ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11 КЛАСС

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

Учебное пособие

В двух частях
Часть 2

2-е издание, стереотипное

МОСКВА
«Просвещение»
2026

УДК 373.167.1:51+51(075.3) 12+
ББК 22.1я721
М34

Серия «Лаборатория А. Г. Мордковича» основана в 2020 году

Авторы:

заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования, доктор педагогических наук, профессор Московского городского педагогического университета *А. Г. Мордкович*;

почётный работник высшего профессионального образования РФ, доктор физико-математических наук, профессор отдела математического образования НИУ ВШЭ *П. В. Семенов*;

отличник народного просвещения, учитель математики высшей категории *Л. А. Александрова*;

кандидат педагогических наук, доцент *Е. Л. Мардахаева*.

Математика. Алгебра и начала математического анализа :
М34 11-й класс : базовый и углублённый уровни : учебное пособие : в 2 частях / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева. — 2-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2026. — (Лаборатория А. Г. Мордковича).

ISBN 978-5-09-129508-5.
Ч. 2. — 287, [1] с. : ил.
ISBN 978-5-09-129510-8.

Учебное пособие входит в завершённую предметную линию по алгебре и началам математического анализа базового и углублённого уровней для 10–11 классов. Учебное пособие разработано в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования.

Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением большого числа примеров, практические задания представлены на трёх уровнях сложности. В конце каждой главы приведены основные факты, а также вопросы и тест для самопроверки, дополнительные задачи и исторические сведения.

Учебное пособие содержит избранные темы курса «Вероятность и статистика».

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-129510-8 (ч. 2)
ISBN 978-5-09-129508-5

© АО «Издательство «Просвещение», 2025
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2025
Все права защищены

Условные обозначения

24.13. Задачи базового уровня сложности

24.14. Задачи среднего уровня сложности

24.15. Задачи повышенного уровня сложности

ИКТ Материал может быть рассмотрен с помощью ИКТ-средств

Упражнения с общим заданием

10.11

10.12

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения примера

* Материал, предназначенный для изучения на углублённом уровне.



Балтийский федеральный университет
им. Иммануила Канта.
Калининград

§ 21. Понятие первообразной
§ 22. Правила интегрирования
§ 23. Понятие определённого интеграла. Формула Ньютона — Лейбница
§ 24. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла

Глава 4
Определённый интеграл

§ 21. Понятие первообразной

Вы, наверное, уже привыкли к тому, что в математике, как правило, для каждой операции имеется обратная операция. Есть возведение в квадрат (x^2) и есть извлечение квадратного корня $\left(\sqrt{x}\right)$, есть синус ($\sin x$) и есть арксинус ($\arcsin x$), есть показательная функция ($y = a^x$) и есть обратная ей логарифмическая функция ($y = \log_a x$) и т. д. Для операции дифференцирования также имеется обратная операция — операция интегрирования. В чём состоит операция дифференцирования? Для данной функции $y = f(x)$ находим её производную. Так, если $f(x) = x^2$, то $f'(x) = 2x$. В чём состоит обратная операция? Для данной функции $y = f(x)$ находим ту функцию $y = F(x)$, производная $F'(x)$ которой равна $f(x)$. Так, если $f(x) = 2x$, то $F(x) = x^2$.

Пример 1 Найти функцию $y = F(x)$, для которой данная функция является производной:

а) $y = x^2$; б) $y = 3\sin x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = e^x + \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

Решение. а) $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, поскольку

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2.$$

б) $F(x) = -3\cos x$, поскольку

$$(-3\cos x)' = -3(\cos x)' = -3(-\sin x) = 3\sin x.$$

в) $F(x) = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$, поскольку

$$\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right)' = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

г) $F(x) = e^x + \ln x$, поскольку

$$(e^x + \ln x)' = (e^x)' + (\ln x)' = e^x + \frac{1}{x}.$$

Ответ: а) $\dfrac{x^3}{3}$; б) $-3\cos x$; в) $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$; г) $e^x + \ln x$.

Определение 1. Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной** для функции $y = f(x)$ на промежутке X, если для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Так, результаты решения примера 1 можно представить в виде таблицы.

Функция	Её первообразная
а) $y = x^2$	$y = \dfrac{x^3}{3}$, $x \in (-\infty; +\infty)$
б) $y = 3\sin x$	$y = -3\cos x$, $x \in (-\infty; +\infty)$
в) $y = \sqrt{x}$	$y = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$, $x \in (0; +\infty)$
г) $y = e^x + \dfrac{1}{x}$	$y = e^x + \ln x$, $x \in (0; +\infty)$

Отметим, что функция $y = \sqrt{x}$ на самом деле определена на луче $[0; +\infty)$, но концевые точки промежутков обычно не принимают во внимание при нахождении первообразных.

Нам очень пригодится таблица первообразных. В этой таблице каждая функция из столбца $f(x)$ является производной для находящейся на той же строчке функции из столбца $F(x)$.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	C	$\cos x$	$\sin x$
1	x	$\sin x$	$-\cos x$
$x^r\ (r \neq -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert,\ x \neq 0$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

Сделаем пояснение по одной строчке таблицы. Пусть $F(x) = \ln|x|$. Возможны два случая: $x > 0$, $x < 0$. Если $x > 0$, то $|x| = x$, $F(x) = \ln|x| = \ln x$, $f(x) = F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$, $F(x) = \ln|x| = \ln(-x)$, $f(x) = F'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Как видите, и в том и в другом случае $f(x) = \frac{1}{x}$.

На самом деле, у каждой функции из столбца $f(x)$ таблицы не одна первообразная, а бесконечно много первообразных. Например, функция $y = \sin x$ является первообразной для функции $y = \cos x$. А теперь смотрите: $(\sin x + 5)' = \cos x$, $(\sin x - 2{,}5)' = \cos x$ и вообще $(\sin x + C)' = \cos x$; значит, любая функция вида $y = \sin x + C$, $C \in \boldsymbol{R}$, является первообразной для функции $y = \cos x$. Имеет место следующая теорема (её доказывают в курсе высшей математики).

Теорема. Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных, и все они имеют вид $y = F(x) + C$, где C — любое действительное число.

Определение 2. Если функция $y = f(x)$ имеет на множестве X первообразную $y = F(x)$, то множество всех первообразных, т. е. множество $\{F(x) + C \mid C \in \boldsymbol{R}\}$, называют **неопределённым интегралом** от функции $y = f(x)$ и обозначают так: $\int f(x)dx$ (читают: *неопределённый интеграл эф от икс дэ икс*).

Пример 2 Найти: а) $\int x^7 dx$; б) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

Решение. В обоих случаях будем опираться на четвёртую строчку таблицы первообразных.

а) Первообразной для функции $y = x^7$ является функция $y = \frac{x^8}{8}$, значит, $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + C$.

б) Преобразуем заданную функцию:

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{-\frac{1}{4}}.$$

Значит,

$$F(x) = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}; \quad \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$$

Ответ: а) $\frac{x^8}{8} + C$; б) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$.

Упражнения

21.1. Приведите пример хотя бы одной функции $y = f(x)$, если известна её производная:

а) $f'(x) = \sin x$;

б) $f'(x) = -\cos x$;

в) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$;

г) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

д) $f'(x) = 2x + 1$;

е) $f'(x) = 3x^2 - x$.

Установите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$.

21.2. а) $F(x) = 2 + 3x^2$, $f(x) = 6x$;

б) $F(x) = x^3 - x^4$, $f(x) = 3x^2 - 4x^3$;

в) $F(x) = 2\sqrt{x} - 3x$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3$;

г) $F(x) = 5x - 2x^4$, $f(x) = 5 - 8x^3$;

д) $F(x) = x^5 + x^2$, $f(x) = 5x^4 + 2x$;

е) $F(x) = \sqrt[3]{x} + x$, $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1$.

21.3. а) $F(x) = 2 + \cos x$, $f(x) = -\sin x$;

б) $F(x) = 0{,}5\operatorname{ctg} x$, $f(x) = -\dfrac{1}{2\sin^2 x}$;

в) $F(x) = \sin 2x$, $f(x) = 2\cos 2x$;

г) $F(x) = 1 - \sin x$, $f(x) = -\cos x$;

д) $F(x) = 3\operatorname{tg} x$, $f(x) = \dfrac{3}{\cos^2 x}$;

е) $F(x) = 3\cos\dfrac{x}{3}$, $f(x) = -\sin\dfrac{x}{3}$.

21.4. а) $F(x) = e^{2x}$, $f(x) = 2e^{2x}$;

б) $F(x) = 3\ln x$, $f(x) = \dfrac{3}{x}$;

в) $F(x) = 2^{x+1}$, $f(x) = 2^{x+1}\ln 2$;

г) $F(x) = \dfrac{1}{6}e^{6x}$, $f(x) = e^{6x}$;

д) $F(x) = \ln 5x$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

е) $F(x) = \dfrac{5^{2x-1}}{\ln 5}$, $f(x) = 2 \cdot 5^{2x-1}$.

21.5. Установите, что функция $y = F(x)$ не является первообразной для функции $y = f(x)$:

а) $F(x) = e^{3x}$, $f(x) = e^{3x}$;

б) $F(x) = \cos 4x$, $f(x) = -4\sin x$;

в) $F(x) = \sqrt{2x+5}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}}$;

г) $F(x) = 3^{x-2}$, $f(x) = 3^x\ln 3$;

д) $F(x) = \sin\dfrac{x}{2}$, $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$;

е) $F(x) = (1-x)^4$, $f(x) = 4(1-x)^3$.

21.6. Для данной функции найдите хотя бы одну первообразную.

а) $y = \dfrac{2}{x^2}$; в) $y = \dfrac{1}{x}$; д) $y = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

б) $y = x^2$; г) $y = x^{-3}$; е) $y = 3\sqrt{x}$.

21.7. а) $y = x - 1$; в) $y = 4x^3$; д) $y = x\sqrt{x}$;

б) $y = 2x$; г) $y = 3x^2$; е) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

21.8. а) $y = \sin 2x$; в) $y = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$; д) $y = \operatorname{tg}^2 x$;

б) $y = 1 - \cos x$; г) $y = \sin x \cos x$; е) $y = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$.

Для указанной функции $y = f(x)$ найдите ту первообразную, график которой проходит через данную точку P.

21.9. а) $y = -\frac{1}{x^2}$, $P(-1; 1)$; г) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $P(0{,}25; 2)$;

б) $y = 6x^2$, $P(-2; 3)$; д) $y = 4x^3$, $P(1; -0{,}5)$;

в) $y = e^x$, $P(0; 2)$; е) $y = \frac{1}{x}$, $P(1; 1)$.

21.10. а) $y = 2\cos x$, $P\left(-\frac{\pi}{6}; -2\right)$;

б) $y = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $P\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$;

в) $y = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, $P\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$;

г) $y = \sqrt{2}\sin x$, $P\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$;

д) $y = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}$, $P\left(\frac{\pi}{3}; -1\right)$;

е) $y = 4\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}$, $P\left(\frac{2\pi}{3}; -3\right)$.

Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$.

21.11. а) $F(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$;

б) $F(x) = 2\operatorname{arctg} x - 3\operatorname{arcctg} x$, $f(x) = \frac{5}{1 + x^2}$;

в) $F(x) = x^3 e^{2x}$, $f(x) = x^2 e^{2x}(2x + 3)$;

г) $F(x) = 3\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right), f(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{3}\right)$;

д) $F(x) = 3\arcsin 2x - 2\arccos 2x,\ f(x) = \frac{10}{\sqrt{1-4x^2}}$;

е) $F(x) = \ln(2x+1) - \frac{2}{x^2}, f(x) = \frac{2(x+1)^2}{x^2(2x+1)}$.

21.12. а) $F(x) = \ln\cos x,\ f(x) = -\operatorname{tg} x$;

б) $F(x) = \sin^4 x - \cos^4 x,\ f(x) = 2\sin 2x$;

в) $F(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x},\ f(x) = \cos x(e^{\sin x} - \operatorname{tg} x \cdot e^{\cos x})$;

г) $F(x) = \sqrt{\frac{\lg x}{\lg e}}, f(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$;

д) $F(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}, f(x) = \frac{2\sqrt{\operatorname{ctg}^2 2x}}{3\cos^2 2x}$;

е) $F(x) = \sin\frac{2x-1}{3x+2}, f(x) = \frac{7}{9x^2+12x+4} \cdot \cos\frac{2x-1}{3x+2}$.

Найдите неопределённый интеграл.

21.13. а) $\int dx$; в) $\int x^2\,dx$; д) $\int \frac{1}{x}dx$;

б) $\int x\,dx$; г) $\int x^3\,dx$; е) $\int \sqrt{x}\,dx$.

21.14. а) $\int \sin x\,dx$; в) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$; д) $\int e^x\,dx$;

б) $\int \cos x\,dx$; г) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$; е) $\int 10^x\,dx$.

Упражнения для повторения

21.15. а) Найдите точку максимума функции $y = e^{16-4x}(x-3)$.

б) Найдите точку минимума функции $y = e^{5x-35}(x+7)$.

21.16. Найдите значения параметра p, при которых функция $y = x^3 - 3px^2 + 48x - 4$ имеет ровно одну стационарную точку.

21.17. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном отрезке:

а) $y = x^3 + 15x^2 + 14$, $[-10; 5]$;

б) $y = e^{2x} - 4e^x + 5$, $[0; 1]$;

в) $y = 9\operatorname{tg} x - 9x$, $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]$;

г) $y = -x^3 + 12x^2 + 10$, $[-1; 8]$;

д) $y = e^{2x} - 6e^x - 3$, $[0; 2\ln 2]$;

е) $y = 6x + 6\operatorname{ctg} x + \pi$, $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

21.18. а) В некотором городе проживают 250 000 человек, 15 % которых — дети и подростки в возрасте до 18 лет, остальные — взрослые. Среди взрослых 30 % — неработающее население (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых работает?

б) В школе 600 учащихся, 30 % которых — учащиеся начальной школы. Немецкий язык изучают 15 % учащихся 5—11-х классов. Сколько учащихся 5—11-х классов изучают немецкий язык?

21.19. Решите уравнение:

а) $\dfrac{5^{\sin 2x} - 5^{\sqrt{3}\cos x}}{\sqrt{\cos x}} = 0$;

б) $\dfrac{4^{\cos 2x} - 4^{\sin x + 1}}{\lg(\cos x)} = 0$;

в) $\dfrac{2\log^2_{0,5}(\sin x) - \log_{0,5}(\sin x) - 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$;

г) $\dfrac{3^{\sin 2x} - 3^{\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{\sin x}} = 0$;

д) $\dfrac{0,5^{\cos 2x} - 0,5^{\cos x - 1}}{\ln(\sin x)} = 0$;

е) $\dfrac{2\log^2_{0,5}(\cos x) + \log_{0,5}(\cos x) - 1}{2\sin x - \sqrt{2}} = 0$.

§ 22. Правила интегрирования

Для отыскания первообразных, как и для отыскания производных, используются не только формулы (о них шла речь в предыдущем параграфе), но и правила. О них и пойдёт речь в настоящем параграфе.

Теорема 1. Если функции $y = f(x)$, $y = h(x)$ имеют на множестве X первообразные $y = F(x)$, $y = H(x)$ соответственно, то функция $y = F(x) + H(x)$ является первообразной для функции $y = f(x) + h(x)$.

Доказательство. Найдём производную функции $y = F(x) + H(x)$:

$$(F(x) + H(x))' = F'(x) + H'(x) = f(x) + h(x).$$

Значит, функция $y = F(x) + H(x)$ является первообразной для функции $y = f(x) + h(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ имеет на множестве X первообразную $y = F(x)$, то для любого числа k функция $y = kF(x)$ является первообразной для функции $y = kf(x)$.

Доказательство. Найдём производную функции $y = kF(x)$:

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x).$$

Значит, функция $y = kF(x)$ является первообразной для функции $y = kf(x)$, что и требовалось доказать.

На практике эти две теоремы удобно использовать в виде двух правил.

Правило 1. Первообразная суммы равна сумме первообразных.

Правило 2. Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.

Пример 1 Найти первообразную $y = F(x)$ для функции

$$y = 2e^x - \frac{1}{3x} + \frac{5}{\cos^2 x} \ (x > 0).$$

Решение. 1) Опираясь на таблицу первообразных из § 21, заключаем, что первообразной для e^x является e^x, первообразной для $\frac{1}{x}$ является $\ln x$, первообразной для $\frac{1}{\cos^2 x}$ является $\operatorname{tg} x$.

2) Руководствуясь правилом 2, заключаем, что первообразной для $2e^x$ является $2e^x$, первообразной для $\frac{1}{3x}$ является $\frac{1}{3}\ln x$, первообразной для $\frac{5}{\cos^2 x}$ является $5\operatorname{tg} x$.

3) И наконец, согласно правилу 1 первообразной для $2e^x - \frac{1}{3x} + \frac{5}{\cos^2 x}$ будет $2e^x - \frac{1}{3}\ln x + 5\operatorname{tg} x$.

Ответ: $F(x) = 2e^x - \frac{1}{3}\ln x + 5\operatorname{tg} x$.

А вот как выглядело бы решение этого примера, если бы требовалось найти не какую-то одну первообразную, а множество всех первообразных, т. е. неопределённый интеграл $\int\left(2e^x - \frac{1}{3x} + \frac{5}{\cos^2 x}\right)dx$:

$$\int\left(2e^x - \frac{1}{3x} + \frac{5}{\cos^2 x}\right)dx = \int 2e^x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int \frac{5}{\cos^2 x}dx =$$

$$= 2\int e^x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + 5\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = 2e^x - \frac{1}{3}\ln x + 5\operatorname{tg} x + C.$$

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ имеет на множестве X первообразную $y = F(x)$, то функция $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$ является первообразной для функции $y = f(kx + m)$.

Доказательство. Найдём производную функции $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + m)\right)' = \frac{1}{k}(F(kx + m))' = \frac{1}{k} \cdot kF'(kx + m) = f(kx + m).$$

Значит, функция $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$ является первообразной для функции $y = f(kx + m)$, что и требовалось доказать.

Например, первообразной для $\cos x$ является $\sin x$, значит, первообразной для $\cos 2x$ будет $\frac{1}{2}\sin 2x$; первообразной для $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$ будет $-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$; первообразной для $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$ будет $\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$. А вот примеры использования теоремы 3 для вычисления неопределённого интеграла:

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C; \quad \int e^{5-x}\,dx = -e^{5-x} + C;$$

$$\int (2x-3)^5\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^6}{6} + C = \frac{(2x-3)^6}{12} + C.$$

Пример 2 Найти неопределённый интеграл

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+x^2} - 4\sin 4x\right)dx.$$

Решение.

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+x^2} - 4\sin 4x\right)dx =$$

$$= \int\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int\frac{3}{1+x^2}dx - \int 4\sin 4x dx =$$

$$= 2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + 3\int\frac{1}{1+x^2}dx - 4\int\sin 4x dx =$$

$$= 2\arcsin x + 3\operatorname{arctg} x - 4\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) + C =$$

$$= 2\arcsin x + 3\operatorname{arctg} x + \cos 4x + C.$$

Ответ: $2\arcsin x + 3\operatorname{arctg} x + \cos 4x + C$.

Упражнения

Найдите хотя бы одну первообразную для данной функции $y = f(x)$.

22.1. а) $f(x) = x + 1$; в) $f(x) = 2x - 5$; д) $f(x) = \frac{x+2}{3}$;

б) $f(x) = x - 3$; г) $f(x) = -3x + 4$; е) $f(x) = \frac{4x-1}{6}$.

22.2. а) $f(x) = x^2 + 2x$; г) $f(x) = 3x^2 - 1$;
б) $f(x) = 8x - x^2$; д) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$;
в) $f(x) = -2x^2 - 4$; е) $f(x) = -x^2 - 6x + 3$.

22.3. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$; г) $f(x) = 5x^9 + 4x$;
б) $f(x) = 4x^3 + 5x^4$; д) $f(x) = -9x^2 + 6x^5 - x$;
в) $f(x) = x^5 - 8x^7$; е) $f(x) = 15x^4 - 15x^2 + 1$.

22.4. а) $f(x) = x^{-3} + x^{\frac{2}{3}}$; г) $f(x) = 4x^{-5} - 3x^{-4}$;

б) $f(x) = x^{-2} - x^{\frac{1}{4}}$; д) $f(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 0{,}5x^{-0{,}5}$;

в) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$; е) $f(x) = 2{,}5x^{-1{,}5} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

22.5. а) $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$; г) $f(x) = \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - x$; д) $f(x) = \sqrt{x} + x^{-2}$;

в) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3}$; е) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2x^{-1}$.

22.6. а) $f(x) = (x + 4)^2$; г) $f(x) = (x - 2)^3$;

б) $f(x) = -\frac{1}{(3x-2)^2}$; д) $f(x) = \frac{12}{(4x+7)^3}$;

в) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{5-3x}}$; е) $f(x) = \frac{9}{2\sqrt{6x+1}}$.

22.7. а) $f(x) = \sin x - 3\cos x$;
б) $f(x) = \sin 2x + \dfrac{2}{\sin^2 x}$;
в) $f(x) = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$;
г) $f(x) = -2\sin x + \cos x$;
д) $f(x) = \cos\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{\cos^2 x}$;
е) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{x}{2}\right)$.

22.8. а) $f(x) = e^x - x^{-1}$ $(x > 0)$;
б) $f(x) = e^{-x} - x^{-1}$ $(x > 0)$;
в) $f(x) = 2^x - \dfrac{1}{2x}$ $(x > 0)$;
г) $f(x) = 10^x + \dfrac{3}{x}$ $(x > 0)$;
д) $f(x) = e^{2-3x} - 2x^{-1}$ $(x > 0)$;
е) $f(x) = e^{5x-4} + \dfrac{1}{5x}$ $(x > 0)$.

Найдите множество всех первообразных заданной функции.

22.9. а) $y = (x - 3)^3$;
б) $y = (x + 5)^4$;
в) $y = (3x - 2)^2$;
г) $y = (7 - 2x)^3$;
д) $y = (8 - 0{,}2x)^4$;
е) $y = (0{,}25x + 6)^7$.

22.10. а) $y = \sin(4x + 1)$;
б) $y = 2\cos(7 - 2x)$;
в) $y = -\dfrac{5}{\sin^2(5x + 2)}$;
г) $y = \cos(5x - 3)$;
д) $y = -3\sin(5 - 6x)$;
е) $y = \dfrac{1}{3\cos^2\left(\dfrac{x}{3} - 1\right)}$.

22.11. а) $y = \dfrac{1}{(2x + 3)^2}$;
б) $y = \dfrac{3}{2\sqrt{3x - 7}}$;
в) $y = (1 - 6x)^{-\frac{1}{6}}$;
г) $y = \dfrac{4}{(4x - 3)^3}$;
д) $y = -\dfrac{5}{\sqrt[3]{5x + 2}}$;
е) $y = (5 - 6x)^{\frac{3}{4}}$.

22.12. а) $y = 3e^{3x} + 1$;
б) $y = e^{2-x} + \dfrac{1}{2x}$ $(x > 0)$;
в) $y = 2^{4x+3} - \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$;
г) $y = 0{,}25e^{0{,}5x} - 2$;
д) $y = e^{1-2x} - \dfrac{3}{x}$ $(x > 0)$;
е) $y = 3^{5x-2} + \dfrac{1}{5x}$ $(x > 0)$.

22.13. а) $f(x) = 3\sin\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2\cos^2 0{,}5x}$;
б) $f(x) = \sin 5x \cos 3x$;
в) $f(x) = e^{5x-1} + \dfrac{1}{5x - 1}$;
г) $f(x) = 2{,}5\cos\dfrac{5x}{2} - \dfrac{2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$;
д) $f(x) = \cos 9x \cos x$;
е) $f(x) = \sqrt[3]{3x + 1} - \dfrac{1}{(x + 2)^2}$.

22.14. Для указанной функции найдите ту первообразную, график которой проходит через данную точку P.

а) $y = 2x + 1$, $P(2; 3)$;

б) $y = 3x^2 - x$, $P(0; 1)$;

в) $y = \frac{1}{(x+2)^2}$, $P(-1; 2)$;

г) $y = 4x - 3$, $P(1; -5)$;

д) $y = 6x^2 + 2x$, $P(1; 5)$;

е) $y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $P(5; 4)$.

22.15. а) $y = \cos x - \sin x$, $P(0; -3)$;

б) $y = \frac{1}{\cos^2 x} + \sin 3x$, $P\left(\frac{\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$;

в) $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 1$, $P(0; 3)$;

г) $y = 2\sin x - \cos x$, $P\left(\frac{\pi}{2}; 8\right)$;

д) $y = \frac{3}{\sin^2 x} - \cos\frac{x}{2}$, $P\left(\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$;

е) $y = \frac{1}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} - x$, $P(0; -2)$.

22.16. Точка движется по координатной прямой. Ускорение движения точки задано формулой $a(t) = 6(t + 1)^2$, t — время движения. Найдите закон изменения скорости $v = v(t)$ и закон движения $s = s(t)$, если $v(1) = 10$, $s(1) = 3$.

22.17. Точка движется по координатной прямой со скоростью, заданной формулой $v = v(t)$. Найдите закон движения $s = s(t)$, если известны начальные условия (t_0, s_0):

а) $v = 2 + 6t$, $t_0 = 2$, $s_0 = 6$;

б) $v = -\sin\frac{t}{3}$, $t_0 = \pi$, $s_0 = 4$;

в) $v = 3\sqrt{t}$, $t_0 = 4$, $s_0 = 10$;

г) $v = 3 + 4t$, $t_0 = 5$, $s_0 = 30$;

д) $v = 2\cos 4t$, $t_0 = \frac{\pi}{24}$, $s_0 = 3{,}75$;

е) $v = -\frac{2}{t^2}$, $t_0 = 0{,}25$, $s_0 = 5$.

22.18. а) Известно, что первообразная функции $y = 2\cos^2 x$ принимает в точке $x = \frac{\pi}{2}$ значение 0. Найдите значение той же первообразной в точке $x = \frac{\pi}{12}$.

б) Известно, что первообразная функции $y = \frac{1}{3x - 1}$ принимает в точке $x = \frac{2}{3}$ значение 0. Найдите значение той же первообразной в точке $x = \frac{1 + e}{3}$.

22.19. Для функции $y = f(x)$ найдите первообразную $y = F(x)$ с заданной областью значений $E(F)$:

а) $f(x) = 2x + 2$, $E(F) = [4; +\infty)$;

б) $f(x) = \frac{2}{1 + x^2}$, $E(F) = (0; 2\pi)$;

в) $f(x) = 3 - 4x$, $E(F) = (-\infty; 1]$;

г) $f(x) = 9\sin 3x$, $E(F) = [-1; 5]$.

Найдите неопределённый интеграл.

22.20. а) $\int (x - 5)\,dx$;

б) $\int (2x + 5)\,dx$;

в) $\int (x^2 - 1)\,dx$;

г) $\int (x^2 - x)\,dx$;

д) $\int (x^3 + 2x^2 + x)\,dx$;

е) $\int (3x^2 - 4x + 1)\,dx$.

22.21. а) $\int (\sin 3x + e^{-2x})\,dx$;

б) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 3x} - \frac{2}{x}\right) dx$;

в) $\int \left(\sqrt[3]{x} + x^{1,5}\right) dx$;

г) $\int \left(e^{1-2x} + 2\cos\frac{x}{2}\right) dx$;

д) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{\sin^2 6x}\right) dx$;

е) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x^{-0,6}\right) dx$.

22.22. а) $\int x^3 (1 - x^2)\,dx$;

б) $\int 2\sin x \cos x\,dx$;

в) $\int \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1} dx$;

г) $\int x^2 (x + 3)\,dx$;

д) $\int (\cos^2 2x - \sin^2 2x)\,dx$;

е) $\int \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6} dx$.

22.23. а) $\int\left(3\cdot 2^x-\dfrac{2}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}+\sqrt{3x+1}\right)dx$;

б) $\int\left(\dfrac{5}{1+x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}+2\sin 2x\right)dx$;

в) $\int\left(2e^{3x-1}+\dfrac{5}{\sin^2 5x}-4\sqrt[5]{4x+1}\right)dx$;

г) $\int\left(\cos^2 2x-\dfrac{2x^5}{3x^7+3x^5}+\dfrac{1}{\sqrt{9-9x^2}}\right)dx$.

Упражнения для повторения

22.24. Найдите вероятность того, что при одновременном бросании красного и синего игральных кубиков:
а) на красном кубике число выпавших очков будет на 2 меньше, чем на синем;
б) на синем кубике число выпавших очков будет на 1 или на 3 отличаться от числа очков на красном.

22.25. События A и B независимы. Их вероятности равны 0,7 и 0,9 соответственно. Найдите вероятности событий:
а) AB; б) $A+B$; в) $\overline{A}B$; г) $A+\overline{B}$.

22.26. а) Стрелок в тире 5 раз стреляет по движущейся мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок 3 раза попадёт и 2 раза промахнётся.
б) Стрелок в тире 5 раз стреляет по движущейся мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелок промахнётся только 1 раз.

22.27. Определите знак числа a, если:
а) $a=\sin 2\sin 4\cos 6\cos 8$;
б) $a=\sin 10\cos 12\operatorname{tg}13\operatorname{ctg}15$.

22.28. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:
а) $14^{\sin x}=7^{\cos x}\cdot 2^{\sin x}$, $[-2{,}5\pi;\ -1{,}5\pi]$;
б) $15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{-\sin x}$, $[-\pi;\ 2\pi]$.

§ 23. Понятие определённого интеграла. Формула Ньютона — Лейбница

Главу 2, где речь шла об операции дифференцирования, мы начали с рассмотрения двух задач — физической (о мгновенной скорости неравномерного движения материальной точки по прямой) и геометрической (об угловом коэффициенте касательной к графику функции). Указанные две задачи привели нас к понятию производной (см. § 6). Этот параграф мы тоже начнём с рассмотрения двух задач (физической и геометрической), они приведут нас к понятию определённого интеграла.

Задача 1 (о перемещении точки) По прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v = v(t)$. Найти перемещение s точки за промежуток времени $[a; b]$.

Решение.

1) Разделим промежуток времени $[a; b]$ на n равных частей:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

2) Будем считать, что в течение всего промежутка времени $[t_k; t_{k+1}]$ скорость движения v_k была постоянной, например такой, как в момент времени t_k. Итак, мы считаем, что $v_k = v(t_k)$.

3) Приближённое значение перемещения s_k точки за промежуток времени от t_k до t_{k+1} выражается следующей формулой:

$$s_k \approx v(t_k)\,\Delta t_k.$$

4) Найдём приближённое значение перемещения s:

$$s \approx S_n,$$

где

$$S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_k + \ldots + s_{n-1} =$$
$$= v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \ldots + v(t_k)\Delta t_k + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}.$$

5) Приближённое равенство $s \approx S_n$ будет тем точнее, чем больше n. Точное значение перемещения s равно пределу последовательности (S_n):

$$s = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

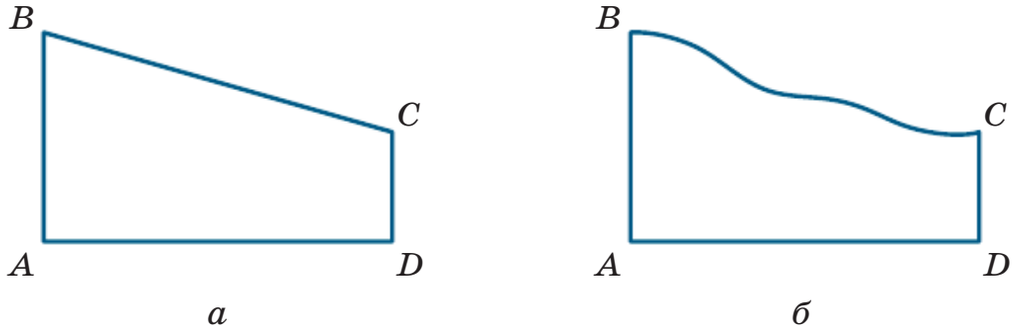


Рис. 110

Прежде чем формулировать вторую задачу, введём понятие криволинейной трапеции. На рисунке 110, *а* изображена прямоугольная трапеция $ABCD$. Если её верхнее основание BC заменить кривой линией (рис. 110, *б*), то получится плоская фигура, которую назовём *криволинейной трапецией*.

Задача 2 (о вычислении площади криволинейной трапеции) В прямоугольной системе координат xOy расположена криволинейная трапеция, ограниченная осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$ (рис. 111). Вычислить площадь этой криволинейной трапеции.

Решение. Разобьём отрезок $[a; b]$ (основание криволинейной трапеции) на n равных частей; это разбиение осуществим с помощью точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}$. Проведём через эти точки прямые,

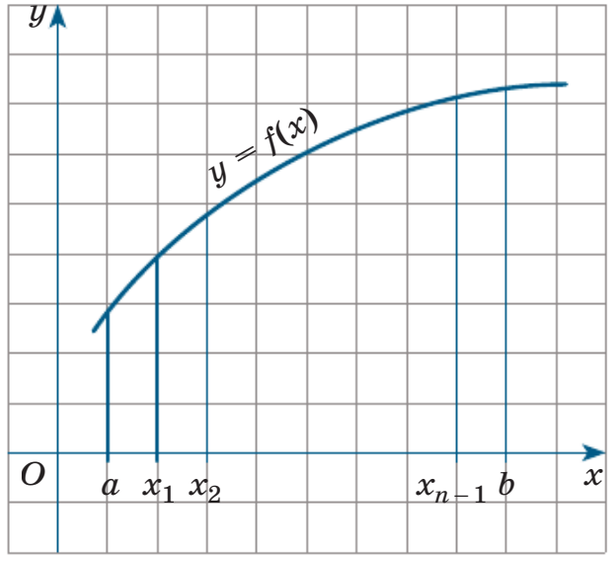


Рис. 111

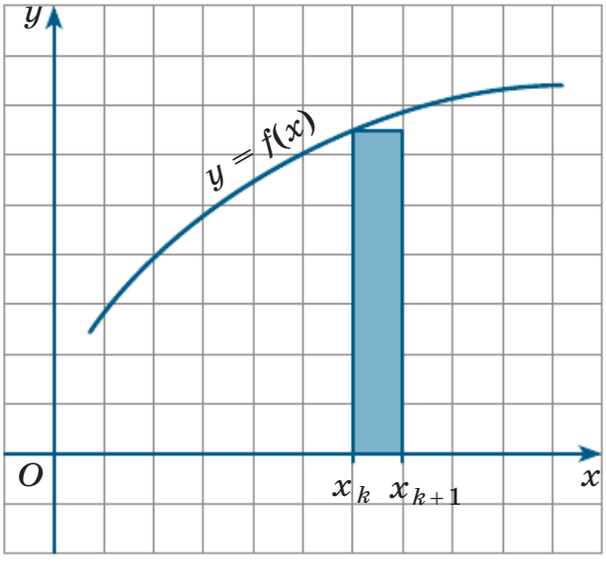


Рис. 112

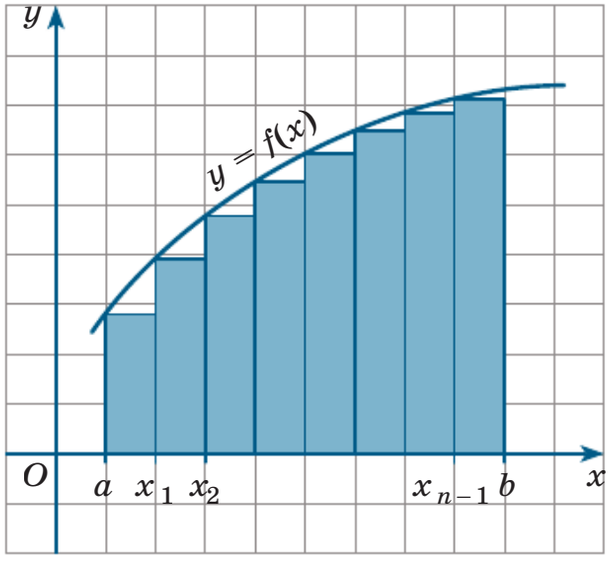


Рис. 113

параллельные оси Oy. Тогда заданная криволинейная трапеция разобьётся на n частей, на n узких столбиков. Площадь всей трапеции равна сумме площадей столбиков.

Рассмотрим отдельно k-й столбик, т. е. криволинейную трапецию, основанием которой служит отрезок $[x_k;\ x_{k+1}]$. Заменим его прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(x_k)$ (рис. 112). Площадь прямоугольника равна $f(x_k) \cdot \Delta x_k$, где Δx_k — длина отрезка $[x_k;\ x_{k+1}]$; естественно считать составленное произведение приближённым значением площади k-го столбика.

Сделав то же самое со всеми остальными столбиками, получим такой результат: площадь S заданной криволинейной трапеции приближённо равна площади S_n ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников (рис. 113):

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Здесь ради единообразия обозначений мы считаем, что $a = x_0$, $b = x_n$; Δx_0 — длина отрезка $[x_0;\ x_1]$, Δx_1 — длина отрезка $[x_1;\ x_2]$ и т. д.; при этом, как мы условились выше,

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1}.$$

Итак, $S \approx S_n$. Чем больше n, тем точнее это приближённое равенство, а точное равенство выражается формулой

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Подведём итоги. Две различные задачи привели к одной и той же математической модели. Опишем её. Рассматривалась непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$; далее мы делали следующее:

1) разбивали отрезок $[a; b]$ на n равных частей;

2) составляли сумму

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1};$$

3) вычисляли $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Многие задачи из различных областей знания приводят в процессе решения к такой же математической модели и, следовательно, к новому понятию. Значит, это математическое понятие надо специально изучить: ввести для него название, обозначение и научиться с ним работать.

Указанный предел называют **определённым интегралом** (более полное название: **определённый интеграл от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$**) и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читают: *интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс*). Число a называют *нижним пределом интегрирования*, а число b — *верхним пределом интегрирования*. Про $f(x)$ говорят так: «подынтегральная функция».

Вернёмся к задаче 1, где речь шла о перемещении s точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$. Формула для отыскания s такова:

$$s = \int\limits_a^b v(t)\,dt.$$

В этом состоит *физический смысл определённого интеграла*.

Вернёмся к задаче 2, где речь шла о вычислении площади S криволинейной трапеции. Формула для отыскания S такова:

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

В этом состоит *геометрический смысл определённого интеграла*.

В § 21 мы ввели понятия первообразной и неопределённого интеграла, а в настоящем параграфе — понятие определённого интеграла. Неопределённый интеграл, определённый интеграл... Какая связь между этими понятиями? Оказывается, связь есть: оба понятия самым тесным образом связаны с понятием первообразной. Неопределённый интеграл от данной функции — это множество первообразных для данной функции. А что касается определённого интеграла, то справедлива следующая теорема.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Например, функция $y = x^3$ — первообразная для функции $y = 3x^2$. Введём обозначение: $F(x) = x^3$. Тогда

$$\int_1^2 3x^2\,dx = F(2) - F(1) = 2^3 - 1^3 = 7.$$

Формулу (1) называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646—1716), которые примерно около 1680 г. независимо друг от друга нашли взаимосвязь между неопределённым и определённым интегралами от непрерывных функций.

Строгое доказательство теоремы даётся в курсе высшей математики, мы же ограничимся физическим обоснованием. Мы говорили о том, что перемещение s точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t)\,dt.$$

С другой стороны, перемещение s за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ выражается формулой $s = s(b) - s(a)$. В итоге получаем:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a).$$

На практике вместо записи $F(b) - F(a)$ используют запись $F(x)\Big|_a^b$, её называют *двойной подстановкой* и, соответственно, переписывают формулу Ньютона — Лейбница в таком виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \qquad (2)$$

Пример 1 Вычислить определённый интеграл:

а) $\int\limits_0^2 x^3\,dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$; в) $\int\limits_2^3 2^x\,dx$; г) $\int\limits_{-1}^3 \sqrt{2x+3}\,dx$.

Решение. Для каждого из указанных интегралов сначала находим первообразную для подынтегральной функции, а затем применяем формулу (2). Для отыскания первообразной в пунктах «а»—«в» воспользуемся таблицей первообразных из § 21.

а) Для функции $y = x^3$ первообразной является функция $y = \frac{x^4}{4}$; значит, $\int\limits_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(2^4 - 0^4) = 4$.

б) Для функции $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ первообразной является функция $y = \operatorname{tg} x$; значит,

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 1 + \sqrt{3}.$$

в) Для функции $y = 2^x$ первообразной является функция $y = \frac{2^x}{\ln 2}$; значит, $\int\limits_2^3 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_2^3 = \frac{1}{\ln 2}(2^3 - 2^2) = \frac{4}{\ln 2}$.

г) Для функции $y = \sqrt{x}$, т. е. для $y = x^{\frac{1}{2}}$, первообразной является функция $y = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$. Но у нас подынтегральная функция не $y = \sqrt{x}$, а $y = \sqrt{2x+3}$. Придётся воспользоваться теоремой 3 из § 22, согласно которой если функция $y = f(x)$ имеет первообразную $y = F(x)$, то для функции $y = f(kx + m)$ первообразной является функция $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$. Значит, для функции $y = \sqrt{2x+3}$ первообраз-

ной будет функция $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{(2x+3)^3}$, т. е. $y = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}$. Теперь можно применить формулу Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_{-1}^{3} \sqrt{2x+3}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}\,\Big|_{-1}^{3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(2\cdot 3+3)^3} - \sqrt{(2\cdot(-1)+3)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{1}{3}(27-1) = 8\frac{2}{3}.$$

Ответ: а) 4; б) $1+\sqrt{3}$; в) $\frac{4}{\ln 2}$; г) $8\frac{2}{3}$.

Опираясь на формулу Ньютона — Лейбница, получим три свойства определённого интеграла.

Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ — первообразная для $f(x)+g(x)$. Тогда

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = (F(x)+G(x))\Big|_a^b = (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) =$$

$$= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$. Значит,

$$\int_a^b kf(x)dx = kF(x)\Big|_a^b = k(F(b)-F(a)) = k\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 2 Вычислить $\int_1^8 \left(\frac{3}{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 5\right)dx$.

Решение. Воспользуемся сначала свойством 1, а затем свойством 2:

$$\int_1^8 \left(\frac{3}{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 5\right)dx = \int_1^8 \frac{3}{x^2}dx + \int_1^8 2\sqrt[3]{x}\,dx - \int_1^8 5dx =$$

$$= 3\int_1^8 x^{-2}\,dx + 2\int_1^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx - 5\int_1^8 dx.$$

Далее имеем:

$$\int_1^8 x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^8 = -(8^{-1} - 1^{-1}) = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}.$$

$$\int_1^8 x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Big|_1^8 = \frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{4}\left(\left(\sqrt[3]{8}\right)^4 - 1\right) = \frac{3}{4}(2^4 - 1) = \frac{3}{4}\cdot 15 = \frac{45}{4}.$$

$$\int_1^8 dx = x\Big|_1^8 = 8 - 1 = 7.$$

Окончательно получаем:

$$\int_1^8 \left(\frac{3}{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 5\right)dx = 3\cdot\frac{7}{8} + 2\cdot\frac{45}{4} - 5\cdot 7 = -9\frac{7}{8}.$$

Ответ: $-9\frac{7}{8}$.

Свойство 3 (аддитивное свойство интеграла). Если $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) =$$

$$= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

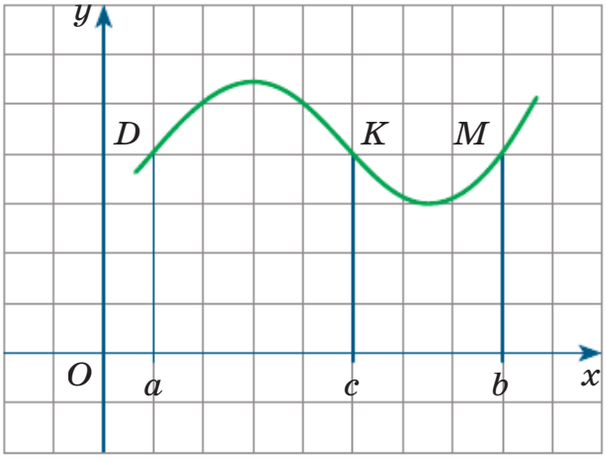


Рис. 114

Свойство 3 наглядно иллюстрирует рисунок 114. Смотрите: площадь S криволинейной трапеции $aDMb$ равна сумме площадей S_1 и S_2 криволинейных трапеций $aDKc$ и $cKMb$: $S = S_1 + S_2$. При этом

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \quad S_1 = \int_a^c f(x)\,dx,$$

$$S_2 = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Пример 3* Вычислить $\int_{-2}^{e} f(x)\,dx$, если $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$

Решение. На рисунке 115 представлен (схематически) график функции $y = f(x)$. Для вычисления заданного интеграла воспользуемся аддитивным свойством $\left(\text{кратко, } \int_{-2}^{e} = \int_{-2}^{1} + \int_{1}^{e}\right)$:

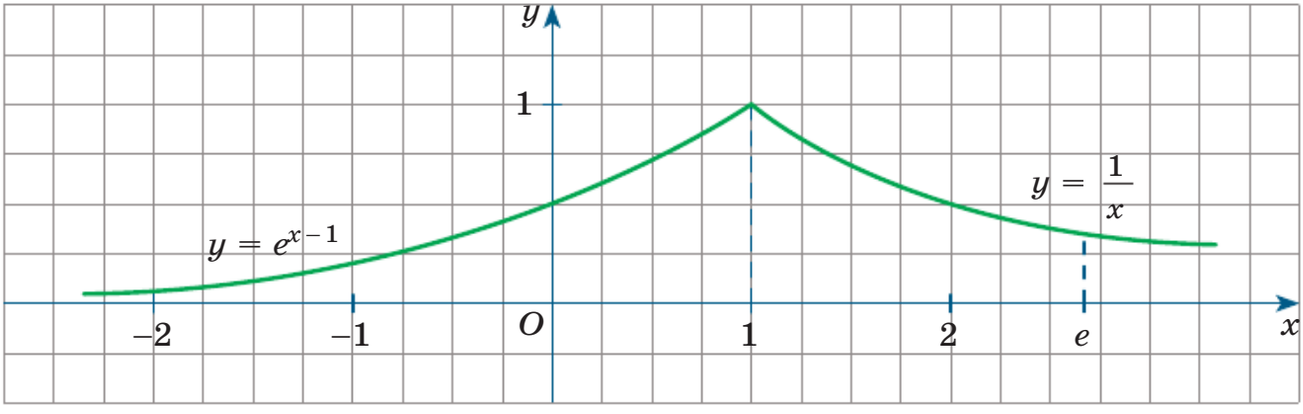


Рис. 115

$$\int_{-2}^{e} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{e} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} e^{x-1}\,dx + \int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= e^{x-1}\Big|_{-2}^{1} + \ln x\Big|_{1}^{e} = (e^{0} - e^{-3}) + (\ln e - \ln 1) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) + (1 - 0) = 2 - \frac{1}{e^3}.$$

Ответ: $2 - \frac{1}{e^3}$.

Пример 4 Дан прямолинейный неоднородный стержень длиной l, плотность которого в точке x (считая от начала стержня) вычисляется по формуле $\rho = \rho(x)$. Найти массу стержня.

Решение. Сделаем геометрическую иллюстрацию: изобразим стержень длиной l в виде отрезка $[0; l]$ координатной прямой (рис. 116).

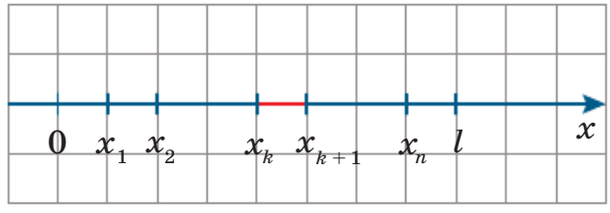


Рис. 116

Из курса физики известно, что масса m однородного тела (т. е. тела постоянной плотности) равна произведению плотности ρ на объём V, т. е. $m = \rho V$. Если речь идёт о плоской пластине, то вместо объёма берут площадь пластины. Если же речь идёт о прямолинейном однородном стержне без учёта его толщины, то вместо объёма берут длину l стержня: $m = \rho l$. Но у нас дан неоднородный стержень, как быть? Используем тот же метод, что был применён при решении задачи 2 (см. с. 22).

Разобьём отрезок $[0; l]$ на n равных частей. Рассмотрим k-й отрезок $[x_k; x_{k+1}]$ и будем считать, что плотность во всех его точках постоянна, а именно такая, как в точке x_k, т. е. $\rho = \rho(x_k)$. Найдём приближённое значение массы k-го участка: $m_k = \rho(x_k)\Delta x_k$, а затем приближённое значение массы стержня: $m \approx S_n$, где

$$S_n = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_k + \ldots + m_{n-1} =$$
$$= \rho(x_0)\Delta x_0 + \rho(x_1)\Delta x_1 + \rho(x_2)\Delta x_2 + \ldots + \rho(x_k)\Delta x_k + \ldots + \rho(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Искомая масса m равна пределу последовательности (S_n):

$$m = \lim_{n\to\infty} S_n, \text{ т. е. } m = \int_{0}^{l} \rho(x)\,dx.$$

Ответ: $\int_{0}^{l} \rho(x)\,dx$.

Упражнения

Для приближённого вычисления площадей криволинейных фигур применяют *метод палетки*. Палетка — это прозрачный лист с нанесённой на нём сеткой из единичных квадратов.

23.1. Пусть палеткой является координатная плоскость с сеткой из квадратов размера 1×1 с вершинами, координаты которых — целые числа.

а) Постройте криволинейную трапецию T, ограниченную параболой $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, и осью Ox.

б) Найдите число $N_{\text{нижн}}$ квадратов, целиком содержащихся в T.

в) Найдите число $N_{\text{верхн}}$ квадратов, имеющих с T общие внутренние точки.

г) Вычислите приближённое значение

$$S_{\text{прибл}} = \frac{N_{\text{нижн}} + N_{\text{верхн}}}{2} \cdot S_{\text{квадр}}$$

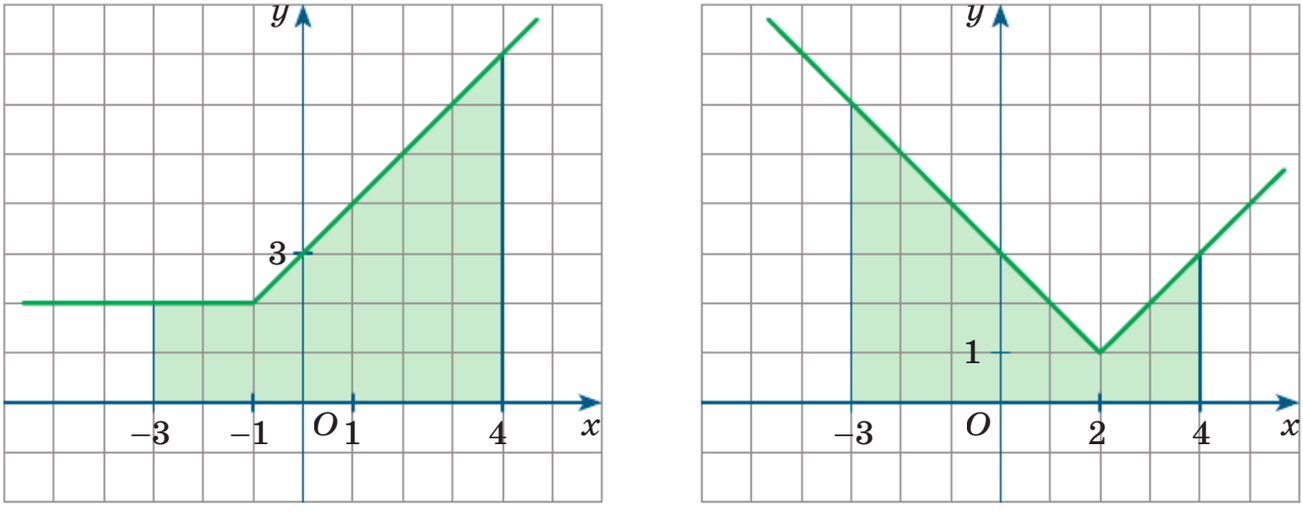
площади трапеции T.

д) Вычислите точное значение $S = \int\limits_0^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3$ этой площади.

е) Найдите абсолютную погрешность $|S - S_{\text{прибл}}|$ приближения.

23.2. Выполните задания «а»—«е» из упражнения 23.1 для координатной плоскости с сеткой из квадратов размера $0{,}5 \times 0{,}5$ с вершинами, координаты которых имеют вид $\frac{n}{2}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

23.3. Найдите площадь фигуры, изображённой на заданном рисунке:
а) рис. 117, *а*; б) рис. 117, *б*.



а *б*

Рис. 117

Используя формулу Ньютона — Лейбница, вычислите определённый интеграл.

23.4. а) $\int\limits_{2}^{4} x\,dx$; в) $\int\limits_{2}^{3} x^2\,dx$; д) $\int\limits_{4}^{9} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{3} dx$; г) $\int\limits_{-1}^{2} x^3\,dx$; е) $\int\limits_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

23.5. а) $\int\limits_{1}^{2} x^{-4}\,dx$; в) $\int\limits_{1}^{4} \frac{1}{x^2}\,dx$; д) $\int\limits_{1}^{4} x^{-1,5}\,dx$;

б) $\int\limits_{3}^{4} x^{-3}\,dx$; г) $\int\limits_{3}^{5} \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$; е) $\int\limits_{1}^{8} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$.

23.6. а) $\int\limits_{-2}^{5} (2x+1)\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^{3} (x-1)^3 dx$; д) $\int\limits_{-2}^{1} (x^2+1)dx$;

б) $\int\limits_{-3}^{3} (4x-3)\,dx$; г) $\int\limits_{0}^{4} (x+2)^2\,dx$; е) $\int\limits_{2}^{4} (x^2-2)dx$.

23.7. а) $\int\limits_{1}^{4} (x^2+x)dx$; г) $\int\limits_{0}^{3} (-x^2-2x)dx$;

б) $\int\limits_{0}^{3} (-x^2+3x-4)\,dx$; д) $\int\limits_{-1}^{2} (x^2-4x+3)dx$;

в) $\int\limits_{-2}^{3} (3x^2-2x+1)dx$; е) $\int\limits_{1}^{3} (6x^2+4x-3)dx$.

23.8. а) $\int\limits_{-2}^{3} (x^3+x^2)\,dx$; г) $\int\limits_{-2}^{2} (x^3-6x)\,dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} (5x^4+x^3)dx$; д) $\int\limits_{0}^{2} (-x^4+2x^2)\,dx$;

в) $\int\limits_{1}^{3} (-4x^3+3x^2-2x+1)\,dx$; е) $\int\limits_{0}^{4} (0,5x^3-9x^2+4x-3)\,dx$.

23.9. а) $\int_0^1 (2x-3)^2\,dx$; в) $\int_1^2 (3x+4)^3\,dx$; д) $\int_1^3 (1-4x)^4\,dx$;

б) $\int_{-1}^2 (2x+1)^2\,dx$; г) $\int_0^2 (2x-5)^4\,dx$; е) $\int_0^3 (3-5x)^3\,dx$.

23.10. а) $\int_3^4 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$; в) $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{(1-2x)^2}\,dx$; д) $\int_0^1 \frac{8}{(2x+3)^3}\,dx$;

б) $\int_{-1}^2 \frac{1}{(3-x)^2}\,dx$; г) $\int_0^3 \frac{4}{(3+4x)^2}\,dx$; е) $\int_0^1 \frac{12}{(4x+5)^4}\,dx$.

23.11. а) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$; в) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[4]{3x+4}}\,dx$; д) $\int_{-2}^2 \frac{2}{\sqrt{5-2x}}\,dx$;

б) $\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$; г) $\int_0^3 \frac{1}{2\sqrt[4]{5x+1}}\,dx$; е) $\int_{-6}^0 \frac{6}{\sqrt{1-4x}}\,dx$.

23.12. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos 2x\,dx$; д) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$;

б) $\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; г) $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx$; е) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$.

23.13. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{12}\right)dx$; г) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} 3\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx$; д) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\,dx$;

в) $-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x\,dx$; е) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x-\cos^2 x)\,dx$.

23.14. а) $\int\limits_0^1 e^x\,dx$; в) $\int\limits_1^2 2e^{2x-3}\,dx$; д) $\int\limits_0^2 2^{2-x}\,dx$;

б) $\int\limits_{-1}^0 2e^x\,dx$; г) $\int\limits_{0,5}^1 4e^{5-4x}\,dx$; е) $\int\limits_{-1}^1 3^{x+1}\,dx$.

23.15. а) $\int\limits_1^e \frac{2}{x}\,dx$; в) $\int\limits_3^4 \frac{1}{x-2}\,dx$; д) $\int\limits_0^1 \frac{1}{5-4x}\,dx$;

б) $\int\limits_1^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$; г) $\int\limits_0^2 \frac{3}{3-x}\,dx$; е) $\int\limits_{\frac{2}{3}}^1 \frac{1}{3x-1}\,dx$.

23.16. а) $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; в) $\int\limits_0^1 \left(\frac{2\,dx}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}\right)dx$;

б) $\int\limits_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{3dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

23.17. а) $\int\limits_3^5 \frac{4x^2+10x+25}{8x^3-125}\,dx$; г) $\int\limits_0^5 \frac{9x^2+1-3x}{27x^3+1}\,dx$;

б) $\int\limits_3^5 \frac{9x^2-12x+4}{27x^3-54x^2+36x-8}\,dx$; д) $\int\limits_1^2 \frac{12x^2+3+12x}{8x^3+12x^2+6x+1}\,dx$;

в) $\int\limits_2^4 \frac{2x^2-x-6}{2x^2+x-3}\,dx$; е) $\int\limits_6^8 \frac{3x^2+2x-1}{x^2-4x-5}\,dx$.

23.18. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi} \left(\sin x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos x\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right)dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 3x\cos 3x+\sin^2 5x)\,dx$;

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin 5x\cos 3x+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)\right)dx$;

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(\cos\left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos\left(x - \frac{5\pi}{6} \right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin\left(x - \frac{5\pi}{6} \right) \right) dx;$

д) $\int\limits_{0}^{\pi} \left(\cos^2 \frac{3x}{2} - \sin x \cos x \cos 2x \right) dx;$

е) $\int\limits_{2\pi}^{2\,5\pi} \left(2\sin(x - \pi) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x \right) \cos(4\pi + 5x) \right) dx.$

23.19. Точка движется по координатной прямой со скоростью $v = v(t)$, где t — время в с, а v — скорость в см/с. Найдите путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения, если:

а) $v(t) = 2t + 4$;
б) $v(t) = 3t^2 - 2t + 1$;
в) $v(t) = \frac{1}{2\sqrt{4t + 5}}$;
г) $v(t) = 4t - 1$;
д) $v(t) = 2t^3 - 6t^2 - t$;
е) $v(t) = \frac{4}{\sqrt{2t + 6}}$.

23.20. а) Докажите, что площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой синусоиды $y = \sin x$, равна 2.

б) Криволинейный треугольник ограничен прямыми $x = 1$, $y = 0$ и графиком функции $y = \arcsin x$. Вычислите площадь этого треугольника.

23.21. Дан прямолинейный неоднородный стержень длиной 1 м. Найдите массу стержня, если известна плотность $\rho(x)$ в точке x (считая от начала стержня):

а) $\rho(x) = \sin^4 x$;
б) $\rho(x) = \frac{3x + 2}{x + 1}$.

Используя аддитивное свойство определённого интеграла, вычислите $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где отрезок $[a; b]$ — область определения функции $y = f(x)$.

23.22. а) $f(x) = \begin{cases} x + 1, -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ (x - 1)^2, 0 < x \leqslant 1; \end{cases}$
б) $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 6 - x, 2 < x \leqslant 6. \end{cases}$

23.23. а) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1 - 2x}, -3{,}5 \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{1}{x + 1}, 0 < x \leqslant 1; \end{cases}$
б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9 - x}, 5 \leqslant x \leqslant 8, \\ \frac{2}{\sqrt[3]{x}}, 8 < x \leqslant 27. \end{cases}$

23.24. а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 x}, -\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 0,\\ 1+\sin x,\ 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{3};\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{\sin^2 x}-1,\ \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$

Вычислите.

