases} 5x + 9y = 100; \\ y = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 9 \cdot 5x = 100; \\ y = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50x = 100; \\ y = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 5 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 10. \end{cases}$$

Ответ: (2; 10).

Таким образом, процесс решения системы свёлся к последовательной её замене на равносильные системы всё более простого вида. Для этого достаточно в одном из уравнений выразить одну переменную через другую и *подставить* во второе уравнение. Поэтому полученный способ решения систем получил название *способа подстановки*.

Уточним понятие *равносильности* систем уравнений и запишем в общем виде полученный алгоритм их решения.

Определение 1. Две системы уравнений называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.



Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки

1. В одном из уравнений выразить одну переменную через другую.
2. Подставить вместо этой переменной полученное выражение в другое уравнение системы.
3. Решить полученное во втором пункте уравнение с одной переменной.
4. Воспользовавшись найденным значением одной переменной, вычислить значение второй переменной.
5. Записать ответ.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,4x - \frac{1}{3}y = 1; \\ 1\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}y = 3. \end{cases}$$

Решение:

Выразим значение x из первого уравнения системы, подставим полученное выражение во второе уравнение, а затем поэтапно найдём искомые значения x и y :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0,4x - \frac{1}{3}y = 1; \\ 1\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{1}{3}y + 1\right) : 0,4; \\ 1\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6}y + 2\frac{1}{2}; \\ 1\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6}y + 2\frac{1}{2}; \\ 1\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}y + 2\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6}y + 2\frac{1}{2}; \\ \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{6}y + \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6}y + 2\frac{1}{2}; \\ \frac{4}{3}y + 4 + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6}y + 2\frac{1}{2}; \\ \frac{5}{3}y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \cdot (-0,6) + 2,5; \\ \frac{5}{3}y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = -0,6. \end{cases}$$

Ответ: (2; -0,6).

Как мы видим, при решении данной системы уравнений способ подстановки хотя и позволил найти однозначный ответ, но потребовал громоздких преобразований. Естественно, что при решении задач и уравнений мы стремимся максимально упростить свои действия. В данном случае это возможно, если заметить, что коэффициенты при y в исходных уравнениях являются противоположными числами, и вспомнить известные нам свойства чисел.

Так, мы знаем, что если обе части равенства увеличить или уменьшить на одно и то же число, то равенство сохранится. Значит, равенства можно складывать и вычитать.

Опираясь на эти свойства, несложно догадаться, как при решении приведённой выше системы можно более удобно перейти от уравнения с двумя переменными к уравнению с одной переменной: надо просто сложить оба уравнения. Сумма противоположных слагаемых, содержащих y , будет равна нулю. Дальнейшее решение системы будет точно таким же, как и в предыдущем случае, но при этом весь путь преобразований окажется значительно короче, а именно:

$$\begin{cases} 0,4x - \frac{1}{3}y = 1; \\ 1\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4x + 1,6x = 1 + 3; \\ 1,6x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4; \\ 1,6x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4; \\ 1,6 \cdot 2 + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = -0,6. \end{cases}$$

Приведённый способ решения систем называется *способом алгебраического сложения*. Речь здесь идёт именно об *алгебраической* сумме, так как тот же самый способ можно применять и тогда, когда оба уравнения имеют равные слагаемые. В этом случае перейти к уравнению с одной переменной можно, вычитая из одного уравнения другое.

Конечно, далеко не всегда так «везёт», что в уравнениях системы есть равные или противоположные слагаемые. Но довольно часто их можно привести к этому виду, умножая или деля одно или даже оба уравнения на некоторое число, отличное от нуля.

Как мы видели, в алгоритме решения систем линейных уравнений способом алгебраического сложения меняются лишь первые два шага предыдущего алгоритма.

Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом алгебраического сложения

1. Умножить или разделить одно (или оба) уравнения системы на некоторое число, не равное 0, так, чтобы коэффициенты при одной из переменных в обоих уравнениях стали противоположными числами (или совпали).
2. Сложить (вычесть) уравнения.
3. Решить полученное во втором пункте уравнение с одной переменной.
4. Воспользовавшись найденным значением одной переменной, вычислить значение второй переменной.
5. Записать ответ.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} 2x + 3y = 1; \\ 3x + 2y = 8. \end{cases}$

Решение:

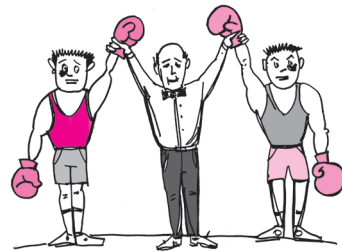
Умножим первое уравнение на 3, а второе на 2, и вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y = 1; \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 3; \\ 6x + 4y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 3; \\ 5y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 3; \\ y = -2,6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9 \cdot (-2,6) = 3; \\ y = -2,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,4; \\ y = -2,6. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (4,4; -2,6).

Итак, при решении систем линейных уравнений можно использовать следующие *равносильные преобразования систем*:

- 1) заменить одно из уравнений системы на равносильное ему уравнение;
- 2) заменить в одном из уравнений системы одну переменную на её выражение через другую переменную, полученное из второго уравнения системы;



- 3) заменить одно из уравнений системы на его алгебраическую сумму с другим уравнением системы.

Какое из равносильных преобразований выбрать в каждом конкретном случае, зависит от вида системы. Конечно, желательно выбирать способ, который сократил бы усилия, предпринятые для получения ответа.

До сих пор мы рассматривали системы двух линейных уравнений с двумя переменными, имеющие единственное решение. Но, как мы уже знаем, данные системы могут вообще не иметь решений либо иметь бесконечно много решений. Рассмотренные способы решения систем «работают» и в этих случаях.

Пример 3. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = 7; \\ 12x - 18y = 20. \end{cases}$

Решение:

Домножим первое уравнение на 6 и вычтем из второго. Система заменится на равносильную:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7; \\ 12x - 18y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7; \\ 12x - 18y - 6(2x - 3y) = 20 - 6 \cdot 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7; \\ 12x - 18y - 12x + 18y = -22. \end{cases}$$

Второе уравнение можно преобразовать к неверному числовому равенству $0 = -22$. Так как последнее уравнение не имеет решения, система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 4. Решить систему $\begin{cases} 2x + 4y = 6; \\ 3x + 6y = 9. \end{cases}$

Решение:

Разделим первое уравнение на 2, а второе – на 3. Получим равносильную систему, уравнения которой совпадают. Значит, исходная система равносильна каждому из данных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6; \\ 3x + 6y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3; \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 3.$$

Следовательно, система имеет бесконечно много решений, где общее решение можно записать в виде $(3 - 2y; y)$, y — любое число.

Ответ: $(3 - 2y; y)$, y — любое число.

К

625 Найдите значение выражения $(d + 3^2 - 3^{111})^2 - 9^2$ при $d = 3^{111}$.

626

1) Можно ли решить данную систему, используя графики:

$$\begin{cases} x + 200y = 70; \\ 2x - 10y = 99? \end{cases}$$

2) Найдите другой способ решения этой системы. Для этого выразите переменную x из первого уравнения. Как можно использовать полученное равенство при решении системы?

3) Используя идею решения этой системы, составьте алгоритм решения систем линейных уравнений с двумя переменными новым способом и сопоставьте его с алгоритмом на с. 139.

627

1) Решите систему способом подстановки:

$$\text{а) } \begin{cases} y = 2x - 1; \\ 5x - 3y = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3a + 5b = 8; \\ a + 2b = 3; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3m - 2n = 5; \\ 2m - n = 2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2x + 3y = 1; \\ 2x - 3y = -5. \end{cases}$$

В каких системах удобно использовать способ подстановки?

2) Найдите другой способ решения последней системы. Сравните коэффициенты при одинаковых переменных. Что интересного вы заметили? Как можно использовать метод «весов» для решения этой системы?

3) Используя идею решения этой системы, составьте ещё один алгоритм решения систем линейных уравнений с двумя переменными. Сопоставьте построенный алгоритм с алгоритмом на с. 140.

628

Решите следующие системы способом алгебраического сложения:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x - 2y = 1; \\ -5x - 4y = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 3y = 1; \\ 3x - 2y = 8; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x + 3y = 1; \\ 4x + 6y = -5; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2x + 3y = 1; \\ 3x + 2y = 1. \end{cases}$$

629

Найдите решение системы:

$$\text{а) } \begin{cases} 1,2x - 2(y + 1) = y - 2; \\ 2(x + y) = 0,5y - 13; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4(3x + 4y) + 16 = 3(5x + 2y); \\ 15x + 2(2y - 3) = 20; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} -\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 0,2; \\ -\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1\frac{2}{3}; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \frac{x+y}{5} = 1; \\ \frac{x-5}{3} - \frac{2-y}{2} = -\frac{7}{6}. \end{cases}$$

630

Вычислите координаты точки пересечения графиков уравнений:

$$\text{а) } 3x - y = 7 \text{ и } 5x - 2y = 1; \quad \text{б) } 7x + 6y = 10 \text{ и } 3x + 5y = -3.$$

631

Задайте формулой линейную функцию, график которой:

- а) проходит через точки $(2; 2)$ и $(1; -1)$;
 б) пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 4, а ось ординат в точке с ординатой 2.

632 Решите системы, используя подходящую замену переменных:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 3; \\ \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 8; \\ \frac{2}{9x} - \frac{1}{3y} = 2; \end{cases}$

в*) $\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5; \\ \frac{2}{x+y} - \frac{9}{y-x} = -1. \end{cases}$

π

633 Найдите остаток от деления 123 456 789 на 11.

634 Сколько различных простых делителей у числа 2772?

635 Найдите НОД (a ; b):

а) $a = 2^2 \cdot 503^{12} \cdot 7^4$, $b = 2^4 \cdot 503 \cdot 13^3$;

б) $a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$, $b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Д

636 Решите систему способом подстановки и способом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases} x + y = 1; \\ x - y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -4x - 6y = -1; \\ 3x - 2y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x + 9y = 3; \\ 4x + 6y = -5. \end{cases}$

637 Решите систему:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + y = 3; \\ \frac{3}{2x} - 2y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 2; \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 7. \end{cases}$

638 Найдите НОД (a ; b):

а) $a = 2^3 \cdot 17 \cdot 431$, $b = 2 \cdot 17^2 \cdot 43$;

б) $a = 2^5 \cdot 7 \cdot 31$, $b = 2 \cdot 7^2 \cdot 31^3$.

С

639* Найдите все целочисленные решения уравнения $121x - 49y = 1$.

Задачи для самоконтроля к главе 6

640 Решите уравнение:

а) $17x + 14 - 25x = 36 - 15x - 29$;

в) $15(2s + 4) = 30(2 - 9s)$;

б) $30 = 12y - 5y + 4y - 7y - 4y + 30$;

г) $14(2r - 6) = 21(r - 4) + 7r$.

641 Найдите корни уравнений:

а) $|x - 5| = 7$;

в) $-|3c - 6| = -|7c + 14|$;

б) $|y - 9| = -12$;

г) $|9k - 8 - 7k| = |5 - 3k + 4 - 6k|$.

642 Равносильны ли уравнения?

а) $4 - 8x = 0$ и $9x = 4,5$;

б) $t(t + 5) = 0$ и $t + 5 = 0$.

643 Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x}{7} - 2 = 9$;

в) $\frac{2s - 1}{7} = 3 - \frac{2s - 3}{2}$;

д) $\frac{3}{p + 7} = \frac{1}{4}$;

б) $\frac{y}{5} = \frac{y}{9} - 2 + \frac{4y}{45}$;

г) $\frac{3q + 4}{3} = \frac{5q + 6}{5} + \frac{2}{15}$;

е) $\frac{n - 1}{n + 3} = \frac{n + 4}{n - 2}$.

Задачи для самоконтроля к главе 6

- 644** В трёх седьмых классах, 7 «А», 7 «Б» и 7 «В», учится 76 школьников. Известно, что в 7 «А» школьников на 5 больше, чем в 7 «Б», и на 3 меньше, чем в 7 «В». Сколько школьников учится в каждом из этих классов?
- 645** При каких значениях переменной:
- а) значение выражения $11b - 9$ равно значению выражения $5b + 7$;
 - б) значение выражения $9c + 21$ противоположно значению выражения $15 - 3c$;
 - в) значение выражения $9y - 5$ на 11 меньше значения выражения $2y + 34$;
 - г) значение выражения $|3s - 9|$ равно значению выражения $|5s + 10|$;
 - д) значение выражения $|3q - 15|$ на 12 меньше значения выражения $|7q + 21|$?
- 646** Докажите, что:
- а) корнем уравнения $9y - 60 = 12(y - 5) - 3y$ является любое число;
 - б) уравнение $|3z| = |3z + 6|$ имеет единственный корень;
 - в) уравнение $|t - 3| + 2 = 0$ не имеет корней.
- 647** Решите уравнение:
- а) $|9 + z| - |2 - z| = -9$;
 - б) $-|6 - 18t| - |2t + 8| = 7$;
 - в) $|5b - 15| = |15 - 5b|$;
 - г) $|z - 2| - |z + 4| + |z - 9| = -5$;
 - д) $|s - 10| = 9 - |s - 3| + |s - 7|$;
 - е) $|2b + 6| + |7b - 14| = |5b + 2|$.
- 648** У Миши есть только консервные банки весом 350 и 420 г. Как ему с их помощью отвесить на чашечных весах за одно взвешивание 9,1 кг гвоздей, используя в общей сложности наименьшее количество банок, если он кладёт банки на одну чашу весов?
- 649** На фабрике по производству соков имеются пакеты вместимостью 0,8 и 1,2 л. Сок разливают в пакеты так, чтобы все пакеты оказались полными. Можно ли разлить в эти пакеты 9,8 л? Какое количество и каких пакетов надо приготовить, чтобы разлить 76 л сока так, чтобы количество всех пакетов было минимальным?
- 650** На станцию привезли 542 тонны бензина в цистернах вместимостью 18 т и 20 т. Все цистерны были полностью загружены. Могло ли получиться так, что цистерн в сумме было: а) 26; б) 28; в) 30; г) 32?
- 651** Равносильны ли неравенства:
- а) $x - 7 < 9$ и $x < 16$;
 - б) $2c - 9 > 17$ и $-c < 13$?
- 652** Решите неравенство:
- а) $1,2k + 1 \geq -3$; б) $-5,2(7 - 2n) > -1,3(7n + 4)$; в) $2,8q - 0,6(8 - q) < 0,5 - 2,3(-2q + 3)$.
- 653** Найдите множество решений неравенства:
- а) $\frac{x}{5} + 7 > 9$; б) $\frac{z}{3} + 2 < \frac{2z}{7} - 1$; в) $\frac{5a - 7}{3} > \frac{2a + 9}{5}$; г) $\frac{2c + 8}{-3} \geq \frac{7 - 3c}{-12}$.
- 654** Докажите, что неравенство верно при всех значениях переменной:
- а) $7(x + 2) - 3x + 10 > 5 - 2(x - 8) + 6x$;
 - б) $|a + 12| \geq -43$.
- 655** Докажите, что данное неравенство не имеет решений:
- а) $9(2y + 7) + 4(y - 5) - 11(2y + 4) > 0$;
 - б) $-|b + 14| \geq 18$.