23.25. а) $\int\limits_0^4 (x^2+|x-2|)dx$;

б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(|\cos x|+\dfrac{1}{\pi}\right)dx$;

в) $\int\limits_1^3 (2x^3+|x^3-8|)dx$;

г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin 2x-|\sin 2x|)dx$.

23.26. а) $\int\limits_0^1 \left(|x^2-2x+3|+\dfrac{2x+1}{x+2}\right)dx$;

б) $\int\limits_{-2}^2 \left(|x^2-9|-\dfrac{2x-3}{x+3}\right)dx$;

в) $\int\limits_{-1}^1 \left(|3x^4-2x^2+5|-\dfrac{3x+2}{x+2}\right)dx$;

г) $\int\limits_{-1}^2 \left(\dfrac{x}{3x+6}+|x^4-9x^2|\right)dx$.

23.27. Используя геометрический смысл определённого интеграла, вычислите:

а) $\int\limits_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$;

б) $\int\limits_0^4 \left(2x+\sqrt{16-x^2}\right)dx$;

в) $\int\limits_{-4}^0 \sqrt{-4x-x^2}\,dx$;

г) $\int\limits_{-3}^0 \sqrt{9-x^2}\,dx$;

д) $\int\limits_{-5}^5 \left(\sqrt{25-x^2}+x^3\right)dx$;

е) $\int\limits_4^8 \sqrt{8x-x^2}\,dx$.

Упражнения для повторения

23.28. В светильнике две лампы. Вероятность того, что в течение года перегорит одна лампа, равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

23.29. В зале ожидания местного аэропорта имеются два автомата, в которых можно купить воду. Вероятность того, что к концу дня вода закончится в одном автомате, равна 0,3. Вероятность того, что к концу дня вода закончится в обоих автоматах, — 0,08. Найдите вероятность того, что к концу дня вода останется в обоих автоматах.

23.30. Решите уравнение и найдите его корни, принадлежащие данному промежутку:

а) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 2, \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$;

б) $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} = 2, (1; 10)$.

23.31. Решите неравенство:

а) $|x^2 - 4x| \cdot \log_2(x + 3) \leqslant 4x - x^2$;

б) $|x^2 - 2x| \cdot \log_{0,1}(x + 4) \leqslant 2x - x^2$.

23.32. а) Имеются два сплава. Первый сплав содержит 5 % меди, а второй — 14 % меди. При этом масса второго сплава больше массы первого на 8 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10 % меди. Найдите массу третьего сплава.

б) Имеются два сплава. Первый сплав содержит 10 % никеля, а второй — 30 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 300 кг, содержащий 25 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

§ 24. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла

Мы уже говорили о том, как вычислить площадь S криволинейной трапеции — фигуры, ограниченной в системе координат xOy осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной и *неотрицательной* на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$ (рис. 118), для этого используется формула $S = \int_a^b f(x)\,dx$.

Нетрудно получить формулу и для вычисления площади фигуры, ограниченной в системе координат xOy осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной и *неположительной* на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$ (рис. 119). Достаточно отобразить эту фигуру симметрично относительно оси абсцисс, тогда получим криволинейную трапецию с той же площадью, но ограниченной сверху графиком *неотрицательной* на отрезке $[a; b]$ функции $y = -f(x)$. В этом случае площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле $S = \int_a^b (-f(x))dx$, т. е. $S = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Пример 1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными прямыми и графиком заданной функции:

а) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{2\pi}{3}$;

б) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

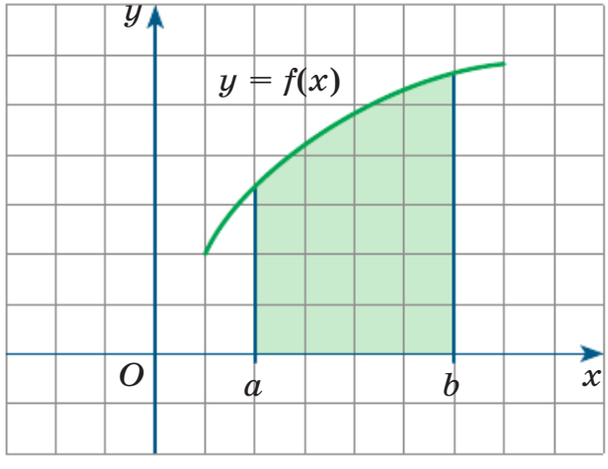


Рис. 118

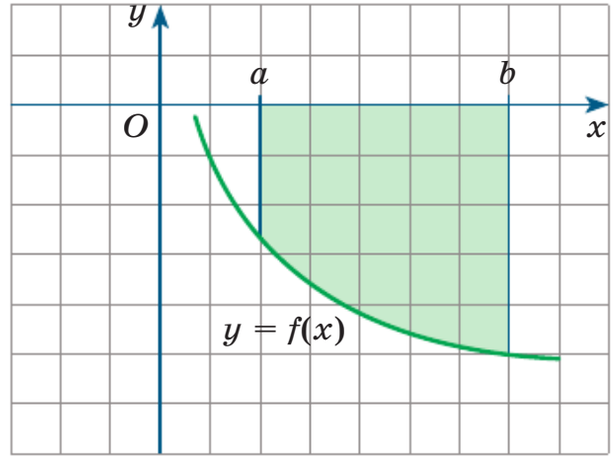


Рис. 119

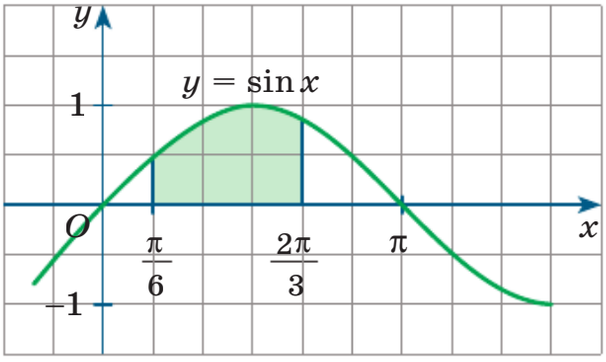


Рис. 120

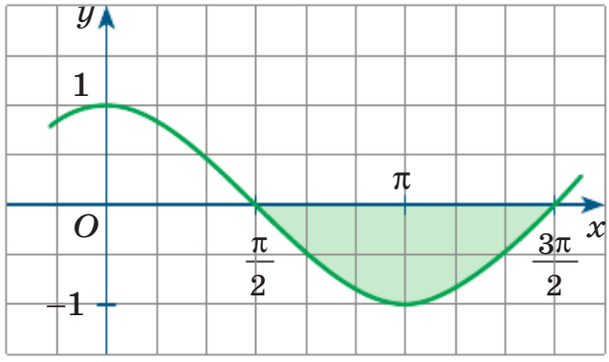


Рис. 121

Решение. а) Криволинейная трапеция изображена на рисунке 120. Имеем:

$$S = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} = -\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

б) Криволинейная трапеция изображена на рисунке 121.

Как видите, здесь даже нет необходимости проводить прямые $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$. Имеем:

$$S = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = -\sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = -(-1-1) = 2.$$

Ответ: а) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; б) 2.

С помощью определённого интеграла можно вычислять площади не только криволинейных трапеций типа тех, что представлены на рисунках 118 и 119. Рассмотрим фигуру P, ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиками непрерывных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, для которых на отрезке $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x)$ (рис. 122); фигуры такого вида также будем называть *криволинейными трапециями*. Чтобы вычислить площадь S такой фигуры, будем действовать следующим образом.

Выполним параллельный перенос фигуры P на m единиц вверх $(m > 0)$ так, чтобы фигура P оказалась расположенной в координат-

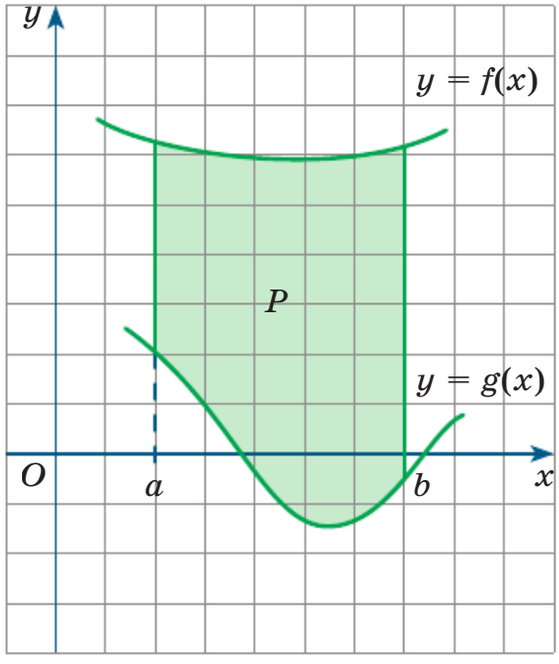


Рис. 122

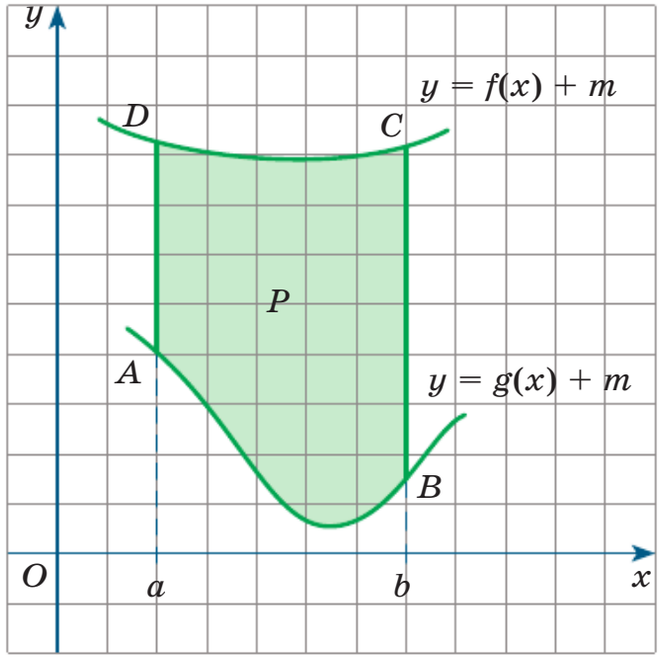


Рис. 123

ной плоскости *выше* оси абсцисс (рис. 123). Теперь она ограничена сверху и снизу графиками функций $y = f(x) + m$, $y = g(x) + m$, причём обе функции непрерывны и положительны на отрезке $[a; b]$. Имеем:

$$S = S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} = \int_a^b (f(x) + m)\,dx - \int_a^b (g(x) + m)\,dx =$$

$$= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m))\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Итак, площадь S криволинейной трапеции, представленной на рисунке 122, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx. \qquad (1)$$

Пример 2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{1}{2x}$ и прямыми $x = 1$, $x = 4$.

Решение. На рисунке 124 построены график функции $y = \sqrt{x}$ (ветвь параболы) и график функции $y = \dfrac{1}{2x}$ (ветвь гиперболы), проведены прямые $x = 1$, $x = 4$. Речь идёт о вычислении площади S криволинейной трапеции, закрашенной на рисунке 124.

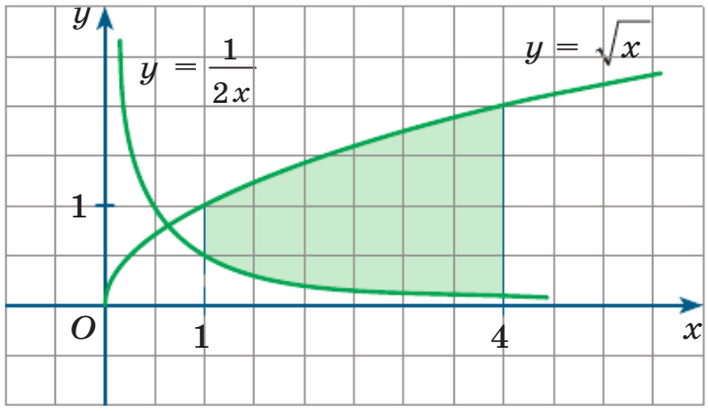


Рис. 124

Воспользуемся формулой (1):

$$S = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2x} \right) dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^4 - \frac{1}{2} \ln x \Big|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 1) = \frac{2}{3} (8 - 1) - \frac{1}{2} (\ln 4 - 0) =$$

$$= \frac{14}{3} - \frac{\ln 4}{2} = \frac{14}{3} - \frac{2 \ln 2}{2} = \frac{14}{3} - \ln 2 = \frac{14 - 3 \ln 2}{3}.$$

Ответ: $\frac{14 - 3 \ln 2}{3}$.

Пример 3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 6x + 5$, $y = x - 5$.

Решение. Построим параболу — график функции $y = x^2 - 6x + 5$. Имеем: $y = (x - 3)^2 - 4$; значит, вершиной параболы является точка $(3; -4)$. Обратим внимание на то, что $x^2 - 6x + 5 = 0$ при $x = 1$, $x = 5$, т. е. парабола проходит через точки $(1; 0)$, $(5; 0)$. Парабола построена на рисунке 125. На том же рисунке проведена прямая $y = x - 5$. Парабола и прямая пересекаются в точках $(2; -3)$ и $(5; 0)$. Речь идёт о вычислении площади S фигуры, заштрихованной на рисунке 125, эту фигуру называют *параболическим сегментом*.

Воспользуемся формулой (1):

$$S = \int_2^5 ((5 - x) - (x^2 - 6x + 5)) dx = \int_2^5 (5x - x^2) dx = 5 \int_2^5 x \, dx - \int_2^5 x^2 \, dx =$$

$$= 5 \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_2^5 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_2^5 = \frac{5}{2} (5^2 - 2^2) - \frac{1}{3} (5^3 - 2^3) = \frac{105}{2} - \frac{117}{3} = 52{,}5 - 39 = 13{,}5.$$

Ответ: 13,5.

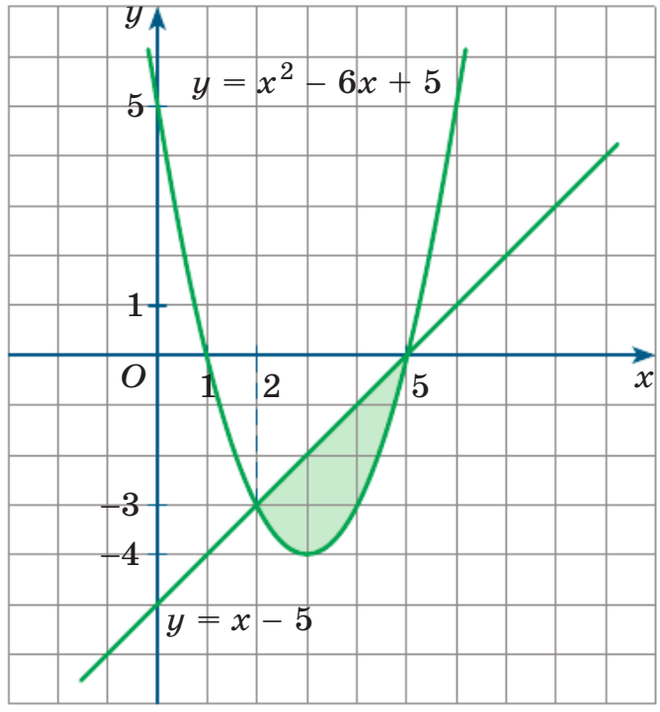


Рис. 125

Пример 4* Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x+4}$, $y = |x| + 2$ и прямыми $x = -4$, $x = 5$ (рис. 126).

Решение. Площадь S фигуры, изображённой на рисунке 126, можно вычислить по формуле

$$S = \int_{-4}^{5} \left(\left(|x| + 2 \right) - \sqrt{x+4} \right) dx.$$

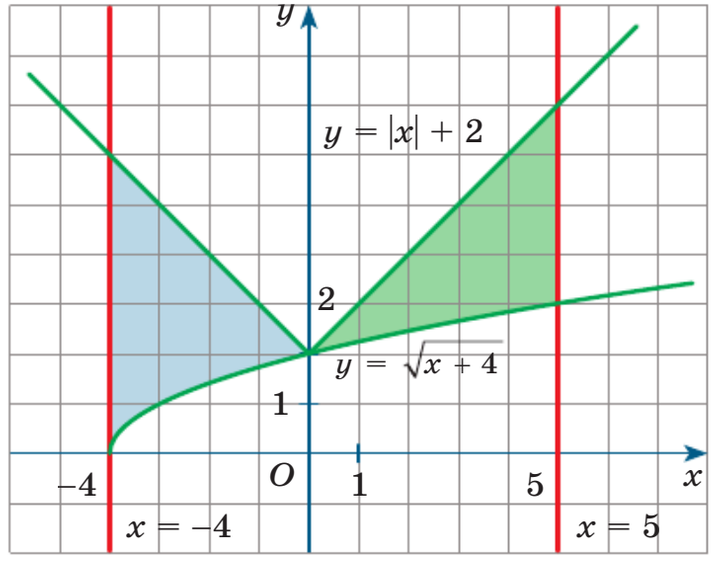


Рис. 126

Для вычисления этого интеграла воспользуемся аддитивным свойством $\left(\text{кратко, } \int\limits_{-4}^{5} = \int\limits_{-4}^{0} + \int\limits_{0}^{5}\right)$. Дело в том, что на отрезке $[-4; 0]$ выполняется равенство $|x| = -x$, а на отрезке $[0; 5]$ — равенство $|x| = x$. Соответственно, вычисления проведём в два шага.

1) $$\int\limits_{-4}^{0} = \int\limits_{-4}^{0}\left((-x+2) - \sqrt{x+4}\right)dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-4}^{0} - \frac{(x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-4}^{0} =$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{(-4)^2}{2} + 2\cdot(-4)\right)\right) - \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3}\Bigg|_{-4}^{0} =$$

$$= -(-8-8) - \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{0^3}\right) = 16 - \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{32}{3}.$$

2) $$\int\limits_{0}^{5} = \int\limits_{0}^{5}\left((x+2) - \sqrt{x+4}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{0}^{5} - \frac{(x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{5} =$$

$$= \left(\left(\frac{5^2}{2} + 2\cdot 5\right) - 0\right) - \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3}\Bigg|_{0}^{5} = \frac{25}{2} + 10 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}\right) =$$

$$= \frac{45}{2} - \frac{2}{3}(27-8) = \frac{45}{2} - \frac{38}{3} = \frac{135-76}{6} = \frac{59}{6}.$$

А теперь вычислим искомую площадь:

$$S = \frac{32}{3} + \frac{59}{6} = \frac{64+59}{6} = \frac{123}{6} = \frac{41}{2} = 20{,}5.$$

Ответ: 20,5.

Упражнения

24.1. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.

а) $y = x - 2$, $a = 3$, $b = 5$;
б) $y = (x-1)^2$, $a = 1$, $b = 3$;
в) $y = x^3$, $a = 1$, $b = 2$;
г) $y = 2x - 1$, $a = 2$, $b = 3$;
д) $y = x^2 - 1$, $a = 2$, $b = 4$;
е) $y = x^3 + 1$, $a = 0$, $b = 2$.

ИКТ 24.2. а) $y = \sqrt{x}$, $a = 1$, $b = 4$;
б) $y = x^{-2}$, $a = 1$, $b = 2$;
в) $y = x^{-\frac{2}{3}}$, $a = 1$, $b = 8$;
г) $y = 2\sqrt{x}$, $a = 2$, $b = 3$;
д) $y = x^{-3}$, $a = 0{,}5$, $b = 1$;
е) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $a = 1$, $b = 4$.

24.3. а) $y = \cos x$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{2}$;
б) $y = \sin 2x$, $a = \dfrac{\pi}{6}$, $b = \dfrac{\pi}{3}$;
в) $y = 1 + 2\cos 2x$, $a = \dfrac{\pi}{12}$, $b = \dfrac{\pi}{4}$;
г) $y = \sin x$, $a = \dfrac{\pi}{4}$, $b = \dfrac{3\pi}{4}$;
д) $y = \cos \dfrac{x}{2}$, $a = \dfrac{\pi}{2}$, $b = \pi$;
е) $y = 1 - \dfrac{1}{2}\sin \dfrac{x}{2}$, $a = \dfrac{2\pi}{3}$, $b = \pi$.

24.4. а) $y = e^x$, $a = 0$, $b = 1$;
б) $y = 0{,}5^x$, $a = 1$, $b = 2$;
в) $y = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 3$;
г) $y = e^x$, $a = -1$, $b = 0$;
д) $y = 2^x$, $a = -1$, $b = 1$;
е) $y = \dfrac{2}{x}$, $a = 0{,}5$, $b = 1$.

ИКТ 24.5. а) $y = e^{3x-3}$, $a = 0$, $b = 1$;
б) $y = \dfrac{1}{2(x-1)}$, $a = 2$, $b = 3$;
в) $y = 10^{2x+2}$, $a = -1$, $b = 0$;
г) $y = e^{2x+4}$, $a = -2$, $b = 0$;
д) $y = \dfrac{1}{3(x+2)}$, $a = -1$, $b = 0$;
е) $y = 0{,}1^{3-x}$, $a = 2$, $b = 3$.

24.6. а) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $a = 0$, $b = \sqrt{3}$;
б) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $a = 0$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $y = \dfrac{2x^2+5}{x^2+1}$, $a = -1$, $b = 1$;
г) $y = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} + x^2$, $a = -0{,}5$, $b = 0{,}5$.

24.7. Найдите площадь фигуры, изображённой на указанном рисунке:
а) рис. 127; в) рис. 129; д) рис. 131;
б) рис. 128; г) рис. 130; е) рис. 132.

ИКТ **24.8.** Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

а) $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = 0$;
б) $f(x) = 9 - x^2$, $g(x) = 4$;
в) $f(x) = 2x^4$, $g(x) = 2$;
г) $f(x) = -x^2 + 6x$, $g(x) = 0$;
д) $f(x) = -x^2 + 4x$, $g(x) = 3$;
е) $f(x) = 0{,}5x^4$, $g(x) = 0{,}5$.

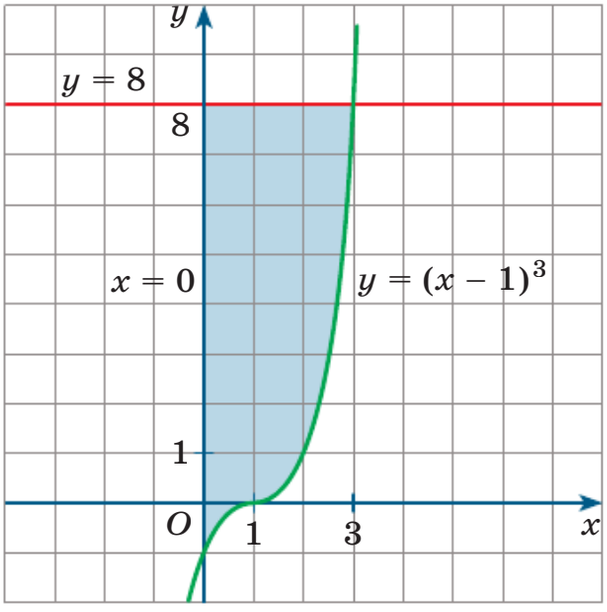


Рис. 127

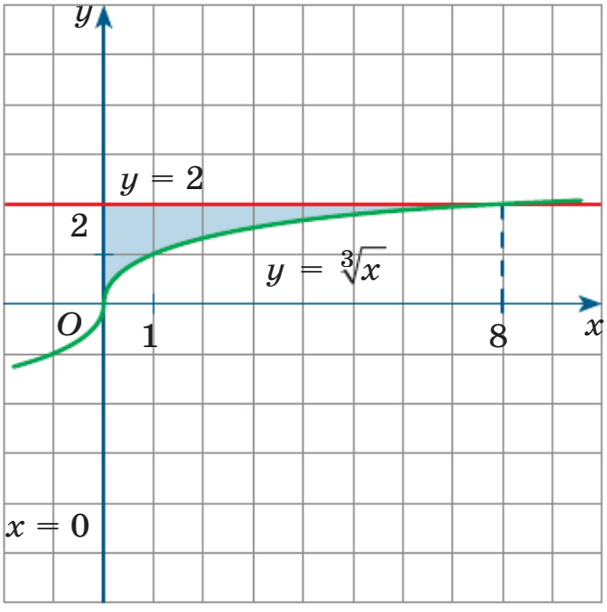


Рис. 128

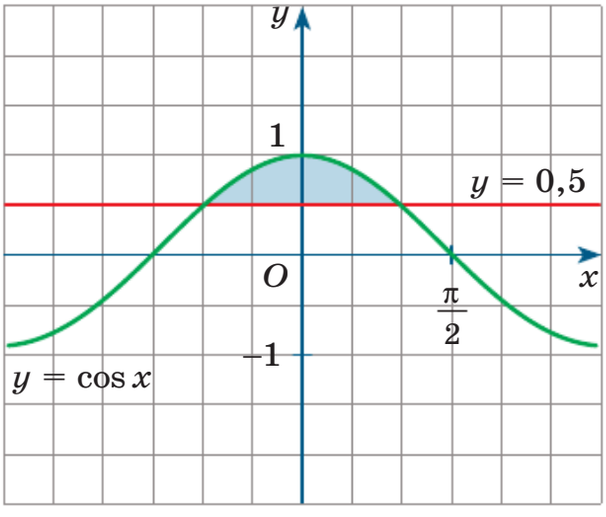


Рис. 129

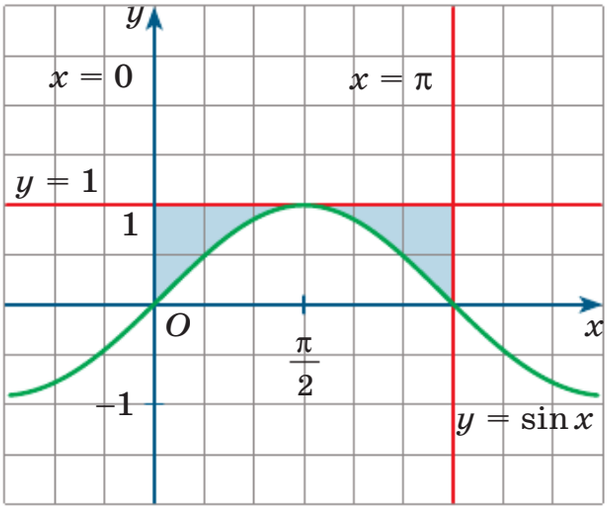


Рис. 130

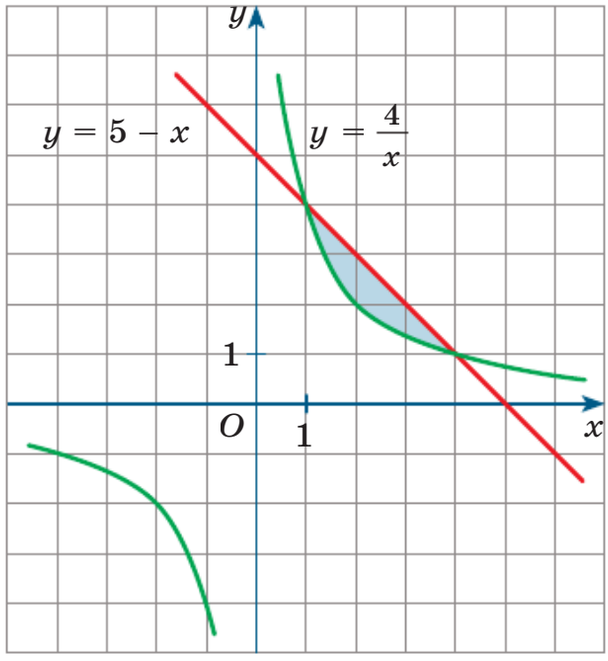


Рис. 131

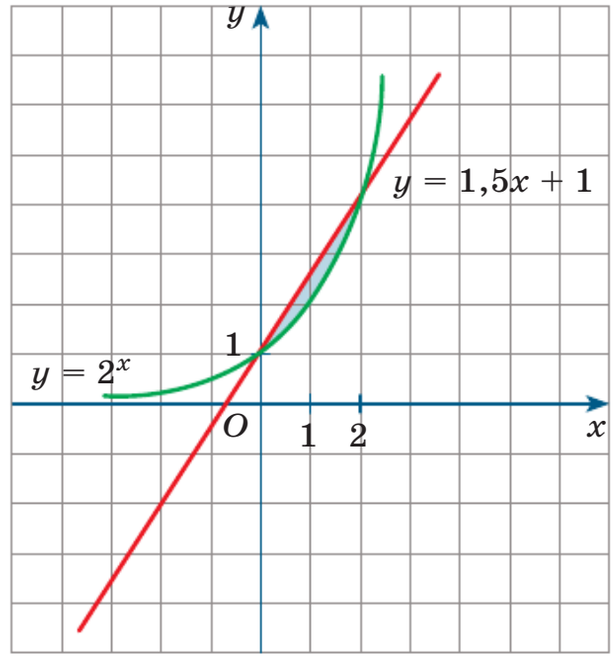


Рис. 132

24.9. а) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x - 1$;
б) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = x + 1$;
в) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = 1 - x^2$;
г) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 2x - 1$;
д) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $g(x) = 1 - x$;
е) $f(x) = (x - 3)^2$, $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

24.10. а) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{2}$, $-\frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$;

б) $f(x) = 2\sin 2x$, $g(x) = \sin 2x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$;

в) $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = -1$, $-\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$;

г) $f(x) = 2\cos 2x$, $g(x) = \cos 2x$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

ИКТ **24.11.** а) $f(x) = |x^2 - 4|$, $g(x) = x + 2$;

б) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = |x| - 1$;

в) $f(x) = |x^2 - 2x|$, $g(x) = x$;

г) $f(x) = -\sqrt{x+4}$, $g(x) = -|x + 1| + 3$.

24.12. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и прямой $x = a$, если:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = 3^x - 2$, $a = 3$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^5$, $a = -2$;

в) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $g(x) = 0{,}5x - 3{,}5$, $a = 1$;

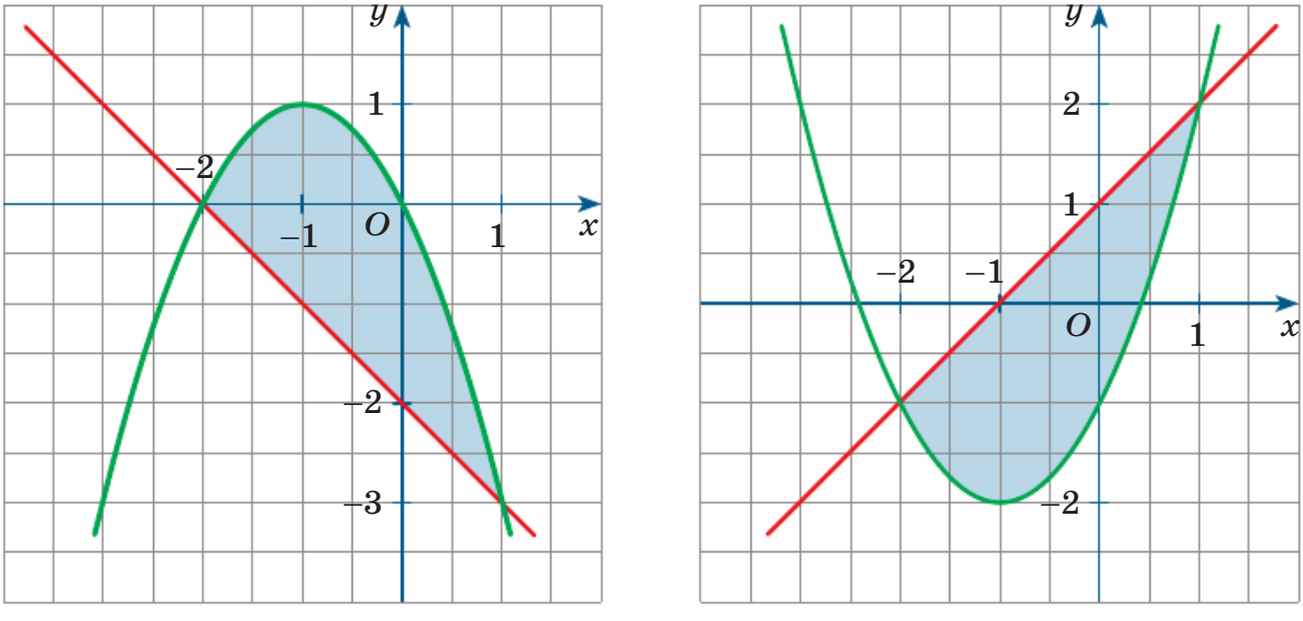
г) $f(x) = \frac{2}{1 + x^2}$, $g(x) = x^3$, $a = \sqrt{3}$.

ИКТ **24.13.** В координатной плоскости задан квадрат $ABCD$, где $A(0; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 1)$, $D(1; 0)$, и график функции $y = f(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$. Найдите, в каком отношении график данной функции делит площадь квадрата, если:

а) $f(x) = x$; в) $f(x) = x^2$; д) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

б) $f(x) = 0{,}5x$; г) $f(x) = x^3$; е) $f(x) = \sqrt{x}$.

24.14. На рисунке 133 изображён параболический сегмент, ограниченный графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и прямой $y = kx + m$. Задайте аналитически квадратичную функцию и прямую и найдите площадь сегмента.



а *б*

Рис. 133

24.15. Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a; a]$. Докажите, что:

а) если эта функция чётная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$;

б) если эта функция нечётная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

24.16. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс и сверху графиком функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 - 4x + 5, 1 < x \leqslant 4; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{2}{x^2}, 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5^x, -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2x}, 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} x^3, 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x^2 - 8x + 20, 2 < x \leqslant 4; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, -3 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2(x-1)^2, 0 < x \leqslant 1; \end{cases}$

е) $f(x) = \begin{cases} 2^x, 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{2}{x}, 1 < x \leqslant e. \end{cases}$

ИКТ **24.17.** а) Криволинейная фигура ограничена кубической параболой $y = x^3$ и касательными к ней, проведёнными в точках (0; 0) и (1; 1). Найдите площадь данной фигуры.

б) Криволинейная фигура ограничена кубической параболой $y = x^3$ и касательной к ней, проведённой в точке (1; 1). Найдите площадь данной фигуры.

ИКТ **24.18.** а) Криволинейная фигура ограничена кривой $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$ и касательной к ней, проведённой в точке (3; 0). Найдите площадь данной фигуры.

б) Криволинейная фигура ограничена кривой $y = x^3 - x^2 - x + 1$ и касательной к ней, проведённой в точке (1; 0). Найдите площадь данной фигуры.

24.19. а) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3 - 0{,}5x^2$ и двумя касательными к нему из точки на оси ординат, которые образуют между собой прямой угол.
б) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 0{,}5x^2 + 2{,}5$ и двумя касательными к нему из точки на оси ординат, которые образуют между собой угол $60°$.

24.20. а) Фигура ограничена графиком функции $y = \frac{1}{x^2}$ и прямыми $y = 0$, $x = 2$, $x = a$. При каком значении параметра a площадь фигуры равна $0{,}25$, если известно, что $a > 2$?

б) Фигура ограничена графиком функции $y = \frac{3}{1 + x^2}$ и прямыми $y = 0$, $x = \sqrt{3}$, $x = a$. При каком значении параметра a площадь фигуры равна $\frac{\pi}{2}$, если известно, что $a < \sqrt{3}$?

Упражнения для повторения

24.21. В магазине продают видеорегистраторы двух поставщиков, причём 40 % видеорегистраторов первого поставщика и 60 % — второго. В партии видеорегистраторов от первого поставщика встречается 0,8 % бракованных, а от второго — 0,3 %. Найдите вероятность того, что случайно купленный видеорегистратор окажется бракованным.

24.22. Найдите значение выражения:
а) $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$;
б) $\sin 10° \cos 20° \cos 40°$.

24.23. Решите неравенство:
а) $\log_{x-2}(8 - x) < 0$;
б) $\log_{3x}(x - 6) > 0$.

24.24. Найдите расстояние между двумя касательными, проведёнными к графику данной функции перпендикулярно оси ординат:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x - \frac{1}{3}$;

б) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Приложение* к главе 4
Использование определённого интеграла для вычисления объёмов тел вращения

Прямоугольник П с вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(1; 3)$, $C(5; 3)$, $D(5; 0)$ вращают на 360° вокруг оси Ox (рис. 134).

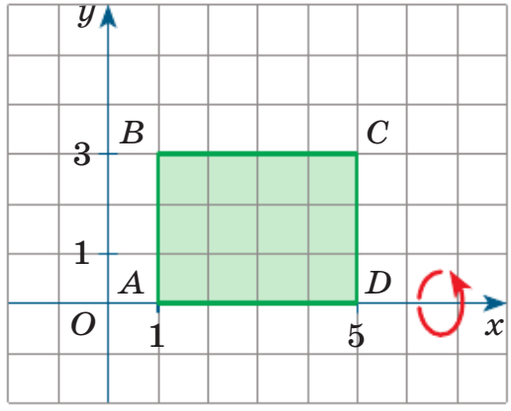


Рис. 134

1. Какую кривую (фигуру, тело) образует при таком вращении:
а) точка B;
б) точка C;
в) точка $\left(\sqrt{2}; 3\right)$;
г) отрезок AB;
д) отрезок BC;
е) прямоугольник П?

2. Проверьте, что:
а) радиус основания R цилиндра из задачи 1 «е» равен 3, а его высота H равна 4;
б) объём этого цилиндра равен 36π;
в) для каждого $1 \leqslant x \leqslant 5$ отрезок $[(x; 0), (x; 3)]$ образует круг;
г) радиус этого круга равен 3;
д) площадь круга из пунктов «а» и «б» находится по формуле $S(x) = 9\pi$;
е) $\int\limits_1^5 S(x)dx = 36\pi$, т. е. равен объёму цилиндра, вычисленному в пункте «б».

Прямоугольник П с вершинами $(0; 0)$, $(0; R)$, $(H; R)$, $(H; 0)$ вращают на 360° вокруг оси Ox.

3. Опишите, какую кривую (какую фигуру) образует при таком вращении:
а) точка $(0; R)$;
б) точка $(H; R)$;
в) отрезок с концами $(0; 0)$, $(0; R)$;
г) отрезок с концами $(H; 0{,}5R)$, $(H; 0)$;
д) прямоугольник П;
е) треугольник с вершинами $(0; 0)$, $(0; R)$, $(H; 0)$.

4. Проверьте, что:
а) для каждого $0 \leqslant x \leqslant H$ отрезок $[(x; 0), (x; R)]$ образует круг;
б) радиус этого круга равен R;
в) площадь этого круга находится по формуле $S(x) = \pi R^2$;
г) $\int\limits_0^H S(x)\,dx$ равен $V = \pi R^2 H$, т. е. равен объёму цилиндра с высотой H и радиусом основания R;
д) такой же ответ $\pi R^2 H$ получится при вращении прямоугольника с вершинами $(1; 0)$, $(1; R)$, $(H + 1; R)$, $(H + 1; 0)$;
е) такой же ответ будет и для прямоугольника с вершинами $(a; 0)$, $(a; R)$, $(H + a; R)$, $(H + a; 0)$.

При вращении не прямоугольников, а более сложных фигур будут получаться и более сложные пространственные тела, *тела вращения*. Их объёмы вычисляют с помощью определённых интегралов. Для этого используют следующую теорему.

Теорема. Объём V тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $\{(x; y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, где функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$, вычисляется по формуле $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

5. Полукруг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$ в координатной плоскости xOy вращают на 360° вокруг оси Ox (рис. 135).

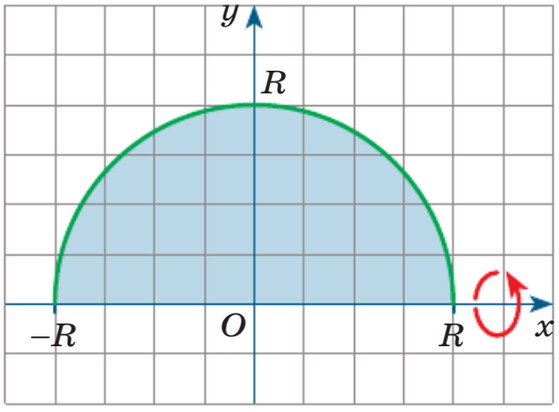


Рис. 135

Проверьте, что:
а) точка $(R; 0)$ остаётся на месте, а точка $(0; R)$ описывает окружность;
б) в результате вращения всего полукруга получится шар радиусом R;
в) отрезок $[(0; 0), (0; R)]$ опишет круг радиусом R;
г) для $-R \leqslant x \leqslant R$ и $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ применима теорема об объёме тела вращения;
д) площадь круга из пункта «в» находится по формуле $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$;
е) $\int\limits_{-R}^{R} S(x)dx = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Объём шара радиусом R:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

6. Треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(H; R)$, $B(H; 0)$ вращают на $360°$ вокруг оси Ox. Найдите:
а) площадь фигуры, образованной вращением отрезка AB;
б) площадь фигуры, образованной вращением отрезка $[(0{,}5H; 0{,}5R), (0{,}5H; 0)]$;
в) уравнение прямой OA;
г) a, b, $f(x)$, к которым в данном случае применима теорема об объёме тела вращения;
д) $\pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)\,dx$;
е) формулу объёма конуса с радиусом основания R и высотой H.

7. Трапецию с вершинами $O(0; 0)$, $A(0; r)$, $B(H; R)$, $C(H; 0)$, $R > r$ вращают на $360°$ вокруг оси Ox. Найдите:
а) площадь фигуры, образованной вращением отрезка OA;
б) площадь фигуры, образованной вращением отрезка BC;
в) уравнение прямой AB;
г) a, b, $f(x)$, к которым в данном случае применима теорема об объёме тела вращения;
д) $\pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)\,dx$;
е) формулу объёма усечённого конуса.

8. Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $\{(x; y): -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x + 1, -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x, 0 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x + 1, -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, 0 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 1, -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x, 0 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} x + 1, -1 \leqslant x \leqslant 0{,}5, \\ 3 - 3x, 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} x + 1, -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{1 - x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$

е) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + x}, -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{1 - x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

9. Плоскую фигуру $\left\{(x; y): x \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\}$ между осью Ox и ветвью параболы $y = \sqrt{x}$ вращают вокруг Ox. Получается тело вращения, которое называют *параболоидом вращения* (рис. 136). Найдите объём части этого тела вращения, если:

а) $0 \leqslant x \leqslant 1$;
б) $0 \leqslant x \leqslant 2$;
в) $1 \leqslant x \leqslant 2$;
г) $1 \leqslant x \leqslant 11$;
д) $3 \leqslant x \leqslant 13$;
е) $x \in [1; 3] \cup [5; 15]$.

10. Шар $\{(x; y; z): x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ разрезали плоскостью $x = a$ на две части (рис. 137).

Найдите отношение объёмов частей, если:

а) $a = 0$;
в) $a = -\frac{1}{2}$;
д) $a = \frac{2}{3}$;
б) $a = \frac{1}{2}$;
г) $a = \frac{1}{3}$;
е) $a = \frac{1}{5}$.

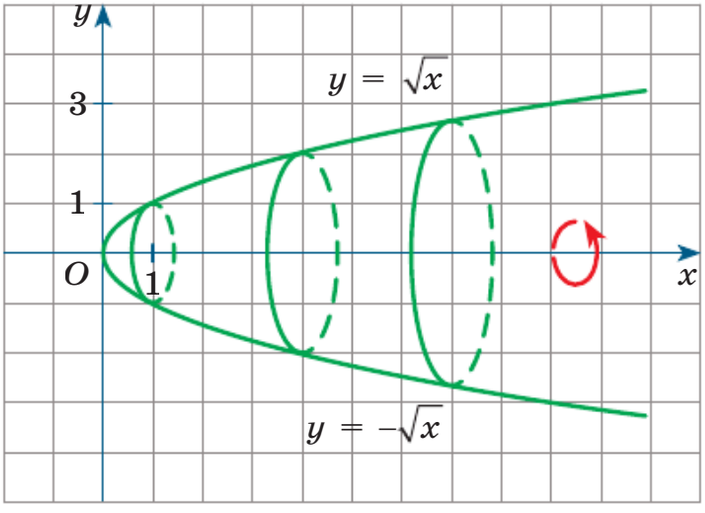


Рис. 136

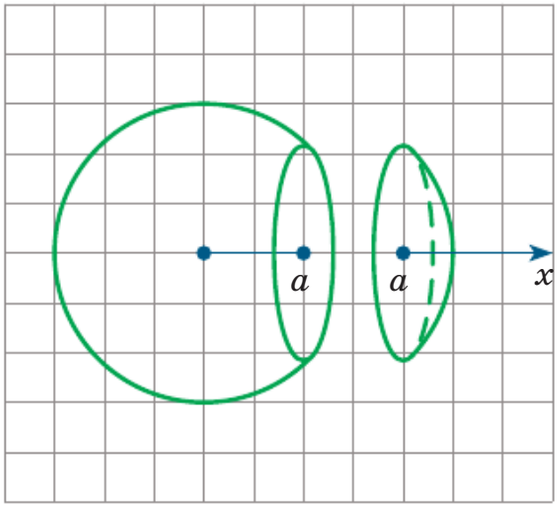


Рис. 137

Итак, в главе 4

Познакомились с понятиями первообразной и неопределённого интеграла.

Изучили правила и формулы отыскания первообразных.

Познакомились с понятием определённого интеграла; выяснили, в чём состоит его физический и геометрический смысл.

Научились вычислять определённый интеграл с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

Изучили свойства определённого интеграла.

Узнали, что такое криволинейная трапеция и как с помощью определённого интеграла вычислить площадь криволинейной трапеции в декартовой прямоугольной системе координат.

Вопросы

1. Сформулируйте определение первообразной для функции $y = f(x)$.
2. Сформулируйте правило нахождения первообразной суммы двух функций.
3. Приведите пример того, что первообразная произведения двух функций не равна произведению их первообразных.
4. Можно ли постоянный множитель выносить за знак первообразной?
5. Если функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, то как найти первообразную для функции $y = f(kx + m)$?
6. Что называют неопределённым интегралом от функции $y = f(x)$?
7. В чём состоит физический смысл определённого интеграла?
8. В чём состоит геометрический смысл определённого интеграла?
9. Запишите формулу Ньютона — Лейбница.
10. Чему равен определённый интеграл от линейной комбинации функций (линейная комбинация функций — это функция вида $y = af(x) + bg(x) + ch(x)$, где a, b, c — произвольные числовые коэффициенты)?
11. В чём состоит аддитивное свойство определённого интеграла?
12. Какую плоскую фигуру называют криволинейной трапецией?

13. Как с помощью определённого интеграла вычислить площадь криволинейной трапеции в декартовой прямоугольной системе координат xOy?

Тест

1. Укажите функции, которые являются первообразными для функции $y = x^2 - 4x$.

а) $y = 2x - 4$

б) $y = 3x^3 - 8x^2$

в) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4$

г) $y = \frac{x^3 - 1}{3} - 2x^2$

2. Укажите функцию, которая является первообразной для функции $y = 2\sin 2x$.

а) $y = \cos 2x - 1$

б) $y = 2 - \cos 2x$

в) $y = -4\cos 2x$

г) $y = 1 - 2\cos 2x$

3. Укажите функцию $y = F(x)$, которая является первообразной для функции $y = \sqrt{x}$, если известно, что $F(1) = 1$.

а) $F(x) = \frac{2x\sqrt{x} + 1}{3}$

б) $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$

в) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$

г) $F(x) = \frac{3x\sqrt{x} - 1}{2}$

4. Точка движется по координатной прямой со скоростью, заданной формулой $v = 4t - 3$. Найдите закон движения $s = s(t)$, если известно, что в момент времени $t = 3$ координата точки $s = 7$.

а) $s = 2t^2 - 3t - 5$

б) $s = 2t^2 - 12$

в) $s = 4t^2 - 3t - 20$

г) $s = 2t^2 - 3t - 2$

5. Найдите множество всех первообразных функции $y = e^{2x-3} + \frac{1}{3x}$.

а) $y = e^{2x-3} + \ln 3x + C$

б) $y = \frac{1}{2}e^{2x-3} + \frac{1}{3}\ln x + C$

в) $y = 2e^{2x-3} + 3\ln 3x + C$

г) $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}\ln x + C$

6. Вычислите: $\int\limits_{-1}^{1}\left(x^3 - \frac{1}{x^2} + 1\right)dx$.

7. Установите соответствие между определённым интегралом и его значением.

А. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$ Б. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx$ В. $\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2}{\cos^2 2x}$

1) 2 2) 1 3) 0 4) 0,25

8. Не производя вычислений, укажите интеграл с наименьшим значением.

а) $\int\limits_{-1}^{2} \sqrt[3]{x+4}\,dx$ в) $\int\limits_{1}^{3} \sqrt[3]{x+4}\,dx$

б) $\int\limits_{1}^{2} \sqrt[3]{x+4}\,dx$ г) $\int\limits_{2}^{3} \sqrt[3]{x+4}\,dx$

9. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = 3x^2 - 2x + 5$ и прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3 + 3x^2$, $y = \frac{4}{x^2}$ и прямыми $x = 2$, $y = 0$.

Из истории математики

К сложным вещам подходят через простые. Сложные конструкции составляют из более простых. К новому приходят на основе уже известного. Общие выводы делают на основе элементарных частных случаев и т. п. Это общее положение, и математика тут не является исключением, а скорее наоборот, предоставляет множество самых разнообразных подтверждений: иррациональные числа приближают рациональными, бесконечные десятичные дроби — конечными, площади криволинейных фигур и объёмы пространственных тел приближают площадями многоугольников и объёмами многогранников, вместо перемещения точек и тел с переменной скоростью в первом приближении рассматривают равномерные движения, непрерывные процессы приближают дискретными и т. п.

В самых общих чертах процесс *дифференциации* соответствует разложению сложных и глобальных ситуаций на простые и локальные, а процесс *интеграции* действует в обратном направлении — он соединяет, объединяет, интегрирует простые ситуации в сложные.

Хотя сами термины *дифференциальное* и *интегральное* исчисления устойчиво появились в науке к XVIII в., но основные идеи активно использовались и ранее. Например, нахождение длины окружности и площади круга путём последовательных приближений многоугольниками детально изучалось ещё в школе пифагорейцев (V—III вв. до н. э.). Евдокс (IV в. до н. э.) разработал «метод исчерпываний». Архимед (III в. до н. э.) в ряде разнообразных задач «исчерпывал» сложные объекты более простыми, бесконечно малыми, «неделимыми» объектами, по существу используя интегральные суммы, аналогичные рассмотренным в этой главе. Идеи Архимеда получили распространение в странах Востока и затем в XI—XIV вв. вернулись в Европу.

Конец XVI — начало XVII в. было временем возрождения традиций Архимеда. На основе его идей для исследования сложных фигур и тел был разработан *метод неделимых,* о котором шла речь на с. 65 части 1 учебника.

Решающим историческим периодом для создания дифференциального и интегрального исчислений явилась последняя треть XVII в., а решающий вклад в это создание принадлежит Ньютону и Лейбницу.

В период от 1680-х до 1690-х гг. в ряде работ Лейбниц кратко, но достаточно полно изложил свои методы исследования функций и впервые явно стал использовать термин *дифференциальное исчисление*. На протяжении следующих трёх десятилетий и его терминология, и система обозначений стали доминирующими в европейских странах, за исключением Англии, где в основном придерживались и весьма яростно отстаивали подходы Ньютона к изучению *флюксий* и *флюент*.

Использование символа $\int$ предложил Лейбниц, «вытянув» по вертикали букву «S» (от *summa* — суммирование, сумма). Слово «интеграл» ввёл И. Бернулли, а появилось оно в работе Я. Бернулли (1690 г.). Примерно с 1699 г. началась долгая и жаркая полемика, доходившая даже до размеров международной распри, между сторонниками Ньютона и Лейбница, а потом и между ними самими о приоритетах в создании математического анализа. Дело в том, что Ньютон пришёл к понятию определённого интеграла в 1670—1671 гг. в работе «Метод флюксий», которая была опубликована только в 1736 г. Результаты Ньютона были известны в Англии, часть из них — по переписке и учёным континентальной Европы; многие идеи и конструкции Ньютон использовал в других своих работах.

Знаменитая формула (1) (см. § 23, с. 25), выражающая определённый интеграл через приращение первообразной, была названа *формулой Ньютона — Лейбница* лишь в конце XVIII в. в трактате С. Лакруа. В трудах же обоих учёных она отсутствует, но несомненно, что эта формула была ясна и Ньютону, и Лейбницу. Например, Ньютон в «Методе флюксий» писал: «Для получения должного значения площади, прилежащей к некоторой части абсциссы, эту площадь всегда следует брать равной разности значений z, соответствующей частям абсцисс, ограниченным началом и концом площади». Тот же результат независимо получил Лейбниц в 1675 г. и опубликовал его в 1686 г. в статье «О глубоко скрытой геометрии и анализе неделимых», в которой отчётливо выделена взаимная обратимость процессов дифференцирования и интегрирования.

В XIX в. теория интегрирования стала одним из мощнейших инструментов исследования функций и одной, и многих переменных, нашедшим многочисленные применения в механике, физике, астрономии. К концу XIX в. эта теория приняла практически современную форму. Были разработаны и разнообразные обобщения: интегралы Стилтьеса, Данжуа, Лебега и др.



Н. Н. Лузин

В XX в. методы интегрирования были перенесены уже на случай абстрактных пространств с мерой. Частным случаем этой теории стал подход А. Н. Колмогорова к аксиоматическому изложению основ теории вероятностей. На рубеже XIX и XX вв. в теорию интегрирования заметный вклад внесли работы отечественных математиков Михаила Васильевича Остроградского (1801—1862), Пафнутия Львовича Чебышёва (1821—1894), Дмитрия Фёдоровича Егорова (1869—1931), Николая Николаевича Лузина (1883—1950) и др.



Санкт-Петербургский
государственный университет.
Санкт-Петербург

§25. Геометрические вероятности
§26. Нормальное распределение
§27. Нормальные и биномиальные распределения. Законы больших чисел
§28. Другие распределения случайных величин

Глава 5

Основные распределения случайных величин

Случайную величину (с. в.), которая может принимать лишь конечное число значений, удобно задавать таблицей распределения. В её первой строке перечисляют значения случайной величины, а в ячейки второй строки вписывают соответствующие вероятности. Если, скажем, в первой строке стоит значение 1,8, то во второй строке под числом 1,8 указана вероятность того, что с. в. равна именно 1,8. Например:

1	1,8	7,8	8,2
0,24	0,32	0,38	0,06

В 9-м и 10-м классах вы неоднократно работали с таблицами распределения случайных величин. Но такая математическая модель возможна, только если все значения случайной величины можно тем или иным способом перечислить. В этих случаях говорят о *дискретных*[1] *случайных величинах.*

Но ничуть не реже, чем дискретные, а может быть, и чаще встречаются и *непрерывные случайные величины.* У них множества значений *несчётны*: нет никакой возможности перечислить или пересчитать (расположить в виде последовательности) все значения такой случайной величины. Типичные примеры несчётных числовых множеств — это числовые промежутки: [0; 1], (–2; 3), [5; 17) и т. п. Типичные примеры непрерывных случайных величин дают измерения геометрических и физических величин, таких как длина, площадь, объём, масса, температура, давление и т. п.

[1] От англ. *discrete* — разрозненный, раздельный, состоящий из отдельных элементов.

§ 25. Геометрические вероятности

Пример 1 Какова вероятность того, что число, случайным образом выбранное из отрезка [–6; 4], будет:

а) положительным;

б) неотрицательным;

в) меньше 3;

г) отличаться от концов отрезка не более чем на 1?

Решение. Начнём с рисунка, см. рис. 138.

Заданный отрезок [–6; 4] отметим штриховкой снизу, а в каждом из пунктов «а»—«г» штриховкой сверху отметим множества чисел, удовлетворяющих условию.

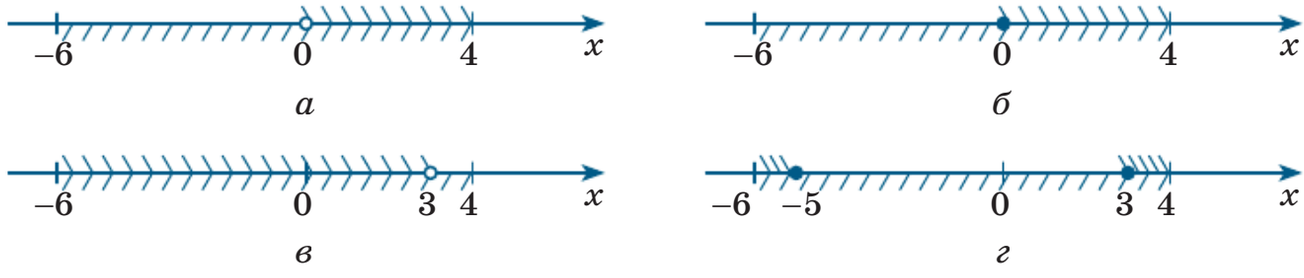


Рис. 138

Вероятности подсчитывают так. Длину множества с верхней штриховкой делят на длину всего отрезка [–6; 4] с нижней штриховкой. Получаем ответы:

а) 4 : 10 = 0,4; б) 4 : 10 = 0,4; в) 9 : 10 = 0,9; г) 2 : 10 = 0,2.

Обратите внимание: в пунктах «а» и «б» примера 1 верхней штриховкой отмечены промежутки (0; 4] и [0; 4], которые отличаются на одну точку. Но их длины одинаковы, поэтому одинаковы и вероятности.

Пример 2 Какова вероятность того, что случайным образом выбранное решение неравенства $x^2 \leqslant 16$ окажется решением неравенства:

а) $x^2 \leqslant -1$; б) $x^2 \leqslant 0$; в) $x^2 \leqslant 4$; г) $x^2 > 1$?

Решение. Действуем, как и в примере 1. Штриховкой снизу отмечаем множество решений неравенства $x^2 \leqslant 16$, т. е. отрезок [–4; 4] (рис. 139). В каждом из пунктов «а»—«г» штриховкой сверху отметим множества чисел, удовлетворяющих условию.

В пункте «а» сверху отмечать вообще нечего: множество решений неравенства $x^2 \leqslant -1$ пусто. Событие «число окажется решением нера-

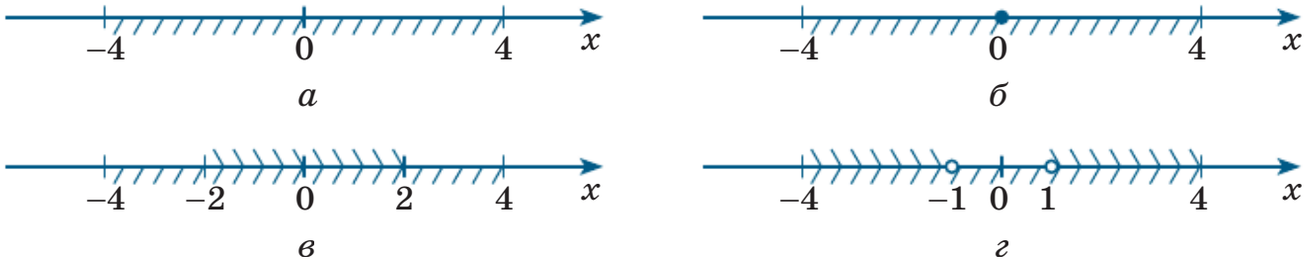


Рис. 139

венства $x^2 \leqslant -1$» является невозможным событием и вероятность этого события равна 0.

В пункте «б» отмечено единственное решение $x = 0$ неравенства $x^2 \leqslant 0$. Длина одноточечного множества равна нулю и вероятность равна 0, но, в отличие от пункта «а», это событие не является невозможным.

В пункте «в» множество решений $x^2 \leqslant 4$ — это отрезок $[-2; 2]$. Он по длине в 2 раза меньше всего отрезка и искомая вероятность равна 0,5.

В пункте «г» можно поступить так. Противоположное событие состоит в том, что $x^2 \leqslant 1$. Получаем отрезок $[-1; 1]$, это четверть всего отрезка. Значит, искомая вероятность равна $1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Весьма часто такого типа задачи формулируют не о случайном выборе точки *из множества*, а о расположении точки, наудачу брошенной *в множество*.

Пример 3 Точку наудачу бросили в квадрат с вершинами $A(1; 1)$, $B(1; 5)$, $C(5; 5)$, $D(5; 1)$. Какова вероятность того, что она окажется:

а) выше прямой $y = 4$;

б) правее прямой $x = 3{,}5$;

в) выше прямой $x + y = 9$;

г) на прямой $y = x + 1$?

Решение. Действуем, как и в примерах 1 и 2, но штриховать будем только те множества, которые соответствуют условиям «а»—«г».

В пункте «а» получится прямоугольник $EBCF$, где $E(1; 4)$, $F(5; 4)$, без стороны EF (рис. 140, *а*). От удаления одной стороны площадь не меняется и равна четверти площади всего квадрата $ABCD$. Искомая вероятность равна отношению площадей, т. е. равна 0,25.

В пункте «б» получится прямоугольник $GCDH$, где $G(3{,}5; 5)$, $H(3{,}5; 1)$, размером $1{,}5 \times 4$ (рис. 140, *б*). Искомая вероятность равна отношению площадей, т. е. равна $(1{,}5 \cdot 4) : (4 \cdot 4) = 3 : 8 = 0{,}375$.

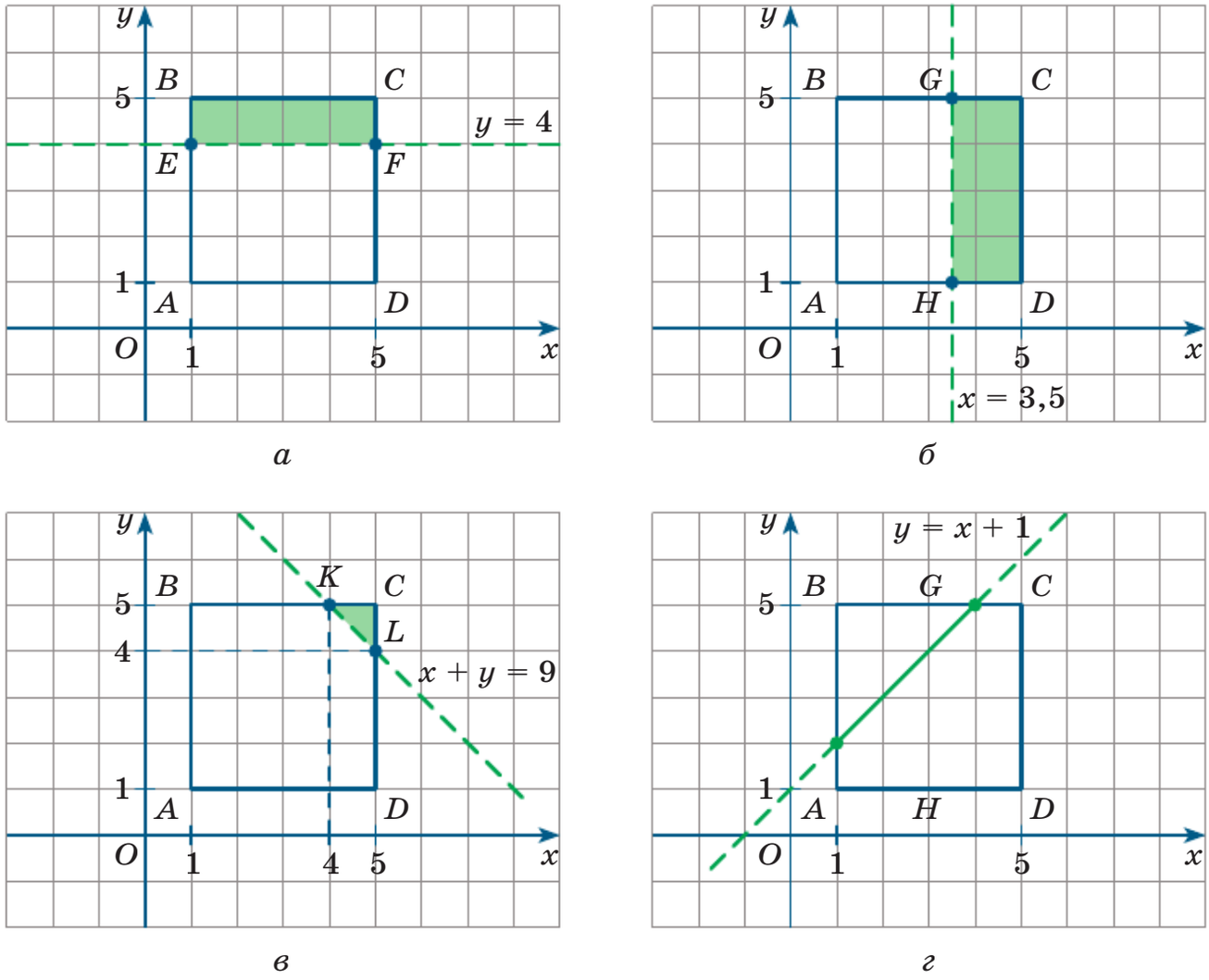


Рис. 140

В пункте «в» получится прямоугольный треугольник KCL, где $K(4; 5)$, $L(5; 4)$, с катетами, равными 1 и 1 (рис. 140, *в*). Его площадь равна 0,5, а искомая вероятность $0{,}5 : 16 = 1 : 32 = 0{,}03125$.

В пункте «г» получится отрезок (рис. 140, *г*). Это множество, конечно, непустое, но площадь его равна нулю. Поэтому и вероятность попадания случайно брошенной точки на этот отрезок равна нулю. ■

Если от числовых или от плоских множеств перейти к пространственным телам, то длины или площади следует заменить объёмами.

Пример 4 В отрезке $[0; 1]$ наудачу последовательно выбирают три числа. Какова вероятность того, что их сумма больше 1?

Решение. Выбор трёх чисел $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$ заменим на выбор точки $(x; y; z)$ в единичном кубе Q с вершина-

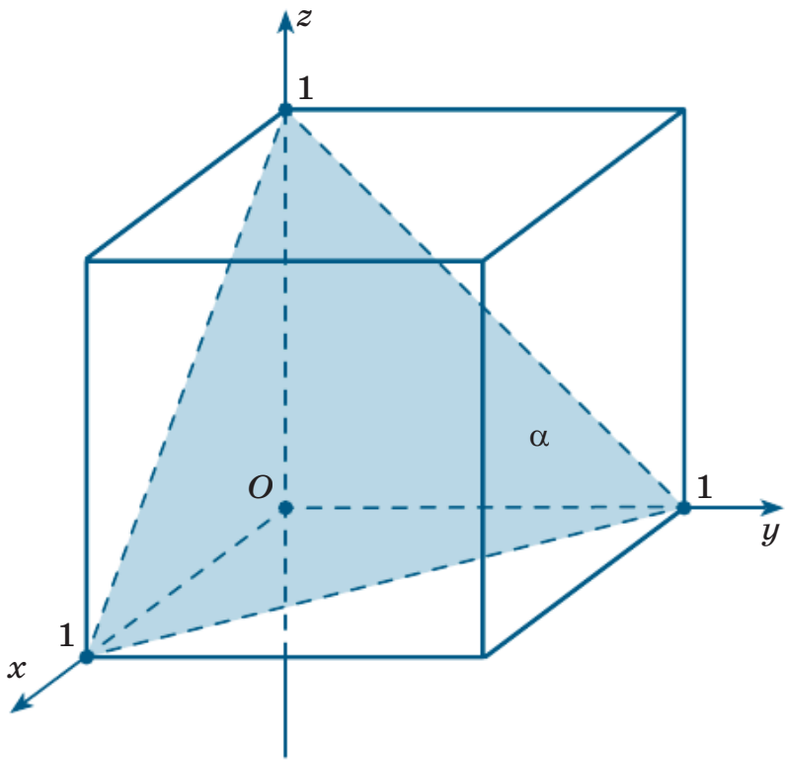


Рис. 141

ми (0; 0; 0), (0; 1; 0), (1; 0; 0), (1; 1; 0), (0; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 1) (рис. 141). Объём куба равен 1.

Уравнение $x + y + z = 1$ задаёт в координатном пространстве плоскость α, проходящую через точки (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1) (см. рис. 141). Ниже этой плоскости находятся точки $(x; y; z)$, для которых $x + y + z < 1$, а выше неё — те точки $(x; y; z)$, для которых $x + y + z > 1$. Нам нужен объём второго множества, но проще найти объём первого, ведь это треугольная пирамида, из вершины O которой перпендикулярно друг другу выходят три ребра единичной длины. Её объём равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$, а объём «дополнительного» многогранника равен $\frac{5}{6}$. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{5}{6} : 1 = \frac{5}{6}$.

В примерах 1—4 говорится о «случайном выборе» точки из множества, или её «бросании наудачу» в множество. Интуитивно это означает, что никакая из частей множества не имеет никаких заведомых преимуществ перед остальными, вероятность попадания «одинаково», или, как говорят, *равномерно*, распределена. А какова мате-

матическая модель такой «случайности»? Краткий ответ таков: вероятность попадания в некоторое множество пропорциональна его *мере* — длине для числовых множеств, площади для плоских фигур, объёму для пространственных тел.

Имеется и ясная физическая модель. Рассмотрим её для случая плоской фигуры. Пусть точку выбирают из *однородной* металлической пластины единичной массы. Однородность означает, что половина (по площади) этой пластины в 2 раза легче всей пластины, любая (по площади) её треть в 3 раза легче всей пластины, если взять часть этой пластины, занимающую, скажем, 0,001 площади, то масса этой части составит в точности 0,001 единицы измерения массы и т. п. Кратко: масса распределена равномерно, она пропорциональна площади.

В теории вероятностей вместо равномерно распределённой единичной массы говорят о *равномерном распределении* вероятности. Вероятность события «точка, выбранная из X, будет точкой из X», очевидно, равна 1. Вероятность события «точка, выбранная из X, будет точкой из данного подмножества, занимающего половину X» равна 0,5. Вероятность события «точка, выбранная из X, будет точкой из данного подмножества, занимающего 0,2021 площади X» равна 0,2021 и т. п.

> При равномерном распределении вероятность того, что точка, выбираемая из множества X, окажется точкой подмножества Y, равна отношению:
> — длин $l(Y) : l(X)$ для числовых множеств;
> — площадей $S(Y) : S(X)$ для плоских фигур;
> — объёмов $V(Y) : V(X)$ для пространственных тел.

Это правило даёт ответ на вопрос «*Как* вычислить геометрическую вероятность?». Математически корректно дать ответ на вопрос «*Почему* следует действовать именно так?» — непростая задача. Схематично ответ можно описать так. Представим себе плоскую фигуру X и её подмножество Y на мониторе компьютера. Тогда и X, и Y состоят из пикселей — маленьких квадратиков размером, скажем, $d \times d$, где d зависит от настроек монитора. Количества $N(X)$ пикселей, составляющих фигуру X, и соответственно $N(Y)$, составляющих подфигуру Y, огромны, но конечны. В этой ситуации задача сводится к выбору одного из $N(X)$ пикселей и вычислению вероятности того, что выбираемый пиксель окажется одним из $N(Y)$ пикселей. По

классическому определению вероятности эта вероятность равна $\frac{N(Y)}{N(X)} = \frac{N(Y)\cdot d^2}{N(X)\cdot d^2} \approx \frac{S(Y)}{S(X)}$, так как площадь фигуры приближённо равна сумме площадей составляющих её пикселей. Погрешность этого приближения, конечно же, зависит от длины d сторон пикселя: чем мельче пиксели, тем меньше погрешность приближения. Остаётся перейти *к пределу при d, стремящемуся к нулю*, и получить, что искомая вероятность равна $\lim\limits_{d\to 0} \frac{N(Y)\cdot d^2}{N(X)\cdot d^2} = \frac{S(Y)}{S(X)}$.

На бытовом уровне равномерность распределения вероятности часто описывают так. Если на кусок хлеба X ровным (абсолютно!) слоем намазано масло, то вероятность попадания случайной точки в меньший кусок $Y \subset X$ равна отношению $m(Y) : m(X)$ масс масла, намазанного на куски, или же отношению $S(Y) : S(X)$ площадей кусков. Равномерное распределение вероятности — это простейший пример *непрерывного распределения вероятности*. В более сложных случаях «масло намазано» уже не ровным слоем. Тогда геометрическая вероятность по-прежнему будет равна отношению $m(Y) : m(X)$ масс, но это отношение может и не совпадать с отношением площадей: вычисление массы по заданной площади становится сложной математической задачей (см. § 24).

Упражнения

25.1. Какова вероятность того, что наудачу выбранная точка отрезка $[-6; 4]$ окажется точкой промежутка:

а) $[-6; 5]$; в) $(-3; 1)$; д) $(-\infty; 3]$;
б) $[-7; -6)$; г) $(-4; -2]$; е) $[0; +\infty)$?

25.2. Какова вероятность того, что наудачу выбранная точка отрезка $[-2; 8]$ не окажется точкой промежутка:

а) $[-4; -3]$; в) $(0; 3)$; д) $(-\infty; 5]$;
б) $[-2; 9)$; г) $(-1; 7]$; е) $[0; +\infty)$?

25.3. На отрезке с концами в точках $A(0; -2)$ и $B(0; 8)$ наудачу выбирают точку C и из неё проводят луч, проходящий через точку $D(1; 0)$. Какова вероятность того, что угол между лучом и положительным направлением оси ординат окажется:

а) острым; г) тупым;
б) прямым; д) больше чем $45°$;
в) меньше чем $135°$; е) больше чем $\pi - \operatorname{arctg} 0{,}1$?

25.4. Какова вероятность того, что случайным образом выбранное решение неравенства $x(x-6) \leqslant 2x+9$ окажется решением неравенства:

а) $x \geqslant 0$; в) $|x-1| \leqslant 1$; д) $\sqrt{x-5} \leqslant 2$;

б) $|x-1| \leqslant 0$; г) $x^3 > x$; е) $\frac{1}{x} \leqslant 4$?

25.5. Наудачу выбирают число x, для которого $x^2 \leqslant 5x$. Для событий A — «для x верно неравенство $x^2 \leqslant 4x-3$» и B — «для x верно неравенство $|x-3| < 1$» найдите:

а) $P(A)$; в) $P(AB)$; д) $P(A/B)$[1];

б) $P(B)$; г) $P(A+B)$; е) $P(\overline{B}/\overline{A})$.

25.6. Наудачу выбирают число x из отрезка $[0; 10]$ и для положительного параметра a рассматривают события A — «$0 \leqslant x \leqslant a+1$», B — «$a \leqslant x \leqslant 10$». Найдите все значения a, при которых:

а) $P(A) < 0{,}5$;
б) $P(AB) < 0{,}1$;
в) A и B — независимые события;
г) $P(B) > 0{,}9$;
д) $P(B) \leqslant 0{,}1$;
е) A и $\overline{B}$ — независимые события.

25.7. В треугольнике с вершинами $A(1; 0)$, $B(3; 0)$, $C(3; 6)$ наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется:

а) левее оси ординат;
б) выше оси абсцисс;
в) левее прямой $x = 2$;
г) вершиной треугольника;
д) ниже прямой $y = 2$;
е) выше прямой $y = 2x - 2$?

25.8. В прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 1$, $x = 5$, $y = -2$, $y = 3$, наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется:

а) на оси ординат;
б) на оси абсцисс;
в) ниже оси абсцисс;
г) правее прямой $x = 4$;
д) выше прямой $y = x$;
е) ниже прямой $x + y = 3$?

[1] Напомним, что если вероятность $P(B)$ отлична от нуля, то *условную вероятность* $P(A/B)$ события A при условии наступления события B определяют равенством $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

25.9. В прямоугольном треугольнике OAB, где $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 3)$, $B(4;\ 0)$, наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется:

а) в круге $x^2 + y^2 \leqslant 25$;

б) во второй координатной четверти;

в) в треугольнике, образованном средними линиями треугольника OAB;

г) правее прямой $x = 3$;

д) ниже прямой $y = 2$;

е) левее прямой $x = 3$ и ниже прямой $y = 2$?

25.10. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 5$ наудачу выбирают точку. Найдите вероятность того, что она расположена:

а) на границе прямоугольника;

б) ближе к прямой AB, чем к прямой CD;

в) ближе к прямой BC, чем к прямой AD;

г) ближе к вершине A, чем к вершине C;

д) ближе к прямой AB, чем к прямой BC;

е) ближе к вершине A, чем к точке пересечения диагоналей.

25.11. В прямоугольнике с вершинами $(1;\ 0)$, $(1;\ 2)$, $(6;\ 2)$, $(6;\ 0)$ наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется:

а) ниже параболы $y = 2x^2$;

б) выше параболы $y = 2x^2 - 8x + 8$;

в) ниже графика функции $y = 2\sin 0{,}1\pi(x - 1)$;

г) выше параболы $y = 1 - x^2$;

д) ниже параболы $y = 6x - 16 - 0{,}5x^2$;

е) ниже графика функции $y = \dfrac{x - 2}{2(7 - x)}$?

25.12. Выбирают точку первой координатной четверти ниже графика $y = 1 - |x - 1|$. Найдите все значения a, при которых вероятность того, что она окажется выше прямой $y = ax$, будет:

а) равна 1;

б) равна 0;

в) положительна;

г) меньше 1;

д) равна 0,5;

е) меньше 0,01.

25.13. В кубике Рубика 3×3 наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется:
а) вершиной кубика;
б) внутри, т. е. не на поверхности кубика;
в) на диагонали кубика;
г) в одном из угловых кубиков 1×1;
д) в кубике 1×1, который не имеет общих точек с поверхностью кубика Рубика;
е) в одном из кубиков 1×1, у которых ровно одна грань расположена на поверхности кубика Рубика?

25.14. Наудачу выбирают точку из «снеговика» — трёх вертикально расположенных шаров, радиус нижнего из которых равен 3, радиус касающегося с ним внешним образом среднего шара равен 2, радиус верхнего шара, который касается внешним образом среднего, равен 1; центры шаров расположены на одной прямой. Какова вероятность того, что эта точка окажется:
а) не точкой касания шаров;
б) на поверхности «снеговика»;
в) в верхнем шаре;
г) в нижнем шаре;
д) или в нижнем, или в среднем шаре;
е) не в среднем шаре?

25.15. Для параметра $a > 0$ в кубе $ABCDA'B'C'D'$ отметили точку $E \in [B;\ B']$ так, что $BE = a \cdot EB'$. В кубе наудачу выбирают точку X и рассматривают события K — «X лежит выше плоскости ADE», L — «X принадлежит пирамиде $EABC$». Найдите все значения a, при которых:
а) $P(K) = 1$;
б) $P(L) = 0{,}5$;
в) K и L — независимые события;
г) $P(K) > 0{,}75$;
д) $P(L) \geqslant 0{,}05$;
е) $P(\overline{K} \cdot \overline{L}) < 0{,}01$.

Упражнения для повторения

25.16. На рисунке 142 изображён график дифференцируемой функции $y = h(x)$. Укажите значения x, при которых:
а) $h'(x) = 0$;
б) $h'(x)$ не существует;
в) $h'(x) > 0$;
г) $h'(x) < 0$.

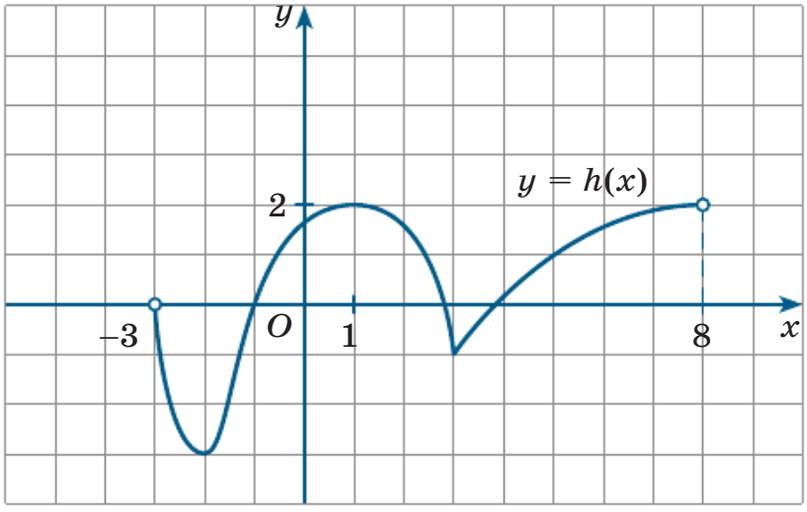


Рис. 142

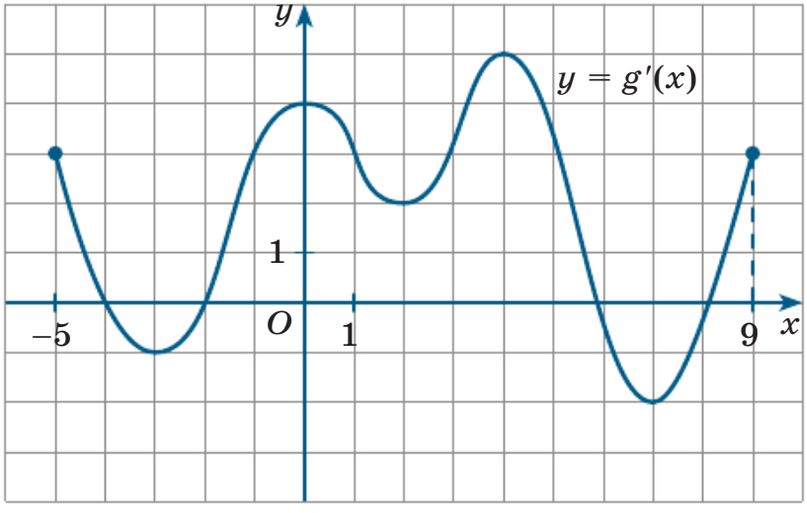


Рис. 143

25.17. На рисунке 143 изображён график производной функции $y = g(x)$. Укажите:
а) промежутки возрастания и убывания функции $y = g(x)$;
б) точки максимума и минимума функции.

25.18. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{8\sin 23^\circ \cos 23^\circ}{\cos 24^\circ \cos 20^\circ - \sin 24^\circ \sin 20^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin 100^\circ \cos 18^\circ - \cos 100^\circ \sin 18^\circ}{10 \cos 49^\circ \sin 49^\circ}$.

25.19. На молокозаводе молоко разливают в пакеты и пластиковые бутылки по 1 л в каждую тару. Производственная мощность молокозавода позволяет выпускать 2400 л молока в пакетах и 2000 л в пластиковых бутылках. В торговую сеть требуется отправлять не менее 900 л молока в каждой таре (выполнение условия торговых сетей по ассортиментности). Найдите максимально возможную прибыль молокозавода за один день, если вся его продукция реализуется, а себестоимость и отпускная цена 100 л молока представлены в таблице.

Вид тары	Себестоимость 100 л, р.	Отпускная цена 100 л, р.
Пакеты	2500	3600
Пластиковые бутылки	2800	4000

25.20. Найдите, при каких значениях m функция $y = -x^2 - |x - m^4| - 5x$ имеет три точки экстремума.

§ 26. Нормальное распределение

Математически корректное определение непрерывной случайной величины — задача, выходящая за рамки школьного образования. Мы ограничимся таким описанием: непрерывная с. в. T осуществляет случайный выбор числа (своего значения) из некоторого промежутка. Например,

— масса (в кг) готовой детали в соответствии со стандартами производства может принимать значения из промежутка (0,49; 0,51);

— значения температуры, например, в Санкт-Петербурге могут колебаться от −50 до +50 °C;

— показания спидометра автомобиля (не гоночного) непрерывно меняются от 0 км/ч до, положим, 200 км/ч и т. п.

Как задавать и описывать непрерывные с. в.? Как вычислить вероятность того, что, скажем, масса готовой детали попадёт в промежуток (0,493; 0,504), или того, что температура окажется в рамках от +10 до +20 °C, или того, что скорость автомобиля не превысит 120 км/ч? Так как множества значений непрерывных с. в. — это числовые промежутки, то ни (конечные) таблицы, ни (конечные) диаграммы для полного описания таких с. в. не подходят. Надо действовать иначе.

Поступают так. Фиксируют некоторую неотрицательную функцию, для которой площадь, заключённая между осью абсцисс и графиком этой функции, равна 1. Такую функцию называют *плотностью распределения* непрерывной случайной величины (рис. 144).

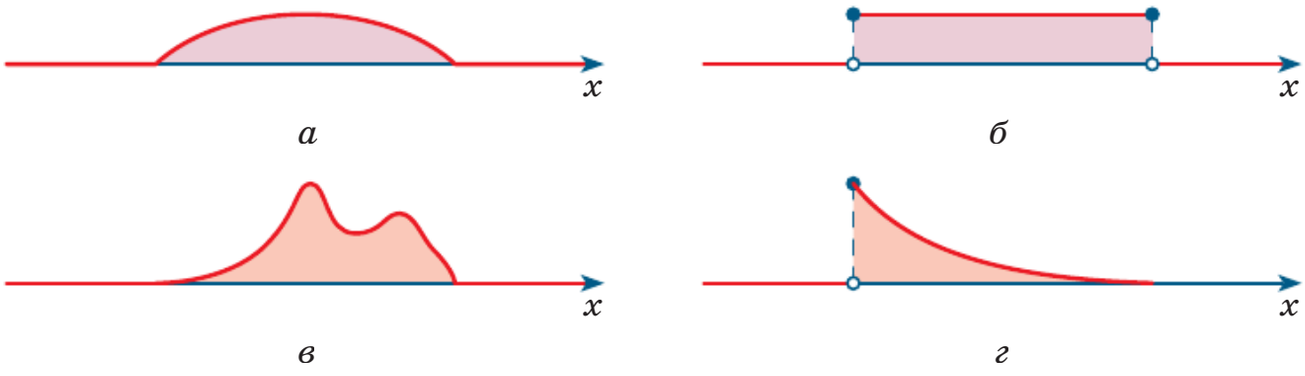


Рис. 144

Каждая функция плотности, обозначим её $y = p(x)$, задаёт непрерывную случайную величину, скажем T, по следующему правилу:

> вероятность того, что значения случайной величины T находятся между a и b, равна площади фигуры, ограниченной снизу осью Ox, сверху — графиком $y = p(x)$, слева и справа — прямыми $x = a$ и $x = b$.

На рисунке 145 представлены иллюстрации этого правила для четырёх указанных выше плотностей.

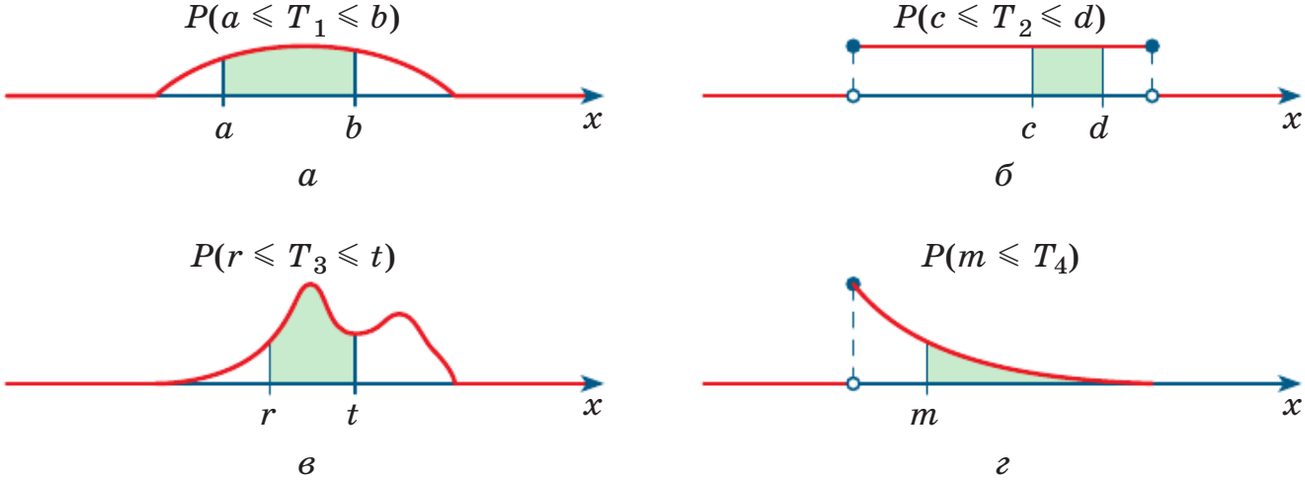


Рис. 145

Меняя границы a, b, c, d, r, t, m, ..., получаем вероятности того, что четыре разные непрерывные с. в. T_1—T_4 принимают значения в различных промежутках.

Напомним, что площадь криволинейной трапеции вычисляют с помощью определённого интеграла (см. гл. 4). Значит, приведённое выше правило можно записать формулой

$$P(a \leqslant T \leqslant b) = \int_a^b p(x)\,dx.$$

Отметим, что это практически то же правило, что и в задаче о вычислении массы прямолинейного стержня по заданной плотности массы (см. гл. 4): $m = \int_a^b \rho(x)\,dx$.

Определение 1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина T принимает значения от a до b, равна результату интегрирования функции $y = p(x)$ плотности этой с. в. в пределах от a до b.

С простейшим непрерывным распределением вероятности — равномерным — мы уже познакомились в предыдущем параграфе. Это случай с «одинаковым слоем намазанного масла», т. е. случай, когда плотность $y = p(x)$ равна константе C на отрезке, скажем, $[c; d]$ и равна нулю вне этого отрезка. Смотрите, тогда для любого отрезка $[a; b]$, содержащегося в $[c; d]$, получаем:

$$P(a \leqslant T \leqslant b) = \int_a^b p(x)\,dx = C\int_a^b 1 \cdot dx = C(b - a),$$

т. е. вероятность попадания в отрезок $[a; b]$ прямо пропорциональна его длине. Это — равномерное распределение вероятности.

Пример 1 Случайная величина T равномерно распределена на отрезке $[0{,}5; 2{,}5]$.

а) Построить график функции $y = p(x)$ плотности распределения с. в. T.

б) Найти вероятность $P(1 \leqslant T \leqslant 1{,}9)$ того, что значения с. в. T попадут в отрезок $[1; 1{,}9]$.

в) Найти вероятность $P(T \leqslant 2)$.

г) Найти b, если известно, что $P(0{,}7 \leqslant T \leqslant b) = 0{,}4$.

Решение. а) Все значения с. в. T принадлежат отрезку $[0{,}5;\ 2{,}5]$. Поэтому событие $0{,}5 \leqslant T \leqslant 2{,}5$ достоверно и его вероятность равна единице: $P(0{,}5 \leqslant T \leqslant 2{,}5) = 1$. Так как с. в. T равномерно распределена на отрезке $[0{,}5;\ 2{,}5]$, то её функция плотности распределения на этом отрезке постоянна и равна некоторой константе C. Найдём эту константу. По определению

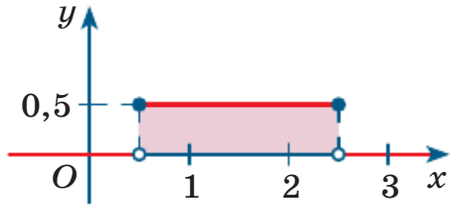


Рис. 146

$$P(0{,}5 \leqslant T \leqslant 2{,}5) = \int_{0{,}5}^{2{,}5} C \cdot dx.$$

Значит, $1 = C(2{,}5 - 0{,}5)$, $1 = 2C$, $C = 0{,}5$, и график плотности выглядит так, как показано на рисунке 146.

б) $P(1 \leqslant T \leqslant 1{,}9) = \int_{1}^{1{,}9} 0{,}5 \cdot dx = 0{,}5 \cdot (1{,}9 - 1) = 0{,}45$. Можно действовать и без интегралов, а как в предыдущем параграфе: вероятность попадания в отрезок $[1;\ 1{,}9]$ равна отношению длин соответствующих отрезков, т. е. равна $(1{,}9 - 1) : (2{,}5 - 0{,}5) = 0{,}9 : 2 = 0{,}45$.

в) $P(T \leqslant 2) = P(0{,}5 \leqslant T \leqslant 2)$, так как вне отрезка $[0{,}5;\ 2{,}5]$ нет никакой площади, заключённой между осью Ox и графиком плотности. Поэтому $P(T \leqslant 2) = 0{,}5 \cdot (2 - 0{,}5) = 0{,}75$.

г) $0{,}4 = P(0{,}7 \leqslant T \leqslant b) = 0{,}5 \cdot (b - 0{,}7)$, $b = 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 2$, $b = 1{,}5$.

В многочисленных приложениях математики (статистическая физика, радиофизика, обработка данных, экономическое прогнозирование, случайные процессы и т. д.) хорошо известны весьма разнообразные типы распределения непрерывных случайных величин. Среди них одно заметно выделяется по своей значимости и частоте применений. Это *нормальное распределение*, а точнее — *нормальные распределения*. Разделяют стандартное и общее нормальные распределения.

Плотность стандартного нормального распределения — знаменитая «колоколообразная» кривая, которую часто называют *гауссовой кривой* в честь великого немецкого математика Карла Гаусса (рис. 147). Эта кривая — график весьма сложной функции $y = \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

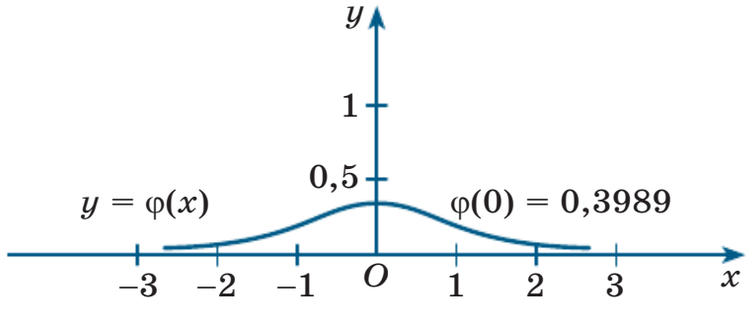


Рис. 147

Кривая стандартного нормального распределения[1] имеет единственную точку максимума; симметрична относительно оси ординат; площадь под графиком равна единице, она очень быстро убывает к оси абсцисс: если оценить площадь под гауссовой кривой на отрезке $[-3; 3]$, то получится более 0,99, т. е. более 99 % всей площади.

Физическая модель такова. Единичную массу нельзя равномерно «размазать» по всей числовой прямой. Всегда *плотность распределения* придётся делать разной. Гауссова кривая — пример такого распределения. Около нуля плотность распределения единичной массы (вероятности) наибольшая, а по мере удаления от нуля плотность массы довольно резко убывает. В упрощённом варианте, если по числовой прямой «размазывается» 100 грамм чего-либо, то отрезок $[-3; 3]$ «весит» более 99 грамм, а оба луча $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$ вместе «весят» очень мало, менее одного грамма.

Кривая нормального распределения обладает многими удивительными свойствами. Отметим только некоторые из них. С числовой точки зрения поразительным является присутствие в её уравнении чисел π и e одновременно: казалось бы, что общего может быть у площади единичного круга и у основания натуральных логарифмов? Тем не менее нормальное распределение связывает вместе эти, казалось бы, совершенно разные по своей природе числа.

С точки зрения приложений нормальное распределение, несомненно, наиболее часто встречающееся распределение, естественно возникающее в разнообразных примерах обработки массовых явлений. Вот лишь небольшая часть из них.

На рисунке 148, *а* показано распределение роста 1375 женщин. На рисунке 148, *б* — распределение 500 измерений боковой ошибки при стрельбе с самолёта: по оси абсцисс отложены величины

[1] Иногда, для краткости, говорят *гауссиана*.

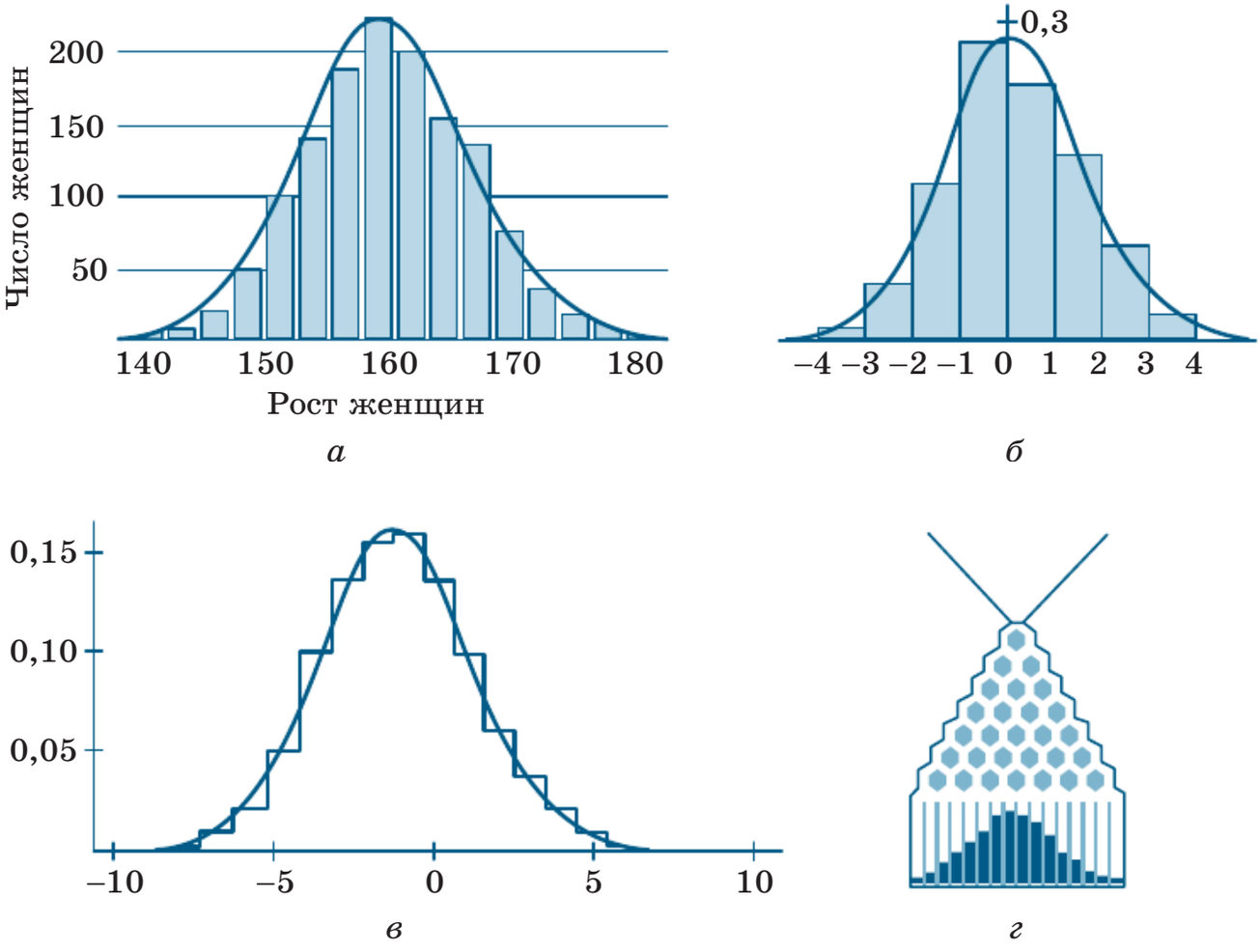


Рис. 148

ошибок («левее или правее» цели), а по оси ординат — частоты этих ошибок. На рисунке 148, *в* приведены результаты измерения размеров 12 000 бобов: по оси абсцисс откладывались величины отклонений от среднего размера бобов. На рисунке 148, *г* изображена *доска Гальтона* — специальное устройство, моделирующее возникновение нормального распределения. В нём сыплющиеся сверху одинаковые шарики распределяются по ходам между правильными шестиугольниками и в результате попадают на горизонтальную поверхность, образуя картинку, похожую на «подграфик» гауссовой кривой.

Мы видим, что непрерывные кривые, огибающие эти столбиковые диаграммы, в целом похожи на гауссову кривую, но есть два важных отличия. Во-первых, точка максимума может и не совпадать с $x = 0$, а быть, вообще говоря, произвольной точкой $x = a$. Во-вторых, «колокол» может быть различным, как высоким и узким, так и низким,

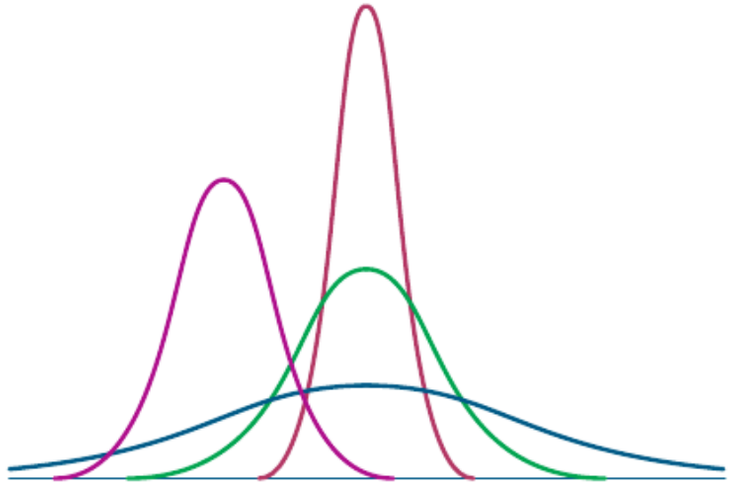


Рис. 149

но более протяжённым (рис. 149). За эти различия отвечает другой числовой параметр, который принято обозначать греческой буквой σ («сигма»).

Определение 2. Случайную величину T называют **нормально распределённой**[1], если её плотность распределения имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2},$$

где a и $\sigma > 0$ — константы распределения.

Кратко пишут так: $T \sim N(a, \sigma)$ и говорят, что случайная величина T имеет нормальный закон распределения (или нормально распределена) с параметрами a и $\sigma > 0$; буква N — от слова *normal* — нормальное распределение.

При $a = 0$, $\sigma = 1$ получается стандартное (гауссово) нормальное распределение (рис. 150, *а*).

Кривая на рисунке 150, *б* получается из кривой, изображённой на рисунке 150, *а*, простыми геометрическими преобразованиями: по оси Ox — растяжением в σ раз и переносом на a, по оси Oy — сжатием в σ раз. Площадь под кривой нормального распределения равна 1, и она довольно кучно сосредоточена рядом с точкой $x = a$ максимума: на отрезке $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$ площадь под кривой превышает 0,99.

[1] Говорят также: с. в. с нормальным распределением, с нормальным законом распределения и т. п.

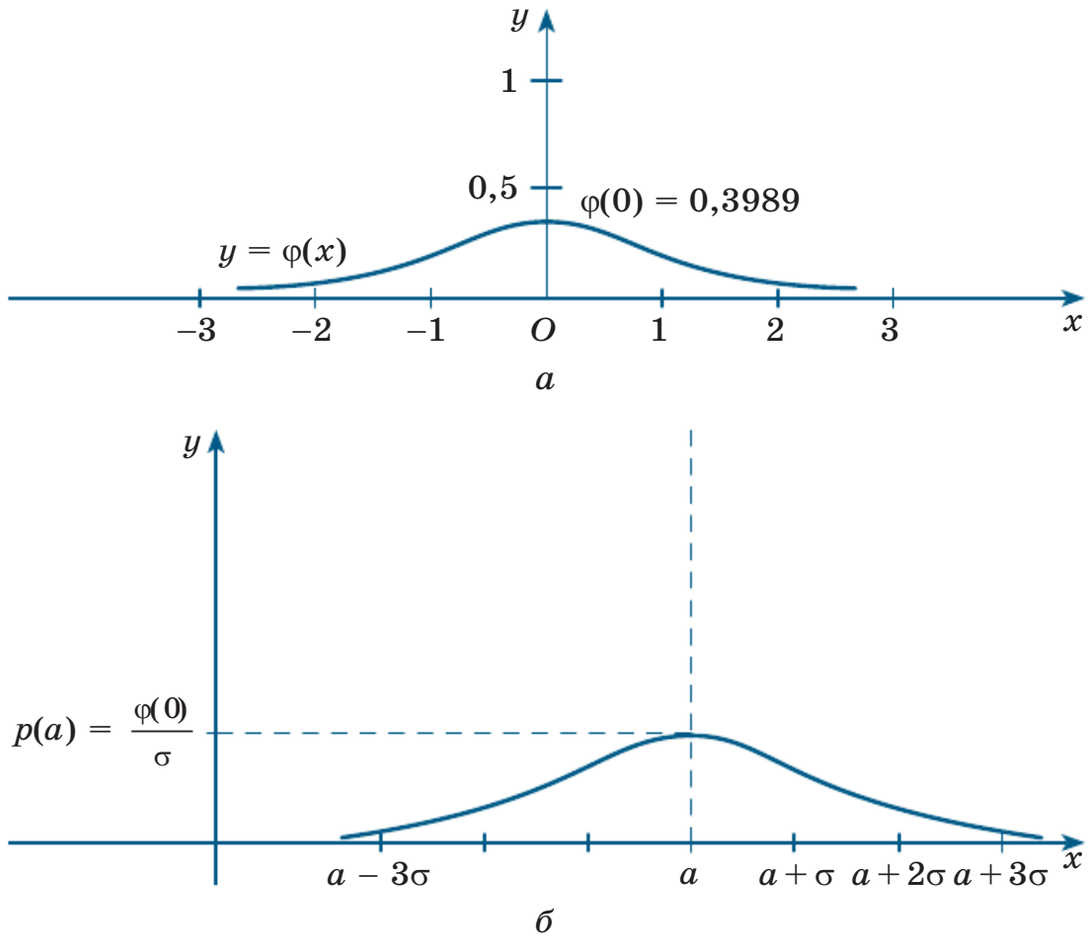


Рис. 150

Точные вычисления вероятностей $P(c \leqslant T \leqslant d)$ того, что нормально распределённая с. в. $T \sim N(a, \sigma)$ принимает значения от c до d, невозможны, так как невозможно точное вычисление интегралов гауссовой функции. Для вычислений используют таблицу приближённых значений специальной *функции Лапласа*[1] $y = \Phi(x)$. Эта таблица приведена в конце учебника в приложении (см. с. 256).

Определение 3. Функцией Лапласа $y = \Phi(x)$ называют функцию, которая каждому числу $x > 0$ ставит в соответствие значение площади фигуры, заключённой между осью Ox и гауссовой кривой на отрезке от 0 до x (рис. 151). Эту функцию доопределяют для $x = 0$ и $x < 0$, полагая соответственно $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(x) = -\Phi(-x)$.

[1] Названа в честь французского математика, физика и астронома Пьера-Симона Лапласа (1749—1827).

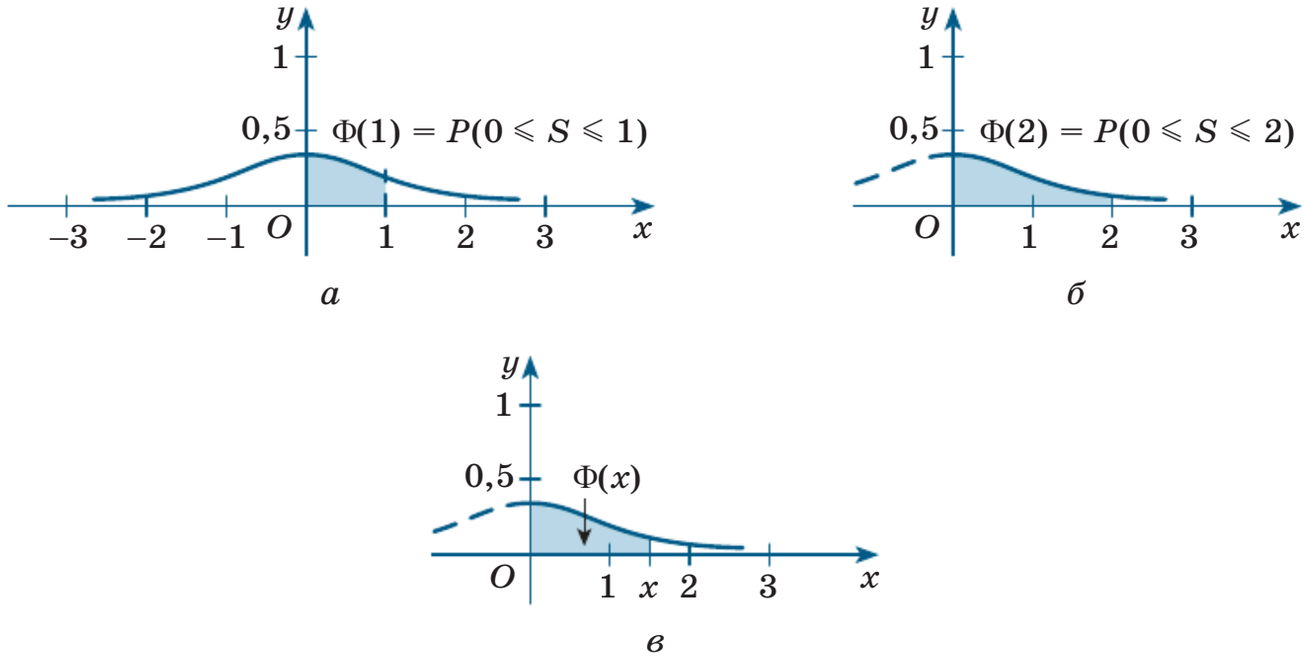


Рис. 151

Оказывается, функция Лапласа — это первообразная гауссовой функции, т. е. $\Phi'(x) = \varphi(x)$ для всех x. В частности, по формуле Ньютона — Лейбница,

$$P(c \leqslant S \leqslant d) = \int_c^d \varphi(x)\,dx = \Phi(d) - \Phi(c)$$

для случайной величины S со стандартным нормальным распределением $N(0; 1)$.

Правую часть этого тождества вычисляют с помощью таблицы приближённых значений (см. с. 256). Обратите внимание: в нём задействованы результаты исследований сразу четырёх великих математиков: Ньютона, Лейбница, Лапласа и Гаусса.

Пример 2 Используя таблицы функции Лапласа $y = \Phi(x)$, найти приближённые значения вероятности того, что случайная величина S со стандартным нормальным распределением примет значения:

а) от 0 до 2; в) от 2 до 2,7; д) от –1,5 до 0;
б) от 0 до 2,7; г) от 2 до 4; е) от –3 до 3.

Решение. а) Нужно найти вероятность $P(0 \leqslant S \leqslant 2)$. Она равна $\Phi(2) - \Phi(0) = \Phi(2)$. По таблице находим, что $\Phi(2) \approx 0{,}4772$.

б) Нужно найти вероятность $P(0 \leqslant S \leqslant 2{,}7)$. Она равна $\Phi(2{,}7)$. По таблице находим, что $\Phi(2{,}7) \approx 0{,}4965$.

в) Нужно найти вероятность $P(2 \leqslant S \leqslant 2{,}7)$. Так как функция $\Phi(x)$ — это первообразная функции $\varphi(x)$, то

$$P(2 \leqslant S \leqslant 2{,}7) = \int_{2}^{2{,}7} \varphi(x)dx = \Phi(2{,}7) - \Phi(2) \approx$$

$$\approx 0{,}4965 - 0{,}4772 = 0{,}0193 \approx 0{,}02.$$

г) Действуя, как в пункте «в», находим

$$P(2 \leqslant S \leqslant 4) = \Phi(4) - \Phi(2) \approx 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228.$$

д) Нужно найти вероятность $P(-1{,}5 \leqslant S \leqslant 0)$. По определению это площадь фигуры между осью Ox и гауссовой кривой $y = \varphi(x)$ на отрезке $[-1{,}5;\ 0]$. Так как гауссова кривая симметрична относительно оси Oy, то

$$P(-1{,}5 \leqslant S \leqslant 0) = P(0 \leqslant S \leqslant 1{,}5) = \Phi(1{,}5) - \Phi(0) \approx 0{,}4332.$$

е) Так как гауссова кривая симметрична относительно оси Oy, то площадь фигуры между осью Ox и гауссовой кривой $y = \varphi(x)$ на отрезке $[-3;\ 3]$ в 2 раза больше площади на отрезке $[0;\ 3]$. Поэтому

$$P(-3 \leqslant S \leqslant 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Обратите внимание: вероятность $P(2 \leqslant S \leqslant 4)$ составляет менее 2,5 % всей единичной вероятности, это очень небольшая вероятность, а вероятность $P(-3 \leqslant S \leqslant 3)$ составляет более 99,5 %, это очень большая вероятность: практически несомненно, что с. в. S принимает значения только из отрезка $[-3;\ 3]$.

Нормальное распределение $T \sim N(a;\ \sigma)$ и стандартное нормальное распределение $S \sim N(0;\ 1)$ тесно связаны между собой. А именно имеет место зависимость $T = \sigma S + a$. Действительно, проверим равенство $P(c \leqslant T \leqslant d) = P(c \leqslant \sigma S + a \leqslant d)$ вероятностей попадания в отрезок $[c;\ d]$ значений случайных величин T и $\sigma S + a$. По определению

$$P(c \leqslant T \leqslant d) = \int_{c}^{d} p(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{c}^{d} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Сделаем линейную замену переменной $t = \frac{x-a}{\sigma}$, $x = \sigma t + a$, $dx = \sigma dt$ в определённом интеграле (см. гл. 4). Если $x = c$, $x = d$, то соответственно $t = \frac{c-a}{\sigma}$, $t = \frac{d-a}{\sigma}$. Поэтому

$$P(c \leqslant T \leqslant d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{c-a}{\sigma}}^{\frac{d-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= P\left(\frac{c-a}{\sigma} \leqslant S \leqslant \frac{d-a}{\sigma} \right) = P\left(c \leqslant \sigma S + a \leqslant d\right).$$

В конкретных случаях двойное неравенство вида $c \leqslant T \leqslant d$ заменяют равносильным двойным неравенством вида $c' \leqslant S \leqslant d'$, а вероятность последнего вычисляют по таблицам функции $\Phi(x)$, как это сделано в примере 2.

Пример 3 Используя таблицы функции Лапласа $y = \Phi(x)$, найти приближённые значения вероятности того, что случайная величина T с нормальным распределением $N(4; 0{,}5)$ примет значения:

а) от 4 до 4,6; б) от 5 до 5,5; в) от 3 до 4,2; г) от 0 до 2,5.

Решение. В нашем случае $T = 0{,}5S + 4$, где $S \sim N(0; 1)$.

а) Нужно найти вероятность $P(4 \leqslant T \leqslant 4{,}6)$. Неравенство $4 \leqslant T \leqslant 4{,}6$ равносильно неравенствам

$$4 \leqslant 0{,}5S + 4 \leqslant 4{,}6;\ 0 \leqslant 0{,}5S \leqslant 0{,}6;\ 0 \leqslant S \leqslant 1{,}2.$$

Значит, $P(4 \leqslant T \leqslant 4{,}6) = P(0 \leqslant S \leqslant 1{,}2) = \Phi(1{,}2) \approx 0{,}3849$.

б) $P(5 \leqslant T \leqslant 5{,}5) = P(5 \leqslant 0{,}5S + 4 \leqslant 5{,}5) = P(1 \leqslant 0{,}5S \leqslant 1{,}5) =$
$= P(2 \leqslant S \leqslant 3) = \Phi(3) - \Phi(2) \approx 0{,}49865 - 0{,}4772 = 0{,}021$.

в) $P(3 \leqslant T \leqslant 4{,}2) = P(3 \leqslant 0{,}5S + 4 \leqslant 4{,}2) = P(-1 \leqslant 0{,}5S \leqslant 0{,}2) =$
$= P(-2 \leqslant 0{,}5S \leqslant 0{,}4) = P(-2 \leqslant 0{,}5S \leqslant 0) + P(0 \leqslant 0{,}5S \leqslant 0{,}4) =$
$= \Phi(2) + \Phi(0{,}4) \approx 0{,}4772 + 0{,}1554 = 0{,}6326$.

г) $P(0 \leqslant T \leqslant 2{,}5) = P(0 \leqslant 0{,}5S + 4 \leqslant 2{,}5) = P(-4 \leqslant 0{,}5S \leqslant -1{,}5) =$
$= P(-8 \leqslant S \leqslant -3) = \Phi(8) - \Phi(3) \approx 0$,

так как оба числа $\Phi(8)$, $\Phi(3)$ практически совпадают с 0,5.

В итоге плотность распределения с. в. $T \sim N(4;\ 0{,}5)$ имеет точку максимума $x = 4$ и практически вся сосредоточена в отрезке $[2{,}5;\ 5{,}5] = [4 - 3 \cdot 0{,}5;\ 4 + 3 \cdot 0{,}5] = [a - 3\sigma;\ a + 3\sigma]$ (рис. 152); это так называемое *правило «трёх сигм»*.

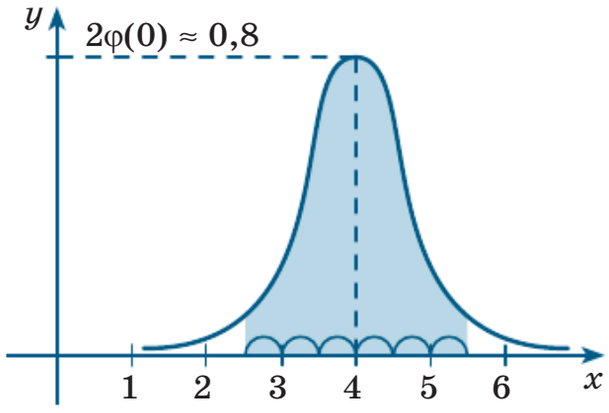


Рис. 152

В заключение отметим, что для случайной величины $T \sim N(a;\ \sigma)$ числа a и σ — это её основные числовые характеристики. А именно: математическое ожидание $M(T)$ равно a, а дисперсия $D(T)$ равна σ^2, т. е. $\sigma = \sqrt{D(T)}$ — её среднее квадратическое отклонение.

Упражнения

26.1. Случайная величина T равномерно распределена на отрезке $[1;\ 3]$. Найдите вероятность:

а) $P(0 \leqslant T \leqslant 4)$;
б) $P(5 \leqslant T \leqslant 6)$;
в) $P(1 \leqslant T \leqslant 2)$;
г) $P(2 \leqslant T \leqslant 3)$;
д) $P(2{,}5 \leqslant T \leqslant 3)$;
е) $P(0 \leqslant T \leqslant 1{,}1)$.

26.2. Случайная величина R равномерно распределена на отрезке $[-3;\ 2]$. Найдите вероятность:

а) $P(-3 < R < 2)$;
б) $P(R = 0)$;
в) $P(0 < R < 1)$;
г) $P(R < -1)$;
д) $P(-2 < R)$;
е) $P(R^2 < 1)$.

26.3. Случайная величина S равномерно распределена на отрезке $[1;\ a]$, $a > 1$. Найдите все значения a, при которых:

а) $P(1 \leqslant S \leqslant 2) = 0{,}5$;
б) $P(1 \leqslant S \leqslant 2) = 0{,}25$;
в) $P(1 \leqslant S \leqslant 2) = 0{,}05$;
г) $P(1 \leqslant S \leqslant 2) = 0{,}999$;
д) $P(2 \leqslant S \leqslant 3) = 1$;
е) $P(2 \leqslant S \leqslant 3) = 0$.

На рисунке 153 представлен график плотности $y = p(x)$ распределения случайной величины T.

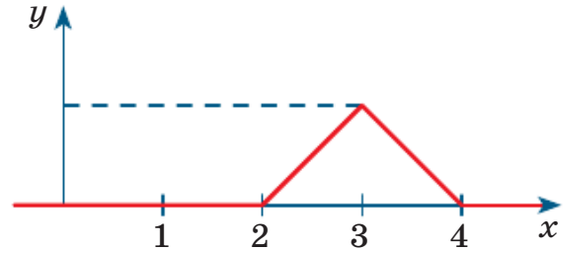


Рис. 153

26.4. Найдите:

а) $p(2)$; г) $p(2{,}5)$;
б) $p(4)$; д) $p(3{,}75)$;
в) $p(3)$; е) $p(2{,}01)$.

26.5. Найдите:

а) $P(2 \leqslant T \leqslant 4)$; в) $P(2 \leqslant T \leqslant 3)$; д) $P(2 \leqslant T \leqslant 3{,}5)$;
б) $P(T = 4)$; г) $P(2 \leqslant T \leqslant 2{,}9)$; е) $P(2{,}3 \leqslant T \leqslant 3{,}4)$.