656 Решите неравенство с модулем:

- а) $|y - 5| > 6$; г) $|5m - 25| \geq |-7m - 21|$;
 б) $-|6a + 7| \geq -5$; д) $|6p - 18| + |3p + 27| > 36$;
 в) $|-4c + 7 - 5c - 4| \geq 3$; е) $13 + |7y - 14| - 9 - |3y + 12| \geq |5 - 2y|$.

657 При каких значениях переменной:

- а) разность значений выражений $5d + 7$ и $6 - d$ меньше 5;
 б) сумма значений выражений $\frac{2z - 3}{-3}$ и $\frac{5 + z}{4}$ отрицательна;
 в) разность значения выражения $|a + 12|$ и числа 7 положительна;
 г) разность значений выражений $|3c - 8|$ и $|c + 6|$ неотрицательна.

658 Оплата за Интернет включает в себя месячную абонентскую плату и плату за каждый скачанный мегабайт. Месячная абонентская плата равна 250 р., а плата за 1 мегабайт равна 17 к. Какое количество мегабайт можно будет скачать в течение месяца, чтобы плата за Интернет не превысила 319 р.?

659 а) На катке дают напрокат коньки и клюшки. Известно, что разность между количеством клюшек и 20% количества коньков равна 60% от суммы количества коньков и 20% количества клюшек. Чего на катке больше – коньков или клюшек, и во сколько раз?

660 Для наполнения бассейна используются три трубы. Через первую трубу пустой бассейн наполняется за 32 часа, через вторую – за 24 часа, а через третью – за 48 часов. За какое минимальное время можно наполнить этот бассейн?

661 Решите уравнение:

- а) $|z + 5| + |z - 6| + |z + 4| + |z - 7| = 8$;
 б) $|3k + 9| - |2k - 8| + |5k + 10| + |6k - 12| = 19$.

662 Найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению:

- а) $x + a = 5$; б) $4x + 2b = 11$; в) $2x = \frac{x}{a} + b$; г) $3x - 2b = \frac{x}{c}$.

663 Решите неравенство:

- а) $|z + 6| + |z - 9| + |z + 4| + |z - 8| < 33$;
 б) $|k + 1| - 4 \geq |k - 11| - |k + 8| + |k + 6|$.

664 Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

- а) $9 + \frac{2x}{5} > \frac{3x}{7} + 12$; $x \in (-28; +\infty)$; б) $5 + 7y - \frac{4y}{3} < \frac{9y}{4} - 2y$; $y \in [-37; 49]$.

665 Целое число даёт при делении на 7 остаток 2, а при делении на 9 – остаток 3. Найдите остаток от деления этого числа на 63.

666 Числа m , n , $\frac{41}{2m + 5n}$ – натуральные. Найдите все пары чисел m и n , для которых это будет верно.

667 Найдите общее решение каждого уравнения:

- а) $\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}y = 16$; в) $5x + 4y = 0$; д) $\frac{13}{15}x - 0y = 39$;
 б) $2x + 5y - 12 = 0,2 \cdot (5x - 75)$; г) $0x - 3y = 9$; е) $0x + 0y = 19$.

Задачи для самоконтроля к главе 6

668 Является ли пара (2; 2) чисел решением уравнения:

а) $\frac{3}{2}x + y - 3 = 0$; б) $\frac{1}{2}x - y + 1 = 0$?

Запишите по два решения для каждого из этих уравнений.

669 График уравнения $\frac{3}{8}x - y + m = 0$; проходит через точку (16; 4). Найдите значение m .

670 Графики каких уравнений имеют общую точку (1; -3):

а) $-5x + y + 8 = 0$;
б) $-5x + y - 13 = 0$;
в) $-3x + y = 0$?

671 Постройте график уравнения:

а) $2x + y = 1$;
б) $\frac{3}{4}x - y - 6 = 0$;
в) $-3x + 0y = 9$;
г) $\frac{2}{3}y - 0x + 4 = 0$.



672 Переведите условие задачи на математический язык:

- а) Бассейн объёмом 480 м³ наполнялся водой поочерёдно из двух труб. Скорость наполнения бассейна из первой трубы 80 м³/ч, – из второй трубы 60 м³/ч. Сколько времени была открыта первая труба, а потом – вторая?
б) В поход вышли 48 туристов. Сколько трёхместных и пятиместных палаток им потребовалось взять с собой, чтобы разместиться всем?
в) Моторная лодка шла по течению реки 2 часа, а против течения – 3 часа. Какова собственная скорость лодки и скорость течения реки?

673 Найдите сумму абсциссы и ординаты точки пересечения графиков уравнений $-2x - y + 8 = 0$ и $-\frac{3}{4}x - y + 3 = 0$.

674 Какая из пар чисел (1; -1), (-1; 1), (2; 1), (1; 2) является решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 3; \\ x + y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = -3; \\ x + y = 0? \end{cases}$

675 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} -3x + y = 2; \\ x - 3y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 1 - 7x; \\ x + 3y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - y = -11; \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y}{3} = 2; \end{cases}$

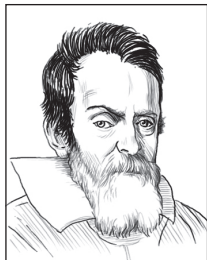
г) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 1; \\ 0,3x - 0,2y = 1,2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}y = 17; \\ 0,8x - 1,8y = 17. \end{cases}$



Глава 7

Введение в статистику

7.1. Способы упорядочивания информации



*Измеряй всё, поддающееся измерению,
и сделай таковым всё, не поддающееся измерению.*

Галилео Галилей (1564–1642),
итальянский физик, математик и философ

В современном мире наличие необходимой информации в нужный момент времени является важным конкурентным преимуществом как для успеха отдельного человека, так и для различных коммерческих и некоммерческих организаций. Большой поток информации обрушивается на нас из всевозможных печатных изданий, радио- и телевизионных передач и, конечно, из Интернета. Для того чтобы информация приносила пользу, её нужно уметь систематизировать, анализировать и делать на её основании выводы, приводящие к достижению поставленных целей.

Одним из хорошо известных нам способов наведения порядка в информации, с которым мы часто встречаемся и в учёбе, и в жизни, являются *таблицы*. Составление таблиц помогает нам проанализировать условие задачи, построить график заданной в таблице зависимости, систематизировать информацию, быстрее найти ответ на интересующий нас вопрос, например нужную телевизионную передачу, ведь программа телевидения – это та же таблица.

Для того чтобы вспомнить, как с помощью таблиц можно ответить на самые различные вопросы, рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. В одной из школ города Москвы с 1999 по 2003 год велись наблюдения за погодой. Ежедневно в 12 часов дня школьники измеряли температуру воздуха. На основании полученных данных была составлена следующая таблица:

Среднемесячная температура воздуха в Москве (в °C)

Месяц Год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1999	–3	–4	+1	+12	+11	+25	+23	+17	+14	+9	–4	–1
2000	–4	–1	–1	+13	+13	+18	+21	+19	+12	+8	+1	–2
2001	–2	–6	–1	+13	+13	+18	+24	+18	+12	+6	+1	–9
2002	–4	+1	+3	+9	+14	+19	+25	+18	+13	+4	–1	–12
2003	–7	–8	–2	+5	+16	+13	+22	+18	+13	+8	+2	–2

Пользуясь представленной информацией, определите:

- 1) Какой была среднемесячная температура воздуха в Москве в августе 2000 г.?
- 2) В какие месяцы среднемесячная температура воздуха была равна +14 °C?
- 3) В какие месяцы среднемесячная температура была наибольшей, наименьшей?

4) В какие месяцы среднемесячная температура была больше $+20^{\circ}\text{C}$?

5) На сколько градусов Цельсия отличалась среднемесячная температура в феврале 1999 г. по сравнению с февралём 2002 г.?

Решение:

1) Для того чтобы определить значение температуры в августе 2000 г., находим в таблице строку, соответствующую 2000 г., и находим столбец, соответствующий августу. На их пересечении мы получаем необходимую для нас информацию: в августе 2000 г. среднемесячная температура воздуха была равна $+19^{\circ}\text{C}$.

Месяц Год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1999	-3	-4	+1	+12	+11	+25	+23	+17	+14	+9	-4	-1
2000	-4	-1	-1	+13	+13	+18	+21	+19	+12	+8	+1	-2
2001	-2	-6	-1	+13	+13	+18	+24	+18	+12	+6	+1	-9
2002	-4	+1	+3	+9	+14	+19	+25	+18	+13	+4	-1	-12
2003	-7	-8	-2	+5	+16	+13	+22	+18	+13	+8	+2	-2

2) Для того чтобы определить, в какие месяцы среднемесячная температура воздуха была равна $+14^{\circ}\text{C}$, находим все клетки таблицы со значением температуры, равным $+14^{\circ}\text{C}$, и определяем, на пересечении какого столбца и какой строки они находятся. Получаем, что среднемесячная температура воздуха была равна $+14^{\circ}\text{C}$ в мае 2002 г. и в сентябре 1999 г.

Месяц Год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1999	-3	-4	+1	+12	+11	+25	+23	+17	+14	+9	-4	-1
2000	-4	-1	-1	+13	+13	+18	+21	+19	+12	+8	+1	-2
2001	-2	-6	-1	+13	+13	+18	+24	+18	+12	+6	+1	-9
2002	-4	+1	+3	+9	+14	+19	+25	+18	+13	+4	-1	-12
2003	-7	-8	-2	+5	+16	+13	+22	+18	+13	+8	+2	-2

3) Сравнивая значения температур в таблице, определяем, что наибольшее среднемесячное значение температуры было равно $+25^{\circ}\text{C}$. Такая температура была в июне 1999 г. и в июле 2002 г. А наименьшее значение -12°C было в декабре 2002 г.

4) Аналогичным образом выбираем из таблицы значения температуры больше $+20^{\circ}\text{C}$ и определяем соответствующие год и месяц: июнь 1999 г. и июль 1999–2003 гг.

5) Для ответа на последний вопрос находим по таблице температуру в феврале 1999 г. (-4°C) и в феврале 2002 г. ($+1^{\circ}\text{C}$). Значит, в феврале 2002 г. среднемесячная температура была на $+1 - (-4) = 5^{\circ}\text{C}$ выше, чем в феврале 1999 г.

Таким образом, при решении задачи 1 таблица помогла нам быстро ответить на поставленные вопросы. Если бы данная информация была представлена в виде обычного текста, то поиск ответа занял бы гораздо больше времени. Тем не менее анализ таблиц не позволяет наглядно показать соотношения между различными величинами.

Быстро определить наибольшие и наименьшие значения величин, сравнить данные в разные периоды времени, а также ответить на многие аналогичные вопросы

позволяют такие уже известные нам способы графического представления информации, как графики зависимостей, столбчатые и круговые диаграммы.

Для того чтобы уточнить алгоритмы построения столбчатых и круговых диаграмм, решим следующую задачу.

Задача 2. В понедельник книжный магазин получил выручку в размере 10 тыс. р., во вторник – 45 тыс. р., в среду – 70 тыс. р., в четверг – 25 тыс. р., а в пятницу – 30 тыс. р. По указанным данным постройте столбчатую и круговую диаграммы.

Решение:

В задаче дана информация о величине выручки в каждый из дней недели с понедельника по пятницу. Упорядочим эту информацию с помощью таблицы:

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт
Выручка, тыс. р.	10	45	70	25	30

Мы знаем, что столбчатая диаграмма показывает зависимость между значениями величин с помощью высоты столбиков. Для того чтобы их построить, отметим на горизонтальной оси дни недели, в которые подсчитывалась выручка магазина, а на вертикальной – значение выручки в эти дни. Затем поставим в соответствие каждому дню недели столбик соответствующей высоты (рис. 29).

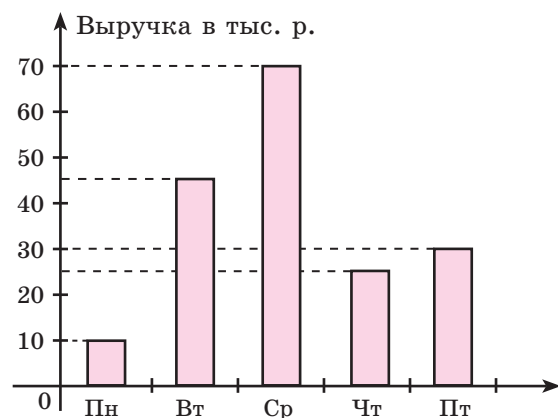


Рис. 29

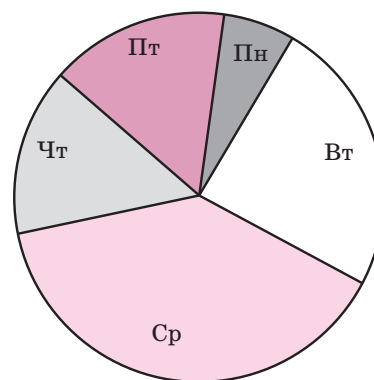


Рис. 30

Таким образом, алгоритм построения столбчатой диаграммы включает следующие шаги:

Алгоритм построения столбчатой диаграммы

1. Выбрать масштаб по осям координат.
2. Отметить на горизонтальной оси значения независимой величины.
3. Отметить на вертикальной оси соответствующие значения зависимой величины.
4. Для каждого значения независимой величины построить столбик, высота которого равна соответствующему значению зависимой величины.