26.6. Непрерывная функция $y = p(x)$ плотности распределения случайной величины R равна нулю вне отрезка $[0; 5]$, постоянна на отрезке $[1; 3]$ и линейна на отрезках $[0; 1]$ и $[3; 5]$. Выполните задание:

а) постройте её график;
б) задайте её уравнением на отрезке $[3; 5]$;
в) найдите вероятность $P(0 \leqslant R \leqslant 2)$;
г) найдите вероятность $P(1 \leqslant R \leqslant 3)$;
д) найдите вероятность $P(2 \leqslant R \leqslant 5)$;
е) найдите число a, для которого $P(0 \leqslant R \leqslant a) = 0{,}5$.

26.7. Непрерывная функция $y = p(x)$ плотности распределения случайной величины U равна нулю вне отрезка $[1; 3]$ и является квадратичной на отрезке $[1; 3]$. Для функции $y = p(x)$ выполните задание:

а) найдите $p(1)$;
б) постройте её график;
в) задайте её уравнением на отрезке $[1; 3]$;
г) найдите вероятность $P(1 \leqslant U \leqslant 3)$;
д) найдите вероятность $P(-3 \leqslant U \leqslant 2)$;
е) найдите вероятность $P(U < 1{,}5)$.

26.8. Функция $y = p(x)$ плотности распределения случайной величины W равна нулю вне интервала $(0; 4)$, постоянна на полуинтервале $[0; 2)$, постоянна на отрезке $[2; 4]$, и $P(1 \leqslant W \leqslant 4) = 0{,}8$. Для функции $y = p(x)$ выполните задание:

а) найдите $p(1{,}99)$;
б) постройте её график;
в) найдите число a, для которого $P(0 \leqslant W \leqslant a) = 0{,}6$;
г) найдите вероятность $P(2 \leqslant W \leqslant 4)$;
д) найдите вероятность $P(3 \leqslant W \leqslant 10)$;
е) постройте график функции $g(x) = P(W \leqslant x)$.

Для выполнения упражнений **26.9—26.15** используйте таблицу значений функции Лапласа $y = \Phi(x)$ (см. приложение, с. 256).

26.9. Найдите:
а) $\Phi(0)$; в) $\Phi(1)$; д) $\Phi(2)$;
б) $\Phi(0{,}5)$; г) $\Phi(1{,}5)$; е) $\Phi(2{,}5)$.

26.10. Найдите:
а) $\Phi(0{,}12)$; в) $\Phi(0{,}56)$; д) $\Phi(1{,}78)$;
б) $\Phi(-0{,}34)$; г) $\Phi(-0{,}78)$; е) $\Phi(-2{,}88)$.

26.11. Вычислите, на сколько число $\Phi(c)$ меньше числа $\Phi(d)$, если:
а) $c = 0{,}3$, $d = 1{,}3$; г) $c = -0{,}4$, $d = 1{,}4$;
б) $c = 0{,}2$, $d = 2{,}2$; д) $c = -0{,}6$, $d = 1{,}55$;
в) $c = 0{,}08$, $d = 2{,}88$; е) $c = -1{,}3$, $d = 2{,}4$.

26.12. Для случайной величины S со стандартным нормальным распределением $S \sim N(0; 1)$ по графику функции её плотности сравните вероятности и в ответе укажите меньшую из них:
а) $P(S \leqslant 0)$ и $P(S \leqslant 0{,}1)$;
б) $P(-1 \leqslant S \leqslant 1)$ и $P(-2 \leqslant S \leqslant 2)$;
в) $P(-3 \leqslant S \leqslant 1)$ и $P(-2 \leqslant S \leqslant 2)$;
г) $P(S \geqslant 0)$ и $P(S \geqslant 0{,}2)$;
д) $P(S = 0)$ и $P(S < -1000)$;
е) $P(-2 \leqslant S \leqslant 0)$ и $P(-1 \leqslant S \leqslant 1)$.

26.13. Для случайной величины S со стандартным нормальным распределением $S \sim N(0; 1)$ найдите:
а) $P(0 \leqslant S \leqslant 1)$; г) $P(-1{,}5 \leqslant S \leqslant -0{,}5)$;
б) $P(1 \leqslant S \leqslant 2)$; д) $P(-3 \leqslant S \leqslant 1{,}3)$;
в) $P(-2 \leqslant S \leqslant 1)$; е) $P(-0{,}11 \leqslant S \leqslant 0{,}22)$.

26.14. Найдите вероятности для нормально распределённой случайной величины:
а) $P(0 \leqslant T \leqslant 1)$, $T \sim N(0; 2)$;
б) $P(1 \leqslant T \leqslant 4)$, $T \sim N(0; 2)$;
в) $P(-1 \leqslant R \leqslant 6)$, $R \sim N(3; 2)$;
г) $P(1 \leqslant R \leqslant 7)$, $R \sim N(3; 2)$;
д) $P(-3 \leqslant Q \leqslant -2)$, $Q \sim N(-2{,}5; 0{,}5)$;
е) $P(Q \leqslant -1{,}5)$, $Q \sim N(-2{,}5; 0{,}5)$.

26.15. Для следующих нормально распределённых случайных величин найдите вероятность того, что их значения окажутся в отрезке $[0; 1]$:
а) $N(0; 1)$; в) $N(1; 1)$; д) $N(3; 2)$;
б) $N(0; 2)$; г) $N(-1; 1)$; е) $N(10; 2)$.

Упражнения для повторения

26.16. На рисунке 154 изображён график функции $y = f(x)$ и касательные к нему, проведённые в точках x_1, x_2, x_3, x_4.

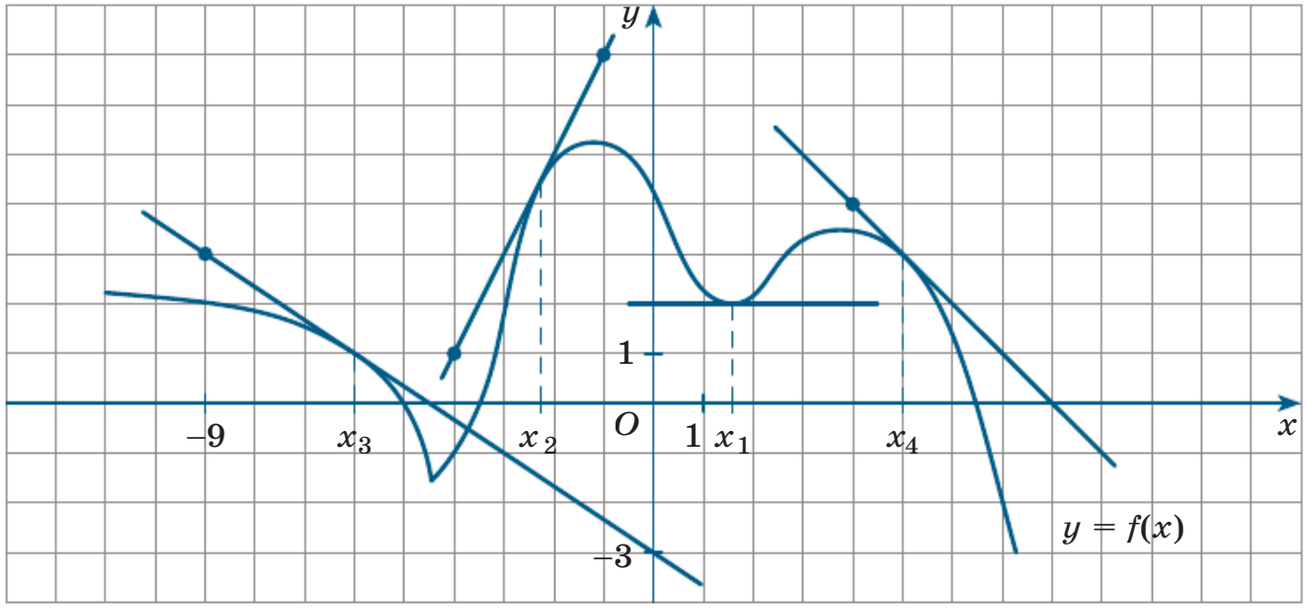


Рис. 154

Найдите:
а) значение производной в точке x_1;
б) тангенс угла наклона касательной в точке x_2;
в) угловой коэффициент касательной в точке x_3;
г) угол наклона касательной в точке x_4.

26.17. На рисунке 155 изображён график производной функции $y = g(x)$.

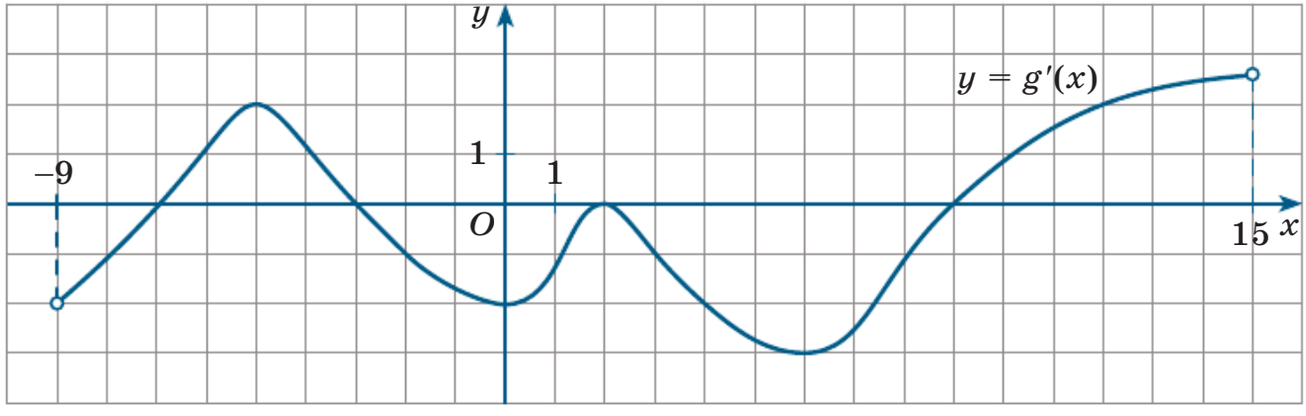


Рис. 155

С помощью графика найдите значения x, в которых касательная к графику функции $y = g(x)$ параллельна прямой:
а) $y = 3$; б) $y = -2$; в) $y = 2x + 5$; г) $y = -x + 1$.

26.18. а) Найдите наименьшее значение функции $y = 12x - 12\ln(x + 17) - 8$ на отрезке $[-16{,}5; -10]$.
б) Найдите наибольшее значение функции $y = 15\ln(x + 19) - 15x + 1$ на отрезке $[-18{,}9; -13]$.

26.19. Найдите значение выражения:
а) $15 \cdot 6^{2\log_6 4} + \log_3 54 - \log_3 2$;
б) $\log_{12} 3 + \log_{12} 48 - 10 \cdot 5^{3\log_5 2}$;
в) $4 \cdot 10^{\frac{2}{\log_5 10}} + \dfrac{\log_2 81}{\log_2 3}$;
г) $5 \cdot 3^{\frac{2}{\lg 3}} - \dfrac{\log_{0,5} 100}{\log_{0,5} 0{,}1}$.

26.20. Смешали 40%-ный и 90%-ный растворы лимонной кислоты, добавив 10 л чистой воды, и получили 60%-ный раствор кислоты. Если бы вместо 10 л воды добавили 10 л 50%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 72%-ный раствор кислоты. Сколько литров 40%-ного раствора использовали для получения смеси?

§ 27. Нормальные и биномиальные распределения. Законы больших чисел

Распространённость нормальных распределений среди всех других распределений обосновывается *центральной предельной теоремой* и её вариантами, основные из которых были получены российскими математиками П. Л. Чебышёвым, А. А. Марковым, А. М. Ляпуновым в конце XIX — начале XX в.

В описательном виде эта теорема утверждает следующее.

Распределение суммы n независимых случайных величин, удовлетворяющих некоторым ограничениям[1], становится при неограниченном возрастании n всё более похожим на нормальное распределение.

[1] Например, условиям Ляпунова.

При этом сами эти ограничения носят весьма общий характер и выполняются в очень многих случаях. Ситуация в целом поразительная: слагаемые могут быть почти что любыми, а вот их сумма (при неограниченном увеличении числа слагаемых) распределена практически по нормальному закону. Данный факт также является иллюстрацией справедливости *закона больших чисел*.

Мы ограничимся одним частным, но весьма важным случаем применимости центральной предельной теоремы. А именно, схемой Бернулли и биномиальным распределением вероятности.

Напомним, что схема Бернулли (или испытания Бернулли) — это серия из нескольких независимых повторений одного и того же испытания с двумя исходами «успех» и «неудача». Вероятность наступления ровно k «успехов» в n испытаниях Бернулли находится по формуле

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где p и $q = 1 - p$ — вероятности соответственно «успеха» и «неудачи» в одном испытании.

Вероятности $P_n(k)$ распределены по *биномиальному* закону распределения. А именно число k «успехов» принимает значения 0, 1, 2, …, n со следующими вероятностями:

Число «успехов»	0	1	…	k	…	$n-1$	n
Вероятность	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	p^n

Это распределение вероятности называют биномиальным, потому что числа из второй строки этой таблицы соответственно равны слагаемым в биноме Ньютона:

$$1 = (q + p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p^1 + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + \\ + C_n^k q^{n-k} p^k + \ldots + C_n^{n-1} q^1 p^{n-1} + C_n^n q^0 p^n.$$

Подчеркнём, что независимость здесь — ключевой момент: при последовательном и независимом проведении, скажем, двух испытаний вероятность того, что в первом из них наступит событие A, а во втором — событие B, равна произведению $P(A) \cdot P(B)$ вероятностей этих событий. Без условия независимости не получатся ни формула Бернулли, ни биномиальное распределение.

Пример 1 Вероятность того, что биатлонист попадёт на рубеже во все пять мишеней, оценивается в 80 %. Оценить вероятность того, что в индивидуальной гонке[1] биатлонист:

а) ни разу не промахнётся;

б) промахнётся только на одном рубеже;

в) промахнётся на половине рубежей;

г) не промахнётся только на одном рубеже.

Решение. В данном случае $n = 4$ — число рубежей, $p = 0{,}8$ — вероятность «успеха», т. е. вероятность попадания во все мишени на рубеже, $q = 0{,}2$ — вероятность «неудачи».

а) Здесь $k = 4$ и по формуле Бернулли получаем:

$$P_n(k) = P_4(4) = C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 = p^4 = 0{,}8^4 = 0{,}4096;\ \text{примерно } 41\,\%.$$

б) Промахнуться только на одном рубеже — это значит, что в четырёх повторениях мы имеем три «успеха» и одну «неудачу». Значит,

$$P_n(k) = P_4(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^1 = 4p^3q = 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096.$$

Ответ совпал с ответом из пункта «а», но это случайность: такими оказались числовые данные.

в) В этом случае имеем 2 «успеха» и 2 «неудачи», значит,

$$P_n(k) = P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = 6(pq)^2 = 6 \cdot 0{,}16^2 = 0{,}1536.$$

г) $P_n(k) = P_4(1) = C_4^1 \cdot p^1 \cdot q^3 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256.$

Абсолютная точность ответа, который даёт формула Бернулли, есть её несомненное достоинство. Но, к сожалению, ответ получается крайне сложным для практического применения. Представьте, что предстоит вычислить, скажем, $\frac{20!}{11! \cdot 9!} \cdot 0{,}23^{11} \cdot 0{,}77^9$ или $\frac{100!}{27! \cdot 73!} \cdot 0{,}7^{27} \cdot 0{,}3^{73}$.

Значит, для реальных приложений при больших n необходимы способы *приближённых вычислений* в формуле Бернулли. Такие способы есть и, пожалуй, основной из них как раз и связан с гауссовой функцией $y = \varphi(x)$ и функцией Лапласа $y = \Phi(x)$, которые появились в науке (XVIII в.) как ответ на вопрос о приближённых вычислениях в формуле Бернулли.

Для серии из n испытаний Бернулли обозначим k_1 число «успехов» в первом испытании, k_2 — число «успехов» во втором испыта-

[1] В этой гонке четыре стрелковых рубежа.

нии, ..., k_n — число «успехов» в последнем испытании. Тогда сумма $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ — это общее число k «успехов» во всей серии. Каждое из слагаемых k_1, k_2, ..., k_n — это дискретная случайная величина, принимающая значение 0 или 1. Таблицы распределения у всех слагаемых одинаковы:

Число «успехов»	0	1
Вероятность	q	p

У всех слагаемых одно и то же математическое ожидание, равное p, и одна и та же дисперсия, равная pq, а у их суммы $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ математическое ожидание и дисперсия равны соответственно np и npq. Оказывается, что для независимых слагаемых k_1, k_2, ..., k_n выполнены ограничения из центральной предельной теоремы. Значит, по этой теореме распределение суммы $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ при неограниченном возрастании n приближается к нормальному закону.

Для чисел $a < b$ вероятность $P_n(a \leqslant k \leqslant b)$ того, что количество k «успехов» в n испытаниях Бернулли не меньше a и не больше b, вычисляют по формуле

$$P_n(a \leqslant k \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Напомним, что $y = \Phi(x)$ — функция Лапласа, таблицу значений которой можно найти в приложении (см. с. 256). Вопрос о том, начиная с каких именно n это приближение даёт приемлемую точность, весьма сложен. Обычно ограничиваются рекомендацией о проверке справедливости неравенства $npq > 10$. В частности, при $p = 0{,}5 = q$ оно равносильно неравенству $n > 40$, а при $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$ — неравенству $n > 62{,}5$. Коротко: приемлемая точность приближения достигается при нескольких десятках, сотнях (или тысячах) повторений испытания.

Пример 2 Политика поддерживает в среднем 60 % населения. Какова вероятность того, что из 600 случайно опрошенных людей этого политика поддерживают:

а) от 360 до 380 человек; б) не более 350 человек?

Решение. Проводят $n = 600$ повторений одного и того же опыта — получение ответа «да» или «нет» на вопрос о поддержке политика. Предполагается, что это независимые повторения и схема Бернулли тут применима. По условию $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, т. е. $np = 360$, $npq = 144 > 10$, $\sqrt{npq} = 12$.

а) Здесь $a = 360$, $b = 380$ и

$$P_{600}(360 \leqslant k \leqslant 380) \approx \Phi\left(\frac{380 - 360}{12}\right) - \Phi(0) \approx \Phi(1{,}67) \approx 0{,}4525.$$

б) Здесь указана только оценка сверху $k \leqslant 350$, $b = 350$. В качестве нижней границы всегда можно взять $a = 0$ и рассмотреть вероятность $P_{600}(0 \leqslant k \leqslant 350)$. Она приближённо равна

$$\Phi\left(\frac{350 - 360}{12}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 360}{12}\right) \approx \Phi(-0{,}83) - \Phi(-30).$$

Но в таблице для функции Лапласа $y = \Phi(x)$ нет отрицательных значений x. Как быть? Напомним, что функцию Лапласа $y = \Phi(x)$ для отрицательных аргументов доопределяют по нечётности, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (см. § 26).

Получаем:

$$P_{600}(0 \leqslant k \leqslant 350) \approx \Phi(-0{,}83) - \Phi(-30) = \Phi(30) - \Phi(0{,}83) \approx$$
$$\approx 0{,}5 - 0{,}2967 = 0{,}2033.$$

Пример 3 Вероятность рождения мальчика примем равной 50 %. Найти вероятность того, что среди 400 новорождённых будет:

а) ровно 200 мальчиков;

б) ровно 205 мальчиков.

Решение. Во-первых, и без вычислений ясно, что вероятность наступления точного равенства крайне невелика. Во-вторых, если приравнять $P_{400}(k = 200) = P_{400}(200 \leqslant k \leqslant 200)$ и попытаться применить формулу $P_n(a \leqslant k \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$, то в правой части приближённого равенства получится 0, так как $b = a$. В-третьих, необходимо отметить, что для вероятностей $P_n(k = d)$ есть способ подсчёта, основанный на таблице значений гауссовой функции $y = \varphi(x)$, а не функции $y = \Phi(x)$. Мы его рассматривать не будем, а покажем, как можно обойтись только функцией $y = \Phi(x)$, вводя так называемую *поправку на непрерывность*.

Для целого числа d вероятность $P_n(k = d)$ того, что количество k «успехов» в n испытаниях Бернулли равно d, вычисляют по формуле

$$P_n(k = d) \approx \Phi\left(\frac{d + 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{d - 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

а) По этой формуле получаем:

$$P_{400}(k = 200) \approx \Phi\left(\frac{200 + 0{,}5 - 200}{10}\right) - \Phi\left(\frac{200 - 0{,}5 - 200}{10}\right) =$$
$$= 2\Phi(0{,}05) = 2 \cdot 0{,}0199 \approx 0{,}04.$$

б) Ещё раз используем ту же формулу:

$$P_{400}(k = 205) \approx \Phi\left(\frac{205{,}5 - 200}{10}\right) - \Phi\left(\frac{204{,}5 - 200}{10}\right) =$$
$$= \Phi(0{,}55) - \Phi(0{,}45) \approx 0{,}2088 - 0{,}1736 \approx 0{,}0252.$$

Следствиями центральной предельной теоремы (теорем) являются различные варианты закона больших чисел. В учебниках для 9—10-х классов мы уже рассказывали о явлении *статистической устойчивости*. Оно заключается в практическом совпадении теоретического и статистического определений вероятности случайного события.

Допустим, что имеется возможность неограниченно повторять некоторое испытание и наблюдать наступление (или ненаступление) события A, вероятность $P(A)$ которого нам неизвестна, а известные нам теоретические сведения никак не дают ответа. Как найти $P(A)$? Рассмотрим наше испытание как испытание Бернулли, а его повторения — как схему Бернулли. «Успех» — наступление события A, вероятность p «успеха» равна $P(A)$. Проведём $n = 10, 20, 30, \ldots, 100, \ldots$ повторений и всякий раз будем вычислять частоту $\frac{k}{n}$ наступления события A, т. е. частоту наступления «успеха». Закон больших чисел гарантирует нам, что чем больше будет проведено повторений, тем точнее будет приближение $\frac{k}{n} \approx p$: вероятность заметной ошибки в этом приближении стремится к нулю с ростом n.

Закон больших чисел (в форме Бернулли). При неограниченном увеличении n частота $\frac{k}{n}$ наступления «успеха» в n испытаниях Бернулли практически совпадает с вероятностью p «успеха» в одном испытании.

Для обоснования закона больших чисел (ЗБЧ) используем формулы приближённых вычислений с помощью функции Лапласа $y = \Phi(x)$. Оценим вероятность того, что отклонение $\left|\frac{k}{n} - p\right|$ окажется не больше некоторого фиксированного числа $t > 0$. Неравенство $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant t$ заменим равносильным ему двойным неравенством $-tn \leqslant k - np \leqslant tn$ или $np - tn \leqslant k \leqslant np + tn$. Имеем:

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant t\right) = P_n(np - tn \leqslant k \leqslant np + tn) \approx$$

$$\approx 2\Phi\left(\frac{tn}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}\right).$$

В произведении $\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}$ сомножитель $\frac{t}{\sqrt{pq}}$ постоянен, а сомножитель $\sqrt{n}$ неограниченно возрастает. Значит, возрастает само произведение, и как только оно станет больше, скажем, 3, то значение $2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}\right)$ превысит 0,997. А если $\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}$ станет больше 5, то значение $2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}\right)$ превысит 0,999999. Значит, событие «$\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant t$» становится практически достоверным при неограниченном увеличении n: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant t\right) = 1$.

Пример 4 Насколько большим должно быть число n повторений испытания Бернулли для того, чтобы с вероятностью более 95 % можно было утверждать, что погрешность приближения $\frac{k}{n} \approx p$ не превышает 0,05, если вероятность p «успеха» равна 0,2?

Решение. По условию $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant 0{,}05$ или $|k - np| \leqslant 0{,}05n$, т. е. число k «успехов» должно находиться в пределах от $np - 0{,}05n$ до

$np + 0{,}05n$. Вероятность этого события находим приближённо, с учётом $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $\sqrt{pq} = 0{,}4$:

$$P_n(np - 0{,}05n \leqslant k \leqslant np + 0{,}05n) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{0{,}05n}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{0{,}05n}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}05n}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right).$$

По условию требуется, чтобы $2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right) \geqslant 0{,}95$, $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right) \geqslant 0{,}475$.

По таблице в приложении находим, что $0{,}475 \approx \Phi(1{,}96)$. Так как функция Φ возрастает, то получаем:

$$\frac{\sqrt{n}}{8} \geqslant 1{,}96, \quad \sqrt{n} \geqslant 15{,}68, \quad n \geqslant 245{,}8624.$$

Ответ: более 245 повторений.

Для реальных приложений абсолютная точность ответа в предыдущем примере представляется излишней. Вполне можно было бы сказать, что следует провести не менее 250 или даже 300 повторений.

Закон больших чисел является основой для *выборочного метода*, необходимого в различных социологических и статистических исследованиях. Например, для того чтобы оценить реальный рейтинг телеканала, вовсе не нужно опрашивать всех владельцев телевизоров (их десятки миллионов). При допустимой вероятности ошибки в несколько процентов можно сделать такой опрос лишь *выборочно*, для достаточно большого числа независимо опрашиваемых респондентов. Оказывается, для этого вполне достаточно взять выборку примерно в 2000 человек.

Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышёв доказал, что закон больших чисел имеет место не только для числа «успехов» в испытаниях Бернулли, но и, в значительно более общем виде, для последовательностей случайных величин. Открытие П. Л. Чебышёва основано на замечательном неравенстве, носящем его имя. Это неравенство верно для любой случайной величины S, у которой есть математическое ожидание $M(S)$ и дисперсия $D(S)$. Оно оценивает вероятность отклонения $|S - M(S)|$ случайной величины S от своего математического ожидания $M(S)$ через величину дисперсии $D(S)$.

Неравенство Чебышёва:

$$P\left(\left|S - M(S)\right| \leqslant t\right) \geqslant 1 - \frac{D(S)}{t^2}.$$

Например, если $t = 3\sigma = 3\sqrt{D(S)}$, то $P\left(\left|S - M(S)\right| \leqslant 3\sigma\right) \geqslant 1 - \frac{1}{9}$. Получается, что с вероятностью не менее чем 88,8 % совершенно *произвольная* с. в., а не только число «успехов», отклоняется от своего математического ожидания не более чем на 3σ (так называемое правило «трёх сигм»).

ЗБЧ (в форме Чебышёва) обосновывает хорошо известное экспериментальное правило «среднего». Например, пусть нужно измерить какой-то числовой показатель физического объекта. Его измеряют в первый раз, получают S_1. Затем в тех же условиях независимо измеряют его во второй раз, получают S_2 и т. д. Каждый раз возможны погрешности и результаты S_1, S_2, S_3, ... измерений несколько отличаются друг от друга. Но если взять их среднее арифметическое $\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$, то по ЗБЧ результат получится более надёжным: с ростом n практически несомненно, что отклонение $\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$ от истинного значения M не превысит заданной точности t.

Неравенство Чебышёва (для среднего арифметического):

$$P\left(\left|\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n} - M\right| \leqslant t\right) \geqslant 1 - \frac{C}{nt^2}$$

для независимых случайных величин S_1, S_2, ..., S_n с одинаковым математическим ожиданием M и дисперсиями, не превосходящими константы C.

Так как при фиксированных C и t и неограниченном возрастании числа n слагаемых дробь $\frac{C}{nt^2}$ стремится к нулю, то вероятность в левой части неравенства Чебышёва стремится к единице, т. е. практически достоверно, что абсолютная погрешность приближения $\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n} \approx M$ не превосходит t.

Упражнения

На столе стоят одинаковые по виду коробки. Среди них 5 пустых, 3 с призом и 2 с сюрпризом.

27.1. Наудачу выбирают две коробки. Какова вероятность того, что:
а) они обе пустые;
б) они обе не пустые;
в) одна из них пустая, а другая нет;
г) одна из них пустая, а другая — с сюрпризом;
д) они обе с призом;
е) в них нет сюрприза?

27.2. Наудачу выбирают три коробки. Какова вероятность того, что:
а) все они пустые;
б) все они не пустые;
в) одна из них пустая, одна с призом и одна с сюрпризом;
г) две из них пустые, а одна с призом;
д) одна пустая и две с сюрпризом;
е) в них нет сюрприза?

На столе стоят одинаковые по виду коробки. Среди них a пустых коробок, b коробок с призом и c коробок с сюрпризом.

27.3. Наудачу выбирают две коробки. Используя числа сочетаний, запишите, какова вероятность того, что:
а) они обе пустые;
б) они обе не пустые;
в) одна из них пустая, а другая нет;
г) одна из них пустая, а другая — с сюрпризом;
д) они обе с призом;
е) в них нет сюрприза.

27.4. Наудачу выбирают три коробки. Используя числа сочетаний, запишите, какова вероятность того, что:
а) все они пустые;
б) все они не пустые;
в) одна из них пустая, одна с призом и одна с сюрпризом;
г) две из них пустые, а одна с призом;
д) одна пустая и две с сюрпризом;
е) в них нет сюрприза.

27.5. Определите значения n, k, p, q и по формуле Бернулли выпишите (без вычислений) выражение для вероятности появления ровно:
а) 6 «орлов» при 16 бросаниях монеты;
б) 4 «решек» при 24 бросаниях монеты;
в) 99 нечётных чисел при 199 независимых выборах целых чисел от 0 до 9;
г) 50 чисел, кратных трём, при 500 независимых выборах целых чисел от 0 до 9;
д) 170 «неудач» при опросе 700 человек, произвольно называющих день недели, если считать «удачными» днями субботу и воскресенье;
е) 573 «удачных» из 735 бросаний кубика; «удачей» считаем выпадение 5 или 6 очков.

27.6. В приведённых формулах для подсчёта по формуле Бернулли есть пропуски (отмечены знаком ?). Заполните эти пропуски, если известно, что «успех» не менее вероятен, чем «неудача»:

а) $P_{60}(?) = C_?^6 \cdot 0{,}4^? \cdot ?^?$;
б) $P_?(?) = C_{34}^? \cdot 0{,}7^? \cdot ?^{28}$;
в) $P_?(5) = C_?^? \cdot 0{,}5^{55}$;
г) $P_{100}(10) = C_?^? \cdot 0{,}9^? \cdot ?^?$;
д) $P_?(?) = C_{33}^? \cdot ?^? \cdot 0{,}4^{22}$;
е) $P_{50}(?) = C_?^{45} \cdot 0{,}6^? \cdot ?^?$.

27.7. По значениям n и p из упражнения 27.5 «а»—«е» вычислите математическое ожидание $M_{\text{усп}}$ числа «удач» и математическое ожидание $M_{\text{неуд}}$ числа «неудач».

27.8. По значениям n и p из упражнения 27.5 «а»—«е» вычислите дисперсию и среднее квадратическое числа «удач».

В упражнениях **27.9**, **27.10** после успешного прохождения первого уровня компьютерной игры на мониторе запускается лотерейный барабан, в котором 2 белых и 8 чёрных одинаковых по размеру шаров. Если выпадает белый шар, то игрок переходит сразу на третий уровень и это — «успех». Если выпадает чёрный шар, то игрок переходит на второй уровень и это — «неудача». Требуется применить формулу $P_n(a \leqslant k \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$ для нахождения вероятности того, что число k «успехов» не менее чем a и не более чем b.

27.9. Найдите:
а) вероятность p «успеха»;
б) вероятность q «неудачи»;
в) среднее np для $n = 10\,000$ повторений;
г) среднее квадратическое $\sqrt{npq}$;
д) границы a и b при отклонении k от np не более чем на 40;
е) вероятность $P_n(a \leqslant k \leqslant b)$.

27.10. Для $n = 2500$ повторений найдите:
а) среднее np;
б) среднее квадратическое $\sqrt{npq}$;
в) вероятность $P_n(k \leqslant 700)$;
г) вероятность $P_n(k \leqslant 250)$;
д) вероятность $P_n(500 \leqslant k)$;
е) вероятность $P_n(450 \leqslant k \leqslant 550)$.

Вероятность рождения мальчика примем равной 50 %.

27.11. Найдите вероятность того, что девочек среди 10 000 новорождённых будет:
а) не более 4000;
б) не более 5000;
в) не более 6000;
г) от 4900 до 5000;
д) от 4950 до 5050;
е) от 4800 до 5100.

27.12. Найдите вероятность того, что мальчиков среди 100 новорождённых будет ровно:
а) 50; в) 51; д) 52;
б) 53; г) 60; е) 45.

В каждом из 150 контейнеров лежат 10 одинаковых по виду коробок, в 4 из которых — синие новогодние шары, а в 6 — красные. Из каждого контейнера наудачу выбирают одну коробку.

27.13. Найдите вероятность того, что коробок с синими шарами среди выбранных будет:
а) меньше 40;
б) меньше 80;
в) не больше 60;
г) не меньше 60;
д) от 54 до 66;
е) от 48 до 72.

27.14. По формуле $P_n(k = d) \approx \Phi\left(\frac{d + 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{d - 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$ найдите вероятность того, что коробок с синими шарами среди выбранных будет ровно:

а) 6; в) 136; д) 64;
б) 36; г) 60; е) 52.

Упражнения для повторения

27.15. Найдите точки экстремума функции:

а) $y = 0{,}2x^5 + 4x^3 - 13x$;
б) $y = e^{5-x}(x^2 - 8x + 8)$;
в) $y = x^2 - 3x + 3\ln(x + 1)$;
г) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 11$;
д) $y = e^{x-1}(x^2 - 3x + 3)$;
е) $y = x^2 + 5x + 14\ln(3 - x)$.

27.16. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном отрезке:

а) $y = (10 - x)e^{x-9}$, $[8; 10]$;
б) $y = 4x - \ln(x + 2)^4$, $[-1; 0]$;
в) $y = \cos 3x - 3x + \pi$, $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$;
г) $y = (x + 3)e^{2-x}$, $[-3; 2]$;
д) $y = \ln(x + 4)^3 - 3x$, $(-4; 0]$;
е) $y = 4x - \sin 4x + 1$, $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

ИКТ **27.17.** а) Постройте график функции

$$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$$

б) Найдите значения a, при которых уравнение

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = a$$

имеет ровно три корня.

27.18. а) Среднее квадратическое q трёх чисел x, y, z вычисляется по формуле $q = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}$. Найдите среднее квадратическое, если $x = 12$, $y = 64$, $z = 9$.

б) Среднее геометрическое g чисел k, l, m вычисляется по формуле $g = \sqrt[3]{klm}$. Найдите среднее геометрическое, если $k = 12$, $l = 63$, $m = 98$.

27.19. Клиент приобрёл за 30 000 р. акции предприятия, на котором он работает. Ежегодно стоимость акций возрастает на 4000 р. Клиент планирует через несколько лет продать акции и положить деньги в банк под 10 % годовых так, чтобы через 10 лет после приобретения акций получить максимальную прибыль. В конце какого года с момента приобретения акций клиенту целесообразно их продать и положить деньги в банк?

§ 28. Другие распределения случайных величин

В теории вероятностей насчитывается около двух десятков в той или иной степени классических типов распределения случайных величин. Кратко остановимся лишь на некоторых из них.

Геометрическое распределение

Сразу же отметим, что геометрия, как и геометрические вероятности, тут ни при чём. Своё название это распределение получило из-за непосредственной связи с *геометрической прогрессией*. Довольно часто используют также термин «повторения до первого успеха».

Пример 1 Повторяют бросания игрального кубика. Как только выпадает «шестёрка», повторения прекращают. Какова вероятность того, что для первого появления «шестёрки» потребуется:

а) одно бросание;

б) два бросания;

в) два или три бросания;

г) более трёх бросаний?

Решение. а) Условие «потребуется одно бросание» означает, что при первом же бросании выпадет «шестёрка». Вероятность этого события нам хорошо известна. Она равна $\frac{1}{6}$.

б) Условие «потребуется два бросания» означает, что в первый раз выпала не «шестёрка», а во второй раз выпала «шестёрка». Так как мы имеем дело с *независимыми* повторениями, то вероятность такого события находим как произведение $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

в) Аналогично вероятность события «потребуется три бросания» равна $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$. Тогда вероятность события «потребуется два или три бросания» равна $\frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{55}{216}$, так как она равна вероятности суммы двух несовместных событий «потребуется два бросания» и «потребуется три бросания».

г) Рассмотрим событие, противоположное событию «потребуется более трёх бросаний». Оно равно сумме трёх несовместных событий «потребуется одно бросание», «потребуется два бросания», «потребуется три бросания». Его вероятность равна $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{91}{216}$. Значит, искомая вероятность равна $\frac{125}{216}$.

Определение 1. Случайную величину G называют **геометрически распределённой**, если она принимает натуральные значения 1, 2, 3, ..., k, ... с вероятностями соответственно p, qp, q^2p, ..., $q^{k-1}p$, ... для некоторого фиксированного $0 < p < 1$ и $q = 1 - p$.

Таблица распределения значений геометрически распределённой с. в. выглядит так:

Значения с. в. G	1	2	3	4	...	k	...
Вероятность	p	qp	q^2p	q^3p	...	$q^{k-1}p$	...

Геометрическое распределение непосредственно связано с испытаниями Бернулли. Смотрите, пусть независимо повторяют испытание с исходами «успех» (У) и «неудача» (Н). Повторения прекращают,

как только наступает «успех». Перечислим исходы (элементарные события) таких повторений: У, НУ, ННУ, НННУ, ..., $\underbrace{\text{НН...У}}_{k}$, ... Вероятность первого исхода известна по условию $P(\text{У}) = p$. Вероятность второго исхода находим с учётом независимости

$$P(\text{НУ}) = P(\text{Н})P(\text{У}) = qp \text{ и т. д.;}$$

$$P\left(\underbrace{\text{НН...У}}_{k}\right) = \underbrace{P(\text{Н})P(\text{Н})...P(\text{У})}_{k} = q^{k-1}p.$$

Пример 2 Вероятность p того, что при одной попытке «получится», равна 7 %. Какова вероятность того, что «мучиться», чтобы наконец «получилось», придётся не более 50 раз?

Решение.

$$P\left(\text{У} + \text{НУ} + \text{ННУ} + ... + \underbrace{\text{НН...У}}_{50}\right) = p + qp + q^2p + ... + q^{49}p =$$

$$= p(1 + q + q^2 + ... + q^{49}) = \frac{p}{1-q} \cdot (1 - q^{50}) = 1 - 0{,}93^{50} \approx 0{,}973.$$

Вероятность более 97 %. И впрямь, «если долго мучиться, что-нибудь получится»!

Распределение Пуассона[1]

Как мы уже знаем, формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ вероятности наступления ровно k «успехов» верна, но не всесильна: в практических приложениях приходится использовать её приближённые версии. Наиболее известный способ приближённых вычислений — использование функции Лапласа и нормального распределения (см. § 26). Однако при $D = npq < 10$ точность этого приближения ухудшается и ухудшается тем заметнее, чем меньше становится дисперсия. Распределение Пуассона используют именно в таких случаях.

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!}e^{-a}, a = np.$$

[1] Говорят и «пуассоновское распределение». Одно из высказываний *Симона Пуассона* (1781—1840) цитируют очень часто: «Жизнь прекрасна благодаря двум вещам — изучению математики и её преподаванию».

Приемлемая точность указанного приближения достигается, когда n велико, а n и p обратно пропорциональны: $p = \frac{a}{n}$. На практике рассматривают случаи, когда n — это несколько тысяч, вероятность успеха составляет единицы процентов (т. е. несколько сотых), а коэффициент a — величина в пределах 10.

Пример 3 По статистическим данным при производстве однотипных изделий брак оценивается в среднем как одно бракованное изделие из 500 штук. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 изделий будет:

а) ровно три бракованных изделия;

б) более двух бракованных изделий.

Решение. Здесь непривычно выглядит «успех» — событие, состоящее в том, что случайным образом выбранное изделие окажется бракованным. По условию вероятность p «успеха» весьма мала, она равна $1 : 500 = 0{,}002$.

а) Требуется оценить вероятность того, что при выборе $n = 1000$ изделий будет 3 «успеха», т. е. найти $P_{1000}(3) = C_{1000}^3 \cdot 0{,}002^3 \cdot 0{,}998^{997}$. Современные калькуляторы (или PC-редакторы) делают не слишком сложным этот, ранее чрезвычайно громоздкий, подсчёт. Получается примерно 0,18063. Более краткий путь даёт пуассоновское приближение при $a = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$. Получаем:

$$P_{1000}(3) \approx \frac{2^3}{3!}e^{-2} \approx \frac{4}{3} \cdot 0{,}1353 \approx 0{,}18.$$

Мы видим, что вычисления существенно проще, а возможная ошибка не превышает сотых долей процента.

б) Действуем через вероятность противоположного события «не более двух бракованных изделий», которую найдём как вероятность суммы трёх несовместных событий — «ноль бракованных изделий», «одно бракованное изделие», «два бракованных изделия». Получаем:

$$1 - \left(P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)\right) \approx 1 - \left(\frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2}\right) =$$

$$= 1 - e^{-2}(1 + 2 + 2) \approx 0{,}32.$$

Результат в определённой степени неожиданный: примерно в трети случаев при таких выборках количество брака превысит среднее ожидаемое значение $1000 \cdot 0{,}002 = 2$.

Определение 2. Случайную величину называют **распределённой по Пуассону**, если она принимает значения 0, 1, 2, 3, ..., k, ... с вероятностями соответственно e^{-a}, ae^{-a}, $\frac{a^2}{2!}e^{-a}$, $\frac{a^3}{3!}e^{-a}$, ..., $\frac{a^k}{k!}e^{-a}$, ... для некоторого положительного a.

Таблица распределения значений с. в., распределённой по Пуассону, выглядит так:

Значения с. в.	0	1	2	3	...	k	...
Вероятность	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$	$\frac{a^3}{3!}e^{-a}$	...	$\frac{a^k}{k!}e^{-a}$	...

Пуассоновское распределение имеет ряд замечательных свойств, аккуратное изложение которых явно выходит за рамки школьной программы. Например, и математическое ожидание, и дисперсия этого распределения равны параметру a из таблицы распределения. Отметим также, что, кроме приближения биномиального распределения, оно является базовым в *теории массового обслуживания* при изучении вероятностных свойств стационарных (постоянной интенсивности) потоков событий, в которых уже произошедшее прошлое потока не влияет на его будущее.

Показательное (экспоненциальное) распределение

Геометрическое и пуассоновское распределения — это распределения дискретных случайных величин, множество значений которых бесконечно. Показательное распределение — это распределение непрерывной случайной величины, оно является непрерывным аналогом геометрического распределения.

Приведём наглядное обоснование. Для этого сначала построим многоугольник распределения вероятностей для геометрического распределения; проще говоря, таблицу распределения:

Значения с. в.	1	2	3	4	...	k	...
Вероятность	p	qp	q^2p	q^3p	...	$q^{k-1}p$	...

переведём в график (рис. 156).

Значения $P(G = k) = q^{k-1}p$ убывают при возрастании k; более того, каждое следующее значение $P(G = k + 1) = q^kp$ получается из предыдущего умножением на константу q. В показательном распре-

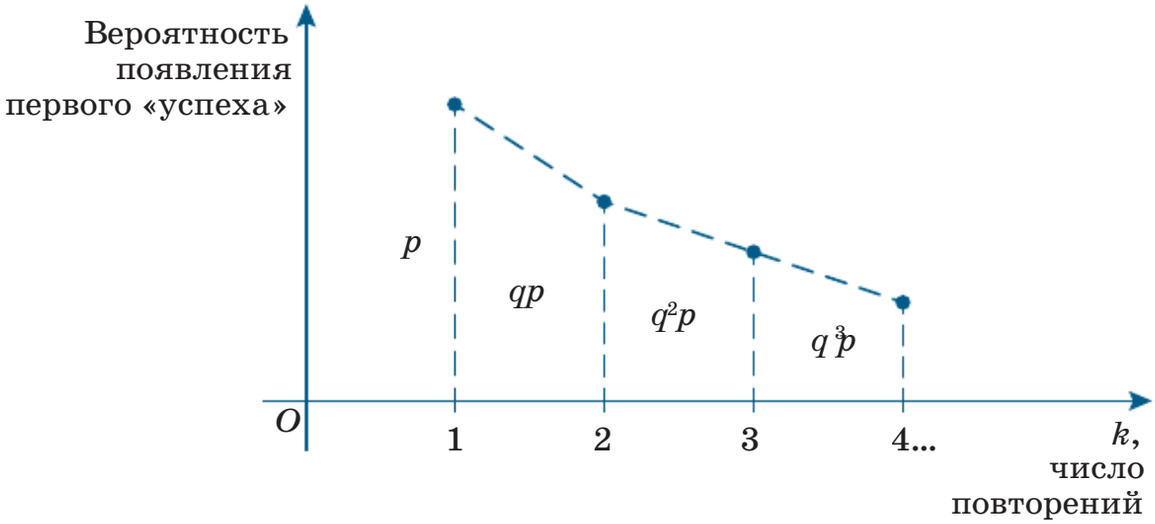


Рис. 156

делении значения функции плотности $p(x)$ аналогичным образом убывают при возрастании аргумента с произвольным шагом h: последовательность значений $p(x)$, $p(x + h)$, $p(x + 2h)$, $p(x + 3h)$, ... образует убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой зависит только от h.

Определение 3. Случайной величиной с показательным распределением называют с. в., плотность которой задана равенством $p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \end{cases}$ где $\lambda > 0$ — фиксированный параметр распределения (рис. 157).

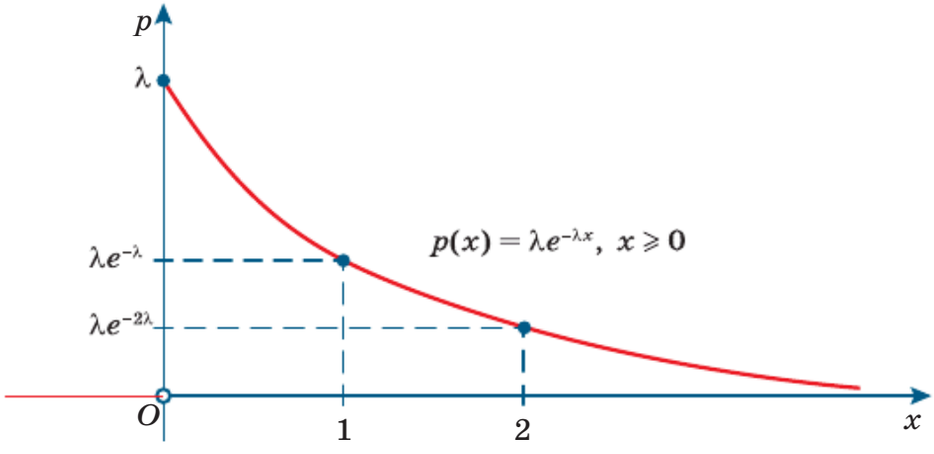


Рис. 157

Типичный пример показательного распределения — время T безотказной работы прибора, устройства, лампочки, машины от начала эксплуатации до первой поломки, перегорания, отказа двигателя и т. п. В таком случае вероятность $P(T \leqslant c)$ равна вероятности выхода устройства из строя не позже времени c. Соответственно, вероятность $P(T \geqslant c)$ характеризует *надёжность* устройства. Она равна вероятности того, что устройство будет работать безотказно в течение времени от начала работы до c.

Теорема. $P(T \leqslant c) = 1 - e^{-\lambda c}$, $P(T \geqslant c) = e^{-\lambda c}$.

Доказательство. Вычислим вероятности, интегрируя функцию плотности. Напомним, что $P(a \leqslant T \leqslant b) = \int\limits_a^b p(x)\,dx$. При отрицательных a и b эта вероятность равна нулю, так как равна нулю функция плотности. Значит,

$$P(T \leqslant c) = P(0 \leqslant T \leqslant c) = \int\limits_0^c p(x)dx = \int\limits_0^c \lambda e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Bigg|_0^c = -(e^{-\lambda c} - 1) = 1 - e^{-\lambda c}.$$

Событие $T > c$ противоположно событию $T \leqslant c$. Поэтому $P(T > c) = 1 - (1 - e^{-\lambda c}) = e^{-\lambda c}$, а так как $P(T = c) = \int\limits_c^c p(x)dx = 0$, то и $P(T \geqslant c) = e^{-\lambda c}$.

Определение 4. Функцию $R(x) = P(T \geqslant x)$ называют **функцией надёжности**. Для с. в. с показательным распределением $R(x) = e^{-\lambda x} = a^x$ — убывающая показательная функция, $a = e^{-\lambda} < 1$.

Оказывается, вероятность безотказной работы в течение времени x не зависит от момента начала отсчёта этого времени: можно отсчитывать от $x = 0$, а можно и от любого другого момента $x = x_0$.

Следствие. Условная вероятность события $T \geqslant x + x_0$ при условии $T \geqslant x_0$ равна вероятности события $T \geqslant x$.

Доказательство.

$$P\big((T \geqslant x + x_0) / (T \geqslant x_0)\big) = \frac{P\big((T \geqslant x + x_0) \cdot (T \geqslant x_0)\big)}{P(T \geqslant x_0)} = \frac{P(T \geqslant x + x_0)}{P(T \geqslant x_0)} =$$

$$= \frac{a^{x + x_0}}{a^{x_0}} = a^x = P(T \geqslant x).$$

Отметим, что можно было действовать в обратном порядке. А именно: с самого начала предположить, что функция надёжности удовлетворяет условию следствия[1], получить отсюда тождество $R(x + x_0) = R(x)R(x_0)$, после чего вывести, что $R(x) = a^x$ — показательная функция при $x \geqslant 0$.

В университетских курсах теории вероятностей доказывают, что математическое ожидание $M(T)$ с. в. T с показательным распределением и параметром $\lambda > 0$ равно $\frac{1}{\lambda}$ — это среднее время безотказной работы устройства.

Пример 4 В гарантийном талоне устройства указан средний срок его безотказной работы — 5000 ч. Считая, что время безотказной работы имеет показательное распределение, найти вероятность того, что устройство сломается:

а) за первые 2000 ч; б) за первые 4000 ч; в) за первые 6000 ч.

Решение. а) Так как мы имеем дело с показательным распределением, то функция надёжности задаётся равенством $R(x) = P(T \geqslant x) = e^{-\lambda x}$. По условию $M(T) = \frac{1}{\lambda} = 5000$, $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$. Значит, $P(T \leqslant 2000) = 1 - e^{-2000\lambda} = 1 - e^{-0,4} \approx 0,33$. Вероятность весьма велика. Указанный средний срок безотказной работы действительно *средний*. С вероятностью более чем 30 % устройство сломается в первые 40 % времени от указанного срока.

б) Аналогично $P(T \leqslant 4000) = 1 - e^{-0,8} \approx 0,55$. Больше половины таких устройств не «доживут» до среднего срока.

в) Аналогично $P(T \leqslant 6000) = 1 - e^{-1,2} \approx 0,7$. Около 30 % таких устройств будут безотказно работать на 20 % времени дольше среднего срока.

Упражнения

28.1. Монету подбрасывают до первого выпадения «орла». Какова вероятность того, что потребуется:

а) одно бросание;
б) два бросания;
в) одно или два бросания;
г) три бросания;
д) четыре бросания;
е) более четырёх бросаний?

[1] Условие следствия часто формулируют в терминах разговорной речи как «эффект отсутствия памяти».

28.2. Пару монет разного достоинства подбрасывают до первого выпадения двух «решек». Какова вероятность того, что потребуется:
а) одно бросание;
б) два бросания;
в) не более двух бросаний;
г) три бросания;
д) четыре бросания;
е) более трёх бросаний?

28.3. Игральный кубик подбрасывают до первого выпадения шести очков. Какова вероятность того, что потребуется:
а) более одного бросания;
б) три бросания;
в) не одно и не три бросания;
г) одно или три бросания;
д) не менее двух бросаний;
е) не три и не четыре бросания?

28.4. Из набора домино берут одну доминошку. Если это не «дубль», то её возвращают обратно и снова берут одну доминошку. Если это «дубль», то повторения прекращают. Для с. в. G «выбор до первого появления дубля»:
а) укажите вероятность «успеха» и вероятность «неудачи»;
б) вычислите вероятность события «$G = 2$»;
в) вычислите вероятность события «$G = 3$»;
г) составьте таблицу распределения;
д) проверьте, что сумма вероятностей во второй строке таблицы действительно равна 1;
е) найдите наименьшее значение k, при котором вероятность события «$G = k$» меньше 0,01.

28.5. Вероятность попадания в мишень у стрелка считается равной 0,9 и неизменной в сериях выстрелов. Для с. в. G «выстрелы до первого промаха»:
а) укажите вероятности «успеха» и «неудачи»;
б) вычислите вероятность события «$G = 3$»;
в) вычислите вероятность события «$G = 4$»;
г) составьте таблицу распределения;
д) проверьте, что сумма вероятностей во второй строке таблицы действительно равна 1;
е) найдите наименьшее значение k, при котором вероятность события «$G = k$» меньше 0,05.

28.6. По таблице геометрического распределения найдите выражение для вероятности:

а) $P(G = 3)$;
б) $P(G = 36)$;
в) $P(G < 3)$;
г) $P(G \geqslant 4)$;
д) $P(G$ — нечётно);
е) $P(G$ — чётно).

28.7. Проверьте, что для с. в. G с геометрическим законом распределения:

а) математическое ожидание $M(G)$ равно

$$p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + 5q^4p + \ldots;$$

б) $$p + qp + q^2p + q^3p + q^4p + \ldots = p(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) =$$
$$= p\frac{1}{1-q} = 1;$$

в) $$0 + qp + q^2p + q^3p + q^4p + \ldots = qp(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) =$$
$$= qp\frac{1}{1-q} = q;$$

г) $$0 + 0 + q^2p + q^3p + q^4p + \ldots = q^2p(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) =$$
$$= q^2p\frac{1}{1-q} = q^2 \text{ и т. д.;}$$

д) если сложить левые части равенств из пунктов «б»—«г» и т. д., то получится $p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + 5q^4p + \ldots$;

е) $M(G) = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$.

28.8. Вероятность пропажи одной коробки при транспортировке в общей партии из большого числа коробок оценивается в 0,4 %. Оцените вероятность того, что при транспортировке 1000 партий товара пропадёт:

а) ноль коробок;
б) одна коробка;
в) не более двух коробок;
г) две коробки;
д) не одна коробка;
е) более трёх коробок.

28.9. Телефонная компания оценивает вероятность нарушения сигнала при исходящем звонке абонента в 0,2 %. Найдите вероятность того, что на 1000 исходящих звонков абонентов компании пришлось:

а) ноль сбоев сигнала;
б) два сбоя;
в) не более двух сбоев;
г) 4 сбоя;
д) не ноль и не два сбоя;
е) более трёх сбоев.

28.10. Тираж учебника по теории вероятностей составляет 10 000 экземпляров. Вероятность полиграфического брака на обложке равна 0,03 %. Найдите вероятность того, что в тираже с браком на обложке окажется:

а) ноль учебников;
б) более одного учебника;
в) 4 или 6 учебников;
г) 3 учебника;
д) менее двух учебников;
е) не 2 и не 3 учебника.

28.11. Случайная величина U распределена по Пуассону, а её математическое ожидание равно 2,5. Найдите вероятность:

а) $P(U = M(U))$;
б) $P(U \geqslant 0)$;
в) $P(U < 2)$;
г) $P(U \neq M(U))$;
д) $P(U < M(U))$;
е) $P(U \geqslant M(U))$.

28.12. Средний срок безотказной работы платы равен 1000 дней. Считая, что время работы имеет показательное распределение, найдите вероятность того, что плата откажет в течение первых:

а) 100 дней;
б) 200 дней;
в) 500 дней;
г) 900 дней;
д) 1000 дней;
е) 2000 дней.

28.13. Время T безотказной работы двигателя имеет показательное распределение с математическим ожиданием 100. Найдите вероятность:

а) $P(T = 0)$;
б) $P(T < 1)$;
в) $P(1 \leqslant T < 2)$;
г) $P(T = 3{,}14)$;
д) $P(T \geqslant 2)$;
е) $P(|T - 3| \geqslant 1)$.

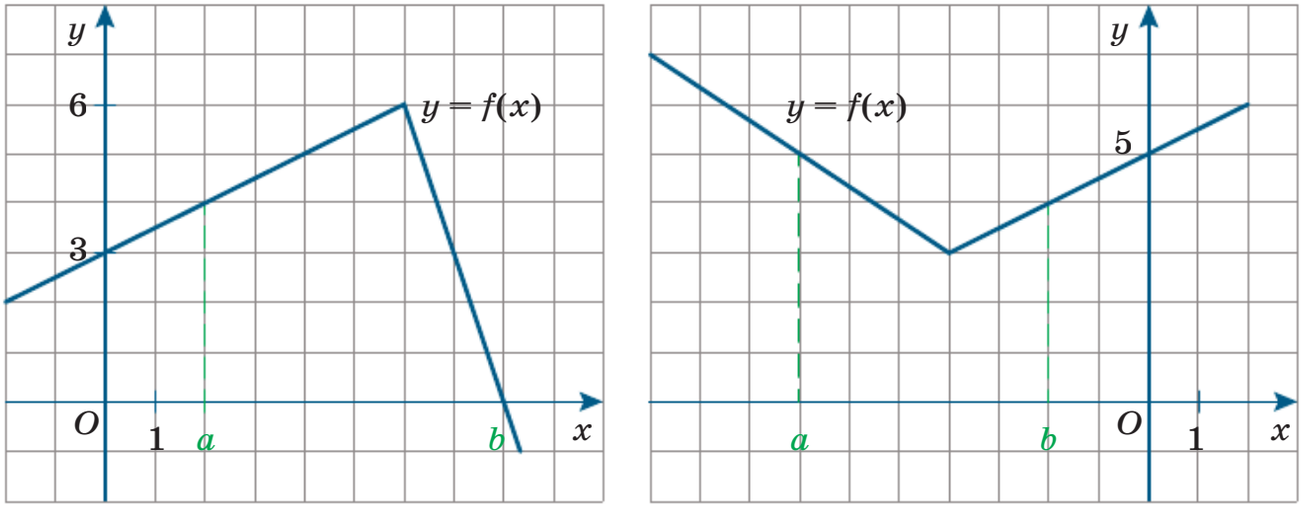
28.14. Для случайной величины Z с показательным распределением найдите вероятность:

а) $P(Z = 0)$;
б) $P(Z \geqslant 0)$;
в) $P(Z \leqslant M(Z))$;
г) $P(Z \leqslant 0)$;
д) $P(Z = M(Z))$;
е) $P(Z \geqslant M(Z))$.

28.15. Независимо испытывают два прибора, время безотказной работы которых имеет показательные распределения с параметрами соответственно 0,1 и 0,2. Найдите вероятность того, что за время от 0 до 6:
а) откажет прибор № 1;
б) оба прибора не откажут;
в) откажет только прибор № 1;
г) прибор № 2 не откажет;
д) оба прибора откажут;
е) не откажет только прибор № 1.

Упражнения для повторения

28.16. Вычислите определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$, используя график функции $y = f(x)$, изображённый на указанном рисунке:
а) рис. 158, *а*; б) рис. 158, *б*.

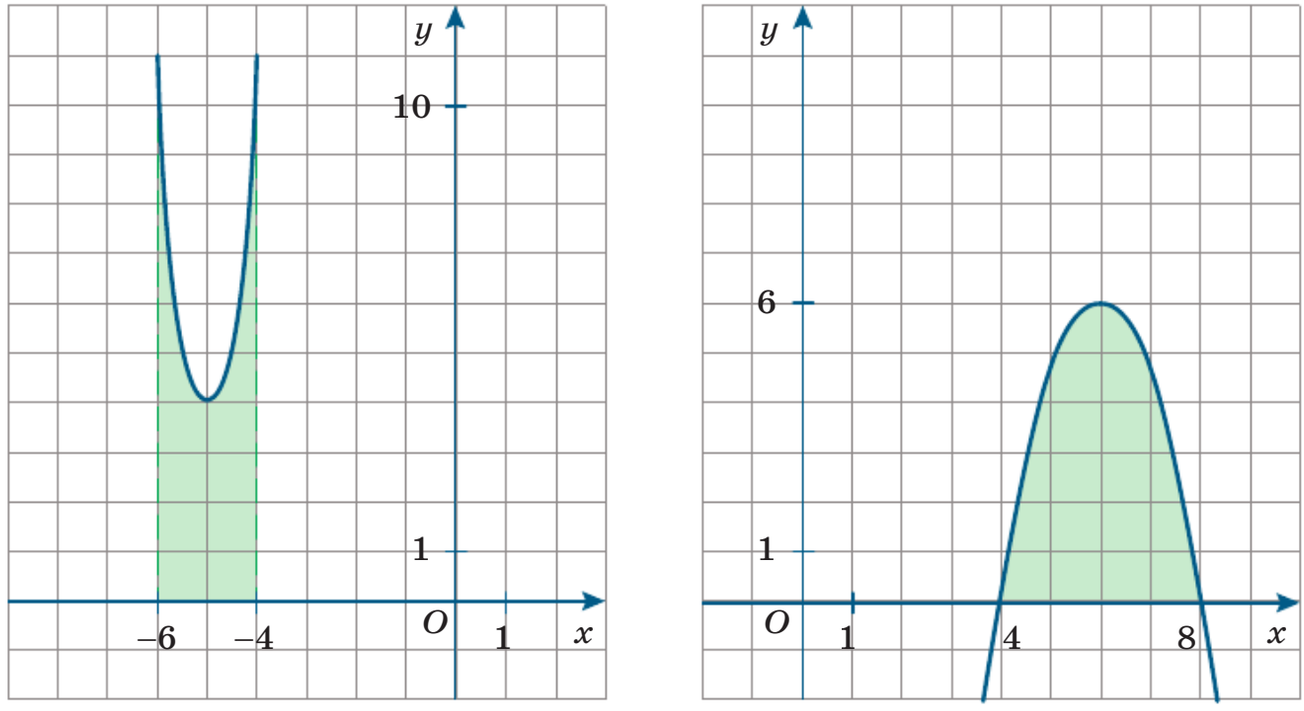


а *б*

Рис. 158

28.17. а) Функция $F(x) = 2x^3 + 30x^2 + 154x - \frac{23}{6}$ является одной из первообразных функции $y = f(x)$, график которой изображён на рисунке 159, *а*. Найдите площадь закрашенной фигуры.

б) Функция $F(x) = -0{,}5x^3 + 9x^2 - 48x + \frac{19}{5}$ является одной из первообразных функции $y = f(x)$, график которой изображён на рисунке 159, *б*. Найдите площадь закрашенной фигуры.



а *б*

Рис. 159

28.18. Найдите площадь фигуры, заключённой между ветвью гиперболы $y = \frac{6}{x}$ при $x > 0$ и прямой $y = 8 - 2x$.

28.19. Филателист приобрёл марку. Стоимость марки в конце n-го года становится равной n^2 р. Филателист планирует через несколько лет продать марку и полученные деньги положить в банк под 10,25 % годовых. В каком году с момента приобретения марки ему целесообразно осуществить продажу, чтобы к концу пятнадцатого года на счёте в банке оказалась наибольшая сумма денег?

28.20. В понедельник и Маша, и Лена решили по несколько задач из общего списка задач к экзамену. В каждый следующий день подготовки Маша решала на две, а Лена на три задачи больше, чем в предыдущий день. В итоге обе девочки в один и тот же день решили все задачи из списка. Могло ли число дней подготовки быть равным: а) 7; б) 12?

Итак, в главе 5

Познакомились с *непрерывными случайными величинами*. Значения непрерывной случайной величины заполняют целиком некоторый числовой промежуток. Все значения непрерывной с. в. невозможно каким-либо образом перечислить, это основное различие между непрерывными и дискретными с. в. Непрерывные случайные величины естественно возникают в задачах о случайном выборе точки из числового множества, из плоской фигуры, из пространственного тела. В простейших случаях, с которыми мы познакомились в § 25, значения непрерывных с. в. распределены *равномерно*, т. е. распределены с одинаковой *плотностью* по множеству, по фигуре или телу. В физике в таких случаях чаще говорят об однородном стержне, пластине, шаре и т. п. Но встречаются и неравномерно распределённые непрерывные случайные величины. Важнейший пример — *нормально распределённые* случайные величины. Об их значимости в теории вероятностей и приложениях в практических задачах рассказано в § 26 и 27.

Познакомились с новыми понятиями теории вероятностей:

— *плотность* распределения случайной величины;

— *гауссова* функция и её график, «колоколообразная» *гауссова кривая*;

— случайная величина со *стандартным нормальным* распределением;

— случайная величина с *общим нормальным* распределением;

— случайная величина с *показательным* распределением;

— *функция Лапласа*, которая является первообразной гауссовой функции;

— *таблица значений* функции Лапласа;

— *центральная предельная* теорема и её применения для биномиальных распределений;

— *закон больших чисел* в форме Бернулли и основанный на нём *выборочный метод*;

— *неравенство Чебышёва* и правило *«трёх сигм»*.

Узнали новые обозначения:

$P(a \leqslant T \leqslant b)$ — для вероятности того, что с. в. T принимает значения из отрезка $[a; b]$;

$y = p(x)$ — для плотности распределения случайной величины;

$y = \varphi(x)$ и $y = \Phi(x)$ — для гауссовой функции и функции Лапласа;

$N(0;\ 1)$ и $N(a;\ \sigma)$ — для стандартного и общего нормального распределений.

Узнали новые факты и формулы:

$P(a \leqslant T \leqslant b) = \int\limits_a^b p(x)dx$ для вычисления вероятности через плотность распределения, в частности площадь под графиком любой функции плотности равна 1;

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\Phi'(x) = \varphi(x)$, $\Phi(0) = 0$ для гауссовой функции и функции Лапласа;

соотношение $T = \sigma S + a$ устанавливает связь между с. в. $T \sim N(a;\ \sigma)$ с общим нормальным распределением и с. в. $S \sim N(0;\ 1)$ со стандартным нормальным распределением;

$$P_n(a \leqslant k \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right) \text{ и}$$

$$P_n(k = d) \approx \Phi\left(\frac{d + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{d - 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

для использования функции Лапласа при приближённых вычислениях биномиальных распределений;

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant t\right) = 1$ для закона больших чисел в форме Бернулли;

неравенство Чебышёва $P\left(\left|S - M(S)\right| \leqslant t\right) \geqslant 1 - \frac{D(S)}{t^2}$, оценивающее вероятность отклонения с. в. от своего математического ожидания через дисперсию этой с. в.;

в частности, с вероятностью не менее чем 88,8 % произвольная с. в. отклоняется от своего математического ожидания не более чем на $3\sigma = 3\sqrt{D(S)}$;

неравенство Чебышёва (для среднего арифметического)

$$P\left(\left|\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n} - M\right| \leqslant t\right) \geqslant 1 - \frac{C}{nt^2}$$

для независимых случайных величин S_1, S_2, ..., S_n с одинаковым математическим ожиданием M и дисперсиями, не превосходящими константы C.

Вопросы

1. Сформулируйте правило подсчёта вероятностей для выбора точки из числового множества.
2. Сформулируйте правило подсчёта вероятностей для выбора точки из плоской фигуры.
3. Приведите пример события, которое возможно, но его вероятность равна нулю.
4. Приведите пример события, вероятность которого равна 1, но которое не достоверно.
5. Опишите физическую модель равномерного распределения вероятности.
6. Опишите свойства функции плотности непрерывной случайной величины.
7. Как по графику функции плотности определить вероятность попадания значения непрерывной с. в. в отрезок $[c; d]$?
8. Нарисуйте эскиз гауссовой кривой (кривой плотности стандартного нормального распределения).
9. Опишите свойства гауссовой функции.
10. Нарисуйте эскиз кривых плотности нормальных распределений $N(0; 2)$, $N(1; 2)$, $N(-2; 1)$.
11. Приведите формулу Бернулли для подсчёта вероятностей числа «успехов».
12. По какой причине приходится использовать приближённые вычисления при подсчётах по формуле Бернулли?
13. Приведите несколько примеров данных, распределение которых может быть приближено кривой нормального распределения.
14. Опишите, как устроена доска Гальтона. Что она демонстрирует?
15. Вероятность какого события обозначается $P_n(a \leqslant k \leqslant b)$?
16. Запишите формулу, выражающую $P_n(a \leqslant k \leqslant b)$ через функцию Лапласа $y = \Phi(x)$.
17. К какому числу приближаются значения $\Phi(x)$ при неограниченном возрастании x?
18. Объясните, почему функция Лапласа является возрастающей.
19. В чём состоит явление статистической устойчивости?
20. Сформулируйте закон больших чисел в форме Бернулли.
21. Чему равны математическое ожидание и дисперсия числа «успехов» в n испытаниях Бернулли?
22. Запишите неравенство Чебышёва для произвольной случайной величины.

Тест

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранная точка отрезка $[-5; 15]$ окажется точкой промежутка $(-4; 4)$?

а) 0,8 б) 0,2 в) 0,4 г) 0,6

2. Какова вероятность того, что случайным образом выбранное решение неравенства $x^2 \leqslant 64$ окажется решением неравенства $|x - 3| \leqslant 2$?

а) $\frac{5}{8}$ б) $\frac{1}{2}$ в) $\frac{3}{16}$ г) $\frac{1}{4}$

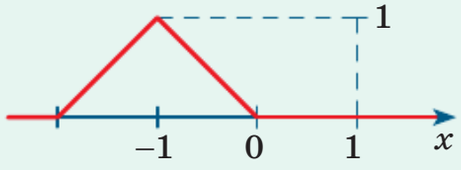
3. Общий центр двух концентрических кругов радиусом 1 и 2 лежит на оси Ox. Какова вероятность того, что случайным образом выбранная точка большего круга окажется выше оси Ox и вне меньшего круга?

а) $\frac{3}{8}$ б) $\frac{1}{4}$ в) $\frac{3}{4}$ г) $\frac{1}{2}$

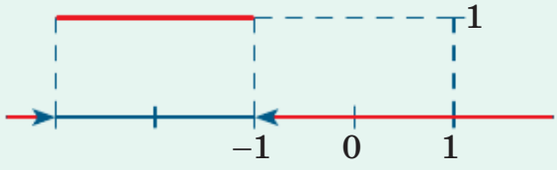
4. В кубике Рубика 3×3 наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется в одном из кубиков 1×1, у которых ровно одна грань расположена на поверхности кубика Рубика?

а) $\frac{8}{27}$ б) $\frac{2}{9}$ в) $\frac{8}{9}$ г) $\frac{4}{27}$

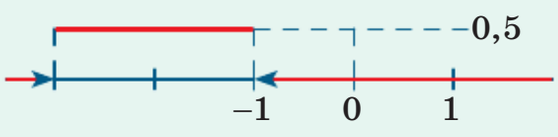
5. Случайная величина T равномерно распределена на отрезке $[-3; -1]$. На каком из рисунков изображён верный эскиз графика её плотности?



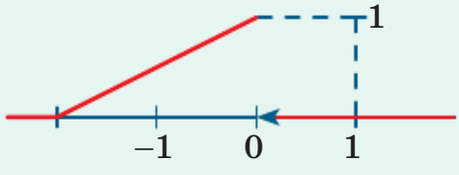
а)



б)



в)



г)

6. Случайная величина R равномерно распределена на отрезке $[-1; 3]$. Найдите вероятность того, что её значение окажется между 0,5 и 2.

а) $\frac{1}{4}$ б) $\frac{3}{4}$ в) $\frac{1}{2}$ г) $\frac{3}{8}$

7. Вероятность «успеха» в одном испытании равна 0,2. Какова вероятность того, что при трёх повторениях испытания «успех» наступит ровно в одном случае?

а) 0,384 б) 0,096 в) 0,008 г) 0,25

8. Укажите ответ, в котором верно заполнены пропуски в формуле Бернулли $P_?(?) = C_{33}^{?} \cdot ?^{?} \cdot 0,4^{22}$, если известно, что «успех» более вероятен, чем «неудача».

а) $P_{33}(11) = C_{44}^{11} \cdot 0,6^{11} \cdot 0,4^{22}$

б) $P_{33}(11) = C_{33}^{11} \cdot 0,6^{11} \cdot 0,4^{22}$

в) $P_{33}(22) = C_{33}^{22} \cdot 0,6^{11} \cdot 0,4^{22}$

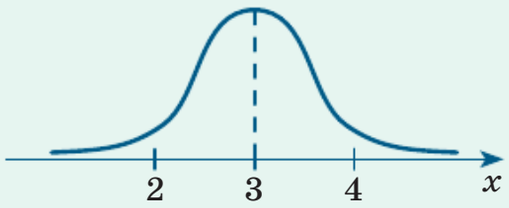
г) $P_{33}(22) = C_{33}^{11} \cdot 0,6^{22} \cdot 0,4^{22}$

9. Укажите неверное неравенство для значений функции $y = \Phi(x)$ Лапласа.

а) $\Phi(0,11) < \Phi(0,12)$ в) $\Phi(-3) > \Phi(-2)$

б) $\Phi(1) \geqslant \Phi(-2)$ г) $\Phi(5) < 0,5$

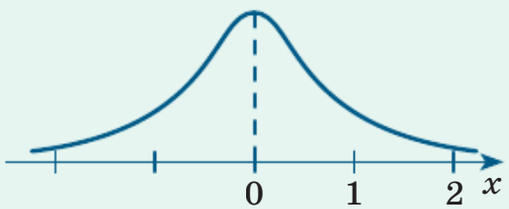
10. Случайная величина T имеет нормальное распределение $N(3; 1)$. На каком из рисунков изображён верный эскиз графика её плотности?



а)



б)



в)



г)

Из истории математики

Упоминание о геометрических вероятностях имеется в одной из рукописей Ньютона (ок. 1665 г.). Первый опубликованный текст относится к 1692 г., когда перевод на английский язык книги Христиана Гюйгенса (1629—1695) «О расчётах в азартных играх» был дополнен задачей о случайном расположении параллелепипеда на плоскости.

Николай I Бернулли (1687—1759), племянник Якоба и Иоганна Бернулли, в работе «Опыт применения искусства предположений к правовым вопросам» (1709 г.) в терминах смертности n человек исследовал случайные величины, равномерно распределённые на отрезке.

Одним из первых непрерывные распределения в связи с геометрическими вероятностями регулярно стал рассматривать Томас Симпсон (1710—1761).

В нескольких работах Жоржа-Луи Бюффона (1707—1788) рассматривались задачи о бросаниях иглы (или монеты) на плоскость, разделённую параллельными прямыми (или квадратами), и нахождении вероятности того, что при случайном бросании появится пересечение с одной из этих параллельных прямых. При обосновании своих гипотез происхождения планет Бюффон также использовал вероятностные методы. Стоит отметить, что основной труд Бюффона «Естественная история» поражает грандиозностью: 44 огромных тома.

В учебнике 1846 г. Виктора Яковлевича Буняковского (1804—1889) задачи на геометрические вероятности выделены в отдельную главу. Жозеф-Луи Бертран (1822—1900) в книге «Исчисление вероятностей» (1899 г.) обосновал необходимость построения точных математических моделей при вычислении геометрических вероятностей.

К середине XX в. после появления работ Андрея Николаевича Колмогорова (1903—1987) геометрические вероятности стали частью общей теории меры.

Гауссова кривая, как и функция Лапласа, возникли в математике примерно за 100 лет до основных работ Гаусса и Лапласа по теории вероятностей. Появились функции типа $y = e^{-x^2}$ практически сразу после базового трактата Якоба Бернулли (1654—1705) «Искусство предположений», напечатанного в 1713 г., в котором, собственно, и была приведена теорема Бернулли — первый из законов больших чисел (сам результат он получил около 1690 г.).



В. Я. Буняковский



Ж.-Л. Бертран

Появление функций экспоненциального типа в вычислении вероятностей связывают с работами Николая I Бернулли, хотя первые общие результаты о приближениях $P_n(k)$ для случая $y = q = 0{,}5$ с помощью функции Ф получил в цикле своих работ, начиная с 1718 г., француз Абрахам де Муавр (1667—1754), проживший почти всю жизнь в Англии. Даниил Бернулли (1700—1782), сын И. Бернулли, опубликовал аналогичные результаты в трактате «Приложение меры случая к случайным последовательностям естественных событий» (1770 г.). Позже, в несколько других терминах их передоказал в своей «Аналитической теории вероятностей» (1812 г.) французский академик Пьер-Симон Лаплас (1749—1827). Теоремы о приближённых вычислениях вероятностей в схеме Бернулли теперь называют теоремами Муавра — Лапласа. Лаплас специально отметил необходимость предположения о равновозможности исходов в классическом определении вероятности. Принято считать, что работами Лапласа завершился первый, «классический» век активного развития теории вероятностей.

Нормальный закон распределения получил примерно к этому же времени широкое применение в теории случайных ошибок, построенной в основном в работах 1809 и 1821 гг. «короля математиков» Карла Фридриха Гаусса (1777—1855). При любом реальном измере-

нии какой-либо величины имеются ошибки, связанные с различными случайными факторами. Вопрос о том, как их избежать, а точнее, как их учесть для получения наиболее точного итогового результата, волновал многих учёных. Замена набора n результатов измерения одной и той же величины на среднее арифметическое этих результатов неоднократно предлагалась на протяжении истории развития науки. Вот, к примеру, цитата из Гаусса: «...среднее арифметическое из всех наблюдавшихся значений окажется наиболее вероятным значением, если и не абсолютно точно, то по крайней мере очень близко к этому». Разумеется, Гаусс использовал и кривую, ныне носящую его имя.

В России одними из первых серьёзных работ по вероятности были работы (1829, 1842 гг.) Николая Ивановича Лобачевского (1792—1856). В своих работах Лобачевский сформулировал задачи о распределении сумм независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение вероятностей.

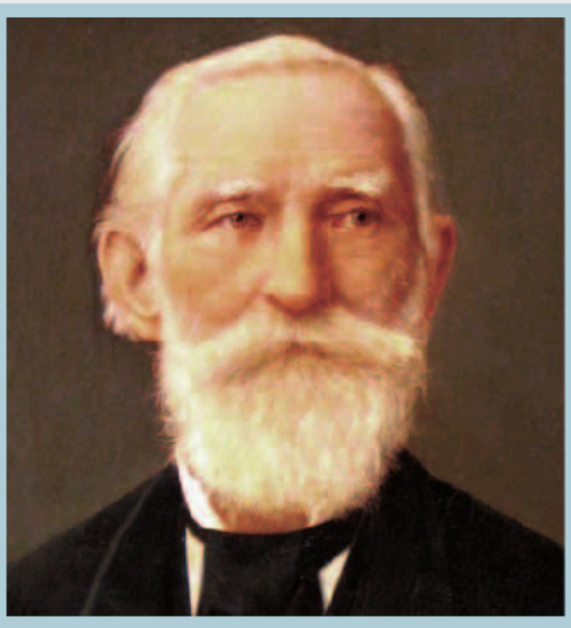
Значимость и существенность понятия *случайная величина* принято связывать с Петербургской математической школой: П. Л. Чебышёвым (1821—1894) и его последователями А. А. Марковым (1856—1922) и А. М. Ляпуновым (1857—1918). В их работах доказаны многочисленные версии закона больших чисел для разных классов случайных величин, так называемые *центральные предельные теоремы*. В частности, ими было доказано, что при сложении большого числа произвольных независимых случайных величин с одинаковыми математическими ожиданиями получаются распределения, приближённо совпадающие с одним и тем же *нормальным распределением*.

К началу XX в. случайные величины стали активно использоваться в физике, например в работах австрийца Людвига Больцмана (1844—1906) и американца Джозайи Гиббса (1839—1903), основателей статистической физики, механики и молекулярно-кинетической теории.

Строгое математическое определение *случайной величины* как определённого типа числовой функции на множестве всех исходов испытания появилось одновременно с аксиоматикой теории вероятностей, предложенной великим советским математиком А. Н. Колмогоровым в 1933 г. Её созданию предшествовали и в заметной степени способствовали книги «Исчисление вероятностей» (1912 г.) французского учёного Анри Пуанкаре (1854—1912) и «Теория вероятностей» (1927 г.) советского математика Сергея Натановича Бернштейна (1880—1968).



К. Ф. Гаусс



П. Л. Чебышёв

За последнее столетие случайные величины стали рабочим и зачастую одним из основных технических инструментов исследований в физике микромира, теории наследственности, анализе принятия решений, теории информации, случайных процессах и т. д.



Казанский федеральный университет.
Казань

§ 29. Линейная и дробно-линейная функции
§ 30. Степенная функция. Корни n-й степени
§ 31. Приближения функций многочленами. Степенные ряды
§ 32. Тригонометрические функции комплексной переменной. Тождество Эйлера

Глава 6*

Элементарные функции комплексной переменной

Названия всех функций, о которых пойдёт речь в этой главе, хорошо знакомы вам: прямая и обратная пропорциональности, линейная и дробно-линейная функции, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, показательная функция. Ранее всё это были функции *действительной* переменной. В этой главе речь пойдёт о *комплексных* значениях независимой переменной и, соответственно, о *комплексных* значениях, которые принимает та или иная функция.

При задании функций комплексной переменной мы будем использовать запись $w = f(z)$, аналогичную привычной записи $y = f(x)$ для случая действительных x и y, но здесь $z \in \boldsymbol{C}$ и $w \in \boldsymbol{C}$; буквой $\boldsymbol{C}$, напомним, обозначают множество комплексных чисел. Сразу же подчеркнём принципиальное различие. Для $x \in \boldsymbol{R}$ и $y \in \boldsymbol{R}$ одним из основных «инструментов» для нас были *графики функций*, их мы рисовали в *двумерной* плоскости: одно измерение — для x, другое измерение — для y. А вот для графика функции $w = f(z)$ комплексной переменной нужны уже *четыре* измерения: два для $z \in \boldsymbol{C}$ (действительная и мнимая части) и ещё два для $w \in \boldsymbol{C}$. Получается, что нарисовать такой график на листе бумаги нет никакой возможности.

Чаще всего обходятся одной общей комплексной плоскостью, в которой изображают поведение и переменной z, и переменной w. В сложных случаях приходится рисовать две плоскости: z-плоскость для переменной z и отдельно w-плоскость для переменной w, которая связана с z соотношением $w = f(z)$.

Напомним, что:

- $z = x + iy$ — алгебраическая форма комплексного числа, здесь x, y — действительные числа (обозначения: $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$);
- $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ — тригонометрическая форма комплексного числа $z \neq 0$, здесь $|z|$ — длина вектора $\overrightarrow{OM}$, где O — начало

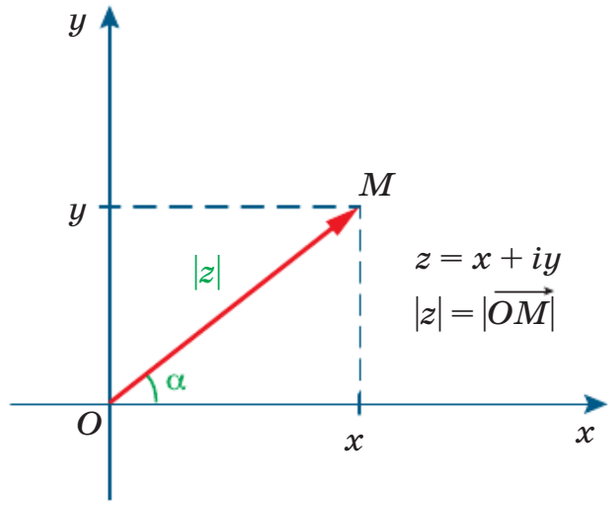


Рис. 160

координат в координатной плоскости и M — точка с координатами $(x; y)$, а α — угол, который вектор $\overrightarrow{OM}$ образует с положительным лучом оси абсцисс (рис. 160), $-\pi < \alpha \leqslant \pi$, этот угол называют *аргументом числа* z и обозначают $\arg z$.

§ 29. Линейная и дробно-линейная функции

Начнём с прямой пропорциональности $w = k \cdot z$, в которой и фиксированный коэффициент k, и переменные z, w принимают комплексные значения. Случай $k = 0$ не представляет интереса: если $k = 0$, то $w = 0$ вне зависимости от z.

Запишем коэффициент $k \neq 0$ в тригонометрической форме:

$$k = |k|(\cos\beta + i\sin\beta),$$

где β — аргумент числа k. Далее действуем по известному правилу:

при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

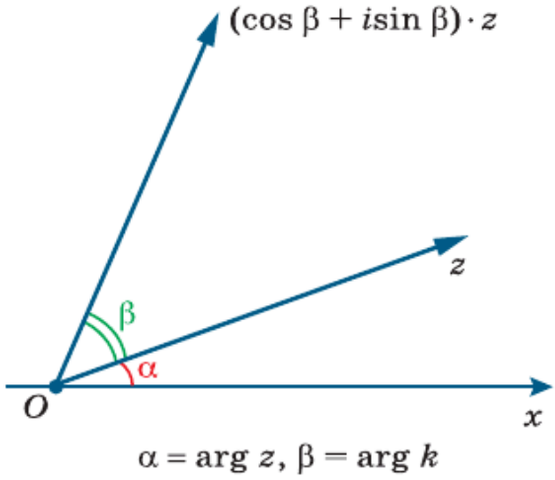


Рис. 161

Геометрический смысл добавления $\beta = \arg k$ к $\arg z$ состоит в повороте (вращении) вектора $\overrightarrow{Oz}$ на угол β вокруг начала координат (рис. 161).

Геометрический смысл последующего умножения на $|k|$ состоит в гомотетии с коэффициентом $|k|$ относительно начала координат — растяжении (при $|k| \geqslant 1$) или сжатии (при $0 < |k| < 1$). Сформулируем правило.

Для того чтобы, зная z, построить $w = k \cdot z$, следует:
1) вектор $\overrightarrow{Oz}$, соответствующий z, повернуть на угол $\arg k$ вокруг точки O;
2) вектор, полученный после поворота, умножить[1] на $|k|$.

В математике говорят так: *функция $w = kz$, $z \in \mathbf{C}$, является композицией поворота и гомотетии с положительным коэффициентом относительно начала координат.*

Пример 1 Найти образ треугольника $\triangle$ с вершинами в точках $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 3 + 4i$, $z_3 = 7 + 4i$, а также периметр P и площадь S образа для линейной функции:

а) $w = iz$; б) $w = \left(1 - i\sqrt{3}\right)z$.

[1] Порядок можно поменять: сначала z умножить на $|k|$, а затем выполнить поворот на $\arg k$.

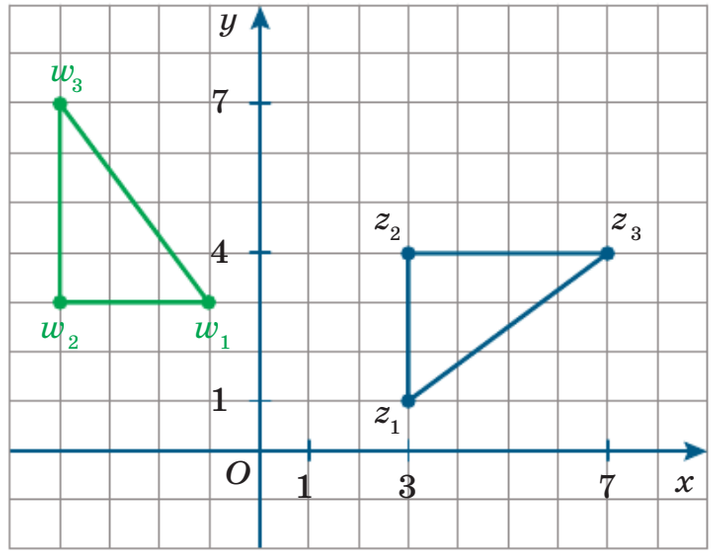


Рис. 162

Решение. а) $k = i$, $\arg k = \frac{\pi}{2}$, $|k| = 1$. Значит, эта функция задаёт поворот на $\frac{\pi}{2}$ вокруг начала координат (рис. 162). Периметр треугольника $\triangle$ равен $3 + 4 + 5 = 12$, а площадь — $0{,}5 \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Такими же будут периметр и площадь образа $\triangle$, ведь поворот, как и всякое движение, сохраняет длины и площади.

б) $k = 1 - i\sqrt{3}$, $\arg k = -\frac{\pi}{3}$, $|k| = 2$. Значит, мы имеем дело с поворотом на $-\frac{\pi}{3}$ вокруг начала координат и последующим растяжением в 2 раза. В этом случае периметр увеличится в 2 раза, а площадь — в 4 раза, т. е. получатся соответственно значения 24 и 24.

Ответ: а) $P = 12$, $S = 6$; б) $P = 24$, $S = 24$.

Перейдём к линейной функции $w = kz + m$, $z \in \boldsymbol{C}$. Она отличается от прямой пропорциональности $w = kz$ добавлением слагаемого m. Здесь поможет *алгебраическая* форма записи константы m и геометрическая интерпретация сложения комплексных чисел. Геометрический смысл добавления константы m состоит в параллельном переносе на вектор, соответствующий комплексному числу m, об этом мы говорили в § 35 учебника для 10-го класса.

Пример 2 Найти образ треугольника $\triangle$ с вершинами в точках $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 3 + 4i$, $z_3 = 7 + 4i$, а также периметр и площадь образа для линейной функции:

а) $w = iz - 10$; б) $w = \left(1 - i\sqrt{3}\right)z + (2 - i)$.

Решение. Надо треугольники, найденные в примере 1, сдвинуть:

а) на 10 единиц масштаба влево по действительной оси;

б) на две единицы масштаба вправо по действительной оси и на одну единицу вниз по мнимой оси.

В обоих случаях периметр и площадь треугольника сохраняются.

Ответ: а) $P = 12$, $S = 6$; б) $P = 24$, $S = 24$.

В общем случае верна следующая теорема.

Теорема 1. Линейная функция $w = kz + m$ в комплексной плоскости является композицией поворота на угол $\arg k$, гомотетии с коэффициентом $|k|$ относительно начала координат и последующего параллельного переноса на m.

В частности, линейная функция — это преобразование подобия плоскости, а при $|k| = 1$ — это движение плоскости.

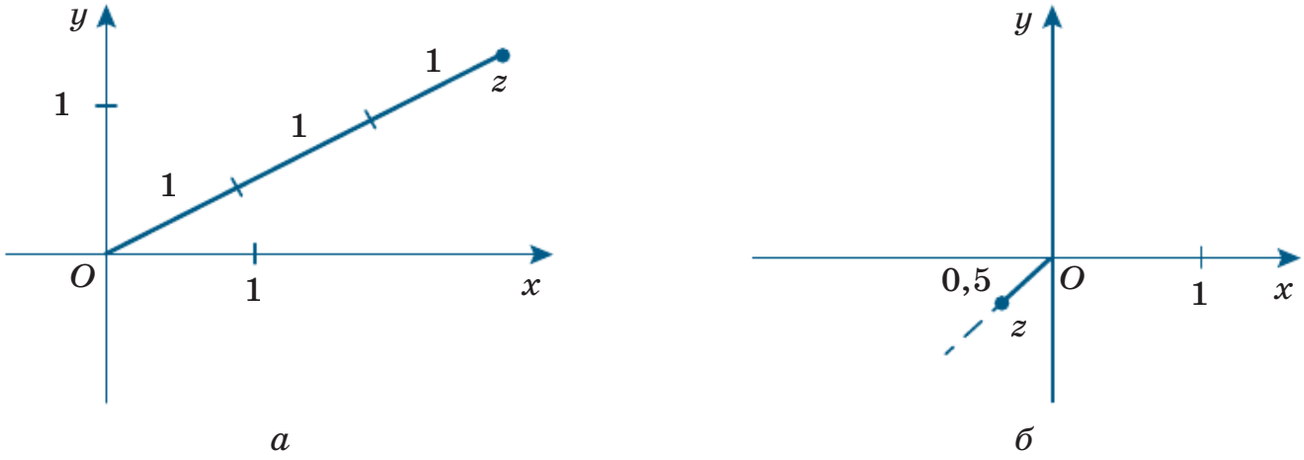
Перейдём к обратной пропорциональности $w = \frac{1}{z}$.

Пример 3 Для заданного комплексного числа z построить число $\frac{1}{z}$, если:

а) $|z| = 3$, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 163, *а*);

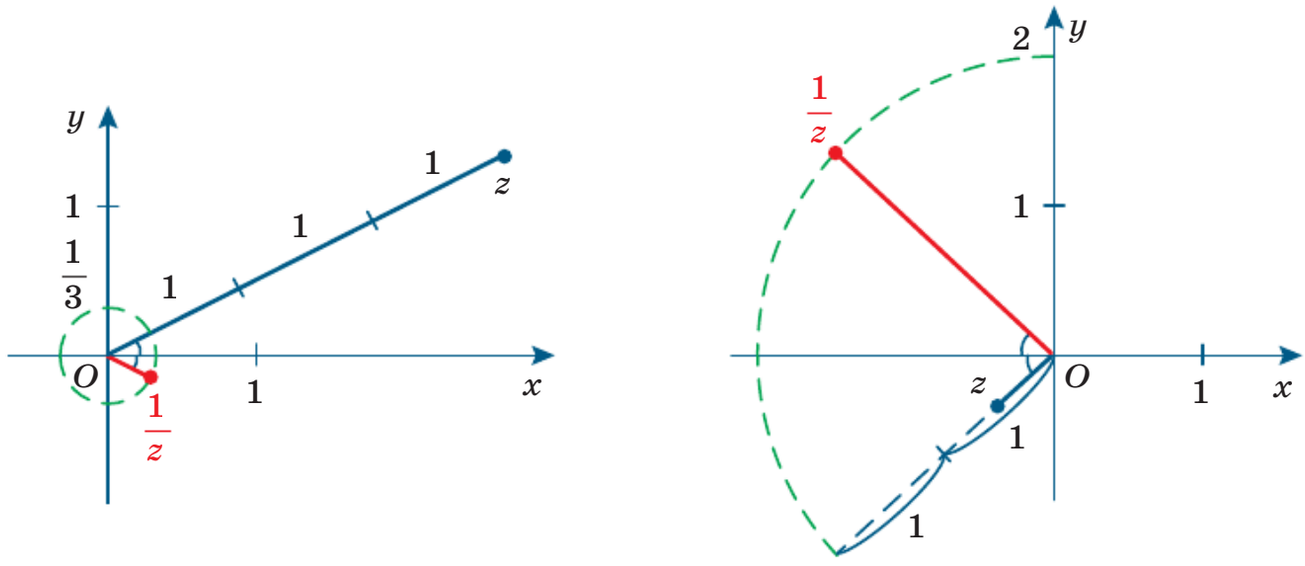
б) $|z| = 0{,}5$, $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ (рис. 163, *б*).

Решение. Рассмотрим равенство $z \cdot \frac{1}{z} = 1$. Действуем по правилу умножения чисел в тригонометрической форме: модули перемножа-



а *б*

Рис. 163



а *б*

Рис. 164

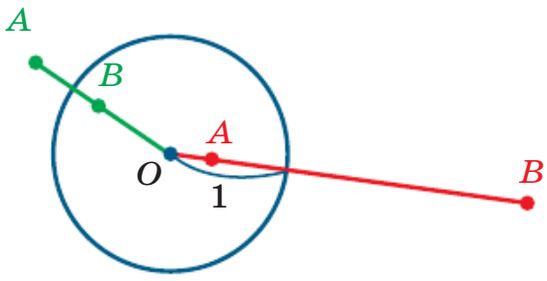
ются, аргументы складываются. Значит, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $\arg z + \arg\frac{1}{z} = 0$, т. е. $\arg\frac{1}{z} = -\arg z$.

а) Единичный радиус делим на три равные части. Проводим окружность радиусом $\frac{1}{3}$, число $\frac{1}{z}$ точно принадлежит этой окружности. Луч с началом в точке O, проходящий через точку z, симметрично отражаем относительно действительной оси (оси абсцисс). Так как $\arg\frac{1}{z} = -\arg z$, то $\frac{1}{z}$ принадлежит отражённому лучу. Точка пересечения окружности и луча — искомая. Она лежит в четвёртой четверти внутри единичного круга (рис. 164, *а*).

б) Действуем по той же схеме. Искомая точка — это точка пересечения окружности радиусом $\frac{1}{|z|} = \frac{1}{0{,}5} = 2$ и луча, симметричного лучу Oz относительно оси Ox. Эта точка лежит во второй четверти вне единичного круга (рис. 164, *б*).

Если комплексное число задано в алгебраической форме $z = x + iy$, то число $\frac{1}{z}$ найти несложно:

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$



$OA \cdot OB = 1$

Рис. 165

Действительно, $z \cdot \frac{1}{z} = (x + iy) \cdot \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$. Можно выразить $\frac{1}{z}$ через сопряжённое число $\overline{z} = x - iy$ и модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. А именно: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Но функция $w = \frac{1}{z}$ имеет и красивое геометрическое описание. Для него нужно новое понятие *симметрии*[1] относительно числовой (единичной) окружности.

Определение 1. Точки A и B называют **симметричными относительно числовой окружности** с центром O, если они лежат на одном луче, выходящем из точки O, и при этом $OA \cdot OB = 1$ (рис. 165).

Поясним такую симметричность. Пусть $OA = a < 1$. Тогда $OB = \frac{1}{a} > 1$ (рис. 166), расстояние AC от точки A до окружности равно $1 - a$, а расстояние BC от точки B до окружности равно $\frac{1}{a} - 1 = \frac{1 - a}{a} = \frac{AC}{a}$. Значит, $\frac{AC}{BC} = a$ и если $a \approx 1$, то $AC \approx BC$.

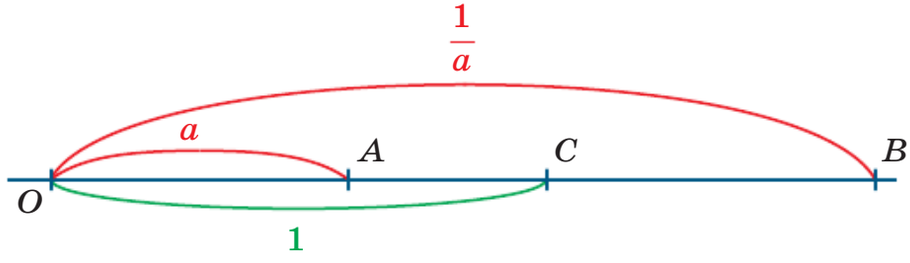


Рис. 166

[1] В математике чаще говорят: *инверсия* относительно окружности.

Если единичный радиус велик по сравнению с AC (например, если речь идёт о радиусе Земли и точках, близких к её поверхности), то вблизи точки A окружность — это практически прямая, и симметричность относительно окружности практически означает симметричность относительно прямой.

Аналитически симметричность относительно числовой окружности выражается просто: комплексные числа z и $\frac{z}{|z|^2}$ симметричны. Действительно, эти два числа различаются положительным множителем. Поэтому числа 0, z и $\frac{z}{|z|^2}$ лежат на одном луче. Кроме того, $|z|\cdot\left|\frac{z}{|z|^2}\right| = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$. Так как $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \overline{\left(\frac{z}{|z|^2}\right)}$, то верно следующее правило.

Для того чтобы, зная z, построить $w = \frac{1}{z}$, следует:

1) отразить точку z симметрично относительно числовой окружности;

2) полученную точку отразить симметрично относительно оси абсцисс.

В математике говорят так: *функция $w = \frac{1}{z}$ является композицией двух симметрий — относительно числовой окружности и относительно оси абсцисс.*

Пример 4 Найти кривую, в которую функция $w = \frac{1}{z}$ переводит:

а) прямую l, заданную уравнением $\operatorname{Re} z = 1$;

б) отрезок $[1; 1 + i]$.

Решение. а) Пусть $z \in l$, $z = 1 + iy$ и $w = \frac{1}{z} = u + iv$. Выше мы отметили, что если $z = x + iy$, то $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$. У нас $x = 1$, значит, $u = \frac{1}{1 + y^2}$, $v = -\frac{y}{1 + y^2}$.

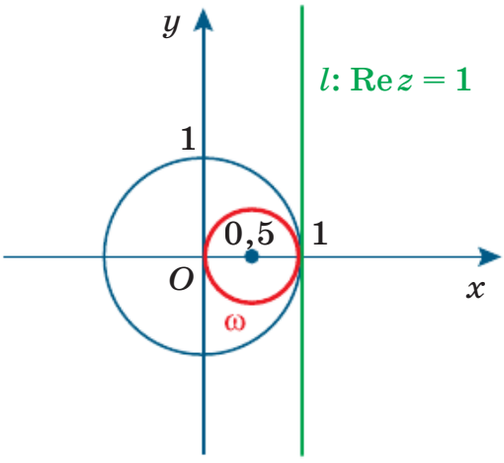


Рис. 167

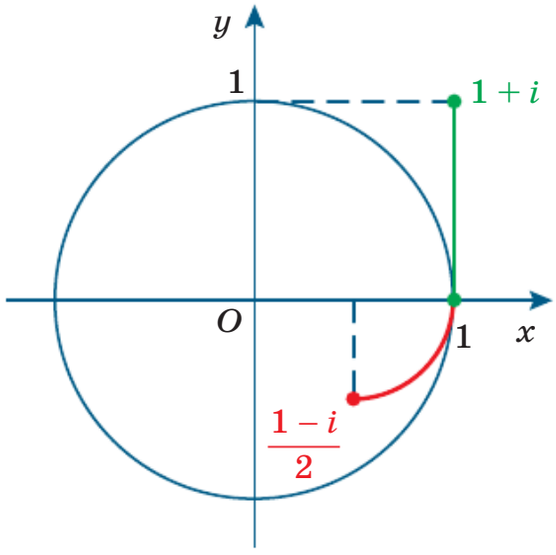


Рис. 168

Найдём уравнение, связывающее между собой $u = \dfrac{1}{1+y^2}$ и $v = -\dfrac{y}{1+y^2}$:

$$u^2 + v^2 = \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{1+y^2} = u; \quad u^2 + v^2 - u = 0;$$

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Получаем уравнение окружности ω с центром в точке (0,5; 0) и радиусом 0,5 (рис. 167).

Правда, с одним исключением: в точку (0; 0) ∈ ω никакая точка прямой a не перейдёт.

б) Отрезок [1; 1 + i] — подмножество прямой a. Значит, функция $w = \dfrac{1}{z}$ переведёт его в дугу окружности ω. Так как отрезок [1; 1 + i] лежит в первой четверти, то его образ принадлежит четвёртой четверти. Значит, отрезок перейдёт в меньшую дугу окружности ω с концами $w(1) = 1$ и $w(1+i) = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$ (рис. 168).

Итак, функция $w = \dfrac{1}{z}$ — довольно сложное преобразование комплексной плоскости. Оно *не линейно*: какие-то прямые переводит

в окружности, отрезки — в дуги окружностей. Можно доказать, что эта функция переводит:

— всякую прямую, не проходящую через точку O, в окружность с выколотой точкой O;

— всякую окружность, не проходящую через точку O, в окружность, не проходящую через точку O.

Это так называемое *круговое свойство* функции $w = \frac{1}{z}$.

Займёмся теперь дробно-линейной функцией $w = \frac{az+b}{cz+d}$. Сразу же отбросим случай $c = 0$, ведь тогда получится линейная функция. Далее сделаем знакомую нам операцию выделения целой части дроби:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + \left(b - \frac{ad}{c}\right)}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cz+d} =$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}} = A + B \cdot \frac{1}{z+C},$$

где $A = \frac{a}{c}$, $B = \frac{bc-ad}{c^2}$, $C = \frac{d}{c}$.

Отметим, что случай $ad = bc$ также следует отбросить, ведь тогда $B = 0$ и $w = A = \frac{a}{c}$ вне зависимости от z.

Разберём шаг за шагом, что происходит с z при преобразовании $w = A + B \cdot \frac{1}{z+C}$. Сначала z переходит в $z + C$; мы уже знаем, что это — параллельный перенос в комплексной плоскости. Затем $z + C$ переходит в $\frac{1}{z+C}$ — это обратная пропорциональность. Наконец, $\frac{1}{z+C}$ переходит в $A + B \cdot \frac{1}{z+C}$ — это линейная функция $kz + m$, у которой $k = B$, $m = A$, её геометрический смысл мы выяснили в теореме 1. В итоге получаем такую теорему.

Теорема 2. Дробно-линейная функция $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ в комплексной плоскости является композицией (последовательным выполнением): 1) параллельного переноса; 2) симметрии относительно числовой окружности; 3) симметрии относительно действительной оси; 4) поворота и гомотетии с положительным коэффициентом относительно начала координат; 5) параллельного переноса.

Упражнения

29.1. Вычислите:

а) $z_1 = (3i - 1)(2 + 5i)$;

б) $z_2 = \dfrac{2 + 3i}{3i - 4}$;

в) $z_3 = (2i - 1)^2(2 + 5i)$;

г) $z_4 = \dfrac{(2 - 3i)^2}{4 - 3i}$.

29.2. Для чисел z_1, z_2, z_3, z_4 из упражнения 29.1 вычислите:

а) $\dfrac{1}{z_1}$; б) $\dfrac{1}{z_2}$; в) $\left(\dfrac{i}{\overline{z_3}}\right)^{-1}$; г) $\dfrac{i}{\left(\overline{z_4}\right)^{-1}}$.

29.3. Запишите в тригонометрической форме число:

а) $2i^3$;

б) $3 - i\sqrt{27}$;

в) $3i^{-3} - 3$;

г) $3 + i^{-1}\sqrt{3}$.

29.4. Докажите, что линейная функция $w = kz + m$, $k \neq 0$, переводит:

а) прямую в прямую;

б) окружность в окружность;

в) отрезок в отрезок;

г) круг в круг.

29.5. Найдите образ квадрата с вершинами в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 3i$, $z_3 = 3 + 3i$, $z_4 = 3$ для линейной функции:

а) $w = iz$;

б) $w = 2iz$;

в) $w = -iz + 4$;

г) $w = -2iz + (1 - i)$.

29.6. Найдите периметр и площадь треугольника, в который линейная функция $w = kz + m$ переводит треугольник с вершинами в точках $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 1 + 2i$, если:

а) $w = \dfrac{z}{i}$;

б) $w = 2iz + 1$;

в) $w = i - \dfrac{z}{i}$;

г) $w = (3 - 4i)z + 1 + i$.

29.7. Докажите, что не существует линейной функции $w = kz + m$, которая переводила бы три комплексных числа $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 3 + 2i$ соответственно в числа:
а) $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = i$;
б) $w_1 = -2$, $w_2 = 2$, $w_3 = 2 - 3i$;
в) $w_1 = 0$, $w_2 = 1 + i$, $w_3 = 2 + 2i$;
г) $w_1 = -3$, $w_2 = 3$, $w_3 = 5 - 5i$.

29.8. Изобразите на комплексной плоскости числа z, $\bar{z}$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{\bar{z}}$, если:

а) $|z| = 2$, $\arg z = \frac{\pi}{6}$;

б) $|\bar{z}| = 3$, $\arg z = \frac{2\pi}{5}$;

в) $|z| = 0{,}25$, $\arg z = -\frac{\pi}{3}$;

г) $|z| = 1$, $\arg \bar{z} = \frac{4\pi}{5}$.

29.9. Дробно-линейную функцию $w = \frac{az + b}{cz + d}$ преобразуйте к виду $w = A + \frac{B}{z + C}$; в ответе укажите значения A, B, C, если:

а) $w = \frac{2z + 1}{z - 1}$;

б) $w = \frac{2iz - 3}{1 - iz}$;

в) $w = \frac{2z + i}{z + i}$;

г) $w = \frac{(2i + 1)z - i - 1}{iz + 1}$.

29.10. Найдите множество, в которое функция $w = \frac{1}{z}$ переводит:
а) прямую, заданную уравнением $\operatorname{Re} z = -1$;
б) отрезок $[-1; -1 + 4i]$;
в) прямую, заданную уравнением $\operatorname{Im} z = 2$;
г) отрезок $[-1; 2i]$.

§ 30. Степенная функция. Корни n-й степени

В знакомом нам правиле *при умножении комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, модули перемножаются, а аргументы складываются*. Рассмотрим частный случай, когда множители равны между собой.

Запишем этот одинаковый множитель $z \neq 0$ в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Тогда

$$z^n = \underbrace{|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot\ldots\cdot|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}_{n} =$$

$$= |z|^n\left(\cos(\underbrace{\alpha+\ldots+\alpha}_{n}) + i\sin(\underbrace{\alpha+\ldots+\alpha}_{n})\right).$$

В итоге получаем *формулу Муавра*[1]:

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha),\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Верна она и для целых отрицательных степеней. Смотрите, если $n \in \boldsymbol{Z}$, $n < 0$, то $-n \in \boldsymbol{N}$ и

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{|z|}\cdot\left(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\right)\right)^{-n} =$$

$$= \left(\frac{1}{|z|}\right)^{-n}\left(\cos((-n)(-\alpha)) + i\sin((-n)(-\alpha))\right) = |z|^n\left(\cos n\alpha + i\sin n\alpha\right).$$

Пример 1 Вычислить:

а) $(i-1)^{12}$; б) $(\cos 19^\circ + i\sin 19^\circ)^{19}\cdot(\cos 1^\circ - i\sin 1^\circ)$.

Решение. а) Действовать по формуле бинома Ньютона, вычисляя все 13 слагаемых, — нерадужная перспектива. А вот формула Муавра помогает быстро:

$$n = 12,\ z = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$z^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\frac{12\cdot 3\pi}{4} + i\sin\frac{12\cdot 3\pi}{4}\right) = -2^6 = -64.$$

б) Здесь $z = \cos 19^\circ + i\sin 19^\circ$ — число на единичной окружности в первой четверти. Возведение z в степень сводится к поворотам на один и тот же угол в 19° (рис. 169):

$$z^0 = 1,\ z^1 = z = \cos 19^\circ + i\sin 19^\circ,\ z^2 = \cos 38^\circ + i\sin 38^\circ,$$
$$z^3 = \cos 57^\circ + i\sin 57^\circ,\ \ldots\ .$$

[1] В оригинале А. Муавр рассматривал случай $|z| = 1$.

По формуле Муавра получаем:

$$(\cos 19^\circ + i\sin 19^\circ)^{19} = \cos(19 \cdot 19)^\circ + i\sin(19 \cdot 19)^\circ = \\ = \cos 361^\circ + i\sin 361^\circ = \cos 1^\circ + i\sin 1^\circ.$$

Поэтому

$$(\cos 19^\circ + i\sin 19^\circ)^{19} \cdot (\cos 1^\circ - i\sin 1^\circ) = (\cos 1^\circ)^2 + (\sin 1^\circ)^2 = 1.$$

Заметим, что итог девятнадцатикратного поворота исходной точки $z^0 = 1$ на угол в 19° состоит в повороте этой точки на полный угол 360° и ещё на маленький угол в 1°. Если после этого повторить девятнадцатикратный поворот, то итоговый сдвиг будет на 2°, затем на 3° и т. д. Значит, числа $z^0 = 1$, $z = \cos 19^\circ + i\sin 19^\circ$, z^2, ..., z^n, ... составляют множество вершин правильного 360-угольника, вписанного в единичную окружность.

Ответ: а) –64; б) 1.

Пример 2 Даны числа: $z^0 = 1$, $z = 0{,}9(\cos 0{,}21\pi + i\sin 0{,}21\pi)$, z^2, z^3, ..., z^9, z^{10}.

а) Изобразить на плоскости числа z^0, z, z^2, z^3.

б) Из данных чисел выбрать и записать те, которые расположены ниже оси абсцисс.

в) Из данных чисел выбрать и записать те, которые лежат в первой координатной четверти (не на осях).

г) Найти наименьшее значение n, для которого z^n лежит в круге радиусом 0,5.

Решение. а) $0{,}21\pi \approx 38^\circ$. Значит, число z расположено в первой четверти чуть ниже прямой $y = x$ на расстоянии 0,9 от начала

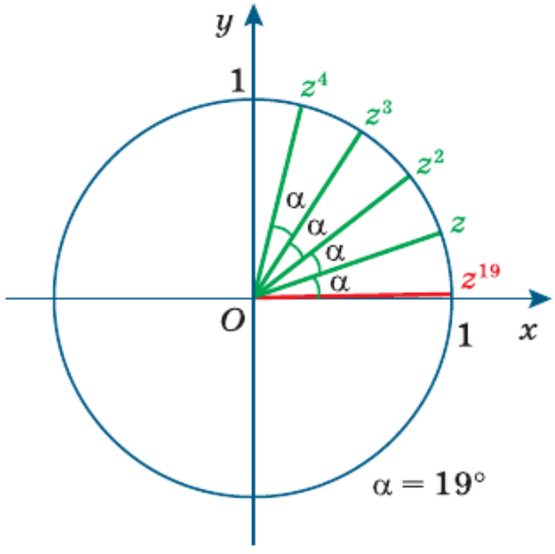


Рис. 169

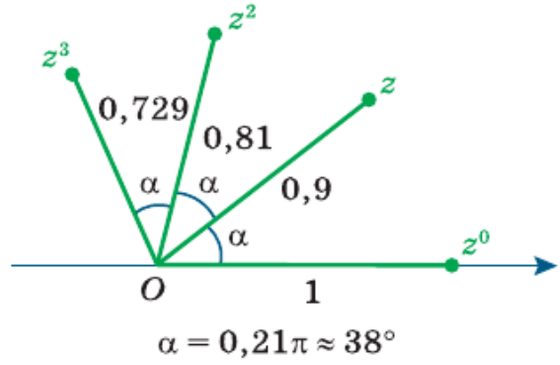


Рис. 170

координат. Для z^2 найдём модуль и аргумент: $|z^2| = 0{,}81$ и $0{,}42\pi \approx 76^\circ < 90^\circ$. Аналогично $|z^3| = 0{,}729$ и $\arg z^3 = 0{,}63\pi \approx 113^\circ < 120^\circ$. Мы видим, что z^n с ростом n участвует в двух процессах: это поворот вокруг точки O и сходимость к точке O (рис. 170).

б) Это те z^n, которые повернутся более чем на π и менее чем на 2π: z^5, z^6, z^7, z^8, z^9.

в) Это числа z, z^2 (см. пункт «а») и, кроме того, число z^{10}, так как $10 \cdot 0{,}21\pi = 2{,}1\pi \in (2\pi;\ 2{,}5\pi)$.

г) Следует сравнить $|z^n| = 0{,}9^n$ с $0{,}5$. Используем калькулятор: $0{,}9^6 \approx 0{,}53$; $0{,}9^7 \approx 0{,}48$. Значит, начиная с $n = 7$, числа z^n будут удалены от точки O менее чем на $0{,}5$.

Пример 3 Найти формулу, выражающую:
а) $\cos 5\alpha$ через $\cos\alpha$; б) $\sin 5\alpha$ через $\sin\alpha$.

Решение. Вычислим комплексное число $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5$ двумя способами: по формуле Муавра и по формуле бинома Ньютона. Приравняем ответы и тогда получим нужные формулы.

По формуле Муавра

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos 5\alpha + i\sin 5\alpha.$$

Для упрощения преобразований по формуле бинома Ньютона введём краткие обозначения $c = \cos\alpha$ и $s = \sin\alpha$. Тогда

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = (c + is)^5 =$$
$$= c^5 + 5c^4 \cdot is + 10c^3 \cdot (is)^2 + 10c^2 \cdot (is)^3 + 5c \cdot (is)^4 + (is)^5 =$$
$$= (c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4) + i(5c^4s - 10c^2s^3 + s^5).$$

Так как $c^2 + s^2 = 1$, то:

$$\cos 5\alpha = c^5 - 10c^3(1 - c^2) + 5c(1 - c^2)^2;$$
$$\sin 5\alpha = 5(1 - s^2)^2s - 10(1 - s^2)s^3 + s^5.$$

Остаётся аккуратно раскрыть скобки, привести подобные (сделайте это самостоятельно) и получить ответ:

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha;$$
$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha.$$

Обратите внимание, формулы *одинаковые*:
если $P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$, то:

$$P(\cos\alpha) = \cos 5\alpha,\ P(\sin\alpha) = \sin 5\alpha.$$

Свойства степенной функции $w = z^n$, $n \in N$, для комплексных чисел в основном повторяют свойства степенной функции $y = x^n$ для действительных значений переменной:

1) функция всюду определена;

2) функция равна нулю только при нулевом значении переменной;

3) функция чётна при чётных n и нечётна при нечётных n, т. е.

$$(-z)^{2k} = z^{2k},\ (-z)^{2k+1} = -z^{2k+1};$$

4) функция непрерывна, т. е. из $|z - z_0| \to 0$ следует, что

$$|w(z) - w(z_0)| = |z^n - z_0^n| \to 0;$$

5) функция не ограничена, т. е. для каждого $M > 0$ найдётся z, для которого $|z^n| > M$.

О монотонности функции $w = z^n$ говорить бессмысленно, так как в комплексных числах нет «хорошего» отношения порядка. Существенным отличием от действительного случая является множество значений степенной функции в комплексном случае. Например, множество значений функции $y = x^2$ — это луч $[0; +\infty)$, т. е. *не все* действительные числа. В то же время множество значений любой степенной функции $w = z^n$, $n \in N$, — это множество C *всех* комплексных чисел.

Определение. Для заданного $z \in C$ любое число, n-я степень которого равна z, называют **корнем n-й степени из комплексного числа z.** Множество всех корней n-й степени из z обозначают $\sqrt[n]{z}$.

Ясно, что множество $\sqrt[n]{0}$ состоит из единственного числа 0. Оказывается, что если $z \neq 0$, то множество $\sqrt[n]{z}$ всегда состоит из n различных чисел.

Теорема. Для каждого комплексного числа $z \neq 0$ множество $\sqrt[n]{z}$ состоит из чисел $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, которые задаются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\alpha = \arg z$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказательство. Запишем $z \neq 0$ в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Возьмём любое число z_k, заданное формулой из условия теоремы. Проверим, что $z_k^n = z$.

По формуле Муавра получаем:

$$z_k^n = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)^n \cdot \left(\cos\left(n \cdot \frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(n \cdot \frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right)\right) =$$
$$= |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = z.$$

Теперь наоборот: возьмём любой корень уравнения $u^n = z$. Надо доказать, что u — одно из чисел z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, заданных этой формулой. Пусть $u = |u|(\cos t + i\sin t)$. Тогда

$$u^n = (|u|(\cos t + i\sin t))^n = |u|^n(\cos(nt) + i\sin(nt)) =$$
$$= |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = z.$$

Значит, $|u|^n = |z|$, то есть $|u| = \sqrt[n]{|z|}$ и $\cos(nt) + i\sin(nt) = \cos\alpha + i\sin\alpha$, т. е. $\cos(nt) = \cos\alpha$ и $\sin(nt) = \sin\alpha$. Следовательно, углы nt и α различаются на слагаемое, кратное 2π, т. е.

$$nt = \alpha + 2\pi m, \quad t = \frac{\alpha + 2\pi m}{n}, \; m \in \boldsymbol{Z}.$$

Целое число m разделим (с остатком k) на n:

$$m = qn + k, \; q \in \boldsymbol{Z}, \; k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Тогда

$$t = \frac{\alpha + 2\pi(qn + k)}{n} = \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + 2\pi q$$

и поэтому

$$u = |u|(\cos t + i\sin t) =$$
$$= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + 2\pi q\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + 2\pi q\right)\right) =$$
$$= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right) = z_k.$$

Следствие. Множество

$$\sqrt[n]{1} = \left\{ \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \right) \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}$$

содержит число 1 и состоит из вершин правильного n-угольника, вписанного в числовую окружность (рис. 171).

Обратите внимание, множество $\sqrt[n]{1}$ корней n-й степени из *комплексного* числа 1 состоит из n чисел, а множество $\sqrt[n]{1}$ корней n-й степени из *действительного* числа 1 состоит из одного числа — арифметического корня из неотрицательного числа. Выход из неоднозначного понимания символа $\sqrt[n]{\ }$ на самом деле происходит по фактической ситуации: как правило, по условию известно (понятно), с какими числами мы работаем — с действительными или комплексными.

Пример 4 Найти множество $\sqrt[n]{z}$ и изобразить его на комплексной плоскости:

а) $\sqrt{-i}$; б) $\sqrt[6]{8}$.