Что касается круговых диаграмм, то они показывают зависимость между значениями величин с помощью величин центральных углов круга.

При построении круговой диаграммы предполагается, что сумма всех зависимых величин соответствует 360° , а доля каждой зависимой величины в их общей сумме

отображается с помощью соответствующего центрального угла. Поэтому *алгоритм построения круговой диаграммы* состоит из следующих шагов:

Алгоритм построения круговой диаграммы

1. Найти сумму всех зависимых величин ($S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$).
2. Найти долю каждой зависимой величины в общей сумме ($\frac{a_i}{S}$, $i = 1, \dots, n$).
3. Вычислить величину центрального угла, соответствующую доле каждой зависимой величины ($360^\circ \cdot \frac{a_1}{S}$, $360^\circ \cdot \frac{a_2}{S}$, ..., $360^\circ \cdot \frac{a_n}{S}$).
4. Построить центральные углы, соответствующие каждой зависимой величине.

Пользуясь данным алгоритмом, построим круговую диаграмму по условию нашей задачи. Вначале вычислим сумму S (в тыс. р.) всех зависимых величин:

$$S = 10 + 45 + 70 + 25 + 30 = 180.$$

Найдём долю каждой зависимой величины в общей сумме и запишем в исходную таблицу:

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт
Выручка, тыс. р.	10	45	70	25	30
Доля выручки, S	$\frac{10}{180} = \frac{1}{18}$	$\frac{45}{180} = \frac{1}{4}$	$\frac{70}{180} = \frac{7}{18}$	$\frac{25}{180} = \frac{5}{36}$	$\frac{30}{180} = \frac{1}{6}$
Величина соответствующего центрального угла	$360^\circ \cdot \frac{1}{18} = 20^\circ$	$360^\circ \cdot \frac{1}{4} = 90^\circ$	$360^\circ \cdot \frac{7}{18} = 140^\circ$	$360^\circ \cdot \frac{5}{36} = 50^\circ$	$360^\circ \cdot \frac{1}{6} = 60^\circ$

После построения указанных центральных углов мы получаем круговую диаграмму, приведённую на рис. 30.

К

676

В таблице приведены данные о численности населения Российской Федерации в 2002–2009 гг.

Численность населения Российской Федерации на 1 января, млн человек

Федеральный округ \ Год	Год							
	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Центральный	38,1	37,9	37,7	37,5	37,4	37,2	37,2	37,1
Северо-Западный	14,1	13,9	13,8	13,7	13,6	13,5	13,5	13,5
Южный	22,9	22,9	22,8	22,8	22,8	22,8	22,8	22,9
Приволжский	31,3	31,1	30,9	30,7	30,5	30,3	30,2	30,2
Уральский	12,4	12,4	12,3	12,3	12,2	12,2	12,2	12,3
Сибирский	20,2	20,0	19,9	19,8	19,7	19,6	19,6	19,5
Дальневосточный	6,7	6,7	6,6	6,6	6,5	6,5	6,5	6,5
Всего	145,6	145,0	144,2	143,5	142,8	142,2	142,0	141,9

Пользуясь представленной информацией, определите:

- 1) Какой была численность населения в Сибирском федеральном округе в 2007 г., в Приволжском федеральном округе в 2003 г.?
- 2) В каком из федеральных округов и на какую дату численность населения была равна 6,5 млн человек, 12,4 млн человек?
- 3) В каком из федеральных округов численность населения была наибольшей в 2009 г.?
- 4) В каком из федеральных округов численность населения была наименьшей в 2005 г.?
- 5) В каких федеральных округах и на какую дату численность населения была больше 31 млн человек?
- 6) В каких федеральных округах и на какую дату численность населения была меньше 13 млн человек?
- 7) Как изменилась общая численность населения РФ с 1.01.03 по 1.01.09?

677

В таблице приведено расписание авиарейсов из аэропорта Домодедово (Москва). Прилёт всех указанных рейсов происходит в день их вылета.

Расписание авиарейсов из аэропорта Домодедово (Москва)

Номер рейса	Пункт назначения	Время вылета (московское)	Время прилёта (московское)
OS606	Вена	05:35	08:50
NN335	Барселона	08:40	13:20
UN255	Алматы	10:50	15:20
S716	Челябинск	11:10	13:25
C7905	Ереван	11:55	14:55
UA965	Вашингтон	12:20	23:15
UN353	Лондон	15:00	19:10
LH3199	Дюссельдорф	16:10	19:40
EK314	Дубай	16:55	22:00
LX1337	Женева	18:30	22:20
LH3187	Франкфурт-на-Майне	19:35	22:55

Пользуясь представленной информацией, определите:

- 1) В какое время вылетает рейс в Челябинск?
- 2) В какое время вылетает рейс LH3199?
- 3) Чему равно московское время прилёта в Дубай рейса EK134?
- 4) Чему равна длительность полёта в Барселону?
- 5) Какие рейсы улетают из Домодедово в период с 16:00 до 22:00?
- 6) Какой рейс среди представленных имеет наименьшую длительность полёта? Чему равна длительность этого полёта?
- 7) В каком рейсе среди представленных длительность полёта наибольшая? Чему она равна?
- 8) Какой рейс длится 4,5 часа; 3 часа?
- 9) В какие города надо лететь больше 3 часов, но меньше 5 часов?
- 10) Полёт в какие города занимает более 5 часов?

Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую зависимость длительности полёта от выбранного пункта назначения.

- 678** В таблице представлена информация о проданных в течение одного рабочего дня товарах.

Отчёт о продажах в магазине канцелярских товаров 21.04.2011

№ п/п	Наименование ассортиментной позиции	Единица измерения	Цена единицы товара	Количество продан- ных единиц товара
1	Бумага «Снегурочка»	пачка	125 р.	15
2	Тетрадь общая 48л.	штука	38 р.	40
3	Ручка шариковая, синяя	штука	5,2 р.	75
4	Дырокол	штука	60 р.	30
5	Фломастеры (6 цветов)	набор	40 р.	45
6	Карандаш с ластиком	штука	3 р.	120
7	Файлы (100 шт.)	упаковка	159 р.	35

Используя представленную информацию, определите:

- 1) Какой из проданных товаров является самым дорогим, самым дешёвым?
- 2) Какую сумму денег получили за продажу тетрадей?
- 3) За какой товар была получена самая большая выручка, самая маленькая выручка?
- 4) Сколько денег было получено от всех продаж в этот день?
- 5) Сколько единиц товара было продано в этот день?
- 6) Какой товар составил самую большую долю в продажах (в рублях)? самую маленькую долю в продажах?

Постройте круговую диаграмму, показывающую долю продаж каждого наименования в общих продажах магазина канцелярских товаров 21.04.2011.

- 679** В таблице приведены данные о температуре морской воды в некоторых городах в 14 часов 10.03.2010.

Температура морской воды 10.03.2010

№ п/п	Название моря	Название города, в котором проводились измерения	Температура, °С
1	Адриатическое море	Пескара	12,8
2	Азовское море	Приморско-Ахтарск	1
3	Балтийское море	Гданьск	3,1
4	Ионическое море	Кротоне	13,5
5	Ирландское море	Ливерпуль	6
6	Критское море	Ираклион	16
7	Лигурийское море	Сан-Ремо	12,8
8	Мраморное море	Стамбул	9
9	Средиземное море	Родос	16,4
10	Тирренское море	Неаполь	13,4
11	Чёрное море	Сочи	9,5
12	Эгейское море	Наксос	15,7

Используя приведённые данные, определите:

- 1) Какой была наименьшая температура морской воды, в каком море это было и в каком городе?
- 2) Какой была наибольшая температура морской воды, в каком море это было и в каком городе?
- 3) В каком городе и в каком море температура морской воды была равна 13,5 °С?
- 4) В каких городах и в каких морях температура воды была больше 10 °С? Меньше 12 °С?
- 5) Какой была температура воды в Ирландском море в Ливерпуле?

Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую связь температуры морской воды и городов, в которых проводили её измерение.

680

В Интернете был проведён социологический опрос, посвящённый вопросам образования. Постройте круговые диаграммы, иллюстрирующие результаты, полученные после анализа ответов участников опроса.

а) Вопрос: Какие школьные предметы кажутся вам наиболее важными?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Математика, физика, информатика	20%
Физика, химия, биология, география	10%
Русский язык, литература, иностранные языки	25%
Все предметы одинаково важны	45%

б) Вопрос: В какой момент можно прекращать свое образование?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
После окончания школы	5%
После окончания профессионального училища	5%
После окончания высшего учебного заведения	20%
Образование не должно прекращаться	70%

в) Вопрос: Есть ли у вас высшее образование?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Да	35%
Нет	15%
Учусь в вузе	40%
Имею два высших образования	10%

г) Вопрос: Что является для вас наиболее важным при выборе будущей профессии?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Интерес к будущей деятельности	50%
Престиж и доходность будущей специальности	20%
Возможность последующего трудоустройства	15%
Советы родителей и друзей	10%
Другое	5%

П**681** Найдите ошибки в следующем рассуждении.

Рассмотрим уравнение $3(x - 5) = 0$. Разделим обе его части на $x - 5$, получим: $\frac{3(x - 5)}{x - 5} = \frac{0}{x - 5}$. Правая часть равенства равна 0, а левая после сокращения на $x - 5$ равна 3. Значит, $3 = 0$.

682Найдите неполное частное и остаток при делении на (-6) следующих чисел:а) 0; б) 15; в) 22; г) 37; д) -35 ; е) 58.**683**

Найдите решение системы графическим способом. Проверьте себя способом подстановки.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 4y = -11; \\ 2x - y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 3y = 4,5; \\ x - y = 0,5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x + 6y = 3; \\ x + 3y = 1,5; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x + y = 8; \\ 9x + 3y = 12. \end{cases}$$

684

Какую сумму денежных средств нужно положить в банк, чтобы получить через 3 года доход в размере 40 492,8 р., если банк предлагает разместить вклады под 12% годовых?

685

Выручка компании за последние 5 лет ежегодно увеличивалась на 20%. Определите, на сколько процентов увеличилась годовая выручка компании за эти 5 лет.

686Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy и после этого постройте график:а) $f(x) = 5x + 10$; б) $f(x) = 4,5x - 9$; в) $f(x) = 2,2x + 11$.**687**

Упростите выражения, выполняя равносильные преобразования:

а) $-7y - (-4x - (5y - 6x - 7z)) - (8x - 9z - 3y)$;

б) $-(5m + 9n) - (13n - (8m + 4n)) + (7m - (3n - 8m)) - (12m - 10n)$.

688

В таблице значений некоторой линейной функции два значения из пяти заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их.

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	7	-2	3	-4	-5

б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-9	5	3	1	7

689

Найдите значение буквенного выражения при указанных значениях букв:

а) $(2x - (3y - 7x)) - 6x + 2y - (3x - (5y - (4x - (2x + 7y)) - 2y))$, если $x = 3$, $y = -1$;б) $x - ((5x - 4y) - 2z) + 6x - 2(6y - (9x - 7z)) + 4y + (3y - 4(-3z + 5x))$, если $x = 0,2$; $y = 0,1$; $z = 0,4$.**Д****690** В таблице приведено расписание движения автобусов от московского автовокзала. Прибытие всех указанных маршрутов в пункт назначения происходит в день их отбытия из Москвы.

Пользуясь представленной информацией, определите:

1) В какое время автобус отправляется в Десногорск? В какое время прибывает автобус во Владимир?

2) Чему равна длительность поездки в Брянск, в Переславль?

3) Какие автобусы отходят от автовокзала в период с 14:00 до 19:00?

4) Поездка в какой из указанных городов требует меньше всего времени, больше всего времени?

- 5) В какой город надо ехать 5,5 часа?
- 6) В какие города поездка длится больше двух часов, но меньше 5 часов?
- 7) С какой средней скоростью (с точностью до единиц) движется автобус по маршруту Москва–Муром?
- 8) На каких маршрутах средняя скорость движения (с точностью до единиц) больше или равна 50 км/ч?

Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую зависимость длительности поездки от выбранного пункта назначения.

Расписание движения автобусов от московского автовокзала

№ п/п	Пункт назначения	Отправление из Москвы	Прибытие в место назначения	Длина маршрута, км
1	Алексин	08:15	12:15	195
2	Рыбинск	09:00	17:00	348
3	Переславль	09:30	12:30	134
4	Брянск	10:00	19:20	448
5	Гусь-Хрустальный	11:00	16:10	253
6	Иваново	12:00	18:00	290
7	Муром	13:30	19:50	313
8	Десногорск	15:50	23:50	402
9	Гаврилов-Ям	16:45	22:00	258
10	Касимов	18:20	23:50	301
11	Владимир	19:45	23:15	178

691

В таблице представлена информация о проданных в течение одного рабочего дня товарах.

Отчет о продажах в магазине бытовой техники 30.04.2011

№ п/п	Наименование ассортиментной позиции	Единица измерения	Цена единицы товара	Количество проданных единиц товара
1	Чайник электрический	штука	570 р.	130
2	Мясорубка	штука	2590 р.	55
3	Блендер	штука	660 р.	30
4	Тостер	штука	1140 р.	45
5	Весы кухонные	штука	680 р.	35
6	Пресс для цитрусовых	штука	820 р.	40
7	Миксер	штука	900 р.	25

Используя представленную информацию, определите:

- 1) Какой из проданных товаров является самым дорогим, самым дешёвым?
- 2) Какую сумму денег получили за продажу тостеров?
- 3) За какой товар была получена самая большая выручка, самая маленькая выручка?
- 4) Сколько денег было получено от всех продаж в этот день?
- 5) Сколько единиц товара было продано в этот день?
- 6) Какой товар составил самую большую долю в продажах (в рублях)? самую маленькую долю в продажах?

Постройте круговую диаграмму, показывающую долю продаж каждого наименования в общих продажах в течение рассматриваемого дня.