Решение. Действуем по формуле из теоремы.

а) По условию $z = -i$, $|z| = 1, \alpha = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\sqrt{-i} = \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k \right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k \right) \mid k = 0; 1 \right\} =$$

$$= \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4} \right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} \right); \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Построение: отмечаем $z = -i$, аргумент $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ делим на 2 (ведь по условию у нас корень квадратный), проводим луч $\left\{ z \mid \arg z = -\frac{\pi}{4} \right\}$ до пересечения с числовой окружностью, получаем:

$$z_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{4} \right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

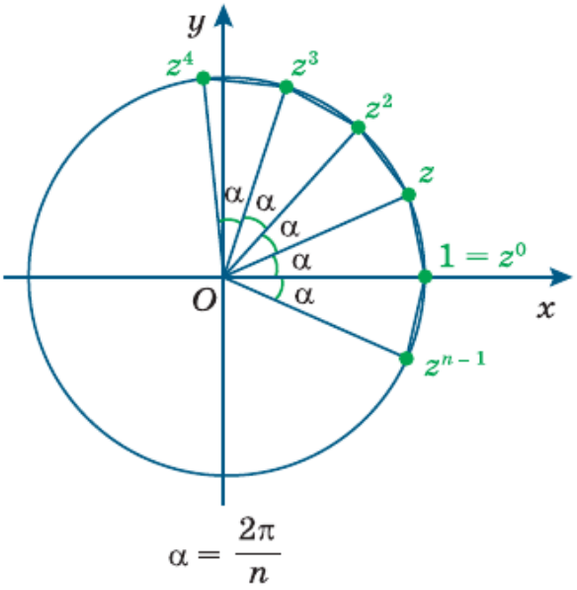


Рис. 171

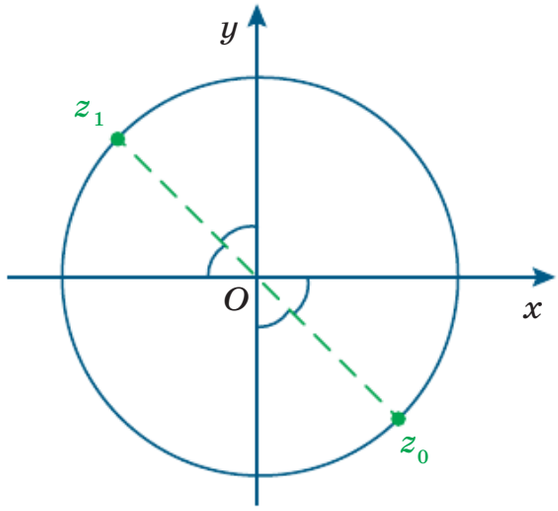


Рис. 172

Второй из корней противоположен первому:

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = -z_0 \text{ (рис. 172).}$$

б) По условию[1] $z = 8$, $|z| = 8$, $\alpha = \arg z = 0$. По формуле получаем[2]:

$$\sqrt[6]{8} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi k}{6}\right) \mid k = 0, 1, \ldots, 5\right\} =$$

$$= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}\right) \mid k = 0, 1, \ldots, 5\right\}.$$

Формально остаётся записать все шесть ответов — при $k = 0, 1, \ldots, 5$. Для построения можно использовать следствие: множество $\left\{\left(\cos\frac{2\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi k}{6}\right) \mid k = 0, 1, \ldots, 5\right\}$ содержит число 1 и состоит из вершин правильного шестиугольника, вписанного в числовую окружность (рис. 173).

---

[1] Внимание: $z = 8$ — это равенство комплексных чисел, а $|z| = 8$ — равенство действительных чисел.

[2] В формуле $\sqrt[6]{8}$ — множество комплексных чисел, а $\sqrt{2}$ — корень из действительного числа 2.

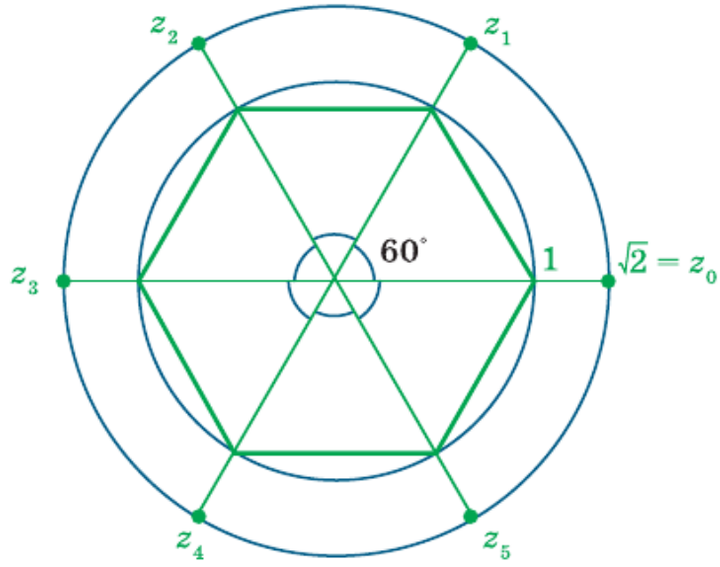


Рис. 173

Остаётся только не забыть ещё про гомотетию с коэффициентом $\sqrt{2}$.

Ответ: а) $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$; б) $\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \pm\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Упражнения

Вычислите.

30.1. а) $(i-1)^2$; в) $(i+1)^4$;
б) $(3-2i)^2$; г) $(3+2i)^5$.

30.2. а) $(i+1)^2 \cdot i^7$; в) $(1-i)^4 \cdot i^{-3}$;
б) $(2+3i)^2 \cdot i^{11}$; г) $(2-3i)^{-2} \cdot i^{-3}$.

30.3. Найдите аргумент (в градусах) комплексного числа:
а) $(\cos 17^\circ + i\sin 17^\circ)^7$; в) $(\cos 27^\circ + i\sin 27^\circ)^{-17}$;
б) $(\cos 12^\circ - i\sin 12^\circ)^{12}$; г) $(\cos 2^\circ - i\sin 2^\circ)^{-222}$.

30.4. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства:
а) $|i-1|^n > 10$; в) $|i-1|^n \geqslant \left|\left(i\sqrt{3}+1\right)^2\right|$;
б) $|0{,}3+0{,}4i|^n < 0{,}125$; г) $|0{,}3+0{,}4i|^n \leqslant |2i-1|^{-3}$.

30.5. Пусть $u + iv = (x + iy)^2$. Найдите формулу, выражающую:
а) u через x и y; в) $u^2 + v^2$ через $x^2 + y^2$;
б) v через x и y; г) u через $x \neq 0$ и v.

30.6. Для функции $w = z^2$, $w = u + iv$, $z = x + iy$ найдите в w-плоскости образ:
а) прямой $x = 0$ из z-плоскости;
б) прямой $y = 0$ из z-плоскости;
в) прямой $x = 1$ из z-плоскости;
г) прямой $y = -2$ из z-плоскости.

30.7. Используя формулу $z_{1,\,2} = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ корней квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, с *комплексными* коэффициентами, решите уравнение:
а) $z^2 + iz + 2 = 0$; в) $z^2 - (i - 1)z - i = 0$;
б) $z^2 - z + 1 - i = 0$; г) $z^2 - 3(i + 1)z + 5i - 1 = 0$.

30.8. Найдите множество $\sqrt[3]{z}$ и изобразите ответ в комплексной плоскости:
а) $\sqrt[3]{1}$; б) $4\sqrt{2}(1 - i)$; в) $\sqrt[3]{-i}$; г) $\dfrac{\sqrt{3} + i}{16}$.

30.9. Найдите множество $\sqrt[4]{z}$ и изобразите ответ в комплексной плоскости:
а) $\sqrt[4]{1}$; б) $0{,}5\left(i\sqrt{3} - 1\right)$; в) $\sqrt[4]{-1}$; г) $-0{,}5\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

30.10. Для чисел $z_k = R\left(\cos\dfrac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2\pi k}{n}\right)$; $-\pi < \alpha \leqslant \pi$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$:
а) вычислите $|z_1 - z_0|$;
б) докажите, что $|z_{k+1} - z_k|$ не зависит от k;
в) вычислите $|z_2 - z_1|$;
г) докажите, что $|z_{k+2} - z_k|$ не зависит от k.

§ 31. Приближения функций многочленами. Степенные ряды

Что происходит «внутри» компьютера или калькулятора, когда мы нажимаем клавишу exp, sin или cos? Вряд ли платы, чипы и блоки гаджетов действуют по определению, т. е. рисуют координатную плоскость, точку на числовой окружности, находят её координаты,

проводят касательные к графику и т. д. Конечно, нет! Используются приближения «сложных» функций «простыми», а именно: приближения многочленами. Для вычисления их значений хватает всего лишь четырёх арифметических действий.

Приближения многочленами помогают и в тех случаях, когда функцию $y = f(x)$ действительной переменной требуется продолжить до функции $w = f(z)$ комплексной переменной. Например, ответить на вопрос, что такое $\cos z$, $\sin z$, e^z для комплексных значений z. Но об этом разговор будет дальше, а сейчас рассмотрим случай функции действительной переменной $y = f(x)$.

Начнём с того, как производные и исследование функций на монотонность помогают при доказательстве алгебраических неравенств.

Теорема 1. Если для двух непрерывных на промежутке $[a; +\infty)$ функций выполнены условия $f(a) = g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ для всех $x > a$, то $f(x) > g(x)$ для всех $x > a$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = h(x)$, $h(x) = f(x) - g(x)$. Во всех точках открытого промежутка $(a; +\infty)$ её производная положительна, так как

$$h'(x) = (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) > 0.$$

Так как $h'(x) > 0$, то функция $y = h(x)$ возрастает на $(a; +\infty)$, а в силу непрерывности она возрастает и на $[a; +\infty)$. Кроме того, $h(a) = f(a) - g(a) = 0$. Значит, если $x > a$, то $h(x) > h(a)$, $h(x) > 0$, т. е. $f(x) - g(x) > 0$, $f(x) > g(x)$.

Отметим, что то же утверждение (и его доказательство) верно и для отрезка $[a; b]$, и для полуинтервала $[a; b)$.

Пример 1 Доказать, что для всех $x > 0$ верно неравенство:

а) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$;

б) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$;

в) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$;

г) $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Решение. а) Пусть $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, $a = 0$. Тогда $f(0) = 1 = g(0)$. Проверим условие $f'(x) > g'(x)$, $x > 0$. Найдём производные: $(\cos x)' = -\sin x$, $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)' = -x$. Получаем: $-\sin x > -x$,

$\sin x < x$, а это неравенство для $x > 0$ мы уже доказали в приложении к § 4. По теореме 1 получаем, что $f(x) > g(x)$, $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$.

б) На луче $[0; +\infty)$ рассмотрим функции $f(x) = \sin x$, $g(x) = x - \frac{x^3}{6}$. Для них $f(0) = 0 = g(0)$. Проверим, что $f'(x) > g'(x)$, $x > 0$. Имеем: $(\sin x)' = \cos x$, $\left(x - \frac{x^3}{6}\right)' = 1 - \frac{x^2}{2}$. Получаем: $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, а это — неравенство из пункта «а». Итак, $f(x) > g(x)$, $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

в) Пусть $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $g(x) = \cos x$, $x \geqslant 0$. Тогда $f(0) = 1 = g(0)$. Проверим, что $f'(x) > g'(x)$ при $x > 0$. Имеем: $f'(x) = -x + \frac{x^3}{6}$, $g'(x) = -\sin x$. Получаем: $-x + \frac{x^3}{6} > -\sin x$; $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, а это — неравенство из пункта «б». Значит, $f(x) > g(x)$, $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} > \cos x$, $x > 0$.

Аналогично пункт «г» следует из пункта «в». ■

Цепочку этих неравенств можно продолжить. Для всех $x > 0$ верны неравенства:

а) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$;

б) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$ и т. д.

Для $x < 0$ неравенства в пункте «а» не изменятся, ведь в них участвуют чётные функции. А неравенства в пункте «б» надо заменить на противоположные, так как функции нечётны.

Эти неравенства играют фундаментальную роль в тех приложениях математики, в которых требуются вычисления значений тригонометрических функций. В них, скажем, неравенства для синуса интерпретируют так:

погрешность[1] *приближения* $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ *меньше* $\frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$.

Например, для $x = 0{,}5$ получаем, что погрешность будет меньше $\frac{1}{32 \cdot 120} = \frac{1}{3840} < 0{,}0003$. Прямой подсчёт показывает, что

[1] Имеется в виду абсолютная погрешность, т. е. модуль разности.

$\sin 0{,}5 \approx 0{,}479425\ldots$, а $0{,}5 - \frac{0{,}5^3}{6} = 0{,}4791(6)$. Мы видим, что, действительно, ошибка составляет меньше $0{,}00027$.

А неравенство $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$ используют так:

погрешность приближения $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$ *меньше* $\frac{x^8}{8!}$.

Здесь для $x = 0{,}5$ погрешность будет меньше $\frac{1}{256 \cdot 40\,320} < 10^{-7}$: совпадение с верным ответом в *семи* первых знаках после запятой! Для меньших значений переменной приближение будет ещё более точным.

Повторяя решение примера 1, можно методом математической индукции доказать следующую теорему.

Теорема 2. Для всех x и всех натуральных k:

а) погрешность приближения $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots - \frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}$ меньше $\frac{x^{4k}}{(4k)!}$;

б) погрешность приближения $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}$ меньше $\frac{|x|^{4k+1}}{(4k+1)!}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ для $a > 0$ (см. пример 2 в Приложении к § 2 и упражнение 31.8), то при фиксированном x погрешность этих приближений стремится к нулю при неограниченном возрастании k.

После работ Л. Эйлера эти приближённые равенства в математике записывают в виде точных равенств, но с бесконечным числом слагаемых в правой части:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

и говорят о разложении функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$ в *степенные ряды* (или *по степеням переменной*).

Пример 2 Доказать, что при $x > 0$ верно неравенство:

а) $e^x > 1 + x$;

б) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$;

в) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$;

г) $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdot e^x$.

Решение. а) Пусть $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x$, $x \geqslant 0$. Тогда $f(0) = 1 = g(0)$ и так как $(e^x)' = e^x$, $(1 + x)' = 1$, $e^x > 1$ при $x > 0$, то $f'(x) > g'(x)$. Значит, $f(x) > g(x)$, $x > 0$.

б) Если $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $x \geqslant 0$, то $f(0) = 1 = g(0)$. Проверим, что $f'(x) > g'(x)$. Получаем: $e^x > 1 + x$, а это — неравенство из пункта «а».

в) Следует из пункта «б» так же, как пункт «б» следует из пункта «а».

г) Здесь надо действовать, как в пунктах «а»—«в», доказывая поочерёдно неравенства:

$$e^x < 1 + x \cdot e^x;\ e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} \cdot e^x;\ e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdot e^x;$$

$$e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdot e^x.$$

В общем виде при $x > 0$ для любого натурального n погрешность приближения $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ меньше $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^x$. Например, при $x = 0{,}1$ и $n = 3$ практически устные вычисления в правой части дают

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + 0{,}1 + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{6} =$$

$$= 1 + 0{,}1 + 0{,}005 + 0{,}0001(6) = 1{,}1051(6),$$

а калькулятор даёт ответ $e^{0{,}1} = 1{,}105170918\ldots$; совпадение практически до пятого знака.

При фиксированном $x > 0$ последовательность $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^x$ сходится к 0 при $n \to \infty$. Поэтому значения многочленов $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ сходятся к e^x. То же самое верно и для $x < 0$. Получаем ещё одно зна-

менитое разложение в степенной ряд. На этот раз — показательной функции $y = e^x$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

или, корректнее,

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Упражнения

31.1. Докажите неравенство при $x > 0$:

а) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} < \cos x$;

б) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$;

в) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} < \sin x$;

г) $\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$.

31.2. Докажите неравенство:

а) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, $x \geqslant 2{,}25$;

б) $3x\sqrt[3]{x} + 1 > 4x$, $x \geqslant 3$;

в) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, $1 < x < 2{,}25$;

г) $3x\sqrt[3]{x} + 1 > 4x$, $1 < x \leqslant 3$.

Докажите неравенство при $x > 0$.

31.3. а) $\ln(1 + x) < x$;

б) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x)$;

в) $\ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$;

г) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1 + x)$.

31.4. а) $e^x < 1 + x \cdot e^x$;

б) $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} \cdot e^x$;

в) $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdot e^x$;

г) $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^x$, используя метод математической индукции.

31.5. Докажите аналог теоремы 1 для луча $(-\infty; a]$ и докажите, что при $x < 0$:

а) $e^x > 1 + x$;

б) $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!}$;

в) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$;

г) $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.

31.6. Для $x_n = \frac{2^n}{n!}$ вычислите:

а) x_1; б) x_2; в) x_4; г) $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

31.7. Для $x_n = \frac{2^n}{n!}$ докажите, что:

а) $x_n > x_{n+1}$, $n \geqslant 2$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$;

в) существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

31.8. Для фиксированного $a > 1$ и $x_n = \frac{a^n}{n!}$ докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$;

б) $x_n > x_{n+1}$, начиная с некоторого номера;

в) существует $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

г) $c = 0$.

31.9. Используя калькулятор только для арифметических действий, вычислите по формулам $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ и $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ приближённое значение:

а) $\sin 0{,}5$; в) $\sin 0{,}3$;

б) $\cos 0{,}2$; г) $\cos 0{,}1$.

31.10. Используя на калькуляторе клавиши sin и cos, вычислите и оцените абсолютную погрешность приближений, полученных в упражнении 31.9, с точностью до первой значащей цифры:

а) $\sin 0{,}5$; в) $\sin 0{,}3$;

б) $\cos 0{,}2$; г) $\cos 0{,}1$.

§ 32. Тригонометрические функции комплексной переменной. Тождество Эйлера

Выпишем вместе полученные в § 31 разложения в степенные ряды:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots, \tag{1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots, \tag{2}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots. \tag{3}$$

По правым частям этих равенств мы видим поразительный факт: между показательной функцией $y = e^x$ и тригонометрическими функциями $y = \cos x$, $y = \sin x$ есть какая-то тесная связь! Ведь при разложении в степенные ряды получаются одни и те же слагаемые, правда с пропусками «через раз» и с изменениями в знаках. Обосновать эту связь помогают комплексные числа.

Для чисто мнимого числа $z = iy$, $y \in \boldsymbol{R}$, определим $e^z = e^{iy}$, подставив iy в правую часть равенства (3). Получим:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \frac{(iy)^8}{8!} + \frac{(iy)^9}{9!} + \dots.$$

Так как $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$, $i^9 = i$, ..., то

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - \dots\right).$$

Мы видим, что в скобках получаются разложения (1) и (2) тригонометрических функций по степеням переменной y. Значит, наше определение комплексного числа e^{iy} корректно и, более того,

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Это знаменитая *формула Эйлера*.

Если $y = 0$, то $e^{iy} = e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$. Аналогично и $e^{2\pi \cdot i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$. Если $y = \frac{\pi}{2}$, то $e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

А вот при $y = \pi$ частным случаем формулы Эйлера является, пожалуй, даже более знаменитое *тождество Эйлера*

$$e^{i\pi} = -1;\ e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Оно связывает вместе пять основных математических числовых констант 0, 1, π, e, i, между которыми, если основываться только на их первоначальных определениях, казалось бы, никаких общих соотношений нет и быть не может.

Для комплексного числа $z = x + iy$ теперь естественно определить его *экспоненту* e^z как $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Если $y = 0$, то $e^z = e^x \cdot e^{i \cdot 0} = e^x \cdot 1 = e^x$.

Теорема 1. Пусть $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ — экспонента числа $z \in \boldsymbol{C}$. Тогда:

а) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;

б) $e^{z_1 - z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

в) множество значений функции $w = e^z$ — все ненулевые комплексные числа;

г) функция $w = e^z$ периодична с чисто мнимым периодом $T = 2\pi i$.

Доказательство. а) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) =$
$= e^{x_1 + x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1 + z_2}$.

б) Проверяется аналогично.

в) Каждое ненулевое комплексное число w имеет тригонометрическую форму записи $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Тогда для комплексного числа $z = \ln|w| + i\alpha$ получаем:

$$e^z = e^{\ln|w| + i\alpha} = e^{\ln|w|}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = w.$$

г) $e^{z+T} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+iy}e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z \cdot 1 = e^z$.

Мы видим, что функция $w = e^z$ в чём-то похожа на функцию $y = e^x$ (см. пункты «а» и «б» теоремы 1), но в чём-то и сильно отличается от неё (см. пункты «в» и «г» теоремы 1). Например, определить логарифмическую функцию $w = \ln z$ комплексной переменной как обратную (однозначную) функцию к $w = e^z$ не получится, так как последняя функция необратима, ведь различным значениям переменной может соответствовать одно и то же значение функции: $e^{z \pm 2\pi i} = e^z$.

Формула Эйлера $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ помогает при определении $\cos z$ и $\sin z$. Смотрите: сначала подставим в неё $-y$ вместо y, получим: $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$. Значит, $e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos y$; $e^{iy} - e^{-iy} = 2i\sin y$ и $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$; $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$. Грубо говоря, мы прочли формулу Эйлера справа налево, выразив тригонометрические функции действительной переменной через показательную. А теперь мы сохраним эти выражения для любого комплексного числа.

Определение. $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Мы продолжили функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$, до функций $w = \cos z$ и $w = \sin z$, $z \in \boldsymbol{C}$. При таком продолжении большинство замечательных свойств тригонометрических функций сохраняются, но появляются и необычные. Часть свойств мы представим в следующей теореме, а часть — в упражнениях к параграфу.

Теорема 2. а) $\cos(-z) = \cos z$; $\sin(-z) = -\sin z$;
б) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$; $\sin(z + 2\pi) = \sin z$;
в) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;
г) множество значений функции $w = \cos z$ (функции $w = \sin z$) — все комплексные числа.

Доказательство. а) $\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$;

б) $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z + 2\pi)} - e^{-i(z + 2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} \cdot e^{2\pi i} - e^{-iz} \cdot e^{-2\pi i}}{2i} =$

$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$;

в) $\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2 - (e^{iz} - e^{-iz})^2}{4} =$

$= \frac{2e^{iz}e^{-iz} - (-2e^{iz}e^{-iz})}{4} = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$.

г) Проверим, что для каждого $z_0 \in \boldsymbol{C}$ уравнение $\cos z = z_0$ имеет корни.

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = z_0,\ e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 2z_0,\ (e^{iz})^2 - 2z_0 \cdot e^{iz} + 1 = 0,$$

$$w^2 - 2z_0 w + 1 = 0.$$

Получаем квадратное уравнение относительно $w = e^{iz}$. Оно имеет корни $w_{1,\,2}$ в $\boldsymbol{C}$, как и вообще любое квадратное уравнение в комплексной плоскости. Так как его свободный коэффициент отличен от нуля, то $w_{1,\,2}$ отличны от нуля. А любое ненулевое комплексное число равно экспоненте какого-то комплексного числа (см. теорему 1), т. е. уравнения $e^{iz} = w_1$, $e^{iz} = w_2$ имеют корни. Останется поделить их на i и найти корни уравнения $\cos z = z_0$.

Пример 1 Доказать, что $\sin(\pi + z) = -\sin z$.

Решение. Так как $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$,

$$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1, \text{ то}$$

$$\sin(\pi + z) = \frac{e^{i(\pi+z)} - e^{-i(\pi+z)}}{2i} = \frac{e^{i\pi}\cdot e^{iz} - e^{-i\pi}\cdot e^{-iz}}{2i} =$$

$$= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

Пример 2 Решить уравнение $\cos z = -3$.

Решение. Преобразуем уравнение $\cos z = -3$. Имеем:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -3,\ e^{iz} + e^{-iz} = -6,\ e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = -6,$$

$$(e^{iz})^2 + 6e^{iz} + 1 = 0,\ e^{iz} = -3 \pm \sqrt{8}.$$

Пусть $z = x + iy$. Тогда $iz = -y + ix$ и $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i\sin x) = -3 \pm \sqrt{8}$. Значит, $e^{-y}\cos x = -3 \pm \sqrt{8}$, $e^{-y}\sin x = 0$. Так как $e^{-y} > 0$ и $-3 \pm \sqrt{8} < 0$, то $\sin x = 0$, $\cos x < 0$, т. е. $x = (2k + 1)\pi$. Найдём y: $e^{-y} = 3 \mp \sqrt{8}$, $-y = \ln\left(3 \pm \sqrt{8}\right)$. Получаем ответ:

$$z = \pi(2k + 1) - i\ln\left(3 \pm \sqrt{8}\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Обратите внимание:

$$-\ln\left(3 \pm \sqrt{8}\right) = \ln\left(\frac{1}{3 \pm \sqrt{8}}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{3 \mp \sqrt{8}}{9 - 8}\right) = \ln\left(3 \mp \sqrt{8}\right),$$

так что минус в мнимой части ответа можно заменить на плюс.

Упражнения

Найдите e^{it} при данном значении t.

32.1. а) $t = 0$; б) $t = 2\pi$; в) $t = \pi$; г) $t = -\frac{\pi}{2}$.

32.2. а) $t = \frac{\pi}{6}$; б) $t = \frac{\pi}{4}$; в) $t = -\frac{2\pi}{3}$; г) $t = -\frac{5\pi}{4}$.

Докажите тождество.

32.3. а) $e^{i(t + 2\pi)} = e^{it}$; в) $e^{i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} = ie^{it}$;

б) $e^{i(t + \pi)} = -e^{it}$; г) $e^{i\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)} = -ie^{it}$.

32.4. а) $e^{z + 2\pi i} = e^{z}$; в) $e^{z - i\frac{\pi}{2}} = -ie^{z}$;

б) $e^{z - i\pi} = -e^{z}$; г) $e^{z - i\frac{3\pi}{2}} = ie^{z}$.

32.5. Вычислите e^z для:
а) $z = \ln 2 + 6\pi i$; в) $z = \ln 0{,}5 - 6{,}5\pi i$;
б) $z = \ln 5 + 5\pi i$; г) $z = \ln 0{,}2 - 7{,}5\pi i$.

32.6. Решите уравнение:
а) $e^z = 1$; б) $e^z = -1$; в) $e^z = i$; г) $e^z = -5i$.

Докажите тождество.

32.7. а) $\cos(2\pi - z) = \cos z$; в) $\cos(\pi + z) = -\cos z$;
б) $\sin(2\pi - z) = -\sin z$; г) $\sin(\pi + z) = -\sin z$.

32.8. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\sin z$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos z$.

32.9. а) $\sin 2z = 2\sin z\cos z$;
б) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$;
в) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
г) $\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1\cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$.

32.10. Решите уравнение:
а) $\cos z = 0$; в) $\cos z = -3$;
б) $\sin z = -1$; г) $\sin z = i$.

Итак, в главе 6

Рассмотрели свойства прямой и обратной пропорциональности для комплексных чисел. Установили геометрический смысл линейной и дробно-линейной функций $w = kz + m$ и $w = \frac{az+b}{cz+d}$: они задаются последовательным выполнением известных преобразований плоскости (поворот, гомотетия, параллельный перенос, симметрия).

Основываясь на тригонометрической форме записи комплексных чисел и на формуле Муавра, изучили свойства степенной функции $w = z^n$ с натуральным показателем.

Выяснили, что зависимость $w = \sqrt[n]{z}$, обратная к степенной, является неоднозначной: для каждого $z \neq 0$ есть ровно n чисел, n-я степень которых равна z.

Узнали о том, как исследование функций на монотонность с помощью производных помогает приближать тригонометрические и показательные функции действительной переменной многочленами и раскладывать эти функции в степенные ряды.

В найденные формулы разложения в степенные ряды подставили комплексную переменную и нашли, каким именно образом определять показательную функцию $w = e^z$, $z \in \boldsymbol{C}$, и тригонометрические функции $w = \cos z$, $w = \sin z$. Более того, обнаружили зависимость между функциями $w = e^z$, $w = \cos z$, $w = \sin z$ и установили основные свойства этих функций.

Вопросы

1. Сформулируйте правила умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме записи.
2. Объясните, почему функция $w = -iz$ задаёт поворот вокруг начала координат.
3. Объясните, почему функция $w = -2iz + 3$ задаёт отображение подобия комплексной плоскости.
4. Почему комплексное число и обратное к нему комплексное число лежат по разные стороны от оси Ox?

5. Сколько различных значений принимают члены геометрической прогрессии i, i^2, i^3, i^4, ...?

6. Сколько членов геометрической прогрессии 1, $3i$, $(3i)^2$, $(3i)^3$, ... лежат в круге радиусом 2021 с центром в начале координат?

7. Объясните, почему множество $\sqrt[n]{1}$ симметрично относительно оси Ox.

8. Запишите формулу для нахождения корней n-й степени из комплексного числа.

9. Приведите геометрическое обоснование неравенства $\sin x < x$ для $0 < x < 1$.

10. Постройте графики $y = e^x$ и $y = 1 + x$ и геометрически обоснуйте неравенство $e^x > 1 + x$ при $x \neq 1$.

11. В правой части разложения $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$ допишите слагаемые, содержащие x^{10} и x^{12}.

12. В правой части разложения $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$ допишите слагаемые, содержащие x^{11} и x^{13}.

13. Запишите формулу Эйлера для e^{iy}, $y \in \boldsymbol{R}$.

14. Как $\cos y$ и $\sin y$ можно выразить через e^{iy} и e^{-iy}?

15. Сформулируйте определения $\cos z$ и $\sin z$ для $z \in \boldsymbol{C}$.

16. Докажите основное тригонометрическое тождество для комплексных чисел.

Тест

1. Какая из следующих функций задаёт поворот на $-90°$ вокруг начала координат?

а) $w = i^{-1}z$ б) $w = iz$ в) $w = -i^{-1}z$ г) $w = -2iz$

2. Какая из следующих функций переводит число $-2i$ в число из второй координатной четверти (не включая ось координат)?

а) $w = -z$
б) $w = z^2$
в) $w = z + 3i + 2$
г) $w = z + 3i - 1$

3. Укажите функцию, которая переводит треугольник $\triangle$ в треугольник с площадью, большей в 4 раза.

а) $w = -4z - 4$
б) $w = (2i - 1)z + 2$
в) $w = z + 2i + 2$
г) $w = -\sqrt{2}(1 + i)z + i\sqrt{3}$

4. Сколько различных значений принимают члены последовательности $z_n = i^{3n-1}$, $n \in N$?

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5

5. Сколько членов геометрической прогрессии $1, 2i, (2i)^2, (2i)^3, (2i)^4, \ldots$ лежат в круге радиусом 1000 с центром в начале координат?

а) 9 б) 10 в) 11 г) 12

6. На рисунке 174 изображено комплексное число z. Укажите верное утверждение.

а) $\operatorname{Re}\bar{z} < 0$ б) $\operatorname{Im}\frac{1}{z} < 0$ в) $\operatorname{Im}\bar{z} > 0$ г) $\operatorname{Im}(\bar{z})^{-1} > 0$

7. На рисунке 175 изображено комплексное число z. Укажите неверное утверждение.

а) $\operatorname{Re}(z)^2 > 0$ б) $\operatorname{Re} z < 0$ в) $\operatorname{Im} z > 0$ г) $\operatorname{Im}(z)^2 < 0$

8. Найдите значение суммы $2e^{0,5\pi i} - 3e^{i\pi} + 4e^{1,5\pi i}$.

а) $3 - 2i$ б) 3 в) $3 + 2i$ г) $3i - 2$

9. Укажите равенство, не являющееся тождеством.

а) $\sin^2 z + \cos^2(-z) = 1$ в) $-\sin^2(-z) = \cos^2 z - 1$

б) $\sin\bar{z} = -\sin z$ г) $\sin(-z) = -\sin z$

10. Укажите корень уравнения $e^z = -2i$.

а) $z = -\ln 2 + \pi i$ в) $z = \ln 2 + 1{,}5\pi i$

б) $z = -\ln 2 + 3{,}5\pi i$ г) $z = \ln 2 - 1{,}5\pi i$

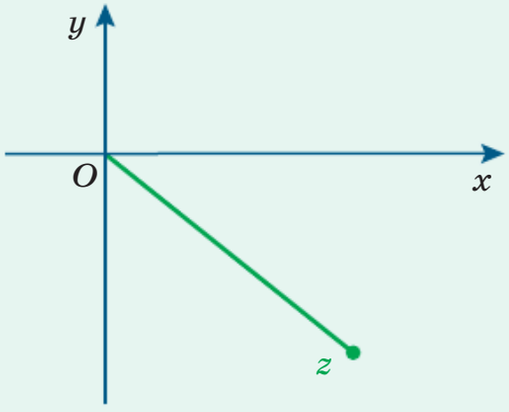


Рис. 174

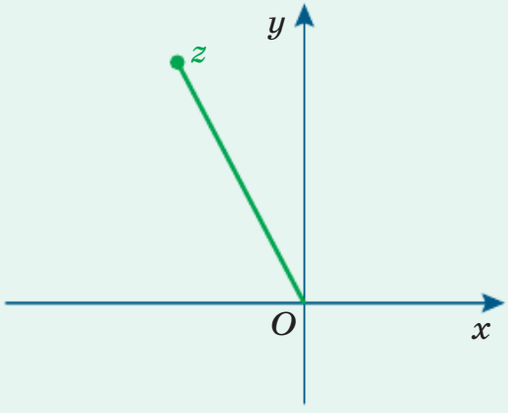


Рис. 175

Из истории математики

Появление в математике комплексных чисел датируется примерно серединой XVI в. Они появились в связи с методами решения кубических уравнений и уравнений четвёртой степени, которые предложили итальянские математики дель Ферро, Н. Тартальи, Дж. Кардано, Л. Феррари, Р. Бомбелли.

Отношение математиков к квадратным корням из отрицательных чисел заметное время оставалось весьма скептическим. Кардано называл такие числа «софистически отрицательными» и старался ими не пользоваться. Декарт предложил называть их «мнимыми», отличая их от настоящих «реальных» чисел. Лейбниц писал о них, как о «двойственных сущностях, находящихся между бытием и небытием», хотя и использовал их при интегрировании. Даже Эйлер уже в 1741 г. писал так: «Я нашёл недавно замечательный парадокс, а именно, что значение выражения $0{,}5\left(2^{\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}\right)$ весьма близко к $\frac{10}{13}$ ...». В целом на протяжении XVII в. и первой трети XVIII в. мнимыми, следуя Декарту, чаще всего называли величины, которые возникали при тех или иных операциях над действительными числами, но отличались от них.

Взгляд на комплексные числа и их роль в математике кардинально изменился после работ Леонарда Эйлера середины и второй половины XVIII в. Среди почти тысячи его научных трудов выделяется своего рода трилогия: «Введение в анализ бесконечно малых» (1748 г.), «Дифференциальное исчисление» (1755 г.), «Интегральное исчисление» (1770 г.). В ней Эйлер представил в систематическом виде огромный материал по всем разделам математического анализа. Базовой для систематизации стала идея представления различных функций в виде бесконечных степенных (и других) рядов, в чём Эйлер в целом следовал И. Ньютону. Подстановка в степенные ряды комплексной переменной вместо действительной в целом позволила Эйлеру адекватно перенести понятия тригонометрических, показательных и логарифмических функций на случай комплексной переменной.

Формулу Муавра в привычном нам виде Эйлер привёл и доказал в главе VIII своего «Введения в анализ...», разве что вместо i он писал

$\sqrt{-1}$, а буквой i обозначал (в 1740—1760-х гг.) бесконечность. Позже (в 1775—1777 гг.) Эйлер стал использовать i именно для обозначения мнимой единицы. Следует подчеркнуть, что вывод формулы Муавра и у самого Муавра, и у Эйлера отличается от современного. Дело в том, что в те времена ещё не было геометрической интерпретации комплексных чисел, которая появилась заметно позже, в работах К. Весселя (1799 г.) и Ж. Аргана (1806 г.). Собственно, сами термины «модуль» и «аргумент» принадлежат О. Коши, который в первой трети XIX в. заложил основы теории функций комплексной переменной.

В 1740 г. Эйлер в письме к И. Бернулли обосновал, что функции $2\cos y$ и $e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}$, являясь решением одного и того же дифференциального уравнения, разлагаются в один и тот же ряд и тем самым равны между собой. Позже он опубликовал и выражение синуса через показательные функции. Только после этого Эйлер выводит знаменитую теперь формулу $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Следует отметить, что в 1714 г. Р. Котс в статье «Логометрия» среди множества других привёл и формулу $it = \ln(\cos t + i\sin t)$, практически эквивалентную формуле $e^{iy} = \cos y + i\sin y$.

Эйлеру же принадлежит явная формулировка *основной теоремы алгебры*, первое корректное доказательство (1799 г.) которой предложил К. Гаусс. После работ Гаусса за числами $x + iy$ прочно закрепился термин «комплексное число».



Казанский федеральный университет.
Казань

§ 33. Равносильность уравнений
§ 34*. Уравнения вида $p(x) = 0$, где $p(x)$ — многочлен
§ 35. Основные методы решения уравнений с одной переменной
§ 36. Системы уравнений
§ 37. Неравенства с одной переменной
§ 38. Уравнения и неравенства с параметрами
§ 39*. Уравнения, неравенства и функции в задачах о среднем арифметическом

Глава 7

Уравнения, неравенства, системы уравнений, системы неравенств

Уравнения, неравенства, системы уравнений, системы неравенств — всё это вы изучали, начиная с 7-го класса. В этой главе, завершающей школьный курс математики, мы снова возвращаемся к решению уравнений (на множестве действительных чисел), неравенств, систем уравнений, систем неравенств: вспомним главное, сделаем необходимые обобщения и дополнения, решим новые примеры.

§ 33. Равносильность уравнений

В этом параграфе речь пойдёт о принципиальных вопросах, связанных с решением уравнений и неравенств с одной переменной: что такое равносильные уравнения, какие преобразования переводят уравнение в равносильное ему, а какие нет; когда и как надо делать проверку найденных корней.

Определение 1. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Например, уравнения $x^2 - 9 = 0$, $(4x - 12)(5x + 15) = 0$ равносильны, оба они имеют по два корня: 3 и -3 (у обоих уравнений одно и то же множество корней $\{-3; 3\}$). Равносильны и уравнения $\sqrt{x} + 5 = 0$, $\sin x = -10$, оба они не имеют корней (множество корней пусто).

Определение 2. Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл (определены) выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Часто используют другой термин: *область допустимых значений переменной* (ОДЗ).

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе математики, основано на шести теоремах о равносильности (все они в той или иной мере вам известны, встречались в учебниках для 8—10-х классов).

Теорема 1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же *нечётную* степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

В теоремах 1—3 нет никаких ограничений на обе части уравнений. Использование этих теорем не приводит к появлению посторонних корней. А вот в следующих трёх теоремах дополнительные ограничения имеются. Без их учёта равносильность не гарантирована, значит, могут появиться посторонние корни и обязательна проверка всех найденных корней.

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же отличное от нуля число или на одно и то же выражение $h(x)$, которое:
а) имеет смысл всюду в области определения уравнения $f(x) = g(x)$;
б) нигде в этой области не обращается в 0,
то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же *чётную* степень получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 6. Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ для всех допустимых значений x, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Приведём примеры, разъясняющие смысл теорем 4—6.

1) Уравнение $x - 2 = 5$ имеет один корень: $x = 7$. Умножив обе части уравнения на $x - 3$, получим уравнение $(x - 3)(x - 2) = 5(x - 3)$. У этого уравнения два корня: 7 и 3, появился посторонний (для исходного уравнения) корень 3. Откуда он взялся? В теореме 4 содержится требование: выражение, на которое мы умножаем обе части уравнения, не должно в области определения исходного уравнения обращаться в 0. Мы же умножили обе части уравнения на выражение $x - 3$, которое обращается в 0 при $x = 3$; именно это значение оказалось посторонним корнем.

Между прочим, если бы исходным было уравнение

$$(x - 3)(x - 2) = 5(x - 3),$$

имеющее два корня (7 и 3), и мы разделили бы обе части уравнения на $x - 3$, то получилось бы уравнение $x - 2 = 5$ с одним корнем (7). Произошла бы *потеря корня*. Потому советуем: не делите обе части уравнения на одно и то же выражение, если вы не уверены в том, что это выражение всюду отлично от нуля.

2) Возьмём то же самое уравнение $x - 2 = 5$ и возведём обе его части в квадрат (т. е. в чётную степень). Получим уравнение $(x - 2)^2 = 25$. У этого уравнения два корня: 7 и -3, появился посторонний (для исходного уравнения) корень -3. Причина его появления состоит в том, что мы возвели обе части уравнения в одну и ту же чётную степень, нарушив при этом условие теоремы 5. В этой теореме содержится требование: обе части уравнения должны быть неотрицательны всюду в области определения исходного уравнения. А выражение $x - 2$ принимает отрицательные значения при $x < 2$.

3) Рассмотрим уравнение $\ln(2x + 3) = \ln(x^2 - 5)$. Потенцируя, получаем $2x + 3 = x^2 - 5$, $x^2 - 2x - 8 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Первый корень удовлетворяет заданному логарифмическому уравнению, а второй — нет. Смотрите: при $x = -2$ оба выражения под знаками логарифмов отрицательны, а логарифм отрицательного числа не существует.

Причина появления постороннего корня $x = -2$ состоит в том, что мы, потенцируя (т. е. «освобождаясь» от знаков логарифмов), нарушили условия теоремы 6. В этой теореме содержится требование: выражения под знаками логарифмов должны быть положительными.

Переход от исходного логарифмического уравнения к уравнению $2x + 3 = x^2 - 5$ привёл к *расширению области определения уравнения*. Область определения логарифмического уравнения задаётся системой неравенств $\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ x^2 - 5 > 0, \end{cases}$ решив которую находим: $x > \sqrt{5}$. Область же определения уравнения $2x + 3 = x^2 - 5$ есть множество всех действительных чисел. По сравнению с логарифмическим уравнением она расширилась: добавился луч $\left(-\infty; \sqrt{5}\right]$. Именно в эту добавленную часть и «проник» посторонний корень $x = -2$.

Перечислим возможные *причины расширения области определения уравнения*:

1) освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину;

2) освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней чётной степени:

3) освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Подведём итоги. *Проверка всех найденных корней уравнения* обязательна, если в результате выполненных преобразований уравнения:

а) произошло расширение области определения уравнения;

б) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень;

в) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Самый надёжный способ проверки — подстановка всех найденных корней в исходное уравнение. Если такая подстановка затруднительна, то используют обходные пути, например с помощью ОДЗ.

Пример Решить уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 2x - 3$; б) $\lg(x^2 - 5x + 4) = \lg(2x - 7)$.

Решение. а) Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{x^2 - 3x + 3}\right)^2 = (2x - 3)^2;$$
$$x^2 - 3x + 3 = 4x^2 - 12x + 9;$$
$$3x^2 - 9x + 6 = 0;$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

Проверка. При $x = 1$ получаем: $\sqrt{1^2 - 3 \cdot 1 + 3} = 2 \cdot 1 - 3$; $1 = -1$ — неверное равенство. Значит, $x = 1$ — посторонний корень.

При $x = 2$ получаем: $\sqrt{2^2 - 3 \cdot 2 + 3} = 2 \cdot 2 - 3$; $1 = 1$ — верное равенство. Значит, $x = 2$ — корень заданного уравнения.

б) «Освободившись» от знаков логарифма, получим:

$$x^2 - 5x + 4 = 2x - 7;$$
$$x^2 - 7x + 11 = 0;$$
$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}.$$

Проверка. Здесь проверка подстановкой затруднительна, поступим по-другому. Найдём область определения заданного логарифмического уравнения:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ 2x - 7 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-4) > 0, \\ x > 3{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1 \text{ или } x > 4, \\ x > 3{,}5; \end{cases} \quad x > 4.$$

Первый из найденных корней удовлетворяет неравенству $x > 4$, а второй — нет. Значит, второй корень посторонний.

Ответ: а) 2; б) $\frac{7 + \sqrt{5}}{2}$.

Упражнения

33.1. Является ли уравнение $\sqrt[3]{x} = 2$ равносильным данному уравнению:

а) $\frac{32}{x} = 4$;

б) $x^2 - 6x - 16 = 0$;

в) $2^x = 256$;

г) $|x - 3| = 5$;

д) $\frac{2x^2 - 16x}{x} = 0$;

е) $\log_2 x = 3$?

33.2. Является ли уравнение $\cos x = 0$ равносильным данному уравнению:

а) $\sin x = 1$;

б) $\cos x \cdot \sqrt{1 - x} = 0$;

в) $\operatorname{ctg} x = 0$;

г) $\cos(x - \pi) = 0$;

д) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sqrt{x - 1} = 0$;

е) $\operatorname{ctg} x \cdot \sin 2x = 0$?

33.3. Распределите уравнения на пары равносильных друг другу. Укажите уравнение, которое оказалось без пары:

а) $x^2 + 4x - 45 = 0$; $3^x = 243$; $|x + 2| = 7$;

$\log_3 x = 2$; $\sqrt{x + 11} = 4$;

б) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = 0$; $5^x = 625$; $|x - 3{,}5| = 0{,}5$;

$\log_{16} x = 0{,}5$; $\sqrt{x^2 + 12} = \sqrt{7x}$;

в) $3x^2 - 13x - 16 = 0$; $2^{0{,}5x - 1} = 128$; $|3x + 1| = 0$;

$\log_2 x = 4$; $\sqrt{6x + 11} = 3$;

г) $\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = 0$; $6^x = 36$; $|x - 3{,}5| = 1{,}5$;

$\log_{0,2} x = -1$; $\sqrt{x^2 + 10} = \sqrt{7x}$.

33.4. Придумайте три уравнения, равносильных уравнению:

а) $|x - 3| = 0$;
б) $\sin x = 2$;
в) $\log_3 x^2 = 4$;
г) $|x + 2| = 0$;
д) $\cos x = -4$;
е) $\sqrt{x^2 - 4} = 0$.

Равносильны ли данные уравнения?

33.5. а) $\frac{x^2 + 5x - 3}{2x^2 + 1} = 3$ и $x^2 + 5x - 3 = 6x^2 + 3$;

б) $\frac{x^2}{\sqrt{x}} = 1$ и $x^2 = \sqrt{x}$;

в) $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 1$ и $\sin x = \cos x - 1$;

г) $\frac{x^2 - 4x - 3}{x^2 - 1} = 2$ и $x^2 - 4x - 3 = 2x^2 - 2$;

д) $\frac{x^3}{\sqrt{x} + 2} = 1$ и $x^3 = \sqrt{x} + 2$;

е) $\frac{\sin x + 1}{\sin x + 3} = 0{,}5$ и $2\sin x + 2 = \sin x + 3$.

33.6. а) $4^x - 16^{x^2} = 0$ и $x(x^4 + 5) = 2x^2(x^4 + 5)$;

б) $\sqrt{0{,}2^x} \cdot 5^{x^2} \sqrt{5} = 25$ и $x^2 - 0{,}5x - 1{,}5 = 0$;

в) $\lg(x - 4) + \lg x = \lg(x - 2)$ и $x^2 + 4x = x - 4$;

г) $5^x - 25^{x^2} = 0$ и $x^3(x-3) = 2x^4(x-3)$;

д) $2^{\sqrt{x}-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 1$ и $\sqrt{x} - x - 3 = 0$;

е) $\lg(x-3) + \lg x = \lg(2x-6)$ и $x^2 - 3x = 2x - 6$.

33.7. а) $\sqrt{4x^2+3} = \sqrt{x^4+5}$ и $4x^2 + 3 = x^4 + 5$;

б) $\sqrt[4]{\cos^2 x + 1} = 1$ и $\cos x = 0$;

в) $\lg(x^2+4) = \lg(x+4)$ и $x^2 + 4 = x + 4$;

г) $\sqrt{3^x + 12} = \sqrt{9^x + 3^{x-2}}$ и $3^x + 12 = 9^x + 3^{x-2}$;

д) $\sqrt[6]{\sin^4 x + 1} = 1$ и $\sin^2 x = 0$;

е) $\ln(x^2) = \ln x$ и $x^2 = x$.

33.8. Найдите область определения (ОДЗ) уравнения:

а) $\sqrt{5-x} = \sqrt{x-2}$;

б) $\frac{\lg(5-x)-1}{\lg(x-2)+1} = 3$;

в) $\sqrt{\frac{5-x}{x-2}} \cdot \lg(x^2-4) = 3$;

г) $\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-2}} = 2$;

д) $\frac{\ln(5-x)}{\ln(x-2)} = 3$;

е) $\sqrt{\frac{5-x}{x-2}} \cdot \lg(x^2-4) = 3$.

33.9. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $\sqrt{16-x^2} = \sqrt{3x-13}$;

б) $\ln(8x-22) = \ln(13-6x)$;

в) $\log_2(x^2-7) + \log_2(5-x^2) = 3$;

г) $\ln(-3x-5) = \ln(9-4x^2)$;

д) $\sqrt{5x-11} = \sqrt{13-7x}$;

е) $\lg(x^2-5x) + \lg(7x-2x^2) = 0{,}25$.

Решите уравнение.

33.10. а) $\sqrt{7x-12} = x$;

б) $\sqrt{2x-3} = x-3$;

в) $\sqrt{x^2+12x-4} = 2x-1$;

г) $\sqrt{7x-13} = x-1$;

д) $\sqrt{7-x} = x-5$;

е) $\sqrt{x^2-x+3} = 2x-3$.

33.11. а) $\sqrt{x^4+x^2-7x+5} = 1-x^2$;

б) $\sqrt{x^4+x^2-7x+5} = x^2-1$;

в) $\sqrt{x^4-17x+8} = x^2-2$;

г) $\sqrt{x^4-17x+8} = 2-x^2$.

33.12. а) $\lg(x^2-2x-8)=\lg(3x-12)$;
б) $\lg(x^2-9x+18)=\lg(2x-12)$.

33.13. а) $(x^2-36)\left(x-\sqrt{6-5x}\right)=0$;
г) $(x^2-25)\left(x-\sqrt{10-3x}\right)=0$;
б) $\dfrac{\sqrt{x^2-49}}{\sqrt{14-5x}-x}=0$;
д) $\dfrac{\sqrt{15-2x}-x}{\sqrt{x^2-25}}=0$;
в) $\dfrac{\sqrt{6-5x}-x}{\log_5(x^2-12)}=0$;
е) $\dfrac{\lg(x^2-8)}{\sqrt{10-3x}-x+2}=0$.

33.14. а) $(\sin 2x-1)\cdot\sqrt{4-x^2}=0$;
б) $(\sin^2 x-\cos^2 x)\cdot\sqrt{3+2x-x^2}=0$;
в) $\operatorname{tg}x\cdot\lg(4-x^2)=0$;
г) $(2\cos 2x-1)\cdot\sqrt{1-x^2}=0$;
д) $\sin 2x\cdot\sqrt{6-x-x^2}=0$;
е) $\operatorname{ctg}x\cdot\ln(9-x^2)=0$.

§ 34*. Уравнения вида $p(x)=0$, где $p(x)$ — многочлен

Вы умеете решать любые уравнения вида $p(x)=0$, где $p(x)$ — многочлен первой или второй степени: $ax+b=0$, $ax^2+bx+c=0$. Если же речь идёт об уравнениях более высоких степеней, то специально этот вопрос мы не обсуждали, хотя в отдельных случаях решали такие уравнения (например, умеем решать биквадратные уравнения четвёртой степени $ax^4+bx^2+c=0$). Теперь подробнее поговорим о решении уравнений более высоких степеней на множестве действительных чисел.

Пример 1 Решить уравнение $2x^3-x-1=0$.

Решение. Попробуем разложить на множители многочлен $2x^3-x-1$. Воспользуемся способом группировки:

$$2x^3-x-1=2x^3-2-x+1=2(x^3-1)-(x-1)=$$
$$=2(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)=(x-1)(2x^2+2x+1).$$

Теперь заданное уравнение можно переписать в виде $(x-1)\times$ $\times(2x^2+2x+1)=0$, откуда следует, что либо $x-1=0$, $x=1$, либо $2x^2+2x+1=0$ — это уравнение действительных корней не имеет.

Ответ: 1.

Уже этот пример показывает, что для решения уравнений вида $p(x)=0$ третьей (четвёртой и т. д.) степени нужно уметь раскладывать многочлен $p(x)$ на множители. Кое-какие приёмы для этого существуют, ниже мы об этом поговорим, полагая, что все коэффициенты рассматриваемых многочленов — целые числа.

Теорема 1. Если $p(x)$ — многочлен n-й степени и $x=r$ — корень многочлена $p(x)$, то $p(x)$ можно представить в виде

$$p(x)=(x-r)q(x),$$

где $q(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени.

Доказательство. Для определённости будем считать, что $p(x)$ — многочлен третьей степени: $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. В условии сказано, что число r — корень многочлена, т. е. $p(r)=0$. Тогда

$$\begin{gathered}p(x)=p(x)-p(r)=(ax^3+bx^2+cx+d)-(ar^3+br^2+cr+d)=\\=a(x^3-r^3)+b(x^2-r^2)+c(x-r)=\\=(x-r)(a(x^2+rx+r^2)+b(x+r)+c)=(x-r)q(x),\end{gathered}$$

где $q(x)=a(x^2+rx+r^2)+b(x+r)+c$ — многочлен второй степени, что и требовалось доказать.

Пример 2 а) Разложить на множители многочлен $x^3+3x^2-12x+4$; б) решить уравнение $x^3+3x^2-12x+4=0$.

Решение. а) Заметим, что $x=2$ является корнем многочлена $p(x)=x^3+3x^2-12x+4$; проверяйте: $p(2)=2^3+3\cdot2^2-12\cdot2+4=0$. Значит,

$$\begin{gathered}p(x)=p(x)-p(2)=(x^3+3x^2-12x+4)-(2^3+3\cdot2^2-12\cdot2+4)=\\=(x^3-2^3)+3(x^2-2^2)-12(x-2)=\\=(x-2)(x^2+2x+4+3x+6-12)=(x-2)(x^2+5x-2).\end{gathered}$$

б) Перепишем заданное уравнение в виде $(x-2)(x^2+5x-2)=0$. Значит, либо

$$x-2=0,\ x=2,\ \text{либо}\ x^2+5x-2=0,\ x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}.$$

Ответ: а) $(x-2)(x^2+5x-2)$; б) $2,\ \frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$.

Этот пример показывает, что мы достигли успеха после того, как «заметили», что $x = 2$ — корень заданного многочлена. «Заметили» — это значит «угадали», «подобрали». Но как «угадать»? Или всегда придётся полагаться на удачу, на интуицию? Оказывается, есть полезная теорема.

Теорема 2. Пусть $p(x)$ — многочлен с целочисленными коэффициентами: $p(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + dx^2 + kx + m$. Если целое число r — корень многочлена $p(x)$, то r — делитель свободного члена m.

Доказательство. Из условия следует, что $p(r) = 0$, т. е.

$$ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} + \ldots + dr^2 + kr + m = 0.$$

Отсюда следует, что $m = r(-ar^{n-1} - br^{n-2} - cr^{n-3} - \ldots - dr - k)$, т. е. $m = rq$, $q \in \boldsymbol{Z}$. Значит, $m \vdots r$, что и требовалось доказать (напомним, что символ $\vdots$ читают так: «делится на»).

Эта теорема означает, что искать целочисленный корень уравнения $p(x) = 0$ следует только среди делителей свободного члена уравнения — это продуктивнее и приятнее, чем слепое угадывание. Разумеется, целочисленного корня может и не быть, но, как говорится, «надежда умирает последней».

Пример 3 Решить уравнение $x^3 - 2x^2 - 2x + 12 = 0$.

Решение. Будем надеяться, что у уравнения есть целочисленный корень. Искать его следует согласно теореме 2 среди делителей числа 12, т. е. среди чисел: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Начинаем пробы: последовательно подставляем выбранные числа в заданное уравнение:

$$x = 1;\ 1 - 2 - 2 + 12 \neq 0;$$
$$x = -1;\ -1 - 2 + 2 + 12 \neq 0;$$
$$x = 2;\ 8 - 8 - 4 + 12 \neq 0;$$
$$x = -2;\ -8 - 8 + 4 + 12 = 0.$$

Нам повезло, есть целочисленный корень $x = -2$. А далее действуем, как в примере 2:

$$p(x) = p(x) - p(-2) = (x^3 - 2x^2 - 2x + 12) - (-8 - 8 + 4 + 12) =$$
$$= (x^3 + 8) - 2(x^2 - 4) - 2(x + 2) =$$
$$= (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 2(x + 2)(x - 2) - 2(x + 2) =$$
$$= (x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 2x + 4 - 2) = (x + 2)(x^2 - 4x + 6).$$

Остаётся решить уравнение $(x + 2)(x^2 - 4x + 6) = 0$. Квадратный трёхчлен $x^2 - 4x + 6$ действительных корней не имеет, так что у заданного уравнения только один действительный корень: $x = -2$.

Ответ: -2.

Пример 4 Решить уравнение $2x^4 - x^3 - 14x^2 + 19x - 6 = 0$.

Решение. Если у уравнения есть целочисленный корень, то искать его следует согласно теореме 2 среди делителей числа -6, т. е. среди чисел: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6. Начинаем пробы: последовательно подставляем выбранные числа в заданное уравнение:

$$x = 1;\ 2 - 1 - 14 + 19 - 6 = 0.$$

Целочисленный корень $x_1 = 1$ обнаружился на первом же шаге. Далее:

$$\begin{gathered}(2x^4 - x^3 - 14x^2 + 19x - 6) - (2 - 1 - 14 + 19 - 6) = \\ = 2(x^4 - 1) - (x^3 - 1) - 14(x^2 - 1) + 19(x - 1) = \\ = (x - 1)(2(x + 1)(x^2 + 1) - (x^2 + x + 1) - 14(x + 1) + 19) = \\ = (x - 1)(2x^3 + x^2 - 13x + 6).\end{gathered}$$

Теперь нам нужно решить уравнение $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$. Продолжим поиски целочисленного корня:

$$\begin{gathered}x = 1;\ 2 + 1 - 13 + 6 \neq 0; \\ x = -1;\ -2 + 1 + 13 + 6 \neq 0; \\ x = 2;\ 16 + 4 - 26 + 6 = 0.\end{gathered}$$

Нашли ещё один корень: $x_2 = 2$. Далее:

$$\begin{gathered}(2x^3 + x^2 - 13x + 6) - (16 + 4 - 26 + 6) = \\ = 2(x^3 - 8) + (x^2 - 4) - 13(x - 2) = \\ = (x - 2)(2x^2 + 4x + 8 + x + 2 - 13) = (x - 2)(2x^2 + 5x - 3).\end{gathered}$$

Осталось решить квадратное уравнение $2x^2 + 5x - 3 = 0$; находим ещё два корня:

$$x_3 = -3,\ x_4 = 0{,}5.$$

Ответ: -3; $0{,}5$; 1; 2.

Теорема 3. Если рациональное число r является корнем приведённого уравнения с целыми коэффициентами, то это число — целое.

Доказательство. Для наглядности ограничимся случаем уравнения третьей степени.

Дано уравнение $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где b, c, d — целые числа. Предположим, что $r = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q \neq 1$. Подставим эту дробь в уравнение:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + b\left(\frac{p}{q}\right)^2 + c \cdot \frac{p}{q} + d = 0;$$

$$p^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = 0;$$

$$p^3 = q(-bp^2 - cpq - dq^2).$$

Обозначим целое число $-bp^2 - cpq - dq^2$ буквой m. Итак, $p^3 = qm$, а это означает, что $p^3 \vdots q$. А теперь смотрите: по условию $q \neq 1$ и $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, т. е. числа p, q не имеют общих делителей (взаимно простые числа). Но тогда и у числа p^3, т. е. ppp, нет общих делителей, отличных от 1, с числом q, а потому соотношение $p^3 \vdots q$, если $q \neq 1$, выполняться не может. Полученное противоречие означает, что на самом деле $q = 1$, т. е. r — целое число.

Как доказанная теорема применяется на практике? Если дано *приведённое уравнение* с целыми коэффициентами, то следует поискать целочисленный корень уравнения среди делителей свободного члена. Если это не удаётся, то рациональных корней у уравнения нет и, значит, для его решения надо либо пользоваться готовыми формулами (они известны для уравнений третьей и четвёртой степеней, но достаточно сложны, мы их здесь не приводим), либо что-то изобретать (раскладывать на множители, вводить новую переменную, использовать какие-то функционально-графические приёмы).