- 692** В таблице приведены данные о температуре воздуха в некоторых городах в 13 часов дня 12.03.2010:

Температура воздуха 12.03.2010

№ п/п	Название города	Температура, °С	№ п/п	Название города	Температура, °С
1	Алжир	+10	8	Лиссабон	+10
2	Афины	+14	9	Мадрид	+5
3	Брюссель	+4	10	Минск	−1
4	Вена	+3	11	Москва	0
5	Дублин	+7	12	Неаполь	+9
6	Кёльн	+2	13	Ницца	+18
7	Лимассол	+22	14	Цюрих	−2

Используя приведенные данные, определите:

- 1) В каком городе была наименьшая температура воздуха и чему она была равна?
- 2) В каком городе была наибольшая температура воздуха и чему она была равна?
- 3) В каком городе температура воздуха была равна +10 °С?
- 4) В каких городах температура воздуха была больше +5 °С, меньше +2 °С?
- 5) Какой была температура воздуха в Вене?
- 6) На сколько градусов отличалась температура воздуха в Мадриде от температуры воздуха в Цюрихе?
- 7) В каких городах температура воздуха отличалась на 2 °С?

Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую зависимость температуры воздуха от города, в котором проводили её измерение.

- 693** В Интернете был проведен социологический опрос, посвященный вопросам, связанным с киноискусством. Постройте круговые диаграммы, иллюстрирующие результаты, полученные после анализа ответов участников опроса.

- а) Вопрос: Хотели бы вы, чтобы ваш ребёнок был актёром, актрисой?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Конечно, буду настаивать на этом	10%
Ни за что не позволю ему это сделать	10%
Да, если ребёнок захочет этого	55%
Пусть сначала получит нормальную профессию	25%

- б) Вопрос: Если бы вы были режиссёром, то какой фильм сняли?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Экранизацию произведения классиков литературы	10%
Комедию	20%
Фильм о человеке	40%
Фильм для детей	10%
Другой фильм	20%

694 Найдите неполное частное и остаток при делении на (-8) следующих чисел:

- а) 0; в) 14; д) 23; ж) 35; и) -39 ; л) 53;
б) 12; г) -7 ; е) -15 ; з) -27 ; к) 44; м) -59 .

695 Какую сумму денежных средств нужно положить в банк, чтобы получить через 2 года доход в размере 12 720 р., если банк предлагает разместить вклады под 12% годовых?

696 Коммерческий банк выплачивает доход по вкладам на следующих условиях:

Срок вклада	≥ 6 месяцев < 1 года	≥ 1 год < 1,5 года	$\geq 1,5$ года < 2 года	≥ 2 года
Годовая процентная ставка	8%	9%	10%	12%

При этом проценты по вкладу рассчитываются по формуле: $\frac{ВГ \cdot ГП \cdot М}{12}$, где $ВГ$ – сумма вклада на начало года; $ГП$ – соответствующая годовая процентная ставка; $М$ – число полных месяцев, на которые был размещён вклад. Если вклад был размещён в банке в течение целого года, то годовые проценты по нему присоединяются к общей сумме вклада (капитализируются).

Какой процентный доход может получить вкладчик, разместивший на депозите 70 000 р., через: 1) 9 месяцев; 2) 1 год; 3) 1 год 6 месяцев; 4) 2 года, если он в течение указанного срока не будет снимать деньги со своего счёта?

697 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy и после этого постройте график:

- а) $f(x) = 6x + 9$; б) $f(x) = -3,5x - 7$; в) $f(x) = -5x + 2,5$.

698 Упростите выражения, выполняя равносильные преобразования:

- а) $-((17a - 12b) - (5a - 7b)) - ((14b - 9a) - (15a + 8b))$;
б) $4m + 6n - (7n - 2(3m + 5n)) - (6m - (5n - 2m)) - (4m + 8n)$.

699 В таблице значений некоторой линейной функции два из пяти значений заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их:

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	2	-4	6	8	1

б)

x	-2	-1	0	1	2
y	10	-2	4	1	8

700 Найдите значение буквенного выражения при указанных значениях букв:

- а) $5x - (8y - 5x) - 9x + 6y - (7x - (8y - (2x - (6x - 4y)) - 5y))$, если $x = 2$, $y = -2$;
б) $4p + 5(p - 2q) - 6p^2 - 8q^2 + 7pq - 2(2pq - 3p^2 - 4q^2) - 3pq - 9p$, если $p = 3$, $q = -1$.

701 Решите неравенство $|x + a| - |x - b| < c$:

$$a = ((2779,6 + 8024,4) : (1,98 + 2,02) - 701) \cdot 0,001;$$

$$b = (14,068 + 15,78) : (1,875 + 0,175) : (0,325 + 0,195) : 4;$$

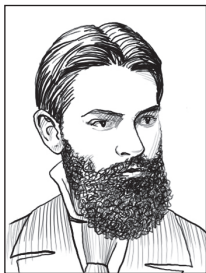
$$c = \left(\frac{90,09 : 91 + 3,774 : 0,34}{232,31 : 17,87 + 186,85 : 5,05} - 0,0418 \right) \cdot 10.$$



702* В цистерне больше 10 л воды. Как отмерить 6 л воды, если имеются канистра ёмкостью 5 л и ведро ёмкостью 9 л?

703* В вазе лежит 50 конфет: ириски и шоколадные конфеты. Среди любых 22 из них хотя бы одна конфета шоколадная, а среди любых 30 из них хотя бы одна конфета ириска. Сколько ирисок и сколько шоколадных конфет в этой вазе?

7.2. Статистические характеристики



Если аксиоматический метод является стилем современной математики, то потребности практики... являются её фундаментом.

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918),
русский математик и механик

Работа с информацией настолько важна для развития общества, что этому процессу посвящена отдельная наука, занимающаяся сбором, измерением, обработкой и анализом разнообразных количественных и качественных данных. Эта наука получила название **статистика** от латинского слова *status* («положение вещей»).

Статистика изучает, в частности, динамику численности населения и производства продукции, объёмы запасов полезных ископаемых и многое другое. Математические методы систематизации и анализа данных изучает *математическая статистика*.

В математической статистике для описания и анализа имеющихся числовых данных используются *статистические характеристики*. С одной из них – средним арифметическим – вы уже знакомы. В этом пункте мы познакомимся с некоторыми другими важными характеристиками систем числовых данных.

Но прежде всего уточним понятие среднего арифметического нескольких чисел.

Определение 1. *Средним арифметическим нескольких чисел* называется результат деления суммы этих чисел на их количество.

Вычислим, например, среднее арифметическое ежегодного производства мопедов в Российской Федерации в 1999–2008 гг. Для этого используем данные следующей таблицы.

Количество мопедов, произведённых в Российской Федерации за год

Год	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Количество мопедов	4816	3761	3143	2515	1699	1470	2211	768	4662	4347

Чтобы найти среднее арифметическое чисел, представленных в таблице, надо сумму этих чисел разделить на их количество.

Сумма данных чисел равна:

$4816 + 3761 + 3143 + 2515 + 1699 + 1470 + 2211 + 768 + 4662 + 4347 = 29\,392$,
а их количество 10. Следовательно, среднее арифметическое данных чисел равно

$$\frac{29\,392}{10} = 2939,2 \approx 2939.$$

Значит, если бы с 1999 по 2008 г. выпускали ежегодно примерно 2939 мопедов, то тем самым обеспечили бы реальный объём производства.

Среднее арифметическое имеет достаточно широкое применение. Например, этот показатель используется для плановых расчётов. Так, чтобы запланировать общие за-

траты времени на производство некоторого объёма продукции *среднее* время изготовления единицы продукции умножают на количество выпускаемых единиц.

Однако данная характеристика не является достаточной для полноценного анализа числового набора. Так, например, она не даёт представлений о том, в каких пределах изменяются значения исследуемой величины. Поэтому в статистике для наборов чисел вводятся и другие характеристики: **наибольшее** и **наименьшее значения набора чисел**, **размах набора чисел**.



Определение 2. *Размахом набора чисел* называется разность между наибольшим и наименьшим числом из этого набора.

Таким образом, размах даёт представление о разбросе числовых данных, то есть показывает максимальное значение, на которое числа в некотором наборе отличаются друг от друга.

Например, из приведённой выше таблицы выпуска мопедов мы можем сделать следующие выводы:

1) наименьшее ежегодное производство мопедов в 1999–2008 гг. составляет 768 мопедов в год, а наибольшее – 4816 мопедов в год;

2) размах данного числового набора составляет $4816 - 768 = 4048$ мопедов.

Ясно, что величина размаха зависит только от наибольшего и наименьшего значений в наборе чисел и не характеризует, как сильно отличаются друг от друга остальные числа этого набора. Чтобы проанализировать разброс данных внутри набора, в статистике используется еще одна характеристика – **дисперсия** (см. № 710). Её подробным изучением мы займемся в 8 классе.

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Задача 1. В результате диспансеризации, проведённой в седьмых классах, школьный врач получил следующую информацию о весе семиклассников:

Вес, кг	Число учеников с данным весом	Вес, кг	Число учеников с данным весом	Вес, кг	Число учеников с данным весом
35	1	42	3	48	3
36	1	43	3	49	1
38	3	44	14	50	3
39	1	45	3	51	1
40	3	46	3	52	1
41	3	47	2	55	1

Вычислите средний арифметический вес семиклассников в этой школе, наибольшее и наименьшее значения их веса, размах в указанном числовом наборе.

Решение:

Наименьшее значение веса семиклассников равно 35 кг, наибольшее – 55 кг, а размах числового набора равен разности между наибольшим и наименьшим значениями, то есть $55 - 35 = 20$ кг.

Для того чтобы найти среднее арифметическое, надо вычислить общий вес всех семиклассников и разделить его на число семиклассников.

Общий вес всех семиклассников равен:

$$(35 + 36 + 39 + 49 + 51 + 52 + 55) \cdot 1 + 47 \cdot 2 + (38 + 40 + 41 + 42 + 43 + 45 + 46 + 48 + 50) \cdot 3 + 44 \cdot 14 = 317 + 94 + 1179 + 616 = 2206 \text{ (кг)}.$$

Количество семиклассников равно 50. Значит, среднее арифметическое равно

$$\frac{2206}{50} = 44,12 \text{ (кг)}$$

Ответ: средний арифметический вес семиклассников равен 44,12 кг.

В данной задаче в таблице весов также обращает на себя внимание значение 44 кг, так как в отличие от других значений веса оно встречается чаще всего – у 14 учащихся. Такую статистическую характеристику, дающую представление о наиболее часто встречающемся в числовом наборе значении, также бывает важно знать. Её называют *модой набора чисел*.



Определение 3. Модой набора чисел называется число, наиболее часто встречающееся в числовом наборе.

У набора чисел может не быть моды, если все числа в наборе встречаются одинаковое число раз.

Так, например, в наборе чисел, характеризующем ежегодный выпуск мопедов в РФ с 1999 по 2008 г., моды нет, так как все числа встречаются в нём по одному разу.

В некотором наборе чисел может быть несколько мод. Действительно, в наборе чисел:

1, 9, 39, 39, 9, 45, 58

две моды – число 9 и число 39, так как и то, и другое число встречаются в указанном наборе по два раза. А остальные числа встречаются лишь один раз.

На практике вычисление среднего арифметического, наибольшего и наименьшего значения, размаха и моды наборов чисел мы производим очень часто.

Так, мы определяем, кто пробежал дистанцию быстрее, а кто медленнее, и какой была разница между этими результатами. Тем самым мы вычисляем наибольшее и наименьшее значения и размах числового набора. Нам интересно, каких оценок за контрольную было больше всего, и тем самым мы вычисляем моду набора чисел. А получив, например, на соревнованиях команд школьного КВН различные оценки пяти судей, нас интересует средний балл, который мы в итоге заработали, поэтому мы вычисляем среднее арифметическое полученных оценок.



Для удобства анализа набора чисел его можно упорядочить, например по возрастанию (точнее, неубыванию). Рассмотрим пример. В таблице выписано количество наград, полученных в этом году семиклассниками, представлявшими школу на различных спортивных соревнованиях.

Ученик	Вова	Коля	Аня	Сёма	Костя	Маша	Оля	Алина	Рита
Количество наград	1	6	0	9	8	2	5	2	3

Упорядоченный по неубыванию набор чисел выглядит следующим образом:

0, 1, 2, 2, 3, 5, 6, 8, 9.

С помощью упорядоченной записи гораздо проще анализировать представленные данные. Например, найти минимальное и максимальное значения для вычисления *размаха набора*: $9 - 0 = 9$. А также определить типичное количество наград, полученное этими семиклассниками, – *моду набора*, равную 2.

Упорядоченный ряд чисел позволяет также легко находить число, стоящее посередине ряда. В рассматриваемом нами ряду это число 3, так как слева и справа от него ровно по 4 числа. В статистике его принято называть *медианой набора* (от лат. *mediana* – средняя).

Если количество чисел в ряду чётное, то медиану рассчитывают как среднее арифметическое двух чисел, находящихся посередине. Например, числовой набор наград, полученных мальчиками, состоит всего из четырёх чисел: 1, 6, 8, 9. Медиана в этом случае равна среднему арифметическому чисел 6 и 8: $\frac{6 + 8}{2} = 7$.

Для чего же нужно выделять эти «серединные» числа, если уже существует такая характеристика, как среднее арифметическое?

Дело в том, что среднее арифметическое далеко не всегда реалистично отражает ситуацию. Пусть, например, на малом предприятии работают 9 человек, причём 8 из них получают зарплату 40 000 р., а один человек – 400 000 р. Среднее арифметическое всех этих зарплат – 80 000 р. – в два раза больше, чем реальная зарплата, и в 5 раз меньше, чем особая зарплата самого ценного сотрудника. А медиана 40 000 р. показывает, сколько реально заработать за месяц работы на этом предприятии:

40 000, 40 000, 40 000, 40 000, 40 000, 40 000, 40 000, 40 000, 400 000.

Таким образом, медиана устойчива к «выбросам» (особым случаям) и гораздо лучше отражает реальное положение дел, чем среднее арифметическое.

Определение 4. *Медианой набора чисел* называется число, стоящее посередине в упорядоченном по возрастанию ряду этих чисел (если их количество нечётно) или среднее арифметическое чисел, стоящих на средних местах в упорядоченном наборе этих чисел (если их количество чётно).

Рассмотрим пример нахождения медианы набора.

Задача 2. В таблицу выписан рост десяти учащихся 7 класса.

Ученик	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рост (см)	154	162	161	159	164	173	161	168	157	167

Найти медиану данного набора чисел.

Решение:

Упорядочим по неубыванию представленный в таблице набор чисел:

154, 157, 159, 161, 161, 162, 164, 167, 168, 173.

В этом наборе десять чисел, посередине на 5-м и 6-м местах стоят числа 161 и 162. Отсюда, медиана этого набора чисел равна $\frac{161 + 162}{2} = 161,5$.

Ответ: 161,5.

Если набор чисел велик, то при поиске медианы удобнее работать с номерами чисел в упорядоченном ряду. Ясно, что для семи чисел медиана стоит на четвёртом месте (до неё и после неё – по три числа), для девяти – на пятом и т. д. Тогда если n – количество чисел в наборе, то среднее число стоит на месте с номером $(n - 1) : 2 + 1$.

Если количество чисел в наборе чётно, то мы рассматриваем два числа, «стоящих в центре», например для 8 чисел это будут числа, стоящие на 4 и 5 местах (до них и после них стоит по три числа). Тогда, чтобы вычислить медиану, нам нужно найти среднее арифметическое чисел, стоящих на местах $n : 2$ и $n : 2 + 1$, (n – количество чисел в наборе).

В результате мы приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм нахождения медианы набора чисел

1. Определить n – количество чисел в наборе.
2. Записать числа набора в порядке неубывания.
3. Пронумеровать подряд все числа упорядоченного набора, обозначив номером 1 меньшее число. Полученные номера – это места чисел в наборе.
4. Если n – нечётно, то медиана равна числу, расположенному в упорядоченном наборе на месте с номером $(n - 1) : 2 + 1$, если n – чётно, то медиана равна среднему арифметическому чисел, стоящих в упорядоченном наборе на местах с номерами $n : 2$ и $n : 2 + 1$.
5. Записать ответ.

Рассмотрим задачу, иллюстрирующую алгоритм нахождения медианы числового набора в этом случае.

Задача 4. Найдите медиану числового набора: 923; 138; 915; 6; 13; 57; 149; 61.

Решение:

В указанном наборе 8 чисел. Значит, $n = 8$ и n – чётно. Расположим числа набора в порядке возрастания:

Число	6	13	57	61	138	149	915	923
Место	1	2	3	4	5	6	7	8

На месте с номерами $8 : 2 = 4$ и $8 : 2 + 1 = 5$ находятся числа 61 и 138. Найдём их среднее арифметическое:

$$(61 + 138) : 2 = 99,5.$$

Значит, по определению, медианой этого набора является число 99,5.

Ответ: 99,5.

Заметим также, что если в числовом наборе имеются одинаковые числа, то способ нахождения медианы не изменится. Просто при упорядочивании набора мы должны будем записать одинаковые числа одно за другим.



К

704 Вычислите с точностью до десятых среднее арифметическое чисел:

- а) 26, 35, 37, 42, 43; в) 12, 32, 44, 68, 95, 112, 139, 215;
 б) 8, 48, 51, 63, 78, 95; г) 8, 24, 25, 31, 32, 33, 48, 52, 69, 72, 85.

705

1) В таблице приведены данные о ежегодном производстве в Российской Федерации в 1998–2008 гг. паровых турбин в штуках.

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Турбины паровые	26	25	19	19	28	26	32	37	24	35	38

Вычислите среднее годовое производство паровых турбин с точностью до единиц.

2) Какие ещё характеристики указанного набора чисел вы могли бы предложить? Сравните свои варианты со статистическими характеристиками, приведёнными в учебнике на с. 159–162.

706

В таблице представлена информация о численности (млн человек) постоянного населения в некоторых регионах Российской Федерации на 1 января 2002–2009 гг.

Год	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Владимирская область	1,54	1,52	1,50	1,49	1,47	1,46	1,45	1,44
Ивановская область	1,16	1,14	1,13	1,11	1,10	1,09	1,08	1,07
Костромская область	0,74	0,73	0,73	0,72	0,71	0,70	0,70	0,69
Курская область	1,25	1,23	1,21	1,20	1,18	1,17	1,16	1,16
Московская область	6,61	6,62	6,62	6,63	6,63	6,65	6,67	6,71
Орловская область	0,87	0,86	0,85	0,84	0,83	0,83	0,82	0,82
Смоленская область	1,06	1,05	1,03	1,02	1,01	0,99	0,98	0,97
Тверская область	1,49	1,47	1,44	1,43	1,41	1,39	1,38	1,37
Ярославская область	1,38	1,36	1,35	1,34	1,33	1,32	1,32	1,31
г. Москва	10,27	10,39	10,39	10,41	10,43	10,44	10,47	10,51

1) Вычислите среднегодовую численность населения (с точностью до сотых миллиона) в каждом из представленных регионов за 2002–2009 гг.

2) В какие годы численность населения была наибольшей, а в какие – наименьшей в следующих регионах:

- а) в Ивановской области; в) в Орловской области;
 б) в Московской области; г) в Москве.

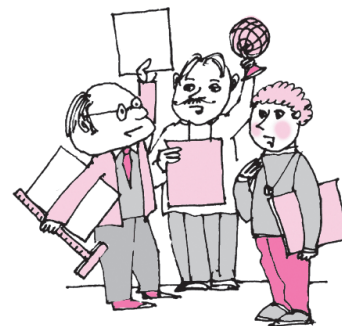
3) Вычислите размах численности населения:

- а) в указанных регионах в 2002 г.;
 б) в указанных регионах в 2009 г.;

- в) в Московской области в 2002–2009 гг.;
- г) в Ярославской области в 2003–2008 гг.
- 4) Вычислите моду численности населения в каждом из представленных регионов в 2002–2009 гг.
- 5) Вычислите медиану численности населения в указанных регионах в 2002–2009 гг.

707

В таблице приведены данные о производстве в Российской Федерации сгущённого молока с сахаром (в млн банок) в 2001–2008 гг.



Год	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Молоко сгущённое с сахаром, млн банок	275	306	361	419	459	471	485	492

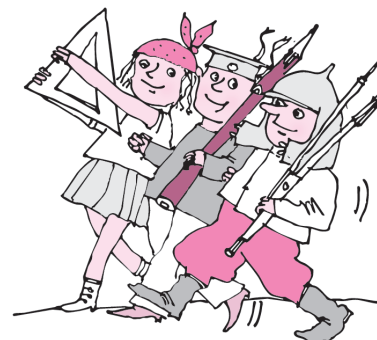
В результате анализа представленной информации были вычислены следующие статистические характеристики:

- а) 492; б) 275; в) 217; г) 408,5; д) 439.

Определите, какую статистическую характеристику могли вычислять в каждом из пунктов.

708

а) Шесть подружек, Катя, Маша, Таня, Полина, Настя и Наташа, собирали в течение года открытки. Катя собрала 56 открыток, Маша – 48, Таня – 35, Полина – 48, Настя – 62, а Наташа – 36. Найдите среднее арифметическое собранных девочками открыток (с точностью до единиц), моду, размах и медиану представленного числового набора.



б) В течение учебного года Коля несколько раз участвовал в соревнованиях по прыжкам в длину. По итогам всех соревнований он показал следующие результаты:

Результат	3м 80 см	3м 90 см	4 м	4м 10 см	4м 20 см	4м 30 см	4м 40 см
Количество раз	2	5	4	7	3	3	1

Найдите средний результат Коли по прыжкам в длину (с точностью до единиц сантиметров), моду, размах и медиану представленного числового набора.

в) В социологическом опросе приняли участие 275 человек. На вопрос «Сколько детей, по вашему мнению, должно быть в семье?» были получены следующие ответы:

Количество детей	0	1	2	3	4
Количество человек, выбравших этот ответ	4	12	166	87	6

Найдите среднее арифметическое (с точностью до единиц), моду, размах и медиану представленного числового набора.

г) В социологическом опросе приняли участие 310 человек. На вопрос «Сколько раз в неделю вы занимаетесь спортом?» были получены следующие ответы:

Количество раз в неделю	0	1	2	3	4
Количество человек, выбравших этот ответ	55	82	75	46	52

Найдите среднее арифметическое (с точностью до десятых), моду, размах и медиану представленного числового набора.

709

1) Зарплатная ведомость компании, занимающейся фасовкой сушёных морепродуктов, выглядит следующим образом:

№ п/п	ФИО	Зарплата к получению	№ п/п	ФИО	Зарплата к получению
1	Алдошина Е.А.	20 100 р.	7	Мысина И.И.	35 200 р.
2	Балыкина В.Н.	19 400 р.	8	Плотникова А.Н.	29 300 р.
3	Баранов Т.И.	18 100 р.	9	Соловьев Ю.А.	95 600 р.
4	Емельянов А.Г.	35 200 р.	10	Старикова Ю.Г.	19 400 р.
5	Казанцева И.С.	67 300 р.	11	Федоров А.Д.	48 400 р.
6	Кирюшкин Л.С.	21 500 р.	12	Чернов П.К.	56 200 р.

а) Вычислите среднюю зарплату (с точностью до копеек), моду, размах и медиану представленного числового набора.

б) Какой стала бы средняя зарплата, мода, размах и медиана, если бы все зарплаты увеличились в 2 раза, уменьшились в 1,5 раза?

2) В магазине продаются ноутбуки по следующим ценам (в рублях):

Модель №	1	2	3	4	5	6	7
Цена	69 900	89 000	95 000	99 000	109 900	89 000	119 900

а) Вычислите среднюю цену ноутбука в этом магазине (с точностью до рублей), моду, размах и медиану представленного числового набора.

б) Какой стала бы средняя цена, мода, размах и медиана, если бы все цены увеличились в 4 раза, уменьшились в 2,5 раза?

710

Математическое исследование.

В таблице показано, сколько игрушек раскрасили художники на фабрике ёлочных игрушек (шт. в смену) за 10 дней.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Елкина	12	10	10	10	10	10	10	10	10	8
Мороз	8	8	11	10	13	12	8	10	11	9

Кто из художников имеет более стабильные результаты в работе? В каком из двух наборов таблицы числа сильнее отличаются друг от друга? Если бы каждый набор включал по сто значений, удалось бы быстро ответить на предыдущие вопросы? Какая характеристика набора для этого нужна?

Пользуясь таблицей, выполните следующие задания.

1) Для каждого набора вычислите, на сколько каждое его значение x_i , где $1 \leq i \leq 10$, отличается (отклоняется) от его среднего арифметического M . Заполните таблицу:

	$x_1 - M$	$x_2 - M$	$x_3 - M$	$x_4 - M$	$x_5 - M$	$x_6 - M$	$x_7 - M$	$x_8 - M$	$x_9 - M$	$x_{10} - M$
Е.										
М.										

Что можно сказать о полученных наборах отклонений от среднего? Удобно ли анализировать такие наборы отклонений, если наборы велики?

2) Используя предложенную формулу, вычислите для каждого набора показатель D :

$$D = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \dots + (x_n - M)^2}{n}, \text{ где } n - \text{ количество чисел в наборе.}$$

Сравните полученные показатели. Для какого набора значение D оказалось больше? Вычисленный показатель D называют *дисперсией* набора чисел. Дисперсия характеризует величину отклонений результатов измерений от их среднего значения.

3) Что можно сказать про результаты работы художника с фабрики, если дисперсия набора количества раскрашенных им за 10 смен игрушек равна нулю?

π

711 Вычислите координаты точки пересечения графиков уравнений $2x - 4y = -3$ и $2x - y - 6 = 0$. Проверьте себя, составив систему уравнений и решив её методом алгебраического сложения.

712

Сколько решений может иметь система линейных уравнений? Обоснуйте свой ответ. Решите систему и объясните, как расположены графики входящих в неё уравнений:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y = 1; \\ 0,3x - 0,4y = 1,2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 1; \\ x - 0,5y = -1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 1; \\ 2,5x - y = 5. \end{cases} \end{array}$$

713

Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Величина первого угла треугольника на 10° больше второго и в два раза меньше третьего. Найдите величину большего угла этого треугольника.

б) Сумма цифр загаданного четырёхзначного числа равна 22. Вторая цифра этого числа на 1 больше первой, третья – в 4 раза больше второй, а четвёртая – на 3 больше первой. Какое число загадали?

714

Разложите многочлен на множители:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 8a^5b^2 + 16a^6b + 8a^7; & \text{г) } 16c^2 - 9d^2 + 36dk - 36k^2; \\ \text{б) } 12p^4q^2 - 36p^3q^3 + 27p^2q^4; & \text{д) } ab - 2bc - a^2 + 4ac - 4c^2; \\ \text{в) } 25r^2 - 10rs + s^2 - 64; & \text{е) } s^2 + 2st + t^2 - 4k^2 - 12kc - 9c^2. \end{array}$$

715

Постройте график кусочно-линейной функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \begin{cases} 3x - 1, & \text{если } x \geq 0; \\ -1, & \text{если } -2 \leq x < 0; \\ 2x + 3, & \text{если } x < -2; \end{cases} & \text{в) } y = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x \geq -1; \\ 4x + 1, & \text{если } -2 \leq x < -1; \\ -9 - x, & \text{если } x < -2; \end{cases} \\ \text{б) } y = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \geq 1; \\ 2 - 4x, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -x + 5, & \text{если } x < -1; \end{cases} & \text{г) } y = \begin{cases} -x + 5, & \text{если } x \geq 2; \\ 3x - 3, & \text{если } 0 \leq x < 2; \\ -3, & \text{если } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

716 а) Наташа пронумеровала подряд, начиная с первой, все страницы своего блокнота из 48 листов. Её брат Ваня вырвал из её блокнота 17 листов и сложил без ошибок номера указанных на них страниц. Может ли он получить в сумме число 324?

б) Катя разложила свои 456 фотографий в альбом по 4 фотографии на страницу и пронумеровала их все подряд, начиная с первой. Затем она верно посчитала сумму номеров фотографий на 9 подряд идущих страницах своего альбома. Могла ли она получить в сумме число 4213?



717 Постройте графики функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |x + 3| - |x - 4|$;

в) $f(x) = -|7 - x| - |x - 9|$;

б) $f(x) = |x - 5| + |2 - x|$;

г) $f(x) = |x + 6| - |8 - x|$.