Если дано *неприведённое уравнение*, то у него могут быть как целые, так и дробные корни, это мы видели выше в примере 4. Существуют способы замены переменной, обращающие неприведённое уравнение в приведённое уравнение с целочисленными коэффициентами, где сохраняется надежда на наличие целочисленного корня.

Пример 5 Решить уравнение $15x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения почленно на x^3 (поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения, деление обеих частей уравнения на x^3 — равносильное преобразование), получим уравнение

$$15 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0.$$

Введём новую переменную $y = \frac{1}{x}$. Обратите внимание: относительно новой переменной мы получили приведённое уравнение $y^3 - 4y^2 - 2y + 15 = 0$.

Рациональных корней, не являющихся целыми числами, у этого приведённого уравнения согласно теореме 3 нет; будем надеяться, что у уравнения есть целочисленный корень. Ищем его среди делителей числа 15, т. е. среди чисел: ± 1, ± 3, ± 5, ± 15. Начинаем пробы: последовательно подставляем выбранные числа в заданное уравнение:

$$y = 1;\ 1 - 4 - 2 + 15 \neq 0;$$
$$y = -1;\ -1 - 4 + 2 + 15 \neq 0;$$
$$y = 3;\ 27 - 36 - 6 + 15 = 0.$$

Нашли целочисленный корень $y = 3$. А далее действуем, как в примерах 2 и 3:

$$p(y) = p(y) - p(3) = (y^3 - 4y^2 - 2y + 15) - (27 - 36 - 6 + 15) =$$
$$= (y^3 - 27) - 4(y^2 - 9) - 2(y - 3) =$$
$$= (y - 3)(y^2 + 3y + 9) - 4(y - 3)(y + 3) - 2(y - 3) =$$
$$= (y - 3)(y^2 + 3y + 9 - 4y - 12 - 2) = (y - 3)(y^2 - y - 5).$$

Решив уравнение $y^2 - y - 5 = 0$, получим: $y = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Итак, мы нашли три корня уравнения $y^3 - 4y^2 - 2y + 15 = 0$: $y_1 = 3, y_2 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, y_3 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$. Осталось вернуться к старой переменной x. Имеем:

$$x_1 = \frac{1}{y_1} = \frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{1}{y_2} = \frac{2}{1 + \sqrt{21}} = \frac{2\left(\sqrt{21} - 1\right)}{\left(\sqrt{21} + 1\right)\left(\sqrt{21} - 1\right)} = \frac{2\left(\sqrt{21} - 1\right)}{20} = \frac{\sqrt{21} - 1}{10};$$

$$x_3 = \frac{1}{y_3} = \frac{2}{1 - \sqrt{21}} = \frac{2\left(1 + \sqrt{21}\right)}{\left(1 - \sqrt{21}\right)\left(1 + \sqrt{21}\right)} = \frac{2\left(1 + \sqrt{21}\right)}{-20} = -\frac{1 + \sqrt{21}}{10}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}; \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10}$.

Приём преобразования неприведённого уравнения в приведённое относительно переменной $y = \frac{1}{x}$, которым мы воспользовались при решении примера 5, применим к любым уравнениям, у которых свободный член равен 1 или –1.

Пример 6 Решить уравнение $4x^3 - 4x^2 - 7x - 2 = 0$.

Решение. Если умножить все члены уравнения на 2, то появится возможность ввести новую переменную $y = 2x$ и относительно новой переменной уравнение будет приведённым. Выполним необходимые преобразования:

$$4x^3 - 4x^2 - 7x - 2 = 0;$$
$$8x^3 - 8x^2 - 14x - 4 = 0;$$
$$(2x)^3 - 2 \cdot (2x)^2 - 7 \cdot (2x) - 4 = 0.$$

Положим $y = 2x$, тогда уравнение примет вид $y^3 - 2y^2 - 7y - 4 = 0$. У этого приведённого уравнения есть целочисленный корень –1, проверяйте:

$(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) - 4 = 0$ — верное равенство.

Далее:

$$(y^3 - 2y^2 - 7y - 4) - ((-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) - 4) =$$
$$= (y^3 + 1) - 2(y^2 - 1) - 7(y + 1) =$$
$$= (y + 1)(y^2 - y + 1 - 2y + 2 - 7) = (y + 1)(y^2 - 3y - 4).$$

Задача свелась к решению уравнения $(y + 1)(y^2 - 3y - 4) = 0$, откуда находим: $y_1 = -1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 4$. Получили два различных корня: –1 и 4. Вернёмся к исходной переменной. Поскольку $x = \frac{1}{2}y$, получаем два корня заданного уравнения: двукратный корень $-\frac{1}{2}$ и 2.

Ответ: –0,5; 2.

Уравнения вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ называют *возвратными уравнениями* (первые два коэффициента a и b как бы *возвращаются* в последних двух членах уравнения). Для их решения также используется метод введения новой переменной. Разделив почленно все члены уравнения на x^2, получим:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0,$$

и далее, $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$.

Положим $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, а потому $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. В итоге относительно новой переменной заданное уравнение принимает такой вид:

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

Остаётся решить это квадратное уравнение, а затем вернуться к переменной x.

Пример 7 Решить возвратное уравнение

$$2x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Решение. Разделим почленно все члены уравнения на x^2, получим:

$$2x^2 + 3x - 10 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0,$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0.$$

Введём новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$, тогда уравнение примет такой вид:

$$2(y^2 - 2) + 3y - 10 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, получим: $y_1 = 2$, $y_2 = -3{,}5$. Остаётся решить совокупность уравнений: $x + \frac{1}{x} = 2$; $x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{2}$. Первое уравнение имеет единственный корень 1 (кратный корень), а из второго уравнения находим такие корни: $\frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$.

Ответ: 1; $\frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$.

Упражнения

Решите уравнение.

34.1. а) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$;
б) $3x^6 + 2x^5 - 3x - 2 = 0$;
в) $7x^3 - 21x^2 - 2x + 6 = 0$;
г) $3x^7 - 4x^6 + 3x - 4 = 0$.

34.2. а) $x^3 - 7x + 6 = 0$;
б) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$;
в) $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0$;
г) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

34.3. а) $x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$;
б) $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x = 0$;
в) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$;
г) $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 8x = 0$.

34.4. а) $6x^3 + 13x^2 - 19x - 12 = 0$;
б) $3x^3 + 2x^2 - 4x + 8 = 0$.

34.5. а) $x^4 - 5x + 6 = 0$;
б) $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$;
в) $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x + 2 = 0$;
г) $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = 0$.

34.6. а) $2x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = 0$;
б) $3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$;
в) $21x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$;
г) $2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = 0$.

34.7. а) $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$;
б) $2x^4 - 11x^3 + 19x^2 - 11x + 2 = 0$;
в) $2x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 7x + 2 = 0$;
г) $3x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x + 3 = 0$.

§ 35. Основные методы решения уравнений с одной переменной

Укажем четыре основных метода решения уравнений с одной переменной.

1. Замена уравнения $f(h(x)) = f(g(x))$ уравнением $h(x) = g(x)$ при условии, что $y = f(x)$ — монотонная функция.

Если $y = f(x)$ — монотонная функция, то уравнения $f(h(x)) = f(g(x))$ и $h(x) = g(x)$ равносильны. Мы постоянно пользовались этим методом. Например:

— показательное уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$ заменяли равносильным ему уравнением $2x - 3 = 3x + 5$;

— логарифмическое уравнение $\log_3(5x + 2) = \log_3(8 - x)$ заменяли равносильным ему (при условии, что $5x + 2 > 0$, $8 - x > 0$) уравнением $5x + 2 = 8 - x$;

— иррациональное уравнение $\sqrt[3]{x^2 + 5} = \sqrt[3]{3x + 2}$ заменяли равносильным ему уравнением $x^2 + 5 = 3x + 2$.

Во всех этих примерах «внешняя» функция (соответственно $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \log_3 x$, $y = \sqrt[3]{x}$) была монотонна: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывающая функция, $y = \log_3 x$, $y = \sqrt[3]{x}$ — возрастающие функции.

2. **Функционально-графический метод.**

Графический метод решения уравнения $f(x) = g(x)$ состоит в следующем: нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, а затем найти точки их пересечения; корни уравнения $f(x) = g(x)$ — это абсциссы точек пересечения. Графическим методом мы не раз пользовались, начиная с курса алгебры 7-го класса. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, найти приближённые, а иногда и точные значения корней.

В некоторых случаях можно не строить графики, а использовать какие-либо свойства функций. Приведём два полезных утверждения.

1. Если одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая — убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет единственный корень.

2. Если на промежутке X наибольшее значение одной из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно на промежутке X системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

3. **Метод введения новой переменной.**

Этим методом мы с вами часто пользовались при решении уравнений, в частности применяли его и в предыдущем параграфе. Он состоит в следующем: если уравнение $f(x) = 0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x)) = 0$, то целесообразно ввести новую переменную $y = g(x)$, найти корни y_1, y_2, y_3, ... уравнения $p(y) = 0$, а затем решить совокупность уравнений: $g(x) = y_1$, $g(x) = y_2$, $g(x) = y_3$, ...

Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной. Новая переменная иногда очевидна, иногда несколько завуалирована, но «ощущается», а иногда «проявляется» лишь в процессе преобразований. Примите совет: решая уравнение, не торопитесь начинать преобразования, сначала подумайте, можно ли

записать уравнение проще, введя новую переменную. Если можно, то с этого и начинайте.

4. Метод разложения на множители.

Этот метод заключается в том, что уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ заменяют совокупностью уравнений:

$$f(x) = 0; \quad g(x) = 0; \quad h(x) = 0.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те из найденных корней, которые принадлежат области определения *исходного* уравнения, а остальные отбросить как посторонние. Этот метод особенно активно мы применяли при решении тригонометрических уравнений, используя различные формулы тригонометрии, и в предыдущем параграфе он был нам очень полезен.

В приведённых ниже примерах используются функционально-графический метод (примеры 1—3), метод введения новой переменной (примеры 4 и 5), метод разложения на множители (примеры 6 и 7).

Пример 1 Решить уравнение:

а) $\sqrt{x} = |x - 2|$;

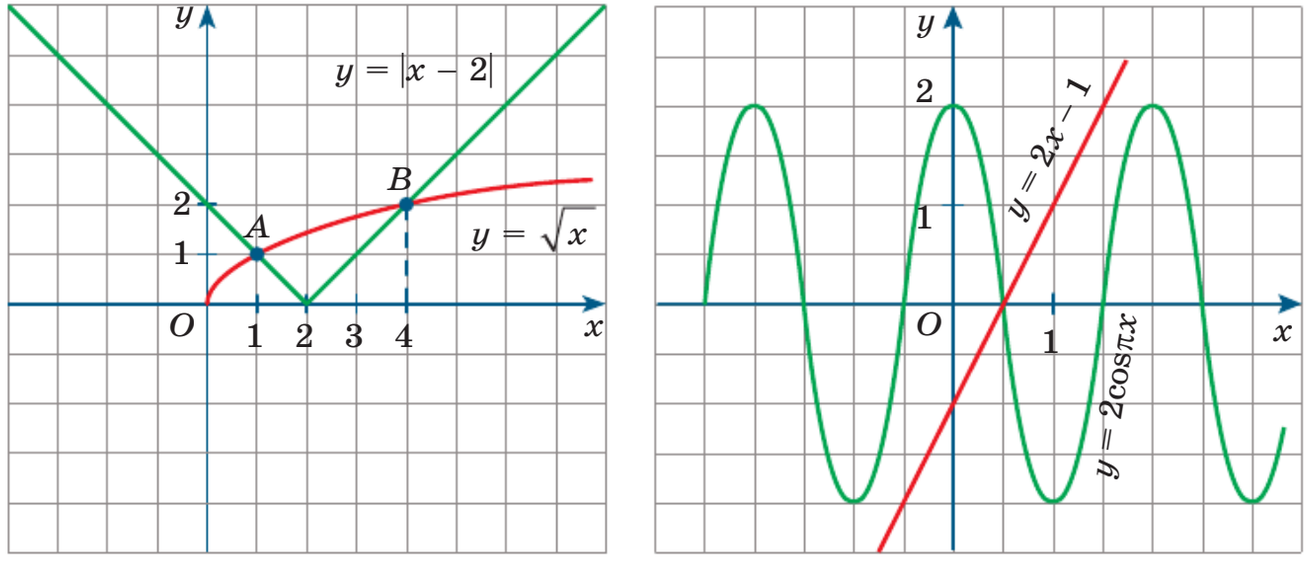
б) $2\cos \pi x = 2x - 1$;

в) $\lg(2x - 5) = 51 - 17x$;

г) $5^x + 12^x = 13^x$.

Решение. а) Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = |x - 2|$ изображены на рисунке 176, *а*. Они пересекаются в точках $A(1; 1)$ и $B(4; 2)$. Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

б) Чтобы построить график функции $y = 2\cos \pi x$, нужно график функции $y = \cos x$ растянуть в 2 раза от оси Ox и сжать к оси Oy



а *б*

Рис. 176

с коэффициентом π. График изображён на рисунке 176, *б*; обратите внимание: главная полуволна графика проходит через точки $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$, (0; 2), $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$. На том же рисунке построена прямая $y = 2x - 1$, она пересекает построенный график в точке $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$. Значит, заданное уравнение имеет один корень: $x = \frac{1}{2}$.

в) Обратите внимание: при $x = 3$ и левая, и правая части уравнения обращаются в нуль, т. е. $x = 3$ — корень уравнения. А поскольку функция $y = \lg(2x - 5)$ возрастает (при $x > 2{,}5$), тогда как линейная функция $y = 51 - 17x$ убывает, то $x = 3$ — единственный корень уравнения.

г) Если числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^2$, то тройку (x, y, z) называют *пифагоровой* (наверное, потому, что для треугольника со сторонами x, y, z выполняется теорема Пифагора, т. е. это прямоугольный треугольник с катетами x, y и гипотенузой z). Приведём несколько примеров пифагоровых троек: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (12, 35, 37). В частности, верно равенство $5^2 + 12^2 = 13^2$, т. е. $x = 2$ — корень заданного уравнения $5^x + 12^x = 13^x$. Докажем, что других корней у уравнения нет.

Разделим почленно обе части уравнения $5^x + 12^x = 13^x$ на 12^x:

$$\left(\frac{5}{12}\right)^x + 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^x.$$

Функция $y = \left(\frac{5}{12}\right)^x + 1$ — убывающая, функция $y = \left(\frac{13}{12}\right)^x$ — возрастающая. Значит, уравнение имеет не более одного корня, т. е. $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Ответ: а) 1, 4; б) 0,5; в) 3; г) 2.

Пример 2* Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} + \left(\sqrt{x - 5\frac{2}{3}}\right)^2 + 13 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} + x.$$

Решение. Выполним необходимые преобразования:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} + x - \frac{17}{3} + 13 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} + x;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} + \frac{22}{3} = \frac{(x-1)^2}{x - 3}.$$

При $x = 6$ и в левой, и в правой частях последнего уравнения получаем $\frac{25}{3}$, кроме того, значение $x = 6$ принадлежит области определения исходного уравнения (оно задаётся неравенством $x \geqslant 5\frac{2}{3}$), значит, $x = 6$ — корень исходного уравнения. Докажем, что других корней уравнение не имеет.

Функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$ — убывающая. Если мы докажем, что функция $y = \frac{(x-1)^2}{x-3}$ возрастает на луче $\left[5\frac{2}{3}; +\infty\right)$, то можно будет констатировать, что уравнение других корней, кроме $x = 6$, не имеет.

Найдём производную функции

$$y = \frac{(x-1)^2}{x-3} \text{ (по формуле } \left(\frac{u}{v}\right)' = \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)\text{):}$$

$$y' = \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x-3}\right)' = \frac{(2x-2)(x-3) - (x^2 - 2x + 1)\cdot 1}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}.$$

Обратите внимание: $y' > 0$ при $x \geqslant 5\frac{2}{3}$, т. е. функция $y = \frac{(x-1)^2}{x-3}$ возрастает на луче $\left[5\frac{2}{3}; +\infty\right)$, что и требовалось доказать.

Ответ: 6.

Пример 3* Решить уравнение:

а) $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$;

б) $\sqrt{2 + \sin^2 4x} = \sin x - \cos x$;

в) $\log_3 (8 + 2x - x^2) = 2^{x-1} + 2^{1-x}$.

Решение. а) Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$. Имеем:

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1.$$

Как видим, $y_{\text{наим}} = 1$.

В то же время функция $y = \cos 2\pi x$ обладает свойством: $y_{\text{наиб}} = 1$. Значит, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем: $x = 1$. Поскольку это значение удовлетворяет и первому уравнению системы, то оно является единственным решением системы и, следовательно, единственным корнем уравнения.

б) Поработаем с левой частью уравнения. Имеем: $2 + \sin^2 4x \geqslant 2$, а потому $\sqrt{2 + \sin^2 4x} \geqslant \sqrt{2}$. Поработаем с правой частью уравнения: докажем, что $\sin x - \cos x \leqslant \sqrt{2}$. Для этого выполним некоторые преобразования, которые не раз проводили в 10-м классе при изучении формул тригонометрии:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Осталось заметить, что $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$ — верное неравенство при любых значениях x.

Итак, $\sqrt{2 + \sin^2 4x} \geqslant \sqrt{2}$, $\sin x - \cos x \leqslant \sqrt{2}$, значит, задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{2 + \sin^2 4x} = \sqrt{2}, \\ \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$$\sin^2 4x = 0,\ \sin 4x = 0,\ 4x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{4}.$$

Решим второе уравнение системы:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n.$$

Решением системы является общая часть двух полученных серий — это серия $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

в) Оценим по отдельности левую и правую части уравнения. Левая часть:

$$\log_3 (8 + 2x - x^2) = \log_3 (9 - (x - 1)^2) \leqslant \log_3 9 = 2.$$

Правая часть:

$$2^{x-1} + 2^{1-x} = 2^{x-1} + \frac{1}{2^{x-1}}.$$

Положим $2^{x-1} = y$; тогда $2^{x-1} + \frac{1}{2^{x-1}} = y + \frac{1}{y}$, где $y > 0$. Но, как известно, если $y > 0$, то имеет место неравенство $y + \frac{1}{y} \geqslant 2$ (это утверждение вам встречалось, но всё-таки советуем доказать его: это совсем несложно).

Итак, что мы получили? Левая часть уравнения не больше чем 2, а правая — не меньше чем 2. Значит, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3(8 + 2x - x^2) = 2, \\ 2^{x-1} + 2^{1-x} = 2. \end{cases}$$

Каждое из уравнений системы имеет единственный корень 1, это и есть корень заданного уравнения.

Ответ: а) 1; б) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) 1.

Пример 4 Решить уравнение:

а) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 120$;

б) $\sin^2 x + \cos^2 2x = 1$;

в) $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$;

г) $\lg^2 x^2 + \lg 10x - 6 = 0$.

Решение. а) В левой части уравнения перемножим по отдельности выражения в двух крайних и в двух средних скобках:

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120.$$

Введём новую переменную $y = x^2 - 5x + 4$, тогда уравнение примет вид $y(y + 2) = 120$ и далее: $y^2 + 2y - 120 = 0$, $y_1 = 10$, $y_2 = -12$. Значит, либо $x^2 - 5x + 4 = 10$, $x^2 - 5x - 6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = -1$, либо $x^2 - 5x + 4 = -12$, $x^2 - 5x + 16 = 0$ — это уравнение не имеет действительных корней.

Итак, заданное уравнение имеет два корня: 6; –1.

б) Вспомним тригонометрическую формулу понижения степени $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Если использовать эту формулу в данном уравнении, то получим: $\frac{1-\cos 2x}{2} + \cos^2 2x = 1$. Как видите, «проявилась» новая переменная $y = \cos 2x$, относительно которой получается несложное уравнение $\frac{1-y}{2} + y^2 = 1$.

Далее имеем:

$$1 - y + 2y^2 = 2; \quad 2y^2 - y - 1 = 0;$$

$$y_1 = 1, \; y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Остаётся решить совокупность уравнений $\cos 2x = 1$; $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

1) $\cos 2x = 1$, $2x = 2\pi n$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$,

$$2x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \; 2x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,$$

$$2x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, \; 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \; x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}.$$

в) Поработаем с подкоренным выражением:

$$2x^2 - 8x + 12 = 2(x^2 - 4x - 6) + 24.$$

«Напрашивается» новая переменная $y = x^2 - 4x - 6$, относительно которой заданное уравнение примет более простой вид: $y = \sqrt{2y + 24}$. Решим это уравнение:

$$y^2 = 2y + 24, \quad y^2 - 2y - 24 = 0,$$
$$y_1 = 6, \; y_2 = -4.$$

Поскольку обе части уравнения $y = \sqrt{2y + 24}$ возводили в чётную степень (в квадрат), обязательна проверка. Значение $y = 6$ уравнению $y = \sqrt{2y + 24}$ удовлетворяет, а значение $y = -4$ — нет (получается $-4 = \sqrt{16}$, т. е. $-4 = 4$ — неверное равенство).

Остаётся решить уравнение $x^2 - 4x - 6 = 6$. Имеем:

$$x^2 - 4x - 12 = 0,$$
$$x_1 = 6, \; x_2 = -2.$$

г) Выше мы говорили, что новая переменная иногда очевидна (так было в пункте «а»), иногда несколько завуалирована, но «ощущается» (так было в пункте «в»), а иногда «проявляется» лишь в процессе преобразований (так было в пункте «б»). Смотрите, как обстоит дело для данного уравнения:

$$\lg 10x = \lg 10 + \lg x = 1 + \lg x;$$
$$\lg^2 x^2 = (\lg x^2)^2 = (2\lg x)^2 = 4\lg^2 x.$$

Теперь понятно, что целесообразно ввести новую переменную $y = \lg x$. Тогда заданное уравнение примет вид:

$$4y^2 + (y + 1) - 6 = 0;$$
$$4y^2 + y - 5 = 0;$$
$$y_1 = 1,\ y_2 = -\frac{5}{4}.$$

Значит, либо $\lg x = 1$, $x = 10$, либо

$$\lg x = -\frac{5}{4},\quad x = 10^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{10^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10^5}} = \frac{1}{10\sqrt[4]{10}}.$$

Ответ: а) 6, –1; б) πn, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) 6, –2; г) 10, $\frac{1}{10\sqrt[4]{10}}$.

Пример 5* Решить уравнение $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$.

Решение. Заметив, что $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, введём две новые переменные: $y = x - 1$, $z = x^2 + x + 1$; тогда заданное уравнение примет такой вид: $2z^2 - 7y^2 = 13yz$.

Решим полученное однородное уравнение второй степени $7y^2 + 13yz - 2z^2 = 0$. Поскольку $z = x^2 + x + 1$ — квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом, заключаем, что он не имеет действительных корней, т. е. $z \neq 0$, а потому обе части однородного уравнения можно безболезненно (т. е. без потери решений) разделить почленно на z^2; получим $7 \cdot \frac{y^2}{z^2} + 13 \cdot \frac{y}{z} - 2 = 0$ — квадратное уравнение относительно $\frac{y}{z}$ с корнями $\frac{1}{7}$, -2.

Возвращаемся к переменной x: $\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{7}$ или $\frac{x-1}{x^2+x+1} = -2$.

Решив первое уравнение, получим: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; решив второе уравнение, получим: $x_3 = -1$, $x_4 = -0{,}5$.

Ответ: –1; –0,5; 2; 4.

Пример 6 Решить уравнение:

а) $x^3 + 6x - 7 = 0$;

б) $\cos^2(\pi - x) + \sin 2x = 0$;

в) $10^x - 3 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^x + 15 = 0$;

г) $\sqrt{25 - x^2} \cdot \sin x = 0$.

Решение. а) *Первый способ.*

$$x^3 + 6x - 7 = x^3 - x + 7x - 7 = (x^3 - x) + (7x - 7) =$$
$$= x(x - 1)(x + 1) + 7(x - 1) = (x - 1)(x(x + 1) + 7) = (x - 1)(x^2 + x + 7).$$

Уравнение

$$(x - 1)(x^2 + x + 7) = 0$$

имеет единственный корень $x = 1$.

Второй способ. Рассмотрим функцию $y = x^3 + 6x - 7$. Имеем $y' = 3x^2 + 6 > 0$, значит, функция возрастающая, а потому если обращается в нуль, то только в одной точке. В данном случае такой точкой является $x = 1$.

б) Для $\cos(\pi - x)$ воспользуемся формулой приведения: $\cos(\pi - x) = -\cos x$, тогда $\cos^2(\pi - x) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$. А к $\sin 2x$ применим формулу двойного аргумента: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Теперь заданное уравнение можно переписать в виде $\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 0$ и далее, $\cos x(\cos x + 2\sin x) = 0$. Значит, либо $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, либо $\cos x + 2\sin x = 0$. Получилось однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Для его решения разделим обе части уравнения почленно на $\cos x$:

$$\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{2\sin x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}; \quad 1 + 2\operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n; \quad x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

в)
$$10^x - 3 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^x + 15 = 0;$$
$$2^x \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^x + 15 = 0;$$
$$(2^x \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x) - (5 \cdot 2^x - 15) = 0;$$
$$5^x \cdot (2^x - 3) - 5(2^x - 3) = 0;$$
$$(2^x - 3)(5^x - 5) = 0;$$
$$2^x = 3; \quad 5^x = 5;$$
$$x = \log_2 3;\ x = 1.$$

г) Данное уравнение сводится к совокупности двух уравнений:

$$\sin x = 0; \quad \sqrt{25 - x^2} = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Но область определения уравнения $\sqrt{25 - x^2} \cdot \sin x = 0$ задаётся неравенством $25 - x^2 \geqslant 0$, откуда находим: $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Значит, из серии $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, надо выбрать те значения x, которые удовлетворяют неравенству $-5 \leqslant x \leqslant 5$, т. е. принадлежат отрезку $[-5; 5]$.

Посмотрим, как обстоит дело с числами вида πn при различных значениях параметра n.

Если $n = 0$, то $x = 0$; это число принадлежит отрезку $[-5; 5]$.

Если $n = \pm 1$, то $x = \pm\pi$. Оба эти числа принадлежат отрезку $[-5; 5]$.

Если $n = \pm 2$, то $x = \pm 2\pi$. Оба эти числа не принадлежат отрезку $[-5; 5]$. И так же будет обстоять дело при $n = \pm 3$, $n = \pm 4$, ...

Итак, из всех решений уравнения $\sin x = 0$ берём только $0, \pm\pi$.

Обратимся ко второму уравнению — уравнению $\sqrt{25 - x^2} = 0$. Имеем:

$$25 - x^2 = 0, \quad x^2 = 25,$$
$$x = \pm 5.$$

Ответ: а) 1; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) 1, $\log_2 3$; г) $0, \pm\pi, \pm 5$.

Пример 7* Решить уравнение

$$x^2 \log_2 \frac{3+x}{10} - x^2 \log_{0,5}(3x+2) = x^2 - 4 + 2\log_{\sqrt{2}} \frac{3x^2 + 11x + 6}{10}.$$

Решение. Дважды воспользуемся тем, что $\log_a b = \log_{a^r} b^r$:

$$\log_{0,5}(3x+2) = \log_{0,5^{-1}} (3x+2)^{-1} = -\log_2 (3x+2);$$

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{3x^2 + 11x + 6}{10} = \log_{\left(\sqrt{2}\right)^2} \left(\frac{3x^2 + 11x + 6}{10} \right)^2 = 2\log_2 \frac{3x^2 + 11x + 6}{10}.$$

Это позволит переписать заданное уравнение в виде

$$x^2 \log_2 \frac{3+x}{10} + x^2 \log_2 (3x+2) = x^2 - 4 + 4\log_2 \frac{3x^2 + 11x + 6}{10}.$$

Продолжим работу с уравнением:

$$x^2 \log_2 \frac{(3+x)(3x+2)}{10} = x^2 - 4 + 4\log_2 \frac{3x^2 + 11x + 6}{10};$$

$$x^2 \log_2 \frac{3x^2+11x+6}{10} - 4\log_2 \frac{3x^2+11x+6}{10} - (x^2-4) = 0;$$

$$(x^2-4)\left(\log_2 \frac{3x^2+11x+6}{10} - 1\right) = 0.$$

Значит, либо $x^2 - 4 = 0$, $x_{1,2} = \pm 2$, либо

$$\log_2 \frac{3x^2+11x+6}{10} = 1, \quad \frac{3x^2+11x+6}{10} = 2,$$

$$3x^2 + 11x - 14 = 0, \; x_3 = -\frac{14}{3}, \; x_4 = 1.$$

Итак, получили четыре возможных корня заданного уравнения $\left(\pm 2; 1; -\frac{14}{3}\right)$. Но необходима проверка — по ОДЗ исходного уравнения, которая задаётся системой неравенств $\begin{cases} \frac{3+x}{10} > 0, \\ 3x + 2 > 0. \end{cases}$ Этой системе удовлетворяют только числа 2 и 1. Таковы корни заданного уравнения.

Ответ: 1; 2.

Упражнения

Решите уравнение.

35.1. а) $\sqrt{4x^2-9} = \sqrt{11x-6}$;

б) $\left(\sqrt{4x-3}+3\right)^9 = \left(\sqrt{4x+18}\right)^9$;

в) $\sqrt{6x^2-7} = \sqrt{11x-5}$;

г) $\left(\sqrt{3x-1}+1\right)^7 = \left(\sqrt{3x+8}\right)^7$.

35.2. а) $\sqrt{6x^2-8x} = \sqrt{x^2+5x+6}$;

б) $\sqrt{5x^2-12x} = \sqrt{5x-2x^2+12}$;

в) $\sqrt{8x^2+4x} = \sqrt{3x^2+11x+6}$;

г) $\sqrt{4x^2-9x-9} = \sqrt{11x-2x^2-15}$.

35.3. а) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{7x+5}+\sqrt{2x-13}=\sqrt{9x-8}$;

в) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}=\sqrt{6}$;

г) $\sqrt{8x-11}+\sqrt{2-x}=\sqrt{7x-9}$.

35.4. а) $3^{x^2+3}-27^{x+1}=0$;

в) $125^{5-x^2}-5^{x^2-1}=0$;

б) $\left(\sqrt{7}\right)^{\operatorname{tg}x}=\dfrac{7\sqrt{7}}{7^{\operatorname{tg}x}}$;

г) $\left(\sqrt{3}\right)^{2\cos x}=\dfrac{1}{3\cdot 3^{\cos x}}$.

35.5. а) $2^x\cdot 3^{\frac{1+x}{x}}=18$;

в) $3^x\cdot 5^{\frac{2}{x}}=75$;

б) $3^{x-1}\cdot 625^{\frac{x-2}{x-1}}=225$;

г) $5^{x-3}\cdot 64^{\frac{x-4}{x-3}}=5$.

35.6. а) $\log_{\sqrt{7}}(x-3)=\log_{\sqrt{7}}(2x-5)$;

б) $\lg\dfrac{x+5}{2x+10}=\lg\dfrac{x-3}{x-1}$;

в) $\log_{\sqrt{11}}(3x-8)=\log_{\sqrt{11}}(2x-1)$;

г) $\ln\dfrac{x-2}{2x-4}=\ln\dfrac{x+2}{x+3}$.

35.7. а) $\ln(x^2-7x+10)=\ln(4x-20)$;

б) $\lg(x^2-10x+39)=\lg(4x-9)$;

в) $\lg(x^2+9x-10)=\lg(12x+8)$;

г) $\ln(x^2-6x+5)=\ln(4x-19)$.

35.8. а) $\log_{x-5}(x-2)=\log_{x-5}(3x-10)$;

б) $\log_{3x-1}\dfrac{x-2}{x-1}=\log_{3x-1}\dfrac{2x+1}{5x-1}$;

в) $\log_{2x-3}(4x-1)=\log_{2x-3}(2x+3)$;

г) $\log_{x-3}\dfrac{3x-2}{x+2}=\log_{x-3}\dfrac{5x+1}{x+9}$.

35.9. а) $\log_3(4x-1)+\log_3(4x+1)=1$;

б) $\log_{12}x+\log_{12}(x+1)=1$;

в) $\log_5(5x-2)+\log_5(5x+2)=1$;

г) $\lg x+\lg(x+3)=1$.

35.10. а) $5^{7x-3}\left(\sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\log_{0,5}(x+1) = 0$;

б) $(\sin x + \cos x)\left(x - 8\sqrt{2x-15}\right) = 0$.

Решите уравнение, используя функционально-графические методы.

35.11. а) $3^{|x|} = \cos\frac{x}{3}$; б) $\cos \pi x = x^2 - 4x + 5$.

35.12. а) $(x-2)^{\frac{5}{6}} = \log_3 x$; в) $\log_4 x = (x-3)^{\frac{7}{3}}$;

б) $(x-2)^2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x-1}$; г) $(x+2)^2 = -\log_{0,5}(x+3)$.

35.13. а) $3^x = 11 - x$; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = x + 5$;

б) $1 - \sqrt{x} = \lg x$; г) $\frac{8}{x} + 1 = 2\sqrt[3]{x}$.

35.14. а) $x^5 + 5x - 42 = 0$; в) $x^7 + 14x = 15$;

б) $0{,}6^x + 1{,}4 = 2^x$; г) $7^x + 24^x - 25^x = 0$.

35.15. а) $\sqrt{20-4x} = 4(2x-7)^3 - 2$;

б) $\sqrt[7]{81^x} = \sqrt{1-4x}$;

в) $\sqrt{17-2x} = 3{,}5 + 4(3x-1)^3$;

г) $\sqrt[9]{16^{x-3}} = \sqrt{13-4x}$.

35.16. а) $5^{\sqrt{1-\operatorname{tg}(2{,}5\pi x)}} = 20x - 100x^2$;

б) $\log_2(12x - 4x^2 - 5) = 3 + \cos(2\pi x)$;

в) $0{,}5x^2 + 16 = 2^{3+\cos\pi x}$;

г) $5 - |2x^2 - 15x + 7| = \frac{5}{\cos^2(\pi x)}$.

35.17. а) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 13) = \cos\frac{5\pi x}{2} + \sin\frac{3\pi x}{4}$;

б) $\log_4(x^2 - 2x + 17) = \sin\frac{5\pi x}{2} + \cos 8\pi x$.

35.18. а) $\sqrt{x^2-2x+2} + \log_3\sqrt{x^2-2x+10} = 2$;

б) $(x-7)^2 + \log_5\sqrt{x^2-14x+74} = 1$.

35.19. а) $\log_2(3+2x-x^2)=\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}(3+|\sin x|)=2^{|x|}-2$;

в) $2\cos\frac{x}{3}=5^x+5^{-x}$;

г) $3^{|x-0,25|+2}=5+4\sin 2\pi x$.

Решите уравнение методом введения новой переменной.

35.20. а) $x^4-5x^2+4=0$;

б) $(x-1)^4-5(x^2-2x+1)+4=0$;

в) $x^4+4x^2-5=0$;

г) $(3x-2)^4+9x^2-12x=16$.

35.21. а) $8x^6-7x^3-1=0$;

б) $9x^3-\left(\frac{2}{x}\right)^3=1$;

в) $x^6-7x^3-8=0$;

г) $12x^4-1=\left(\frac{1}{x}\right)^4$.

35.22. а) $x-17\sqrt{x}+16=0$;

б) $2\sqrt[3]{x}-\frac{7}{\sqrt[3]{x}}=5$;

в) $x-7\sqrt{x}+12=0$;

г) $3\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}+1=0$.

35.23. а) $2\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}-2=0$;

б) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2=0$;

в) $3\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+2=0$;

г) $\sqrt[3]{x}-2\sqrt[6]{x}-3=0$.

35.24. а) $x-3-\sqrt{x-3}=2$;

б) $\sqrt{x^2-2x+1}=6\sqrt{x-1}+7$;

в) $x+4+6\sqrt{x+4}+8=0$;

г) $\sqrt{x^2-4x+4}=5\sqrt{x-2}+6$.

35.25. а) $\sqrt{\frac{2x+3}{2x-1}}+9\sqrt{\frac{2x-1}{2x+3}}=6$;

б) $\sqrt[3]{\frac{6x-5}{x+2}}+6\sqrt[3]{\frac{x+2}{6x-5}}=7$;

в) $4\sqrt{\frac{3x-2}{x+4}}+9\sqrt{\frac{x+4}{3x-2}}=12$;

г) $\sqrt[3]{\frac{5x-1}{x+3}}+5\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x-1}}=6$.

35.26. а) $\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-x+7}=\sqrt{2x^2-2x+21}$;

б) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$;

в) $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+19}$;

г) $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$.

35.27. а) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$;

б) $x^2-3x+5\sqrt{9x^2+x-2}=2{,}75-\frac{28}{9}x$;

в) $0{,}5\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)+6=\sqrt{x^2-16}+x$;

г) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x^2+7x}+2x=35$.

35.28. а) $3^{x+1}+3^{1-x}=10$;

б) $5^{2\sqrt{x}+1}+1=6\cdot 5^{\sqrt{x}}$;

в) $2^x+2^{2-x}=5$;

г) $3^{\sqrt{x}+1}-29+18\cdot 3^{-\sqrt{x}}=0$.

35.29. а) $\log_3^2 x+6=5\log_3 x$;

б) $\lg^2 x^2+\lg 10x=6$;

в) $\log_5^2 x+8=6\log_5 x$;

г) $\lg^2 x^3+\lg 100x=12$.

35.30. а) $4\sin^2 x+7=16\sin x$;

б) $7-9\cos 2x=42\cos x$;

в) $2\cos^2 x-7\cos x-4=0$;

г) $9\cos 2x+15\sin x=17$.

35.31. а) $2\operatorname{tg}^2 x-5=4\cos^2 x$;

б) $3\operatorname{ctg}^2 x+2\cos^2 x=4$;

в) $4\sin^2 x=4-9\operatorname{tg}^2 x$;

г) $5\operatorname{ctg}^2 x-4\sin^2 x=3$.

35.32. а) $\sin x\cos x-6\sin x+6\cos x+6=0$;

б) $5\sin 2x-11\sin x=11\cos x-7$.

Решите уравнение методом разложения на множители.

35.33. а) $x^3-10x^2+24x=0$;

б) $x^3-x^2+8x-8=0$;

в) $x^3-11x^2+24x=0$;

г) $x^3+x^2-11x-11=0$.

35.34. а) $2\sqrt{x^5}-11\sqrt{x^3}+5\sqrt{x}=0$;

б) $-1+5x^{0,75}+5x^{0,5}-x^{0,25}=0$;

в) $3\sqrt[3]{x^7}-23\sqrt[3]{x^4}+14\sqrt[3]{x}=0$;

г) $2x^3+3x^{2,25}-2x^{1,5}-3x^{0,75}=0$.

35.35. а) $3^x\cdot x^2-9x^2-9+3^x=0$;

б) $4x\cos 2x-\cos 2x=4x-1$;

в) $5x^3-5+5^{2x}=25^x\cdot x^3$;

г) $9x^2\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}+9x^2=1$.

35.36. а) $\sin 2x=\cos x$;

б) $\sin 6x=\cos^2(2\pi-3x)$;

в) $2\sin 2x=\sin 4x$;

г) $2\sin^2\left(\frac{x}{2}+3\pi\right)-\sqrt{3}\sin x=0$.

Решите уравнение.

35.37. а) $\sin^2 2x=1-\cos^2 4x$;

б) $\cos 3x+\cos 9x-\cos 6x=0$;

в) $\cos^2 3x-\sin^2 3x=\cos 8x$;

г) $\sin 7x+\sin 3x+\cos 2x=0$.

35.38. а) $\cos 8x - \cos 2x + \cos 10x - \cos 4x = 0$;
б) $\sin 6x - \sin 2x + \cos 10x - \cos 6x = 0$;
в) $\sin 6x + \sin 2x + \sin 12x - \sin 4x = 0$;
г) $\sin 20x + \sin 12x + \cos 12x + \cos 4x = 0$.

35.39. а) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;
б) $3\sin^3 x + 4\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x = 2\sin x + 3\cos x$;
в) $5\sin x + 12\cos x + 13\sin 3x = 0$;
г) $\sin 2x + 2\sin x + 2\cos x = 2$.

35.40. а) $6^{1+x} + 5^{1+2x} = 30 + 150^x$;
б) $2\sqrt{x} \cdot 4^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x} \cdot 2^x + 4$.

35.41. а) $\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{2x+2} = 1 + \sqrt{19-x}$;
б) $\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} = 4 + \sqrt{3-x}$.

35.42. а) $x \cdot 2^x = x(3-x) + 2(2^x - 1)$; б) $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0$.

35.43. $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.

35.44. $x^2 \log_{36}(5x^2 - 2x - 3) - x\log_{\frac{1}{6}} \sqrt{5x^2 - 2x - 3} = x^2 + x$.

35.45. $\log_{x^2-4x+6} 3 + \log_3 (x^2 - 4x + 6) = 6x - x^2 - 7$.

35.46. $3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 36 = \sqrt{72 + 6x - x^2}$.

35.47. $\cos 2x + \cos\dfrac{8x}{5} = 2$.

35.48. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x^2+4x+7} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(\pi + \dfrac{\pi x}{4}\right)}$.

35.49. а) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$;
б) $\sqrt[3]{(29-x)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = 7 + \sqrt[3]{(29-x)(x-1)}$.

35.50. $\dfrac{1}{|\sin x|} = 5 - \dfrac{9}{\pi} \cdot \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right|$.

35.51. а) $\dfrac{1}{2} + 16^{\sin x} = \dfrac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}$; б) $\lg\cos x + \log_{0,1}\sin 2x = \dfrac{\ln 7}{\ln 10}$.

35.52. $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$.

35.53. $|\log_{0,(3)}(1 + \sin 2x)| + |\log_3(1 - \sin 2x)| = 1$.

§ 36. Системы уравнений

В курсе алгебры 7—9-х классов вы изучали системы двух рациональных уравнений с двумя переменными, применяли для их решения следующие методы: метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных, графический метод. В этом параграфе мы приведём примеры решения систем различных уравнений: иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических, а потом познакомим вас с двумя специальными видами систем рациональных уравнений — однородными системами и симметрическими системами.

Определение 1. Если поставлена задача — найти такие пары значений $(x;\ y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x;\ y) = 0$ и уравнению $q(x;\ y) = 0$, то говорят, что данные уравнения образуют **систему уравнений** $\begin{cases} p(x;\ y) = 0, \\ q(x;\ y) = 0. \end{cases}$

Пару значений $(x;\ y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго уравнений системы, называют **решением системы уравнений**. Решить систему уравнений — значит найти все её решения или установить, что решений нет.

Можно говорить и о системе из большего числа уравнений; такова, например, система уравнений $\begin{cases} p(x;\ y;\ z) = 0, \\ q(x;\ y;\ z) = 0, \\ h(x;\ y;\ z) = 0. \end{cases}$ Решения такой системы — это тройки чисел $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющие одновременно всем уравнениям системы.

Определение 2. Две системы уравнений называют **равносильными**, если они имеют одинаковые множества решений (в частности, если обе системы не имеют решений).

Если в процессе решения системы мы применяли неравносильные преобразования того или иного уравнения (возведение в чётную степень обеих частей уравнения или преобразования, которые привели к расширению области определения уравнения), то все найденные решения следует проверить подстановкой в исходную систему. Что касается метода подстановки, метода алгебраического сложения и метода введения новых переменных, то они корректны с точки зре-

ния равносильности. Используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе.

Пример 1 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+3y}{y+5}} + 2 = 3 \cdot \sqrt{\dfrac{y+5}{x+3y}}, \\ xy + 2x = 13 - 4y. \end{cases}$$

Решение. В первом уравнении системы введём новую переменную $z = \sqrt{\dfrac{x+3y}{y+5}}$. Тогда уравнение примет вид $z + 2 = \dfrac{3}{z}$. Имеем: $z^2 + 2z - 3 = 0$; $z_1 = 1$, $z_2 = -3$. Значит, либо $\sqrt{\dfrac{x+3y}{y+5}} = 1$, либо $\sqrt{\dfrac{x+3y}{y+5}} = -3$. Второе уравнение решений не имеет (значение квадратного корня не может быть отрицательным числом), а из первого уравнения получаем:

$$\frac{x+3y}{y+5} = 1;$$

$$x + 3y = y + 5; \quad x + 2y = 5.$$

Как видите, первое уравнение исходной системы нам удалось привести к существенно более простому виду; соответственно, теперь речь пойдёт о решении системы $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ xy + 2x = 13 - 4y. \end{cases}$ Решим её методом подстановки. Из первого уравнения находим: $x = 5 - 2y$; подставим полученное выражение вместо x во второе уравнение:

$$y(5 - 2y) + 2(5 - 2y) = 13 - 4y;$$
$$5y - 2y^2 + 10 - 4y = 13 - 4y;$$
$$2y^2 - 5y + 3 = 0;$$
$$y_1 = 1;\ y_2 = 1{,}5.$$

Поскольку $x = 5 - 2y$, получаем соответственно $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Итак, заданная система уравнений имеет два решения: (3; 1) и (2; 1,5).

Ответ: (2; 1,5), (3; 1).

Пример 2 Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0{,}5, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1{,}75. \end{cases}$

Решение. Поскольку $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$, то второе уравнение системы можно переписать так:

$$(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 y) = 1{,}75$$

и, далее, $\cos^2 x + \cos^2 y = 0{,}25$. И вот как теперь выглядит заданная система уравнений:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 0{,}5, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 0{,}25. \end{cases}$$

В примере 1 мы ввели одну новую переменную и использовали её только в одном уравнении системы. Здесь же введём две новые переменные и использовать их будем в обоих уравнениях: $z = \cos x$, $t = \cos y$. Относительно новых переменных получаем довольно простую систему уравнений: $\begin{cases} z + t = 0{,}5, \\ z^2 + t^2 = 0{,}25. \end{cases}$ Использовав, как и в примере 1, метод подстановки, получим две пары решений:

$$\begin{cases} z = 0, \\ t = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} z = \dfrac{1}{2}, \\ t = 0. \end{cases}$$

Вернёмся к переменным x, y. Теперь речь идёт о решении совокупности двух систем тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = 0. \end{cases}$$

Решения первой системы таковы: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Решения второй системы таковы: $\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$; $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x^2} \cdot 4^{0,5y} = \log_5 625, \\ \log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_8 y^3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Поработаем с каждым уравнением системы по отдельности, постараемся преобразовать и первое, и второе уравнения к более простому виду.

Первое уравнение:

$$4^{0,5y} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^y = \left(\sqrt{4}\right)^y = 2^y,$$
$$\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4.$$

Теперь первое уравнение можно переписать так: $2^{x^2} \cdot 2^y = 4$; $2^{x^2+y} = 2^2$; $x^2 + y = 2$.

Второе уравнение:

$$\log_8 y^3 = \frac{\log_2 y^3}{\log_2 8} = \frac{3\log_2 y}{3} = \log_2 y$$

(мы воспользовались формулой перехода к новому основанию логарифма: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$). Теперь второе уравнение можно переписать так:

$$\log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1.$$

Далее имеем:

$$\log_2(x^2 + 3x - 2) = \log_2 2 + \log_2 y;$$
$$x^2 + 3x - 2 = 2y;$$
$$x^2 + 3x - 2y = 2.$$

После этих преобразований мы приходим к существенно более простой системе уравнений: $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ x^2 + 3x - 2y = 2. \end{cases}$ Здесь пригодится метод алгебраического сложения; составим разность уравнений системы:

$$(x^2 + y) - (x^2 + 3x - 2y) = 2 - 2; \quad 3y - 3x = 0; \quad y = x.$$

Подставим x вместо y в уравнение $x^2 + y = 2$; получим: $x^2 + x = 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Соответственно, $y_1 = 1$, $y_2 = -2$.

Итак, нашли две пары возможных решений: (1; 1), (–2; –2). Почему «возможных»?

Потому что в процессе преобразований мы «освободились» от знаков логарифмов, что могло привести к расширению области определения уравнения и, следовательно, к появлению посторонних решений. Вывод: обязательна проверка, причём сделать её можно по второму уравнению исходной системы (в первом уравнении все преобразования были равносильными).

Проверка. Пара (1; 1) удовлетворяет логарифмическому уравнению $\log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_8 y^3 = 1$; смотрите: $\log_2(1 + 3 - 2) - \log_8 1 = 1$ — верное равенство (подробнее: $\log_2 2 - \log_8 1 = 1$, $1 - 0 = 1$ — верное равенство). А вот пару (–2; –2) брать нельзя, поскольку при $y = -2$ получаем: $\log_8 y^3 = \log_8(-2)^3 = \log_8(-8)$, а логарифм отрицательного числа не существует.

Ответ: (1; 1).

Пример 4 Построить в прямоугольной системе координат xOy параболу $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что она проходит через точки (1; 2), (–1; 10), (2; 1).

Решение. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку (1; 2), это значит, что должно выполняться равенство $2 = a + b + c$ (в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ подставили $x = 1$, $y = 2$).

Парабола проходит через точку (–1; 10), это значит, что должно выполняться равенство $10 = a - b + c$.

Наконец, парабола проходит через точку (2; 1), это значит, что должно выполняться равенство $1 = 4a + 2b + c$.

В итоге получаем систему трёх уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} a + b + c = 2, \\ a - b + c = 10, \\ 4a + 2b + c = 1. \end{cases}$$

Эту систему можно решить методом подстановки, например так: выразить из первого уравнения c через a и b, подставить результат вместо c во второе и третье уравнения, решить полученную систему двух уравнений с двумя переменными a, b, а затем найти третью переменную c. Более изящный способ решения системы связан с методом алгебраического сложения. Смотрите: если из первого уравнения вычесть второе, то получим:

$$\begin{gathered} (a + b + c) - (a - b + c) = 2 - 10, \\ 2b = -8, \\ b = -4. \end{gathered}$$

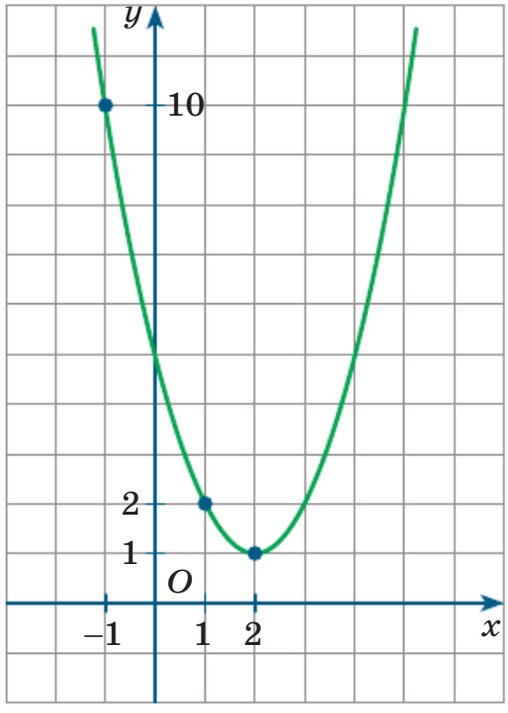


Рис. 177

Подставим найденное значение $b = -4$ в первое и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} a - 4 + c = 2, \\ 4a - 8 + c = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + c = 6, \\ 4a + c = 9; \end{cases} \quad a = 1, \quad c = 5.$$

Итак, $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$, уравнение параболы составлено: $y = x^2 - 4x + 5$. Построим график функции $y = x^2 - 4x + 5$, т. е. график функции $y = (x - 2)^2 + 1$; график изображён на рисунке 177. Парабола, как видите, проходит через точки (1; 2), (–1; 10), (2; 1), причём (2; 1) — вершина параболы.

Теперь поговорим об однородных и симметрических системах.

Определение 3*. Многочлен

$$ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + dx^{n-3}y^3 + \ldots + lx^2y^{n-2} + mxy^{n-1} + ry^n$$

называют **однородным многочленом n-й степени.**

Например, $2x^2 + 3xy - y^2$ — однородный многочлен второй степени, $x^3 - 0{,}2x^2y + \sqrt{3}xy^2 + 2y^3$ — однородный многочлен третьей степени.

Определение 4*. Уравнение вида $p(x; y) = 0$, где $p(x; y)$ — однородный многочлен, называют **однородным уравнением.**

Как решают однородные уравнения? Если можно вынести за скобку переменную в некоторой степени, то с этого и начинают; если нет, то обе части уравнения делят почленно на одну из переменных в степени однородности и решают полученное уравнение относительно новой переменной $z = \frac{x}{y}$ (или $z = \frac{y}{x}$).

Пример 5* Решить уравнение $x^3 - 5x^2y + 6xy^2 = 0$.

Решение. Имеем: $x(x^2 - 5xy + 6y^2) = 0$, значит, либо $x = 0$, либо $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$, где $x \neq 0$. Разделив почленно обе части последнего уравнения на x^2, получим: $1 - 5\frac{y}{x} + 6\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$.

Это квадратное уравнение относительно новой переменной $z = \frac{y}{x}$, корни уравнения: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Значит, либо $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$, $x = 2y$, либо $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$, $x = 3y$. Решения заданного уравнения: $(0; r)$, $(2r; r)$, $(3r; r)$, $r \in \boldsymbol{R}$.

Ответ: $(0; r)$, $(2r; r)$, $(3r; r)$, $r \in \boldsymbol{R}$.

Эти идеи для вас не новы, вы встречались с однородными тригонометрическими уравнениями. Вот одно из них: $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$. Имеем:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{6\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0 \text{ и т. д.}$$

Определение 5*. Систему уравнений $\begin{cases} p(x; y) = a, \\ q(x; y) = b \end{cases}$ называют **однородной**, если $p(x; y)$, $q(x; y)$ — однородные многочлены одной и той же степени, а a и b — действительные числа.

Если $a = 0$ (или $b = 0$), то для однородного уравнения $p(x; y) = 0$ используется идея, описанная выше. Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то с помощью составления некоторой линейной комбинации уравнений системы можно получить однородное уравнение.

Пример 6* Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся методом алгебраического сложения. Обе части первого уравнения умножим на 2 и из полученного уравнения вычтем второе уравнение системы:

$$2(x^3 + y^3) - (x^2y + 2xy^2 + y^3) = 0;$$

$$2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 = 0. \qquad (1)$$

Получили однородное уравнение третьей степени. Если $y = 0$, то из равенства (1) следует, что $x = 0$. Но пара $(0; 0)$ не удовлетворяет заданной системе уравнений. Значит, мы можем считать, что $y \neq 0$. Разделим обе части уравнения почленно на y^3 и введём новую переменную $z = \frac{x}{y}$, получим:

$$2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0;\ 2z(z^2 - 1) - (z^2 - 1) = 0;\ (z^2 - 1)(2z - 1) = 0;$$

$$z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = \frac{1}{2}.$$

Значит, либо $\frac{x}{y} = 1$, $y = x$; либо $\frac{x}{y} = -1$, $y = -x$; либо $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, $y = 2x$. В итоге получаем совокупность трёх систем уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ y = x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ y = -x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ y = 2x. \end{cases}$$

Из первой системы находим, что $x = \sqrt[3]{0{,}5}$, $y = \sqrt[3]{0{,}5}$; вторая система не имеет решений; из третьей системы находим, что $x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$, $y = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$.

Ответ: $\left(\sqrt[3]{0{,}5}; \sqrt[3]{0{,}5}\right), \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$.

Для введения понятия симметрической системы нам понадобится понятие симметрического выражения. Выражение $p(x; y)$ называют *симметрическим*, если оно сохраняет свой вид при одновременной замене x на y и y на x. Например, симметрическим является выражение $x^3y^2 + x^2y^3$, поскольку при одновременной замене x на y и y на x получится выражение $y^3x^2 + y^2x^3$ — то же, которое было. Соответственно, уравнение $p(x; y) = 0$ называют *симметрическим уравнением*, если его левая часть — симметрическое выражение.

Основными симметрическими выражениями можно считать $p = x + y$ и $q = xy$, поскольку любые другие симметрические выражения можно представить в виде некоторой комбинации p и q. Приведём несколько примеров.

1) $x^3y^2 + x^2y^3 = x^2y^2(x + y) = pq^2$;

2) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = p^2 - 2q$;

3) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)((x^2 + 2xy + y^2) - 3xy) = p(p^2 - 3q)$;

4) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{p^2 - 2q}{q}$.

Определение 6*. Систему двух уравнений с двумя переменными называют **симметрической системой**, если она состоит из симметрических уравнений.

Идея решения симметрической системы фактически предопределена проведёнными выше рассуждениями — вводят две новые переменные: $p = x + y$ и $q = xy$.

Пример 7* Решить систему уравнений $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - 3xy + y^2 = 1. \end{cases}$

Решение. Поработаем с выражением $x^4 + x^2y^2 + y^4$. Имеем:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (p^2 - 2q)^2 - q^2 = p^4 - 4p^2q + 3q^2.$$

Поработаем с выражением $x^2 - 3xy + y^2$. Имеем:

$$x^2 - 3xy + y^2 = p^2 - 2q - 3q = p^2 - 5q.$$

Теперь заданную систему уравнений можно представить в таком виде:

$$\begin{cases} p^4 - 4p^2q + 3q^2 = 91, \\ p^2 - 5q = 1. \end{cases}$$

Для решения этой системы применим метод подстановки:

$$p^2 = 5q + 1;$$
$$(5q + 1)^2 - 4(5q + 1)q + 3q^2 = 91;$$
$$8q^2 + 6q - 90 = 0;$$
$$q_1 = 3,\ q_2 = -\frac{15}{4}.$$

Соответственно, получаем, что либо $p^2 = 16$, $p = \pm 4$, либо $p^2 = -\frac{71}{4}$, чего быть не может.

Итак, получили две пары решений: $p = 4$, $q = 3$; $p = -4$, $q = 3$. Осталось решить совокупность двух систем уравнений: $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$ Решения первой системы: (3; 1), (1; 3), решения второй системы: (–3; –1), (–1; –3).

Ответ: (–3; –1), (–1; –3), (1; 3), (3; 1).

Упражнения

36.1. Решите систему уравнений методом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases} 6\sqrt[4]{x} - 4\sqrt[3]{y} = 6, \\ 3\sqrt[3]{y} - 4\sqrt[4]{x} = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 9, \\ 3\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_5 x + \lg y = 5, \\ 3\log_5 x - 5\lg y = 17; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x - 3\log_{\frac{1}{3}} y = 1, \\ 2\log_{\frac{1}{3}} x + 5\log_{\frac{1}{3}} y = -9. \end{cases}$

36.2. Решите систему уравнений методом подстановки:

а) $\begin{cases} 4x = y + 3, \\ 7^{y-3x+4} = 7^{y-5x+3} + 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 3y, \\ \log_{\frac{1}{7}}(y+x) + \log_{\frac{1}{7}}(x-2y-1) = \log_{\frac{1}{7}} \dfrac{8}{y-1}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3y = x - 2, \\ 5^{2x-5y-3} = 6 - 5^{2y-x+2}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = 2x, \\ \log_{\frac{1}{6}}(4x-y) + \log_{\frac{1}{6}}(5x-2y-2) = 5\log_{\frac{1}{6}} \dfrac{2}{\sqrt[5]{x-2}}. \end{cases}$

36.3. Решите систему уравнений методом введения новой переменной:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ \log_6^2 xy + 1 = 2\log_6 xy; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 10 - 3\sqrt[4]{xy}, \\ 2x - 5y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x - 2y = -5, \\ \log_{0,5}^2 \dfrac{y}{x} + 9 = 6\log_{0,5} \dfrac{x}{y}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 8x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 15\sqrt[3]{xy} + 2, \\ 3x - 4y = 4. \end{cases}$

Решите систему уравнений.