D

718 В таблице приведены данные о ежегодном производстве в Российской Федерации в 1998–2008 гг. электрических плит (тыс. штук).

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Плиты электрические	192	288	343	346	339	535	522	556	459	454	443

Вычислите среднее годовое производство электрических плит (с точностью до тысяч), моду, размах и медиану представленного числового набора.

719 В таблице представлена информация о количестве государственных и муниципальных высших учебных заведений в федеральных округах Российской Федерации на 1 января 2002–2009 гг.

Федеральный округ	Годы							
	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Центральный	197	200	203	204	206	209	212	212
Северо-Западный	74	74	76	75	77	77	78	79
Южный	80	80	81	79	80	77	77	77
Приволжский	118	121	124	123	121	120	119	120
Уральский	54	53	53	51	52	53	53	53
Сибирский	86	85	86	85	86	84	84	84
Дальневосточный	46	39	39	38	38	38	37	37

1) Вычислите среднее количество высших учебных заведений (с точностью до единиц) в каждом из представленных федеральных округов за 2002–2009 гг.

2) Вычислите с точностью до единиц среднее количество высших учебных заведений в каждом из указанных федеральных округов в:

а) 2002 г.;

б) 2005 г.;

в) 2007 г.;

г) 2009 г.

3) В каком году количество высших учебных заведений было наибольшим, а в каком – наименьшим в федеральных округах:

- а) Центральном;
б) Северо-Западном?

4) Вычислите размах количества высших учебных заведений:

- а) в указанных федеральных округах в 2002 г., 2009 г.;
б) в Приволжском федеральном округе в 2002–2009 гг.

5) Вычислите моду количества высших учебных заведений в каждом из представленных федеральных округов в 2002–2009 гг.

6) Вычислите медиану количества высших учебных заведений в указанных федеральных округах в 2002–2009 гг.



720

В таблице приведены данные о производстве в Российской Федерации кукурузных палочек (в тоннах) в 1997–2006 гг.

Год	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Кукурузные палочки	6086	7307	5378	4982	5944	5715	6186	5970	6385	5657

В результате анализа представленной информации были вычислены следующие статистические характеристики:

- а) 4982; б) 7307; в) 5961; г) 5957; д) 2325.

Определите, какую статистическую характеристику могли вычислять в каждом из пунктов.

721

а) В течение учебного года Ирина несколько раз участвовала в соревнованиях по метанию мяча. По итогам всех соревнований она показала следующие результаты:

Результат	24 м	25 м	26 м	28 м	29 м	31 м	32 м
Количество раз	1	6	4	8	9	5	1

Найдите средний результат Ирины по метанию мяча (с точностью до десятых метра), моду, размах и медиану представленного числового набора.

б) Пять друзей – Ваня, Саша, Валера, Гоша и Антон – собирали в течение года значки. Ваня собрал 45 значков, Саша – 59, Валера – 63, Гоша – 59, а Антон – 54. Найдите среднее арифметическое собранных мальчиками значков, моду, размах и медиану представленного числового набора.

722

В интернет-магазине продаются МРЗ-плееры по следующим ценам:

Модель	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Цена, р.	1190	1490	1590	1190	1990	1590	1890	2190	1590

1) Вычислите среднюю цену (с точностью до копеек) МРЗ-плеера в этом интернет-магазине, моду, размах и медиану представленного числового набора.

2) Какой стала бы средняя цена, мода, размах и медиана, если бы все цены увеличились в 2,5 раза, уменьшились в 3 раза?

723 Постройте математическую модель и решите задачу:

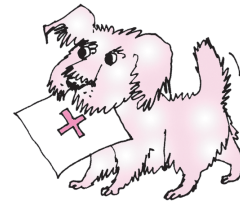
а) Сумма двух натуральных чисел равна 38. Первое число при делении на 11 даёт остаток 7, а второе число при делении на 11 даёт остаток 9. Найдите эти числа.

б) Величина первого угла треугольника на 40° меньше второго и в три раза больше третьего. Найдите величину большего угла этого треугольника.

724 Постройте график кусочно-линейной функции:

а)
$$y = \begin{cases} 6x - 2, & \text{если } x \geq 1; \\ -x + 5, & \text{если } -2 \leq x < 1; \\ x + 9, & \text{если } x < -2; \end{cases}$$

б)
$$y = \begin{cases} 4x + 1, & \text{если } x \geq -1; \\ -2x - 3, & \text{если } -3 \leq x < -1; \\ x + 6, & \text{если } x < -3. \end{cases}$$



725 Разложите многочлен на множители:

а) $8a^2b^4 + 8ab^5 + 2b^6$;

г) $81c^2 - d^2 + 16dk - 64k^2$;

б) $18c^6d^4 - 12c^5d^5 + 2c^4d^6$;

д) $3ab - ac - 9b^2 + 6bc - c^2$;

в) $16r^2 - 24rs + 9s^2 - 49$;

е) $s^2 + 4st + 4t^2 - k^2 - 10kc - 25c^2$.

726 Ольга разложила свои 570 марок в альбом по 6 марок на страницу и пронумеровала их все подряд, начиная с первой. Затем она верно посчитала сумму номеров марок на 11 подряд идущих страницах своего альбома. Могла ли она получить в сумме число 6512?

727 Постройте графики функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |x + 4| - |x - 7|$;

б) $f(x) = -|10 - x| - |x - 1|$.

728 Решите уравнение $|x + a| + |x + b| = c$:

$$a = \frac{12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3} \cdot 2\frac{4}{7}}; \quad b = \frac{\left(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4}\right) \cdot 3\frac{3}{5}}{14 - 15\frac{1}{8} : 2\frac{1}{5}}; \quad c = \frac{19}{99} + \frac{2\frac{3}{8} : \frac{3}{4} + 24\frac{7}{9}}{7\frac{1}{8} - 157\frac{4}{5} : 24}.$$

729* Задумали два натуральных числа. Третье число получили, сложив первое и второе число. Четвёртое число получили, сложив второе и третье. Таким же образом получили пятое, шестое и седьмое числа. Найдите сумму всех полученных семи чисел, если шестое число оказалось равно 16.

730* Пятеро друзей купили видеокамеру. Первый заплатил половину суммы, заплаченной остальными. Второй – треть суммы, заплаченной остальными. Третий – четверть суммы, заплаченной остальными. Четвёртый – пятую часть суммы, заплаченной остальными, а пятый заплатил 450 р. Сколько стоила видеокамера?

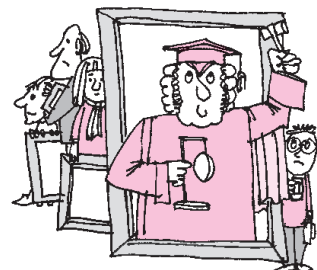


Задачи для самоконтроля к главе 7

731 В Интернете был проведён социологический опрос, посвящённый коллекционированию. Постройте круговые диаграммы, иллюстрирующие результаты, полученные после анализа ответов участников опроса.

а) Вопрос: Что вы коллекционируете?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Монеты	20%
Марки	15%
Картины	10%
Другое	25%
Ничего	30%



б) Вопрос: Почему люди становятся коллекционерами?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Чтобы отвлечься, отдохнуть	45%
Чтобы расширить свой кругозор, узнать новое	40%
Чтобы, вложив деньги сейчас, получить доход в будущем	10%
Другое	5%

732 В таблице приведены данные о производстве в Российской Федерации автоматических стиральных машин (в тыс. штук) в 2001–2008 гг.

Год	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Автоматические стиральные машины	3,6	169,3	197,4	287,9	434,1	1022,1	1794,3	2067,7

В результате анализа представленной информации были вычислены следующие статистические характеристики:

а) 3,6; б) 747,05; в) 2067,7; г) 2064,1; д) 361.

Определите, какую статистическую характеристику могли вычислять в каждом из пунктов.

733 Миша решил улучшить свои результаты по прыжкам в длину. На каждой тренировке он записывал лучший результат. В итоге он обобщил свои результаты следующим образом:

Результат	3,5 м	3,6 м	3,7 м	3,8 м	3,9 м	4,0 м
Количество раз	3	2	5	8	3	1

Найдите средний результат Миши по прыжкам в длину (с точностью до десятых метра), моду, размах и медиану представленного числового набора.

Ответы

10. а) 0,7; б) -1; в) 1,5; г) -1,5. 11. а) 6 и 30, или 17 и 19, или 28 и 8; б) 70° . 12. г) $-\frac{mn}{3} - \frac{4m}{9}$. 23. а) 1; б) -20.
 24. а) 2 и 53, или 16 и 39, или 30 и 25, или 44 и 11; б) 110° . 25. а) $2klm - \frac{8}{9}kl^2m$; б) $\frac{4p}{7} - \frac{5q}{4} - \frac{r}{11}$. 31. Анжела.
 49. а) $\{-9; -5\}$; б) $\{-\frac{3}{7}; 1\frac{6}{7}\}$; в) $\{-6\frac{2}{3}; -4\}$. 50. а) $a^4 + a^2b^2 + b^4$; б) $3x^3y + 4x^2z$; в) $a^3 - 2ab^2 + b^3$; г) 0.
 52. а) Ил-96 - 870 км/ч, Су-34 - 1740 км/ч; б) 360 км; в) 600 м. 64. а) $\{1; 13\}$; б) $\{-2,4; 1,2\}$; в) $\{1\frac{5}{7}; 12\}$.
 65. а) $x^4 + x^2y^2 - y^4$; б) $y^3 - x^3$. 67. а) 60 км/ч, 90 км/ч; б) 13 км. 80. а) 4; б) $-54x^2y - 2y^3$; в) $r - pq$;
 г) $-m^2 + 4m - 6$. 81. д) $\frac{3}{a^2b}$; е) $\frac{5x^4y^3 - 4}{3x^4y^2 - 7x^2}$. 82. а) 90 и 126; б) 1710 тыс.р. 83. а) 0; б) 8; в) 1; г) 3; д) 5; е) 8;
 ж) 10; з) 14; и) 9. 84. а) 1; б) 1; в) 3. 91. а) $24a^2b + 2b^3$; б) $2p^2 - 7pq - 2q^2$. 92. а) $\frac{3a^2 + 4b^2}{6}$; б) $\frac{3n}{m}$; в) $\frac{6y - 5x^2}{7x^2y^4 - 3y^2}$.
 93. 300 тыс.р. 94. а) 3; б) 8; в) 7; г) 3; д) 9; е) 9. 95. а) 1; б) 10; в) 1. 113. а) 0,5; б) 150; в) 0,3; г) 2,5.
 118. а) $\{3\frac{1}{3}\}$; б) $\{1\}$; в) $\{-4,5; 4,5\}$; г) $\{-4; 8\}$. 119. а) 18 шт.; б) 3,969 кг; в) 790 л; г) 264 раза. 121. а) $\{1004; 3016\}$;
 б) $\{353; 377\}$. 122. а) 9; б) 4. 134. а) $\{1\}$; б) $\{1,25\}$; в) $\{-5; 3\}$; г) $\{-2\frac{2}{3}; 2\}$. 135. а) 645,25 кг; б) 245 кг.
 136. а) $\{-5; 11\}$; б) $\{0; 1032\}$. 137. а) 1; б) 6. 138. 3. 139. больше спорт. в 10 р. 140. 20 кг. 169. а) $4\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{9}$;
 в) 46; г) -13,5; д) 13,25; е) $-2\frac{29}{30}$. 171. в) $-p^2 + 4pq$; г) $2x^2y + 2xy^2 - 4y^3$. 172. а) 3; б) 1; в) 34; г) 15. 173. 240 г.
 174. 48,75%. 175. 1079 и 1411. 176. 600 и 162 или -600 и -162. 177. а) $\{2; 4,5\}$; б) $\emptyset$. 178. а) 8; б) 6.
 189. а) $13a^2 + 3a + 1$; б) $3b^2 - 4bc$. 190. а) -3; б) 7. 191. 3300 кг. 192. 306 тыс. р. и 459 тыс. р. 193. $\{3,5; 35\}$.
 194. 1. 209. а) $\{-11; 1\}$; б) $\emptyset$; в) $\{-17; -3\}$; г) $\{11; 19\}$. 215. а) 10; б) 3; в) 37 м; г) 553,65 см. 216. в) $3mn$;
 г) $-2a^2b - a^2b^2 - 2ab^2$. 217. а) 17; б) -44. 219. а) 6; б) 1; в) 17; г) 8; д) 28; е) 63; ж) 12; з) 129. 220. а) $\{-6; 6\}$;
 б) $\{-11; 11\}$; в) $\{-0,4; 1,2\}$; г) $\{-2\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\}$; д) $\{0,25; 3,5\}$; е) $\{-4; -\frac{1}{3}\}$. 221. а) 2812,5 кг; б) 2,5 т; в) $\frac{9}{19}$.
 222. а) $\{-3; 6\}$; б) $\{-5; 7\}$; в) $\{4; 6\}$; г) $\{-9; -3\}$; д) $\{-8; 4\}$; е) $\{-7; 11\}$. 224. а) 5; б) 15; в) 41; г) 60. 237. а) 2 кг;
 б) 11,06 м. 238. а) $-2p^4 - 2pq^3 - 2q$; б) $y^3 + xy$. 239. а) -9; б) -7. 241. а) 4; б) 11; в) 26; г) 59. 242. а) $\{-8; 8\}$;
 б) $\{-12; 12\}$; в) $\{-2; 4\frac{2}{3}\}$; г) $\{-3,25; 0,25\}$; д) $\{-\frac{2}{3}; 2,5\}$; е) $\{-0,875; 2,25\}$. 243. а) $\frac{5}{11}$; б) 175 кг. 245. а) 4_5 ;
 б) 34_5 ; в) 102_5 ; г) 123_5 . 246. а) $\{-6; 9\}$; б) $\{-8; -7\}$; в) $\{4; 15\}$; г) $\{-10; 7\}$. 248. 2 км. 249. 24.
 265. а) 13; б) -20; в) 11; г) -21. 272. а) $\{3\}$; б) $\{-13; -3\}$; в) $\{1; 5\}$; г) $\{-24; -3\frac{3}{7}\}$. 273. а) $-x^5 - y^4 + 2x^3y$;
 б) $-p^4 + 4q^4 - pq$. 274. 250 г. 275. а) $\frac{3xz}{2y^2}$; б) $\frac{5q^6 - 7p^6}{8}$; в) $\frac{6b^6 - 7a^6}{4a^3 - 9b^3}$. 286. а) 3; б) 9; в) 18. 287. а) 1;
 б) 1; в) 4. 295. б) $\emptyset$; е) -8; л) 15. 296. б) -10; д) 7; е) 9. 297. г) $-\frac{1}{6}$; ж) 2; к) -1,6; м) -0,1. 298. б) 3;
 в) 2; г) 5. 299. б) 322; в) 108; г) 24. 301. б) $1\frac{2}{3}$; д) $\frac{5}{7}$; е) -0,4. 302. б) 9; г) 6,5; д) 3; е) 1. 303. а) 2; в) 4; г) 2.
 304. а) 8 лет; б) 15 и 30 чел.; в) фут. - 24 чел., баск. - 12 чел., вол. - 19 чел. 309. г) 1,2; д) 3;
 е) -3,5. 310. б) -1; г) -3; е) 13; ж) 2; и) 5; к) 8; л) 10; о) 4; п) 2. 311. а) 2400 р.; б) 30 стр., 45 букв;
 в) 27 км 840 м; г) 160 км. 312. б) -5; г) -2,5. 315. в) 4; г) 1. 318. б) 0,9; в) 1; г) 7; е) 3;
 з) 5; к) 10; л) 2; м) 5. 319. а) 9; б) 17. 322. а) 264; б) 6,125; в) $17\frac{6}{7}$; г) $3\frac{13}{33}$; д) $1\frac{21}{23}$; е) $3\frac{50}{71}$;
 ж) 3; з) $\frac{5}{13}$. 323. б) 22; г) -30; д) 4; е) 3; ж) $-\frac{2}{3}$; з) $2\frac{2}{13}$. 326. а) 6; б) -64. 331. а) 37,5 р.;

б) 45 лет. **334.** в) 2; г) -2. **335.** б) -26; в) 10; д) 5; е) 8. **336.** б) 7; г) 10; д) 3; е) 5. **338.** а) 5; б) $\frac{28}{29}$; в) 3; г) -2; д) 1; е) 6; ж) 5; з) -17. **339.** б) $10\frac{1}{3}$; в) $-2\frac{2}{3}$. **342.** а) 7; б) 12; в) 6; г) -17. **343.** а) 6174; б) 72; в) 1. **345.** в) -3; г) $1\frac{1}{3}$; д) -6; е) 4. **346.** в) $1\frac{7}{9}$; г) $-\frac{23}{28}$. **349.** а) 8 лет, 16 лет, 24 года; б) 48 км/ч; в) 21 с, 3 мин 9 с. **352.** а) 24,5; б) $-\frac{9}{14}$; в) 1; г) 2. **353.** б) -7; г) 5. **354.** а) -190; б) -169. **358.** 40 р. **364.** ж) 0,5; з) 12,3; и) 28. **365.** д) {0}; е) {0}; ж) {-7; 7}; з) $\emptyset$. **367.** б) {1; 6}; д) {6}; ж) {1; 3}; и) {-0,6; 0,8}. **369.** а) {-1}; г) {-5}; д) {4,5}; ж) $\{-\frac{1}{7}; 11\}$; з) $\emptyset$; и) {0; 2}; л) {-4}. **370.** б) {-6; 1}; в) {0}; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\emptyset$; е) {0,5; 9}. **371.** в) {-9; 0,6}; г) $\emptyset$. **372.** б) -2 и 1 или -6 и -3 или 3 и 6 или -1 и 2; в) -4 и 12 или 6 и 2; г) -2,5 и 2,5. **373.** б) [-5; 2]; д) {4,5; 8,5}; ж) $\emptyset$; з) {-5}. **375.** б) $\{-1\frac{6}{7}; 15\}$; в) $\emptyset$; д) {-6; 0,5}; е) [1; 2,5]; ж) {-0,75}; л) {0; 10}; м) {-1,25; 4,5}. **377.** а) {-4; 4}; б) $\{-\frac{7}{17}; 2\frac{5}{7}\}$. **378.** б) $\{3\frac{1}{3}; 8\}$; г) $\emptyset$; д) {2; 20}; е) {9; 15}. **380.** а) {1,9; 2,5}; б) {5}; в) {1,375}; г) $\emptyset$. **382.** б) {2,25}; в) [9; $+\infty$); д) $\emptyset$; е) [4; 8]; з) {8}. **383.** а) {-1,75; -0,5}; б) {1,2; 6}; в) $\{-2\frac{1}{16}; -0,7\}$; д) $\emptyset$; е) $\{-3\frac{8}{11}; 5\}$. **385.** а) 1; б) 2; г) 0. **388.** в) n ; г) $p - 14q$. **391.** а) 8 ч 15 мин; б) на 15 км/ч; в) 39 л; г) 16 ч 40 мин. **394.** в) {6; 22}; е) {-5,5; -3,5}; ж) $\emptyset$; з) {1; 7}. **395.** б) $\emptyset$; г) $\{\frac{d+8}{9}; \frac{d-8}{9}\}$. **396.** б) {8}; в) $\emptyset$; г) {0,2}; д) {2}; е) $\{-1\frac{4}{7}; 7\}$. **397.** в) $\{-14; -\frac{2}{3}\}$. **398.** а) $\{-\frac{4}{11}; 10\}$; б) {5}; в) {-3}. **399.** а) [2; 5]; в) {-2; 10}; г) $\emptyset$. **400.** б) {-1; 17}; г) {-8; -3,5}; д) $[-1\frac{2}{3}; +\infty)$; з) $\{2\frac{2}{3}; 6\}$. **401.** а) {-10; 2}; б) {0; 8}. **402.** а) 3 и 24 или -3 и -24; б) 3 и 13 или -3 и -13. **403.** а) $\emptyset$; б) $\{5\frac{1}{3}; 10\}$; г) {-7; -5; 15}. **404.** б) $\{2,6; 4\frac{7}{9}\}$; в) $\{0,5; 3\frac{5}{6}\}$; г) $\{3,4; 7\frac{2}{3}\}$. **405.** а) $\emptyset$; б) {2}; г) {1; 7}; д) {-15; 4}; е) {3}; ж) $\{-3\frac{11}{19}; 6\}$; з) $\emptyset$. **408.** в) $3x - y + z$; г) $14p - 4q$. **411.** а) 23 ч 45 мин; б) 7 яниц. **413.** $-5\frac{1}{3}$. **414.** 12 шт. **415.** 19 шт. **419.** а) (22; 1); (17; 3); (12; 5); (7; 7); (2; 9); б) (18; 1); (14; 4); (10; 7); (6; 10); (2; 13); в) (1; 16); (3; 9); (5; 2); г) (2; 16); (7; 7). **422.** 7 гирек, 4 банки. **424.** б) 6 б. по 0,7 л и 126. по 0,9 л; в) 126. по 0,7 л и 46. по 0,9 л. **425.** а) 11; б) $12n + 7, n \in \mathbb{Z}$; в) 51; г) $36n + 14, n \in \mathbb{Z}$. **426.** 246 шт. **427.** 6 лет. **428.** (4; 11); (11; 8); (18; 5); (25; 2). **432.** а) вел. на 25%; б) ув. на 2,6%; в) ум. на 0,25%; г) ум. на 36%. **434.** а) 3; б) 0. **439.** 10 гирек по 200 г и 4 гирьки по 500 г. **440.** б) 29 б. по 0,5 л и 15 б. по 0,7 л; в) 20 б. по 0,5 л и 10 б. по 0,7 л. **442.** а) 11; б) $63n + 11, n \in \mathbb{Z}$. **443.** (3; 2). **446.** а) ум. на 29,44%; б) марок на 12%; в) ум. на 28%; г) ум. на 37%. **448.** а) -21; б) 5. **451.** {-23; 13}. **454.** 4 года. **464.** е) [-24; $+\infty$); ж) $(-\infty; 4,2]$; и) (-2; $+\infty$); о) [-6,5; $+\infty$); с) $(-\infty; -2)$; т) [-10; $+\infty$). **472.** б) $(-\infty; -5]$; г) [-1,5; $+\infty$); д) $(-\infty; +\infty)$; з) (4,6; $+\infty$); м) $(-\infty; 8)$. **473.** б) (2; $+\infty$); в) [3; $+\infty$); д) $(-\infty; 14)$; з) $(-\infty; 1\frac{1}{24}]$. **474.** в) [-2; $+\infty$); г) $(-\infty; -19)$; е) $(-\infty; 1\frac{1}{6})$; з) $(-\infty; -6\frac{1}{3})$; к) (-12; $+\infty$); м) $(-\infty; +\infty)$. **477.** б) $(-\infty; -7,6)$; г) [-4; $+\infty$); е) $(-\infty; 5]$; з) (2; $+\infty$). **478.** а) 0,5; г) -2,875; е) -2. **480.** в) [-4; $+\infty$); е) $(-\infty; -6\frac{2}{3}]$; ж) $(-\infty; 25,2]$; з) $(-\infty; 46\frac{2}{3}]$; л) $(-\infty; 3\frac{8}{11}]$; н) $[-4\frac{5}{8}; +\infty)$; п) $[2\frac{4}{11}; +\infty)$; р) $(-\infty; 1\frac{52}{59}]$. **481.** б) $(-\infty; 1\frac{13}{14}]$; г) $(-\infty; -\frac{15}{16})$. **485.** б) $(-\infty; -4)$; г) $(-\infty; 5)$. **487.** б) $(-\infty; 6,5)$; г) $(-\infty; 1\frac{23}{43}]$; е) $(-\infty; 1\frac{7}{16}]$. **488.** а) больше 8 см и меньше 12 см; б) больше 0 см и меньше 4 см; в) больше 4 км/ч; г) более 5,625 км; д) меньше или равно 8 дней; е) менее 59 мешков. **489.** б) $[0; 1\frac{67}{73}]$; в) $(4\frac{8}{13}; +\infty)$; г) [0; $+\infty$). **491.** а) $(-\infty; -3,4375)$; б) $(-\infty; 0,75)$; в) $[-4\frac{3}{14}; +\infty)$; г) $(-\infty; 2\frac{17}{31}]$; ж) $(-3\frac{1}{38}; +\infty)$; з) $(-\infty; -27\frac{2}{3})$. **492.** б) $(3\frac{12}{37}; +\infty)$; в) $(-\infty; \frac{21}{106}]$; д) $[4\frac{4}{17}; +\infty)$; з) $(-\infty; -8\frac{2}{3}]$.

493. в) $\left[-9; -2\frac{2}{7}\right]$; г) $(-3; 7]$. 494. е) $\left(\frac{-c-a}{5}; +\infty\right)$; и) при $a > 1$: $\left(-\infty; \frac{ab}{1-a}\right)$; при $a = 1, b < 0$: $(-\infty; +\infty)$; при $a = 1, b \geq 0$: $\emptyset$; при $0 < a < 1$: $\left(\frac{ab}{1-a}; +\infty\right)$; при $a < 0$: $\left(-\infty; \frac{ab}{1-a}\right)$. 498. а) $33\frac{1}{3}$ раб. дня; б) 10 линий; в) 9 часов; г) 140 чел. 501. б) $-11x^3 - 5xy - 6y^3$. 503. а) 3; б) 2; в) 6; г) 7. 506. в) $(-\infty; 0,1]$; г) $[-36; +\infty)$; ж) $(-\infty; 4)$; и) $(-5; +\infty)$; м) $(-\infty; 8)$. 510. б) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$; г) $\left[-1\frac{5}{6}; +\infty\right)$; е) $(9; +\infty)$; з) $(-\infty; 3)$. 511. в) $\left[5\frac{2}{3}; +\infty\right)$; д) $[2,75; +\infty)$. 512. б) $\left(-\infty; 2\frac{2}{3}\right]$; г) $(0,25; +\infty)$; д) $(-\infty; -2,5]$. 516. в) $(-\infty; 30]$; г) $(-\infty; -144)$; е) $(96; +\infty)$. 517. а) $(2,25; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -3\frac{1}{9}\right)$; в) $\emptyset$; г) $[-1,5; +\infty)$. 519. а) $(-\infty; 2)$; б) $(-\infty; 2,25)$; в) $\left(-\infty; -4\frac{1}{6}\right]$; г) $\left(-\infty; \frac{41}{67}\right]$. 520. а) больше 3 см и меньше 7,5 см; б) менее 45 мин; в) меньше 1786 мешков. 521. а) $\left(-\infty; 1\frac{16}{31}\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{17}{59}\right)$; в) $\left[\frac{73}{167}; +\infty\right)$; г) $[-2,75; +\infty)$. 522. б) $(-\infty; 0]$. 523. а) $(-60; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{13}\right]$; в) $\left[1\frac{27}{35}; +\infty\right)$; г) $\left(5\frac{3}{19}; +\infty\right)$. 524. а) $(-15; -3,2)$; б) $\left(2\frac{18}{41}; 27\right]$. 526. б) $-5a^2 - 4ab - b^2$. 527. а) 18 дней; б) 6 поваров. 530. а) 2; б) 5. 532. $[6,25; +\infty)$. 536. б) $(-7; 7)$; г) $(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$; д) $\emptyset$; е) $(-\infty; +\infty)$; и) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. 537. а) $(-6; 4)$; в) $(-\infty; -0,6] \cup [6,6; +\infty)$; г) $(-\infty; -8,4) \cup (10,4; +\infty)$; е) $\left(-8\frac{1}{3}; 9\right]$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $(-8,4; 7,6)$; и) $\emptyset$. 540. а) $(-5; 1,5)$; в) $(-\infty; -2,5] \cup [6,5; +\infty)$; д) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup (2,5; +\infty)$; ж) $\emptyset$; з) $\{0\}$; и) $(-\infty; +\infty)$. 541. б) $(8; +\infty)$; д) $(-\infty; 7]$; ж) $\left(-4,25; -\frac{1}{8}\right)$; и) $\left(-\infty; 1\frac{7}{12}\right] \cup [4,5; +\infty)$; к) $\left(-\infty; -12\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{5}{11}; +\infty\right)$. 542. в) $\left[-\frac{3}{13}; 45\right]$; д) $\left[-15; -1\frac{2}{3}\right]$; е) $\left(-\infty; 1\frac{9}{11}\right] \cup [76; +\infty)$. 543. б) $[-16; -1,6]$; г) $(-\infty; -23) \cup \left(-\frac{7}{9}; +\infty\right)$; д) $\left[-21; -2\frac{1}{3}\right]$. 545. б) $\left(-2\frac{2}{3}; 10\frac{2}{3}\right)$; г) $\left(-2; 7\frac{1}{3}\right)$. 546. д) $(-\infty; -1,5)$; е) $(-\infty; 2] \cup [10; +\infty)$; к) $(-\infty; 4,5] \cup [15,5; +\infty)$; м) $\left(-27; \frac{3}{7}\right)$; о) $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right] \cup [15; +\infty)$; с) $\left(-5,5; -1\frac{1}{3}\right)$; ф) $\left(-\infty; -4\frac{2}{3}\right) \cup (-3,5; +\infty)$. 548. б) $(-21; 9)$; г) $[3; 21]$; е) $(-\infty; -14) \cup (-4; +\infty)$; ж) $\left[-1; 2\frac{3}{7}\right]$; з) $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. 549. б) $(-\infty; -3,1) \cup \left(-\frac{3}{14}; +\infty\right)$; в) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [5,5; +\infty)$; г) $\left[-\frac{3}{32}; \frac{7}{8}\right]$; ж) $\emptyset$; з) $(-\infty; +\infty)$. 550. а) $(-3,5; 2,5)$; б) $(-\infty; 4,5)$; г) $(-\infty; 2] \cup [19; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $(-\infty; -1,25)$; з) $[5; +\infty)$. 551. а) $\left[0; \frac{1}{6}\right]$; в) $[0; +\infty)$; д) $(3; +\infty)$; е) $[1; +\infty)$. 552. б) $(-\infty; b-9] \cup [b+9; +\infty)$; г) $\left[\frac{-6-d}{8}; \frac{6-d}{8}\right]$. 553. а) $\left[\frac{4}{7}; 4\right]$; б) $(-41; 0,75)$; в) $[-1; 16)$; г) $\left[-7; 2\frac{4}{7}\right] \cup \left[5\frac{5}{9}; 14\right]$. 555. а) 629 кг; б) 2475 см; в) 46 ч; г) 12 434 р. 557. а) 40,5 км; б) 80 км/ч или 40 км/ч; в) 90 км/ч; г) 360 м. 559. в) $-6s - 10t + 22r$; г) $\frac{4}{ac}$. 560. а) 2; б) 6; в) 1. 562. в) $x_1 = -28$; $x_2 = \frac{5}{7}$; $x_3 = 8\frac{1}{13}$. 563. г) $[-20; 10]$; е) $(-\infty; -5) \cup (9; +\infty)$. 566. в) $(-\infty; 2,25) \cup (10,25; +\infty)$; г) $(-\infty; -6] \cup [-5; +\infty)$. 567. а) $(-\infty; -1,5)$; б) $\emptyset$; в) $(-\infty; 11,5]$; г) $(3,5; +\infty)$; д) $[-8,25; -0,9]$; е) $(-\infty; -0,4) \cup \left(2\frac{12}{17}; +\infty\right)$; з) $(-\infty; +\infty)$. 568. в) $(-\infty; -39] \cup \left[-1\frac{2}{7}; +\infty\right)$; г) $\left[4\frac{3}{11}; 26\frac{1}{3}\right]$; д) $(-7; -0,2)$; е) $\left(-\infty; \frac{6}{7}\right) \cup (28; +\infty)$. 569. в) $(-9,5; -3)$; г) $(2,5; 12,5)$. 570. в) $(-\infty; 0,5] \cup [4,5; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $(-\infty; -1,2) \cup (1,6; +\infty)$; з) $\left(-\infty; \frac{11}{13}\right) \cup (7; +\infty)$; к) $\emptyset$; м) $(-\infty; +\infty)$. 572. а) $(-2; 8)$; б) $\left(-12; 2\frac{2}{3}\right)$; в) $(-\infty; +\infty)$; д) $\left(-\infty; -7\frac{2}{3}\right) \cup \left(-1\frac{2}{9}; +\infty\right)$; е) $\emptyset$. 573. б) $(-\infty; -54] \cup \left[1\frac{7}{11}; +\infty\right)$; в) $[-6; -3] \cup \left[6\frac{1}{3}; 8\right]$; г) $\left(-\infty; -2\frac{5}{6}\right) \cup \left[-1\frac{3}{8}; +\infty\right)$. 574. а) $(-8; 7)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $[-4,5; +\infty)$; г) $(-\infty; -0,5)$. 575. а) $[-1,4; 0]$; б) $(-\infty; 0]$. 576. а) $[-4; 1)$; б) $\left[-\frac{3}{8}; 10,5\right]$. 577. а) 1909 кг; б) 14 109 см; в) 87 ч; г) 57 141,3 р. 579. а) 27 км; б) 30 км/ч; в) 300 м. 581. в) $8p + 26r - 14t + s$; г) $-\frac{1}{2m}$. 582. а) 3; б) 1; в) 4. 584. б) $x_1 = 1,2$; $x_2 = -\frac{8}{15}$; $x_3 = \frac{20}{21}$.

585. $[-2; -1]$. 586. 13 рядов, 145 шк. 587. 28; 56; 84. 588. а) $a = \frac{C}{n}$ ($n \neq 0$), $n = \frac{C}{a}$ ($a \neq 0$); б) $a = \frac{P-2b}{2}$, $b = \frac{P-2a}{2}$; в) $r = a - bc$, $b = \frac{a-r}{c}$ ($c \neq 0$), $c = \frac{a-r}{b}$ ($b \neq 0$); г) $a = \frac{V}{bc}$, $b = \frac{V}{ac}$, $c = \frac{V}{ab}$ ($abc \neq 0$). 589. числа 5 и 3. 591. а) является; б) не является. 593. а) $\left(x; \frac{x+3}{6}\right)$, x — любое число или $(6y - 3; y)$, y — любое число; б) $\left(x; \frac{11x-3}{2}\right)$, x — любое число или $\left(\frac{2y+3}{11}; y\right)$, y — любое число; в) $\left(x; \frac{9-5x}{4}\right)$, x — любое число или $\left(\frac{9-4y}{5}; y\right)$, y — любое число; г) $\left(x; \frac{x}{5}\right)$, x — любое число или $(5y; y)$, y — любое число; д) $\left(\frac{13}{4}; y\right)$, y — любое число; е) $\left(x; \frac{-7}{3}\right)$, x — любое число. 594. а) $\left(x; \frac{6-x}{4}\right)$, x — любое число или $(6-4y; y)$, y — любое число; б) $(a; -a)$, a — любое число; в) $\left(x; \frac{3x+2}{2}\right)$, x — любое число или $\left(\frac{2y-2}{3}; y\right)$, y — любое число; г) нет решений; д) (x, y) , x, y — любые числа. 595. точки В и С. 597. а) вся плоскость; б) пустое множество. 599. а) 6; б) 24; в) 25; г) 3; д) 32. 602. а) $(x, 6x+4)$, x — любое число или $\left(\frac{y-4}{6}; y\right)$, y — любое число; б) $\left(x; \frac{1-5x}{6}\right)$, x — любое число или $\left(\frac{1-6y}{5}; y\right)$, y — любое число; в) $(0; y)$, y — любое число. 604. а) 28 или 30. 607. 8. 609. а) является; б) не является. 610. (8; 2). 611. а) $(-4; -2)$; б) $(1; -0,5)$; в) $\left(x; \frac{x-2,5}{2}\right)$, x — любое число или $(2y+2,5; y)$, y — любое число; г) нет решений. 615. 3 декабря 1999 года. 616. а) минус; б) плюс; в) минус. 617. 137. 619. а) изменяется от -3 до 3 ; б) изменяется от -7 до -3 ; в) изменяется от -9 до -1 ; г) изменяется от 1 до 7 ; д) равно -3 . 620. а) $(1; 3)$; б) нет решений; в) $(x; x+1)$, x — любое число или $(y-1; y)$, y — любое число. 622. а) плюс; б) минус; в) минус. 623. 43. 624. может. 625. 0. 627. а) $x = -1$; $y = -3$; б) $a = 1$; $b = 1$; в) $m = -1$; $n = -4$; г) $x = -1$; $y = 1$. 628. а) $(-0,2; -1)$; б) $(2; -1)$; в) нет решений; г) $(0,2; 0,2)$. 629. а) $(-5; -2)$; б) $(2; -1)$; в) $\left(14; \frac{38}{3}\right)$; г) $(6; -1)$. 630. а) $(13; 32)$; б) $(4; -3)$. 631. а) $y = 3x - 4$; б) $y = -0,5x + 2$. 632. а) $\left(-\frac{1}{11}; -\frac{1}{7}\right)$; б) $\left(\frac{13}{60}; -\frac{13}{38}\right)$; в) $(2; -1)$. 633. 5. 634. 4. 635. а) $2^2 \cdot 503$; б) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. 636. а) $(2; -1)$; б) $\left(\frac{7}{13}; -\frac{5}{26}\right)$; в) нет решений. 637. а) $(0,5; 1)$; б) $(0,2; -1)$. 638. а) $2 \cdot 17$; б) $2 \cdot 7 \cdot 31$. 639. $x = 32 + 49t$, $y = 79 + 121t$, t — любое целое число. 640. б) $(-\infty; +\infty)$; в) $\{0\}$. 644. 7А — 26 чел.; 7Б — 21 чел.; 7В — 29 чел. 645. а) $2\frac{2}{3}$; в) 4; г) $\left\{-9,5; -\frac{1}{8}\right\}$; д) $\{-12; 0,6\}$. 647. а) $\{-8\}$; б) $\emptyset$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $\{8; 10\}$; д) $\{-3; 15\}$; е) $\{1,8; 2,5\}$. 664. б) $\left[-37; -\frac{12}{13}\right]$. 666. $(3; 7)$, $(8; 5)$, $(13; 3)$, $(18; 1)$. 668. а) нет; б) да. 669. -2 . 673. 4. 674. а) $(1; -1)$; б) $(-1; 1)$. 675. а) $\left(-\frac{7}{8}; -\frac{5}{8}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right)$; в) $(-1; 9)$; г) $\left(x; \frac{3x-12}{2}\right)$ или $\left(\frac{2y+12}{3}; y\right)$; д) $\emptyset$. 684. 100 000 р. 685. 148,832%. 687. б) $6m - 11n$. 689. а) -15 ; б) $-0,1$. 695. 50 000 р. 696. 1) 4200 р.; 2) 6300 р.; 3) 10 850 р.; 4) 17 808 р. 698. а) $12a - b$; б) $6n - 2m$. 700. а) 2; б) 10. 701. $(-\infty; 3,5)$. 703. 21 ириска и 29 шоколадных. 704. а) 36,6; б) $\approx 57,2$; в) $\approx 89,6$; г) $\approx 43,5$. 713. а) 95° ; б) нет решения. 723. а) 7 и 31, 18 и 20, 29 и 9; б) 100° . 728. $\{-28; 23\}$. 729. 66. 730. 9000 р.

Предметный указатель

- Абсцисса 12
Аргумент 11
Величины:
 зависимые 3
 независимые 3
 переменные 3
 прямо пропорциональные 27
График линейного уравнения 127
График функции 13
Диофантовы уравнения 87
Задание функции:
 аналитически 12
 графически 12–13
 словесным описанием 11
 таблицей 12
Интервал 47
Ключ шифра 20
Корень уравнения 62
Коэффициент пропорциональности 27
Криптография 20
Кусочно-линейная функция 46
Линейная зависимость 36
Линейная функция 36
Линейное неравенство 99
Линейное уравнение 64
Линейное уравнение с двумя переменными 125
Луч:
 замкнутый 47
 открытый 47
Медиана набора чисел 161
Мода набора чисел 160
Наибольшее значение 159
Наименьшее значение 159
Неравенство 97
 строгое 97
 нестрогое 97
Общее решение линейного уравнения с двумя переменными 128
Ордината 13
Отрезок 47
Полуинтервал 47
Прямая пропорциональность 27
Равенство 62
Равносильные неравенства 98
Равносильные преобразования систем уравнений 141
Равносильные системы уравнений 139
Равносильные уравнения 63
Размах набора чисел 159
Решение линейного уравнения с двумя переменными 125
Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными 132
Решения неравенства 97
Решить линейное уравнение с двумя переменными 125
Система двух уравнений с двумя переменными 131
Способ алгебраического сложения 140
Способ подстановки 139
Среднее арифметическое 158
Статистика 158
Тождество 62
Уравнение 62
Функция 4
Числовой промежуток 47
Шифр:
 замены 21
 перестановки 22
 сдвига 20

Оглавление

Глава 5. Введение в теорию функций	3
§ 1. Понятие функции и её практическое применение	3
5.1.1. Функциональная зависимость между величинами	3
5.1.2. Способы задания функции	11
5.1.3. Функциональная зависимость и кодирование информации*	20
§ 2. Линейные процессы и линейная функция	27
5.2.1. Прямая пропорциональность	27
5.2.2. Линейная функция и её график	36
5.2.3. Кусочно-линейные функции	46
Задачи для самоконтроля к главе 5	59
 Глава 6. Введение в теорию линейных уравнений и неравенств	62
§ 1. Линейные уравнения	62
6.1.1. Линейные уравнения и их решение	62
6.1.2. Решение уравнений с модулями	75
6.1.3. Решение уравнений вида $ax + by = c$ в целых числах*	87
§ 2. Линейные неравенства	97
6.2.1. Линейные неравенства и их решение	97
6.2.2. Решение неравенств с модулями	113
§ 3. Системы линейных уравнений	124
6.3.1. Линейное уравнение с двумя переменными и его график	124
6.3.2. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Графическое решение системы	131
6.3.3. Алгебраические методы решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными: способ подстановки и способ сложения	138
Задачи для самоконтроля к главе 6	143
 Глава 7. Введение в статистику	147
7.1 Способы упорядочивания информации	147
7.2. Статистические характеристики	158
Задачи для самоконтроля к главе 7	179
Ответы	171
Предметный указатель	175

* – звездочкой помечены пункты, содержание которых выходит за рамки программы базового курса математики