36.4. а) $\begin{cases} 0,5^x \cdot 0,5^{2y} = 8, \\ 2^{2x-3} \cdot 8^{-y} = 32; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \left(\sqrt{3}\right)^{x+y} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{y} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}, \\ 0,1^{x+1} \cdot 10^{3y} = 100; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0,3^{3x+2y} \cdot 0,3^{y-2x} = 1, \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-y} \cdot 3^{y+1} = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0,6^{3x+2y} \cdot 0,6^{2x-y} = 0,6, \\ 10^{x-2y} \cdot 10^{3y-1} = 10. \end{cases}$

36.5. а) $\begin{cases} 3^{3x+y} - 5^{x-2y} = 2, \\ 3^{3x+y} + 5^{x-2y} = 52; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5^{2x-y} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1} \cdot 625^{\frac{3}{4}}}{25}, \\ x + 3y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^{x+y} - 3^{x-y} = 7, \\ 2^{x+y} + 3^{x-y} = 25; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2^{x-y} = \dfrac{0,25^{-1} \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{2}, \\ x + y = 1. \end{cases}$

36.6. а) $\begin{cases}\log_3(x^2+6x-4)-\log_3 y=1,\\ 3x-y=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(5x-y)=\log_{\frac{1}{3}}(3x+4),\\ \log_9(x^2+x-2y)=\log_9(x^2+y);\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_4(x^2+2x+4)-\log_4 y=1,\\ 2x+y=7;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\log_6(7x-y)=\log_6(4x+3),\\ \log_{\frac{1}{7}}(x^2+2x-y)=\log_{\frac{1}{7}}(x^2+3y).\end{cases}$

36.7. а) $\begin{cases}2^{2x-3y}\cdot 2^{4y-x}=16,\\ \log_3 x+\log_3 y=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\cdot 3^{y-1}=\frac{1}{81},\\ \log_2 2x-\log_2 y=2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}3^{3x-1}\cdot 3^{y-2x}=27,\\ \log_3 x+\log_3 y=1;\end{cases}$

г) $\begin{cases}4^x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2-2y}=\log_{\sqrt[4]{5}}5,\\ \log_4 y-\log_4 x=1.\end{cases}$

36.8. а) $\begin{cases}\log_{16}(x-y)=\frac{1}{2},\\ \log_{125}x-\log_{125}y=\frac{1}{3};\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_{27}(3x-y)=\frac{1}{3},\\ \log_4 y-\log_4 x=0,5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{64}}(x-y)=-\frac{1}{3},\\ \log_9 x-\log_9 y=\frac{1}{2};\end{cases}$

г) $\begin{cases}\log_{625}(x+y)=0,25,\\ \log_8 y-\log_8 x=\frac{2}{3}.\end{cases}$

36.9. а) $\begin{cases}\sqrt{\frac{x-y}{3y}}+\sqrt{\frac{5x}{x+y}}=3,\\ 17\sqrt{\frac{x-y}{3y}}-8\sqrt{\frac{5x}{x+y}}=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt{\frac{y-x}{2x}}-\sqrt{\frac{x}{x+y}}=\frac{1}{2},\\ 16\sqrt{\frac{x}{x+y}}-7\sqrt{\frac{y-x}{2x}}=1.\end{cases}$

36.10. а) $\begin{cases} \sqrt{x-y}+\sqrt{x+3y}=4, \\ 2x-y=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x-3}=\sqrt{4-y}-\sqrt{3x+y+1}, \\ 2x+y=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{2x+y}+\sqrt{6x-3y}=2, \\ 6x+2y=10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{4x-7}=\sqrt{-1-x-y}-\sqrt{2x+y}, \\ 3x+y=2. \end{cases}$

36.11. а) $\begin{cases} 3^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+1}\cdot 3^{y-2}=729, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ xy=216; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4^x\cdot 0{,}5^x\cdot 0{,}25^{-y}=512, \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1, \\ \sqrt{xy}=4. \end{cases}$

36.12. а) $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y}}=1, \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\frac{2}{3}x+5, \\ 3x-2y=5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3. \end{cases}$

36.13. а) $\begin{cases} 2\sqrt[5]{x+y} = \log_5 25y^2, \\ 3\log_5 y^2 - \sqrt[5]{x+y} = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5^{x-y} - 3|2y+x| = -1, \\ 2|2y+x| - 5^{x-y-1} = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x+y} = \log_2 16x^2, \\ \log_2 x^2 + 2\sqrt[3]{x+y} = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3^{x-y} - 7|2y-x| = 2, \\ |2y-x| - 3^{x-y-1} = -2. \end{cases}$

36.14. а) $\begin{cases} \sqrt{x+1} - y = 2, \\ \log_7(4-x) = y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x+4} = 2+y, \\ \log_5(6-x) = y-1. \end{cases}$

36.15. а) $\begin{cases} yx^{\log_y x} = \sqrt{x^5}, \\ \log_4 y \cdot \log_y (y-3x) = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3}, \\ \log_9 x^2 + \log_{27} y^3 = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$

36.16. а) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy - y^2 = 0, \\ 32x^2 - 36xy + 9y^2 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 6, \\ 3x^2 + 8y^2 = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x^2 - 4xy - 3y^2 = -32, \\ 15x^2 + xy - 2y^2 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13. \end{cases}$

36.17. а) $\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = 5(x+y), \\ 5x^2 - xy - y^2 = 7(x+y); \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^3y - xy^3 = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x-y), \\ x^3 + y^3 = 7(x+y); \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x-y)^2, \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x-y). \end{cases}$

36.18. а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^3y + xy^3 = \dfrac{10}{9}(x+y)^2, \\ x^4y + xy^4 = \dfrac{2}{3}(x+y)^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy+8)(x+y) = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136, \\ x^3y + xy^3 = 30. \end{cases}$

36.19. а) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos x + \cos 2y = -1, \\ 5\cos 2y - \cos x = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos x + \sin y = 0{,}5, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 1{,}25; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2\sin 2x + 3\operatorname{tg} 3y = -2, \\ 6\sin 2x - 2\operatorname{tg} 3y = 5. \end{cases}$

36.20. а) $\begin{cases} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\cdot \sin 2y = 0, \\ \sin 2x + \cos y = 0{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\cos x}\cdot \operatorname{tg} 2y = 0, \\ \sin^2 y - \cos 2x = 1{,}5. \end{cases}$

36.21. а) $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ \cos x = \sin y. \end{cases}$

Решите систему трёх уравнений с тремя переменными.

36.22. а) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ x - 4y + 2z = 9, \\ 3x + 2y - z = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -9, \\ 3x + y - 2z = 9, \\ 2x - 3y - 4z = 4. \end{cases}$

36.23. а) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - 2y - z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ x^2 + (y + z)^2 + (z - 1)^2 = 9. \end{cases}$

36.24. а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - z = 5, \\ xy + xz + yz = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + xz = 4, \\ yz + xy = -1, \\ zx + zy = 9. \end{cases}$

36.25. Составьте уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через точки N, M, K:
а) $N(-4; -4)$, $M(-2; 8)$, $K(2; 8)$;
б) $N(-1; 10)$, $M(-1; 6)$, $K(6; 3)$.

36.26. Постройте в прямоугольной системе координат xOy параболу $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что она проходит через точки N, M, K:
а) $N(-1; 1)$, $M(2; 10)$, $K(4; 6)$;
б) $N(-4; -3)$, $M(-1; -6)$, $K(1; 2)$.

Решите систему уравнений.

36.27. а) $\begin{cases} 0{,}5\sin(1 - y + x^2)\cos 2x = \cos(y - x^2 - 1)\sin x \cos x, \\ \log_{2^x} \dfrac{2^{2x+y}}{2^{1+x^2}} = 2 - x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^y = x, \\ 2\sin x + \sin 2x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}. \end{cases}$

36.28. а) $\begin{cases} \sqrt{1 + \sin x \sin y} = \cos x, \\ 2\sin x \operatorname{ctg} y + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{1 + \sin x \sin y} = \cos y, \\ \dfrac{4\sin y}{\operatorname{tg} x} + \sqrt{12} = 0. \end{cases}$

Решите уравнение.

36.29. а) $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$;

б) $\sin^4 x + \cos^4 y + 2 = 4\sin x \cos y$.

36.30. а) $\dfrac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy} = \log_{\frac{1}{3}}\left(y^2 - 2y + \dfrac{10}{9}\right)$;

б) $\dfrac{3 + 2\cos(x - y)}{2} = \sqrt{3 + 2x - x^2} \cdot \cos^2 \dfrac{x - y}{2} + \dfrac{\sin^2(x - y)}{2}$.

36.31. а) Сумма цифр задуманного трёхзначного числа равна 10, а сумма квадратов его цифр равна 38. Если к задуманному числу прибавить 297, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите задуманное число.

б) Шифр замка выражается трёхзначным числом. Сумма его цифр равна 12, а сумма квадратов его цифр равна 56. Если к задуманному числу прибавить 168, то в результате цифра сотен увеличится в 2 раза, а цифры десятков и единиц уменьшатся каждая в 2 раза. Найдите шифр замка.

36.32. а) Турист проплыл на лодке по реке из города N в город M и обратно за 5 ч. Найдите скорость течения реки, если известно, что турист проплывал 6 км против течения за то же время, что и 9 км по течению, а расстояние между городами равно 24 км.

б) Катер отходит от пункта A, стоящего на притоке реки, идёт по течению 80 км до пункта B, где приток впадает в реку, а затем идёт вверх по реке (против течения) до пункта C, затратив на весь путь 18 ч. Затем он возвращается из пункта C в пункт A, затратив на обратный путь 15 ч. Известно, что собственная скорость катера 18 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч. Чему равно расстояние между пунктами B и C?

36.33. а) Группа туристов отправилась в поход. На лодках по реке они проплыли 75 км, после чего ещё прошли пешком 10 км. При этом на путь пешком было затрачено на 3 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы туристы шли пешком столько времени, сколько на самом деле плыли по реке, а плыли по реке столько времени, сколько шли пешком, то соответствующий путь по реке оказался бы на 5 км больше, чем соответствующий путь пешком. Сколько времени группа туристов шла пешком и сколько времени плыла по реке?

б) Велосипедист каждую минуту проезжает на 1 км меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь длиной 15 км он затрачива-

ет времени на 48 мин больше, чем мотоциклист. Найдите скорости велосипедиста и мотоциклиста.

36.34. а) Два токаря вместе могут выполнить некоторую работу за 36 ч. Если бы сначала половину работы сделал первый, а вторую половину — второй, то выполнение задания растянулось бы на 75 ч. За сколько часов мог бы выполнить эту работу каждый токарь, работая самостоятельно?

б) Через два крана некоторую ёмкость объёмом 98 $м^3$ наполняют водой. При этом первые 5 ч работает только первый кран, после чего его выключают и 4 ч работает второй кран. Какова пропускная способность второго крана, если 1 $м^3$ он заполняет на 1 мин быстрее, чем первый?

36.35. а) Имеется два слитка. В первом слитке содержание алюминия составляет 30 %. Если от первого слитка взять кусок 5 кг и сплавить со вторым, то получится слиток, содержащий 56 % алюминия. Если же от первого слитка взять кусок 3 кг и сплавить со вторым слитком, то получится слиток, содержащий 60 % алюминия. Чему равна масса второго слитка и процентное содержание в нём алюминия?

б) Имеется сплав серебра с медью. Сплавив его с 3 кг чистого серебра, можно получить сплав, содержащий 90 % серебра, а сплавив с 2 кг сплава, содержащего 90 % серебра, можно получить сплав с 84%-ной массовой долей серебра. Найдите процентное содержание серебра в имеющемся сплаве.

36.36. В январе 2023 г. Борис открыл рублёвый вклад в банке «Сатурн». Через год проценты по вкладу составили 6000 р. Борис добавил на вклад ещё 15 000 р. В результате через год при закрытии счёта на нём оказалось 89 100 р. Какую сумму Борис положил на счёт первоначально?

§ 37. Неравенства с одной переменной

Начнём с тех определений и теорем, на которых основано решение неравенств с одной переменной (всё это в той или иной мере вам известно).

Определение 1. Два неравенства с одной переменной называют **равносильными**, если они имеют одинаковые решения (т. е. если равны множества их частных решений).

Решение неравенств, встречающихся в школьном курсе математики, основано на шести теоремах о равносильности неравенств. Приведём формулировки этих теорем.

Теорема 1. Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части неравенства

$$f(x) > g(x)$$

возвести в одну и ту же *нечётную* степень n, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство

$$(f(x))^n > (g(x))^n,$$

равносильное данному.

Теорема 3. Показательное неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

равносильно:
а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;
б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Теорема 4. а) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, положительное при всех x из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства $f(x) > g(x)$, оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство $f(x)h(x) > g(x)h(x)$, равносильное данному.
б) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, отрицательное при всех x из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства $f(x) > g(x)$, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство $f(x)h(x) < g(x)h(x)$, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же *чётную* степень n получится неравенство того же смысла $(f(x))^n > (g(x))^n$, равносильное данному.

Теорема 6. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно:
а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;
б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Теоремы 1 и 4 вы использовали при решении рациональных неравенств, теорему 3 — при решении показательных неравенств, теорему 6 — при решении логарифмических неравенств. В этом параграфе мы рассмотрим новые примеры решения неравенств, и вы увидите, как «работают» теоремы 1—6.

Определение 2. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением *всех* заданных неравенств. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют **частным решением системы неравенств**. Множество *всех* частных решений системы неравенств представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят просто: **решение системы неравенств**).

Решить систему неравенств — значит найти все её частные решения. Решение системы неравенств представляет собой *пересечение* решений неравенств, образующих систему.

Определение 3. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением *хотя бы одного* из заданных неравенств. Каждое такое значение переменной называют **частным решением совокупности неравенств**. Множество *всех* частных решений совокупности неравенств представляет собой **решение совокупности неравенств**.

Решение совокупности неравенств представляет собой *объединение* решений неравенств, образующих совокупность.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой, а неравенства, образующие совокупность, — квадратной скобкой. Впрочем, для неравенств, образующих совокупность, вполне допустима запись в строчку через точку с запятой. Например, решение неравенства $\sin^2 x > \frac{1}{4}$ сводится к решению совокупности неравенств: $\sin x > \frac{1}{2}$; $\sin x < -\frac{1}{2}$.

Пример 1 Решить неравенство:

а) $|7x - 11| > 3x + 5$;

б) $|5 - 4x - x^2| \leqslant 7 - 6x - x^2$;

в) $|5x + 3| < |2x - 1|$;

г) $|x^2 + 5x - 1| \geqslant |x^2 + 3x + 1|$.

Решение. а) Рассмотрим выражение $|7x - 11|$. Если $7x - 11 \geqslant 0$, то $|7x - 11| = 7x - 11$, и тогда заданное неравенство примет вид $7x - 11 > 3x + 5$, т. е. получим систему неравенств $\begin{cases} 7x - 11 \geqslant 0, \\ 7x - 11 > 3x + 5. \end{cases}$

Если же $7x - 11 < 0$, то $|7x - 11| = -(7x - 11)$, и тогда заданное неравенство примет вид $-(7x - 11) > 3x + 5$, т. е. получим систему неравенств $\begin{cases} 7x - 11 < 0, \\ -(7x - 11) > 3x + 5. \end{cases}$ Таким образом, задача сводится к решению *совокупности двух систем неравенств*:

$$\begin{cases} 7x - 11 \geqslant 0, \\ 7x - 11 > 3x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - 11 < 0, \\ -(7x - 11) > 3x + 5. \end{cases}$$

Значит, план наших действий будет таким: решим первую систему, решим вторую систему, найдём *объединение* полученных решений.

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x - 11 \geqslant 0, \\ 7x - 11 > 3x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant \frac{11}{7}, \\ x > 4; \end{cases} \quad x > 4.$$

Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x - 11 < 0, \\ -(7x - 11) > 3x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{11}{7}, \\ -10x > -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{11}{7}, \\ x < 0{,}6; \end{cases} \quad x < 0{,}6.$$

Осталось объединить найденные решения; получим:

$(-\infty; 0{,}6) \cup (4; +\infty)$ или, короче: $x < 0{,}6$; $x > 4$.

б) Рассуждая, как в пункте «а», получим *совокупность двух систем неравенств*:

$$\begin{cases} 5 - 4x - x^2 \geqslant 0, \\ 5 - 4x - x^2 \leqslant 7 - 6x - x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 - 4x - x^2 < 0, \\ -(5 - 4x - x^2) \leqslant 7 - 6x - x^2. \end{cases}$$

Далее, как и в пункте «а», решим первую систему, решим вторую систему, объединим найденные решения.

Решим первую систему:

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 \leqslant 0, \\ 2x \leqslant 2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x + 5)(x - 1) \leqslant 0, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

На рисунке 178 верхняя штриховка показывает решение первого неравенства системы (мы воспользовались методом интервалов), а нижняя — решение второго неравенства. Пересечение решений — отрезок $[-5; 1]$.

Решим вторую систему, т. е. систему неравенств $\begin{cases} 5 - 4x - x^2 < 0, \\ -(5 - 4x - x^2) \leqslant 7 - 6x - x^2: \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 7 - 6x - x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 5)(x - 1) > 0, \\ x^2 + 5x - 6 \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 5)(x - 1) > 0, \\ (x + 6)(x - 1) \leqslant 0. \end{cases}$$



Рис. 178



Рис. 179

Для решения обоих неравенств последней системы воспользуемся методом интервалов. На рисунке 179 верхняя штриховка показывает решение первого неравенства системы, а нижняя — решение второго неравенства. Пересечение решений — полуинтервал $[-6; -5)$.

Объединив полуинтервал $[-6; -5)$ и отрезок $[-5; 1]$, получим отрезок $[-6; 1]$ — решение неравенства «б».

в) Здесь обе части неравенства неотрицательны, значит, согласно теореме 5, возведение обеих частей неравенства в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. А что даёт возведение в квадрат? Оно даёт возможность «избавиться» от знаков модуля, поскольку $(|a|)^2 = a^2$. Вот как выглядит решение данного неравенства:

$$|5x + 3| < |2x - 1|;$$
$$(|5x + 3|)^2 < (|2x - 1|)^2;$$
$$(5x + 3)^2 < (2x - 1)^2;$$
$$25x^2 + 30x + 9 < 4x^2 - 4x + 1;$$
$$21x^2 + 34x + 8 < 0.$$

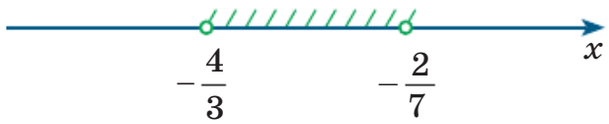
Найдём корни квадратного трёхчлена $21x^2 + 34x + 8$:

$$x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 21 \cdot 8}}{21} = \frac{-17 \pm \sqrt{121}}{21} = \frac{-17 \pm 11}{21};$$

$$x_1 = \frac{-17 + 11}{21} = -\frac{2}{7};$$

$$x_2 = \frac{-17 - 11}{21} = -\frac{4}{3}.$$

Значит, $21x^2 + 34x + 8 = 21\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)$. Остаётся решить неравенство $21\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) < 0$, т. е. $\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) < 0$. Получаем (рис. 180): $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{7}$.



$-\frac{4}{3}$ $-\frac{2}{7}$

Рис. 180

г) Применим тот же приём, что использовали в пункте «в»:

$$(|x^2 + 5x - 1|)^2 \geqslant (|x^2 + 3x + 1|)^2;$$
$$(x^2 + 5x - 1)^2 \geqslant (x^2 + 3x + 1)^2.$$

Но далее не будем, как в предыдущем примере, выполнять возведение в квадрат, а перенесём выражение из правой части неравенства в левую и применим формулу «разность квадратов»:

$$(x^2 + 5x - 1)^2 - (x^2 + 3x + 1)^2 \geqslant 0;$$
$$((x^2 + 5x - 1) - (x^2 + 3x + 1))((x^2 + 5x - 1) + (x^2 + 3x + 1)) \geqslant 0;$$
$$(2x - 2)(2x^2 + 8x) \geqslant 0;$$
$$4x(x - 1)(x + 4) \geqslant 0;$$
$$x(x - 1)(x + 4) \geqslant 0.$$

Применив к решению неравенства $x(x - 1)(x + 4) \geqslant 0$ метод интервалов, получим (рис. 181): $-4 \leqslant x \leqslant 0$; $x \geqslant 1$.

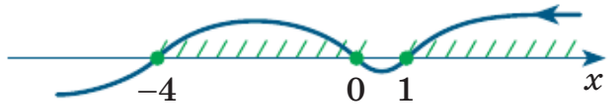


Рис. 181

Ответ: а) $x < 0{,}6$; $x > 4$; б) $-6 \leqslant x \leqslant 1$; в) $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{7}$; г) $-4 \leqslant x \leqslant 0$; $x \geqslant 1$.

Пример 2 Решить неравенство:

а) $\sqrt{x^2 - 4x - 5} < 3\sqrt{3}$; б) $\sqrt[4]{x^3 - 2x^2 + 1} \geqslant 1$; в) $\sqrt[3]{1 - x^2 - x^3} \leqslant 1$.

Решение. а) Поскольку выражение $x^2 - 4x - 5$ содержится под знаком квадратного корня, должно выполняться неравенство $x^2 - 4x - 5 \geqslant 0$. При этом условии обе части заданного неравенства неотрицательны, и их возведение в квадрат будет, согласно теореме 5, равносильным преобразованием. Таким образом, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x^2 - 4x - 5}\right)^2 < \left(3\sqrt{3}\right)^2. \end{cases}$$

Решим первое неравенство этой системы.

Найдём корни уравнения $x^2 - 4x - 5 = 0$: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$; значит, $x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$. Использовав для решения неравенства

$(x-5)(x+1) \geqslant 0$ метод интервалов, получим (верхняя штриховка на рисунке 182): $x \leqslant -1$; $x \geqslant 5$.

Решим неравенство $\left(\sqrt{x^2-4x-5}\right)^2 < \left(3\sqrt{3}\right)^2$:

$$x^2 - 4x - 5 < 27;$$
$$x^2 - 4x - 32 < 0;$$
$$(x-8)(x+4) < 0;$$
$$-4 < x < 8$$

(нижняя штриховка на рисунке 182). Рисунок 182 помогает нам найти решение системы неравенств:

$$-4 < x \leqslant -1; \quad 5 \leqslant x < 8.$$



Рис. 182

б) Рассуждая, как в пункте «а», приходим к системе неравенств, равносильной заданному неравенству: $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 1 \geqslant 0, \\ \left(\sqrt[4]{x^3 - 2x^2 + 1}\right)^4 \geqslant 1^4, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 1 \geqslant 0, \\ x^3 - 2x^2 + 1 \geqslant 1. \end{cases}$ Обратите внимание: если выполняется второе неравенство системы, то автоматически выполняется и первое неравенство. Это значит, что первое неравенство можно опустить. Решим второе неравенство:

$$x^3 - 2x^2 \geqslant 0;$$
$$x^2(x-2) \geqslant 0.$$

Отметим на числовой прямой точки $x = 0$, $x = 2$, они разбивают числовую прямую на три промежутка. Знаки выражения $x^2(x-2)$ внутри каждого из промежутков показаны на рисунке 183. Выражение $x^2(x-2)$ неотрицательно на луче $[2; +\infty)$ и в точке $x = 0$. Значит, решение заданного неравенства выглядит следующим образом: $x = 0$, $x \geqslant 2$.



Рис. 183

в) Согласно теореме 2 возведение обеих частей заданного неравенства в третью степень есть равносильное преобразование неравенства. Имеем:

$$\left(\sqrt[3]{1-x^2-x^3}\right)^3 \leqslant 1^3;$$
$$1-x^2-x^3 \leqslant 1;$$
$$x^3+x^2 \geqslant 0;$$
$$x^2(x+1) \geqslant 0.$$

Запишем решение последнего неравенства (рис. 184): $x \geqslant -1$.

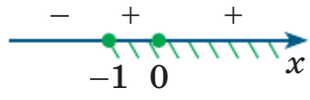


Рис. 184

Ответ: а) $-4 < x \leqslant -1$; $5 \leqslant x < 8$; б) $x = 0$; $x \geqslant 2$; в) $x \geqslant -1$.

Пример 3 Решить неравенство:

а) $\sqrt{x^2-5x+6} \leqslant x+4$; б) $\sqrt{3x^2-22x} > 2x-7$.

Решение. а) Здесь, как и в примере 2 «а», не обойтись без возведения в квадрат обеих частей неравенства. Но это будет равносильным преобразованием лишь при условии неотрицательности обеих частей неравенства. А что у нас? Смотрите: $x+4 \geqslant \sqrt{x^2-5x+6}$, это значит, что $x+4 \geqslant 0$. Далее, запишем условие, задающее область определения неравенства (ОДЗ): $x^2-5x+6 \geqslant 0$. Вот теперь мы уверены в том, что обе части заданного неравенства неотрицательны, и можно воспользоваться теоремой 5. Итак, задача свелась к решению системы неравенств

$$\begin{cases} x+4 \geqslant 0, \\ x^2-5x+6 \geqslant 0, \\ x^2-5x+6 \leqslant (x+4)^2. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим $x \geqslant -4$.

Решим неравенство $x^2-5x+6 \geqslant 0$. Имеем:

$$(x-2)(x-3) \geqslant 0; \quad x \leqslant 2; \quad x \geqslant 3 \text{ (рис. 185).}$$

Решим неравенство $x^2-5x+6 \leqslant (x+4)^2$:

$$x^2-5x+6 \leqslant x^2+8x+16;$$
$$-13x \leqslant 10;$$
$$x \geqslant -\frac{10}{13}.$$

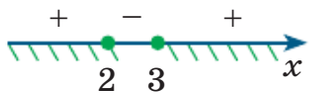


Рис. 185

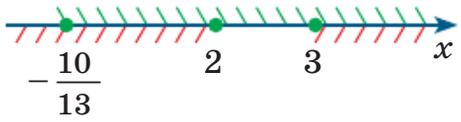


Рис. 186

Осталось найти пересечение трёх множеств: 1) $x \geqslant -4$; 2) $x \leqslant 2$; $x \geqslant 3$; 3) $x \geqslant -\frac{10}{13}$.

Поступим так: сначала найдём пересечение множеств 1 и 3; получим $x \geqslant -\frac{10}{13}$. Затем изобразим на числовой прямой множество 2 (нижняя штриховка на рисунке 186) и неравенство $x \geqslant -\frac{10}{13}$ (верхняя штриховка на рисунке 186). Пересечение этих множеств — решение исходного неравенства: $-\frac{10}{13} \leqslant x \leqslant 2$; $x \geqslant 3$.

б) Нам нужно решить неравенство $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$. Казалось бы, следует действовать так же, как мы действовали при решении неравенства $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leqslant x + 4$ (из пункта «а»). Но (внимание!) по смыслу этого неравенства его правая часть, т. е. $x + 4$, обязана была быть неотрицательной, что мы сразу и зафиксировали. В неравенстве же $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$ правая часть, т. е. $2x - 7$, может быть как отрицательной, так и неотрицательной. Таким образом, следует предусмотреть две возможности: $2x - 7 < 0$; $2x - 7 \geqslant 0$.

1) $2x - 7 < 0$. Запишем условие, задающее область определения (ОДЗ) неравенства $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$: $3x^2 - 22x \geqslant 0$. Если переменная x принимает значение, удовлетворяющее и неравенству $2x - 7 < 0$, и неравенству $3x^2 - 22x \geqslant 0$, то это значение автоматически является частным решением неравенства $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$.

Вывод: все частные решения системы неравенств $\begin{cases} 2x - 7 < 0, \\ 3x^2 - 22x \geqslant 0 \end{cases}$ являются частными решениями неравенства $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$.

Решим эту систему. Из неравенства $2x - 7 < 0$ находим: $x < 3{,}5$. Из неравенства $3x^2 - 22x \geqslant 0$ находим: $3x\left(x - \frac{22}{3}\right) \geqslant 0$, и далее

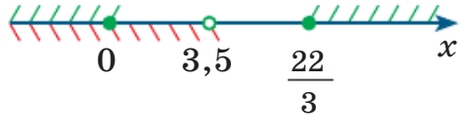


Рис. 187

(рис. 187): $x \leqslant 0$; $x \geqslant \frac{22}{3}$. Отметив на той же числовой прямой неравенство $x < 3{,}5$ (нижняя штриховка на рисунке 187), получим решение системы неравенств $\begin{cases} 2x - 7 < 0, \\ 3x^2 - 22x \geqslant 0: \end{cases}$

$$x \leqslant 0.$$

2) $2x - 7 \geqslant 0$. Вот теперь можем решать неравенство $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$ по тому же плану, который применяли при решении неравенства из пункта «а»: задача сводится к решению системы неравенств $\begin{cases} 2x - 7 \geqslant 0, \\ 3x^2 - 22x \geqslant 0, \\ 3x^2 - 22x > (2x - 7)^2. \end{cases}$ Решив эту систему, объединим полученное решение с найденным в случае 1 решением $x \leqslant 0$ и получим в итоге решение исходного неравенства.

Из неравенства $2x - 7 \geqslant 0$ находим: $x \geqslant 3{,}5$.

Неравенство $3x^2 - 22x \geqslant 0$ уже решено выше (в случае 1): $x \leqslant 0$; $x \geqslant \frac{22}{3}$.

Решим последнее неравенство системы:

$$3x^2 - 22x > (2x - 7)^2;$$
$$3x^2 - 22x > 4x^2 - 28x + 49;$$
$$x^2 - 6x + 49 < 0.$$

Квадратный трёхчлен $x^2 - 6x + 49$ имеет отрицательный дискриминант (проверьте!) и положительный старший коэффициент (коэффициент при x^2 равен 1); значит, для всех значений x выполняется неравенство $x^2 - 6x + 49 > 0$, а потому неравенство $x^2 - 6x + 49 < 0$ не имеет решений.

Итак, в рассматриваемой системе из трёх неравенств одно неравенство не имеет решений. Значит, и вся система не имеет решений.

Вывод: все решения исходного неравенства исчерпываются найденным в случае 1 решением $x \leqslant 0$.

Ответ: а) $-\frac{10}{13} \leqslant x \leqslant 2$; $x \geqslant 3$; б) $x \leqslant 0$.

Пример 4 Решить неравенство $\log_x \sqrt{21-4x} > 1$.

Решение. Имеем:

$$\log_x \sqrt{21-4x} > 1; \qquad \frac{1}{2}\log_x(21-4x) > 1;$$
$$\log_x(21-4x) > 2; \qquad \log_x(21-4x) > \log_x x^2.$$

Рассмотрим два случая: 1) $x > 1$; 2) $0 < x < 1$.

В случае 1, записав условия, определяющие ОДЗ: $21 - 4x > 0$, мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, сохранив, согласно теореме 6, знак исходного неравенства: $21 - 4x > x^2$.

Во случае 2, записав условия, определяющие ОДЗ: $21 - 4x > 0$, мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, изменив, согласно теореме 6, знак исходного неравенства на противоположный: $21 - 4x < x^2$.

Таким образом, заданное логарифмическое неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x > 1, \\ 21-4x > 0, \\ 21-4x > x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 21-4x > 0, \\ 21-4x < x^2. \end{cases}$$

Из первой системы неравенств находим: $1 < x < 3$. Вторая система не имеет решений.

Ответ: $1 < x < 3$.

Пример 5* Решить неравенство

$$\left(9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9\right) \cdot \log_2(3x^2 - 2x + 1) < 0.$$

Решение. Произведение ab отрицательно тогда и только тогда, когда a, b — числа противоположных знаков. Соответственно, в данном неравенстве

$$\text{либо } \begin{cases} 9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 > 0, \\ \log_2(3x^2 - 2x + 1) < 0, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} 9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 < 0, \\ \log_2(3x^2 - 2x + 1) > 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к решению *совокупности двух систем неравенств*:

$$\begin{cases} 9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 > 0, \\ \log_2(3x^2 - 2x + 1) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 < 0, \\ \log_2(3x^2 - 2x + 1) > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решим первую из этих систем; рассмотрим по отдельности каждое из неравенств первой системы.

1, а. В неравенстве $9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 > 0$ есть смысл ввести новую переменную $y = 3^{\sqrt{x}}$. Тогда неравенство примет вид $y^2 - 10y + 9 > 0$, и далее, $(y - 1)(y - 9) > 0$, откуда следует, что либо $y < 1$, либо $y > 9$. Значит, либо $3^{\sqrt{x}} < 1$, либо $3^{\sqrt{x}} > 9$.

Рассмотрим неравенство $3^{\sqrt{x}} < 1$. Имеем: $3^{\sqrt{x}} < 3^0$, $\sqrt{x} < 0$ — это неравенство не имеет решений.

Рассмотрим неравенство $3^{\sqrt{x}} > 9$. Имеем: $3^{\sqrt{x}} > 3^2$, $\sqrt{x} > 2$, $x > 4$.

Итак, решение неравенства $9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 > 0$ мы нашли: $x > 4$.

1, б. Решим логарифмическое неравенство $\log_2(3x^2 - 2x + 1) < 0$, т. е. $\log_2(3x^2 - 2x + 1) < \log_2 1$.

Это неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 > 0, \\ 3x^2 - 2x + 1 < 1. \end{cases}$

Квадратный трёхчлен $3x^2 - 2x + 1$ имеет отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент, значит, неравенство $3x^2 - 2x + 1 > 0$ выполняется при любых значениях x. Решим второе неравенство системы: $3x^2 - 2x + 1 < 1$. Имеем:

$$3x^2 - 2x < 0,\ 3x\left(x - \frac{2}{3}\right) < 0,\ 0 < x < \frac{2}{3}.$$

Итак, решение неравенства $\log_2(3x^2 - 2x + 1) < 0$ мы нашли: $0 < x < \frac{2}{3}$.

1, в. Мы решаем первую систему совокупности (1). Нашли решение первого неравенства: $x > 4$; нашли решение второго неравенства: $0 < x < \frac{2}{3}$. Пересечение этих решений пусто, значит, первая система совокупности (1) не имеет решений.

Решим вторую систему совокупности (1).

2, а. В неравенстве $9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 < 0$ вводим новую переменную $y = 3^{\sqrt{x}}$. Тогда неравенство примет вид $y^2 - 10y + 9 < 0$, и далее, $(y - 1)(y - 9) < 0$, откуда следует, что $1 < y < 9$. Далее имеем:

$$1 < 3^{\sqrt{x}} < 9, \quad 3^0 < 3^{\sqrt{x}} < 3^2, \quad 0 < \sqrt{x} < 2,$$
$$0 < x < 4.$$

2, б. Решим логарифмическое неравенство $\log_2(3x^2 - 2x + 1) > 0$, т. е. $\log_2(3x^2 - 2x + 1) > \log_2 1$.

Это неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 > 0, \\ 3x^2 - 2x + 1 > 1. \end{cases}$

Первое неравенство можно опустить — оно следует из второго. Решим второе неравенство системы:

$$3x^2 - 2x > 0,\ 3x\left(x - \frac{2}{3}\right) > 0.$$

Из последнего неравенства получаем: $x < 0$; $x > \frac{2}{3}$.

2, в. Мы решаем вторую систему совокупности (1). Нашли решение первого неравенства: $0 < x < 4$; нашли решение второго неравенства: $x < 0$; $x > \frac{2}{3}$. Пересечение этих решений таково (рис. 188): $\frac{2}{3} < x < 4$.

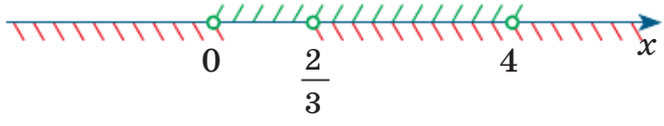


Рис. 188

Вывод: первая система совокупности (1) не имеет решений, вторая система совокупности (1) имеет решение $\frac{2}{3} < x < 4$. Значит, $\frac{2}{3} < x < 4$ — решение совокупности (1), а вместе с тем и решение исходного неравенства.

Ответ: $\frac{2}{3} < x < 4$.

Упражнения

37.1. Установите, равносильны ли данные неравенства.

а) $\cos x - 3^{x^2+2x-3} \geqslant 11$ и $\cos x \geqslant 11 + 3^{x^2+2x-3}$;

б) $\frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant 1$ и $\cos x \leqslant \sqrt{x^2+1}$;

в) $\sqrt{x^2+4x+4} \cdot \log_3(x^2-4x-5) \leqslant 0$ и $\log_3(x^2-4x-5) \leqslant 0$;

г) $\sin x + \log_3(x^2+2x-3) \leqslant 5$ и $\sin x \leqslant 5 - \log_3(x^2+2x-3)$;

д) $\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+2}} \leqslant 1$ и $\sin x \leqslant \sqrt{x^2+2}$;

е) $10^{3x-5} \cdot \ln(x^2+4x+4) > 0$ и $\ln(x^2+4x+4) > 0$.

37.2. а) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > 1$ и $x - 1 > 1$;

б) $\sqrt{3^x - 2} > 1$ и $x > 1$;

в) $\log_{0,1} x > 1$ и $x < 0{,}1$;

г) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} < 1$ и $x > 2$;

д) $\sqrt{3^x - 2} < 1$ и $x < 1$;

е) $\frac{1}{\lg x} > 1$ и $x < 10$.

37.3. Докажите равносильность:

а) неравенства $|f(x)| \leqslant g(x)$ и системы неравенств

$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant -g(x); \end{cases}$$

б) неравенств $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ и $(f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \leqslant 0$;

в) неравенства $\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant \sqrt[2n]{g(x)}$ и системы неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) \leqslant g(x); \end{cases}$$

г) неравенства $|f(x)| \geqslant g(x)$ и совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) \leqslant -g(x); \end{array}\right.$$

д) неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$ и совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$$

е) неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$ и системы неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

37.4. Решите неравенство, применяя теоремы о равносильности.

а) $\ln(x^2 + 15) > \ln(2x^2 + 6)$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)$;

в) $\log_{12}(3x^2 + 1) \geqslant \log_{12}(5 - 4x)$;

г) $\lg(12x^2 + 11) > \lg(8x^2 + 15)$;

д) $\log_{21}(6x - 11) \leqslant \log_{21}(3x + 2)$;

е) $\log_{\frac{1}{\pi}}(2x^2 + 1) > \log_{\frac{1}{\pi}}(x + 4)$.

37.5. а) $\sqrt[5]{3x-11} > \sqrt[5]{x+1}$;
б) $(x^2-6x)^7 < (x-6)^7$;
в) $(2\cdot 0{,}1^x+3)^6 \leqslant (0{,}1^x+103)^6$;
г) $\sqrt[7]{6x+5} < \sqrt[7]{3x+26}$;
д) $(2x^2-5x)^{11} \geqslant (x^2+6)^{11}$;
е) $(2^{x+1}-15)^8 \geqslant (2^x+17)^8$.

Решите неравенство методом введения новой переменной.

37.6. а) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2 \leqslant 0$;
б) $x^2-7|x|+6>0$;
в) $|x^2-3|x|+2|<0$;
г) $\sqrt[5]{x}-6\sqrt[10]{x}+8>0$;
д) $x^2+2|x|-8<0$;
е) $|x^2-8|x|+12| \geqslant 0$.

37.7. а) $4^{2x}-6\cdot 4^x+8 \leqslant 0$;
б) $3^{1+x}\cdot 2^{1-x}+3^x\cdot 2^{-x} \geqslant 10{,}5$;
в) $2\cdot 5^{2x}-11\cdot 5^x+5 \geqslant 0$;
г) $2^x\cdot 5^{1-x}+2^{x+1}\cdot 5^{-x} \leqslant 2{,}8$.

37.8. а) $9^{x+2}+4\cdot 3^{2x+2} < 4\frac{1}{3}$;
б) $4^{\sqrt{x}}-9\cdot 2^{\sqrt{x}}+8>0$;
в) $\left(\sqrt{5}-2\right)^x+\left(\sqrt{5}+2\right)^x \leqslant \sqrt{20}$;
г) $8^{x-2}+3\cdot 2^{3x-2}>24{,}5$;
д) $9^{\sqrt{x}}-10\cdot 3^{\sqrt{x}}+9<0$;
е) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(\sqrt{3}+2\right)^x \geqslant 4$.

37.9. а) $\log_3^2(x+2)-8\log_3(x+2)+15>0$;
б) $\log_5^2(x+1)-2\log_5(x+1)-8<0$.

Решите неравенство, применяя функционально-графические методы.

ИКТ 37.10. а) $2^x > 14-2x$;
б) $2^x-1<\sqrt{x}$;
в) $2^x<|x-3|$;
г) $2^x<14-2x$;
д) $2^x-1>\sqrt{x}$;
е) $2^x \geqslant |x-3|$.

ИКТ 37.11. а) $\log_4 x < -(x-1)^3$;
б) $\log_2 x \leqslant 20-x$;
в) $x+3\log_8 x>6$;
г) $\log_4 x \geqslant -(x-1)^3$;
д) $\log_2 x \geqslant 20-x$;
е) $x+3\log_8 x<6$.

ИКТ 37.12. а) $|x|<x+1$;
б) $|x-1|>x-1$;
в) $|x| \leqslant 3-2x$;
г) $|x+1| \geqslant 1-x$;
д) $|x+2| \leqslant x+2$;
е) $|x|>3x-2$.

37.13. а) $|2x-1|>4-0{,}5x$;
б) $|3x-5| \leqslant 5-2x$;
в) $|0{,}5x-3|>x+6$;
г) $|2x+3| \leqslant 3-0{,}5x$;
д) $|3x+4|>x+4$;
е) $|0{,}5x+1|<4-2x$.

37.14. а) $x^2 + 2 \geqslant 2\cos x$;

в) $x^2 + 2 \leqslant 2\cos x$;

б) $3\sin x \leqslant -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 3$;

г) $3\sin x \geqslant -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 3$.

Решите систему или совокупность неравенств.

37.15. а) $\begin{cases} 4x - 13 > 2x + 1, \\ 11x + 7 < 5x + 61; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x - 7 \leqslant 3x - 5, \\ 13x + 3 \geqslant 9x + 79; \end{cases}$

б) $\left[\begin{array}{l} 4x - 13 > 2x + 1, \\ 11x + 7 < 5x + 61; \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} 5x - 7 \leqslant 3x - 5, \\ 13x + 3 \geqslant 9x + 79. \end{array}\right.$

37.16. а) $\begin{cases} (x + 2)^2 - (x - 2)^2 > 16, \\ (x + 3)(x - 3) - (x + 1)^2 > 12; \end{cases}$

б) $\left[\begin{array}{l} (x + 2)^2 - (x - 2)^2 > 16, \\ (x + 3)(x - 3) - (x + 1)^2 > 12; \end{array}\right.$

в) $\begin{cases} (x - 3)^2 - (x + 3)^2 \leqslant 24, \\ (x - 1)(x + 1) - (x + 2)^2 \geqslant 3; \end{cases}$

г) $\left[\begin{array}{l} (x - 3)^2 - (x + 3)^2 \leqslant 24, \\ (x - 1)(x + 1) - (x + 2)^2 \geqslant 3. \end{array}\right.$

37.17. а) $\begin{cases} x^2 > 9, \\ x - 4 < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 2x < 0, \\ 4x - 8 \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\left[\begin{array}{l} x^2 > 9, \\ x - 4 < 0; \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x < 0, \\ 4x - 8 \geqslant 0. \end{array}\right.$

37.18. а) $\begin{cases} x^3 < 4x, \\ 3x^2 - x > 5 - 15x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x + 5}{x - 7} < 1, \\ \frac{3x + 4}{4x - 2} > -1; \end{cases}$

б) $\left[\begin{array}{l} x^3 < 4x, \\ 3x^2 - x > 5 - 15x; \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} \frac{x + 5}{x - 7} < 1, \\ \frac{3x + 4}{4x - 2} > -1. \end{array}\right.$

37.19. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{24}{(x+2)^2} < 0, \\ -5x < 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{24}{(x+2)^2} < 0, \\ -5x < 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 1{,}5x - 7}{(x-3)^2} \geqslant 0, \\ x^2 < 25; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 1{,}5x - 7}{(x-3)^2} \geqslant 0, \\ x^2 < 25. \end{cases}$

37.20. а) $\begin{cases} (x-2)^3 \geqslant 27, \\ 5x - 4 \leqslant 9 + x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-2)^3 \geqslant 27, \\ 5x - 4 \leqslant 9 + x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 1) \leqslant 26, \\ x^2 - 121 > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 1) \leqslant 26, \\ x^2 - 121 > 0. \end{cases}$

Решите неравенство.

37.21. а) $\sqrt{x} > 5$;

б) $\sqrt[3]{x+1} \leqslant 2$;

в) $\sqrt[4]{3-x} > 1$;

г) $\sqrt{x} < 4$;

д) $\sqrt[3]{x-1} \geqslant 3$;

е) $\sqrt[4]{5-x} \leqslant 2$.

37.22. а) $x\sqrt{x-2} > 0$;

б) $(x-2)\sqrt{x} \leqslant 0$;

в) $\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0$;

г) $x\sqrt{x+3} < 0$;

д) $(x+3)\sqrt{x-1} \geqslant 0$;

е) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}} \leqslant 0$.

37.23. а) $\sqrt{x^2 - 5x + 10} > 2$;

б) $\sqrt{2x^2 - 12x + 17} < x - 3$;

в) $\sqrt{x^2 - 4x - 3} \geqslant 3$;

г) $\sqrt{x^2 - 5x + 15} \leqslant 3$;

д) $\sqrt{2x^2 - 16x + 33} \geqslant x - 5$;

е) $\sqrt{36 - x - 12x^2} < 5$.

37.24. а) $\sqrt{x+3} > \sqrt{2x-5}$;

б) $\sqrt{x+3} > \sqrt{5-2x}$;

в) $\sqrt{x+12} > x$;

г) $\sqrt{2x-5} < \sqrt{5x+3}$;

д) $\sqrt{5-2x} < \sqrt{5x+3}$;

е) $\sqrt{5x+6} < x$.

37.25. а) $\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{4x+5}>6$;

б) $\sqrt{(x+3)(4x+5)}>6$;

в) $\dfrac{\sqrt{4x+5}}{\sqrt{x+3}}>6$;

г) $\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x-2}<3$;

д) $\sqrt{(2x+3)(x-2)}<3$;

е) $\dfrac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-2}}<3$.

37.26. а) $\sqrt{x^2+5x-11}\leqslant x+4$;

б) $\sqrt{37+5x-x^2}>x-10$;

в) $\sqrt{2x^3+x^2-20}\leqslant x$;

г) $\sqrt{x^2-7x+12}>x-5$;

д) $\sqrt{9+5x-x^2}<x-8$;

е) $\sqrt{2x^3+x+3}\leqslant x\sqrt{6}$.

37.27. а) $x|x-6|\leqslant 5$;

б) $x|x-5|\geqslant 4$.

37.28. а) $|4x-3|<|2x+1|$;

б) $|x^2+3x-5|<|x^2-7x+5|$;

в) $|x^2+4x-5|\leqslant(x+5)(x-1)$;

г) $|7x+3|>|4-5x|$;

д) $|x^2-5x+7|\geqslant|x^2+2x-7|$;

е) $|x^2-2x-15|\geqslant(x-5)(x+3)$.

37.29. а) $|\ln x|<1$;

б) $\lg(|x|+1)\geqslant 1$;

в) $|\lg(|x|-1)|>1$;

г) $|\ln x-1|>1$;

д) $|\lg(|x|+1)|\geqslant 1$;

е) $\lg(|x|-1)\leqslant 1$.

37.30. а) $(\log_{0,5}x-19)^{11}>(8\log_{0,5}x+9)^{11}$;

б) $(3-5\log_{0,125}x)^{15}\leqslant(\log_{0,125}x+7)^{15}$.

37.31. а) $2\sin^2x+\sin x-3\geqslant 0$;

б) $6\cos^2x-13\cos x+7\leqslant 0$.

37.32. а) $25^{\log_{0,1}x}-5^{\log_{0,1}x+1}+0{,}1^{\log_{0,1}4}\leqslant 0$;

б) $49^{\ln x}-7^{\ln x+1}-e^{\ln 8}\geqslant 0$.

37.33. а) $(x-3)\log_3(x+3)\geqslant 0$;

б) $(3^x-5)(4x+7)\leqslant 0$;

в) $(x-5)\sqrt{\log_2(x-2)}\geqslant 0$;

г) $(3-x)\log_5(x+4)\leqslant 0$;

д) $(6^x-3)(5x+8)\geqslant 0$;

е) $(x-12)\sqrt{\log_7(x-5)}\geqslant 0$.

37.34. а) $\left(\sqrt{14-6\sqrt{5}}\right)^{x-\sqrt{x}}>\left(3-\sqrt{5}\right)^{x+\sqrt{x}}$;

б) $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$;

в) $9^{\sqrt[4]{x}}+5\cdot 3^{\sqrt[4]{x}+1}+27\leqslant 3^{\sqrt[4]{x}}+3$;

г) $\sqrt{2(5^x+24)}-\sqrt{5^x-7}\geqslant\sqrt{5^x+7}$.

37.35. а) $\log_{x-2}(x^2-10x+25)\leqslant 0$;

б) $\log_{6-x}\dfrac{-7-x}{x-6}\leqslant -1$;

в) $\log_{x^2-8x+17}(3x^2+5)\leqslant \log_{x^2-8x+17}(2x^2+7x+5)$;

г) $\log_{x^2+2x-2}\dfrac{|x+4|-|x|}{x-1}>0$.

37.36. а) $(x^2+4x)(\operatorname{ctg}^2 x+3^{x-1})\leqslant 0$;

б) $\sqrt{\cos x-1}\leqslant x^2-36$;

в) $6\log_3|x-1|<14+2x-x^2$;

г) $(x^2-2x)(\operatorname{tg}^2 x+2^{x+1})\leqslant 0$;

д) $\sqrt{\sin x-1}\leqslant 9-x^2$;

е) $\log_2(x^2+x-10)<25-2x-2x^2$.

37.37. а) $2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0$;

б) $6\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x>2$;

в) $\sin x+\cos x<\dfrac{1}{\sin x}$;

г) $2\sin^2 x+\sin 2x-2\cos^2 x\geqslant 1$.

37.38. а) $\sin^2 x-\cos^2 x-3\sin x+2<0$;

б) $\operatorname{ctg}x+\dfrac{\sin x}{\cos x-2}\leqslant 0$;

в) $2\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos 2x<0$;

г) $\cos^2 2x+\cos^2 x\leqslant 1$.

37.39. а) $4\log_{16}\cos 2x+2\log_4\sin x+\log_2\cos x+3<0$;

б) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}x-1}}>1$.

37.40. а) $\log_{2\sin x}(2\cos x)+2\log_{2\cos x}(2\sin x)>3$;

б) $(\log_{\sin x}2)^2<\log_{\sin x}(4\sin^3 x)$.

§ 38. Уравнения и неравенства с параметрами

Если уравнение $f(x;\ a) = 0$ (неравенство $f(x;\ a) > 0$) надо решить относительно переменной x, а буквой a обозначено произвольное действительное число, то уравнение $f(x;\ a) = 0$ (неравенство $f(x;\ a) > 0$) называют **уравнением с параметром a** (неравенством с параметром a). Разумеется, параметр может быть обозначен не только буквой a, но и другой буквой латинского алфавита (p, b, c и т. д.). Решение уравнения или неравенства с параметром — это своего рода мини-исследование, в котором следует разбираться с различными случаями, возникающими в зависимости от значений параметра. Поясним эту мысль.

Пусть необходимо решить уравнение $2x^2 - 5x + 1 = 0$. Для этого используем формулу корней квадратного уравнения: найдём дискриминант D (в данном случае $D = 25 - 8 = 17$) и запишем корни:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Пусть теперь необходимо решить уравнение с параметром $(a - 3)x^2 + 2x - 1 = 0$. Как сказано выше, буквой a обозначено произвольное действительное число. В частности, может быть $a = 3$. Тогда исходное уравнение из квадратного превращается в линейное $2x - 1 = 0$. Оно имеет один корень $x = 0{,}5$.

В случае, когда $a \neq 3$, исходное уравнение решается методом, применяемым для квадратных уравнений. При его решении вновь вычисляется дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot (a - 3) \cdot (-1) = 4a - 8$. Как видим, теперь дискриминант зависит от параметра a. В зависимости от значений параметра a квадратное уравнение либо имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{D}}{2(a-3)}$ (при $a > 2$, $a \neq 3$), либо имеет один корень $x = -1$ (при $a = 2$), либо корней не имеет ($a < 2$). В итоге ответом является множество решений, зависящее от значений параметра a.

Ещё сложнее обстоит дело при решении неравенств с параметром. Например, при решении неравенства $(a - 3)x^2 + 2x - 1 > 0$ придётся разбираться не с двумя возможностями ($a = 3$, $a \neq 3$, как в уравнении $(a - 3)x^2 + 2x - 1 = 0$), а с тремя: $a = 3$, $a < 3$, $a > 3$. Вот почему мы использовали выше термин «мини-исследование».

И с уравнением $(a-3)x^2+2x-1=0$, и с неравенством $(a-3)x^2+2x-1>0$ мы детально разберёмся ниже, в примере 2. Но сначала рассмотрим более простой пример линейных уравнений и неравенств с параметром a.

Пример 1 Решить:

а) уравнение $(a^2-9)x=a-3$;

б) неравенство $(a^2-9)x>a-3$;

в) неравенство $(a^2-9)x\leqslant a-3$.

Решение. а) Придётся рассмотреть два случая: $a^2-9=0$, $a^2-9\neq 0$. Первый случай, в свою очередь, распадается на два: $a=3$, $a=-3$. Приступим к рассмотрению каждого из этих случаев.

1) $a=3$. Тогда уравнение $(a^2-9)x=a-3$ принимает такой вид: $0\cdot x=0$ — это верно при любом значении x.

2) $a=-3$. Тогда уравнение $(a^2-9)x=a-3$ принимает такой вид: $0\cdot x=-6$ — не выполняется ни при каком значении x, т. е. в этом случае уравнение не имеет корней.

3) $a\neq 3$, $a\neq -3$. Тогда коэффициент при x отличен от нуля и на него можно разделить обе части уравнения $(a^2-9)x=a-3$; получим: $x=\dfrac{a-3}{a^2-9}$, т. е. $x=\dfrac{1}{a+3}$.

Подведём итоги. Запишем ответ в виде таблицы.

$a=3$	$a=-3$	$a\neq\pm 3$
$-\infty<x<+\infty$	$\varnothing$	$x=\dfrac{1}{a+3}$

б) Для неравенства $(a^2-9)x>a-3$ придётся рассмотреть пять случаев: $a=3$, $a=-3$, $a<-3$, $-3<a<3$, $a>3$.

1) $a=3$. Тогда неравенство $(a^2-9)x>a-3$ принимает такой вид: $0\cdot x>0$. Это неравенство не имеет решений.

2) $a=-3$. Тогда неравенство $(a^2-9)x>a-3$ принимает такой вид: $0\cdot x>-6$. Это неравенство верно при любых значениях x.

3) $a<-3$. В этом случае коэффициент (a^2-9) при x — положительное число. Имеем:

$$(a^2-9)x>a-3;$$

$$x>\frac{a-3}{a^2-9};\quad x>\frac{1}{a+3}.$$

4) $-3 < a < 3$. В этом случае коэффициент $(a^2 - 9)$ при x — отрицательное число. Имеем:

$$(a^2 - 9)x > a - 3;\ x < \frac{1}{a+3}.$$

5) $a > 3$. В этом случае $a^2 - 9 > 0$, значит, имеем:

$$(a^2 - 9)x > a - 3;\ x > \frac{1}{a+3}.$$

Подведём итоги. Ответ запишем в виде таблицы.

$a < -3$	$a = -3$	$-3 < a < 3$	$a = 3$	$a > 3$
$x > \frac{1}{a+3}$	$-\infty < x < +\infty$	$x < \frac{1}{a+3}$	$\varnothing$	$x > \frac{1}{a+3}$

в) Как и в пункте «б», рассмотрим пять случаев.

1) $a = 3$. Тогда неравенство $(a^2 - 9)x \leqslant a - 3$ принимает такой вид: $0 \cdot x \leqslant 0$. Это неравенство верно при любых значениях x.

2) $a = -3$. Тогда неравенство $(a^2 - 9)x \leqslant a - 3$ принимает такой вид: $0 \cdot x \leqslant -6$. Это неравенство не имеет решений.

3) $a < -3$. В этом случае коэффициент при x — положительное число, получаем $x \leqslant \frac{1}{a+3}$.

4) $-3 < a < 3$. В этом случае коэффициент при x — отрицательное число, получаем $x \geqslant \frac{1}{a+3}$.

5) $a > 3$. В этом случае коэффициент при x — отрицательное число, получаем $x \leqslant \frac{1}{a+3}$.

Подведём итоги. Ответ запишем в виде таблицы.

$a < -3$	$a = -3$	$-3 < a < 3$	$a = 3$	$a > 3$
$x \leqslant \frac{1}{a+3}$	$\varnothing$	$x \geqslant \frac{1}{a+3}$	$-\infty < x < +\infty$	$x \leqslant \frac{1}{a+3}$

При работе с уравнениями и неравенствами с параметрами, в которых появляются квадратные трёхчлены, параметр удобнее обозна-

чать буквой p, а не буквой a. Иначе возможна путаница со старшим коэффициентом a в квадратном трёхчлене $ax^2 + bx + c$.

Пример 2 Решить:

а) уравнение $(p - 3)x^2 + 2x - 1 = 0$;

б) неравенство $(p - 3)x^2 + 2x - 1 > 0$.

Решение. а) Если $p = 3$, то уравнение принимает вид $2x - 1 = 0$, откуда находим $x = \frac{1}{2}$.

Если $p \neq 3$, то получается квадратное уравнение с чётным коэффициентом при x. Находим $\frac{D}{4} = 1^2 + (p - 3) \cdot 1 = p - 2$.

Если $p < 2$, то $D < 0$ и уравнение не имеет действительных корней.

Если $p = 2$, то $D = 0$ и уравнение имеет единственный корень $x = \frac{-1 \pm \sqrt{0}}{2 - 3} = 1$.

Если $2 < p < 3$ или $p > 3$, то $D > 0$ и уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{p - 2}}{p - 3}$.

Подведём итоги. Ответ запишем в виде таблицы.

$p < 2$	$p = 2$	$2 < p < 3$ или $p > 3$	$p = 3$
$\varnothing$	$x = 1$	$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{p - 2}}{p - 3}$	$x = \frac{1}{2}$

Обратите внимание: в итоговом ответе учтены все возможные значения параметра.

б) Как и в пункте «а», надо рассмотреть пять случаев: $p < 2$, $p = 2$, $2 < p < 3$, $p = 3$, $p > 3$.

1) $p < 2$. Тогда ветви параболы $y = (p - 3)x^2 + 2x - 1$ направлены вниз, так как старший коэффициент $p - 3$ отрицателен, и парабола не пересекает ось Ox, так как $D < 0$. Значит, вся парабола расположена ниже оси Ox, т. е. $(p - 3)x^2 + 2x - 1 < 0$ при всех значениях x (рис. 189).

Итак, неравенство $(p - 3)x^2 + 2x - 1 > 0$ при $p < 2$ решений не имеет.

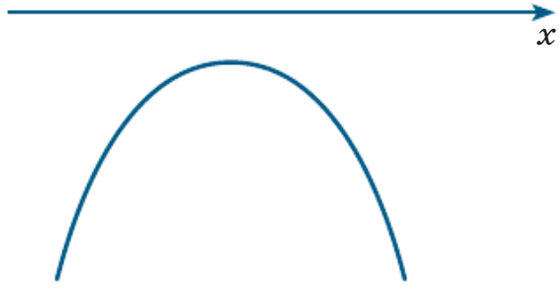


Рис. 189

2) $p = 2$. Тогда данное неравенство $(p-3)x^2 + 2x - 1 > 0$ принимает вид:

$$-x^2 + 2x - 1 < 0,$$
$$x^2 - 2x + 1 > 0, \quad (x-1)^2 > 0.$$

Последнее неравенство верно для всех значений x, кроме $x = 1$. Ответ в данном случае можно записать так: $\left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 1 \end{array}\right.$ или так: $x < 1;\ x > 1$.

3) $2 < p < 3$. Ветви параболы $y = (p-3)x^2 + 2x - 1$ направлены вниз, она пересекает ось Ox в двух точках (напомним, что в этом случае квадратный трёхчлен $(p-3)x^2 + 2x - 1$ имеет два корня) и ответ для интересующего нас неравенства — промежуток между этими точками, т. е. между корнями $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{p-2}}{p-3}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{p-2}}{p-3}$ трёхчлена $(p-3)x^2 + 2x - 1$. Так как $-1-\sqrt{p-2} < -1+\sqrt{p-2}$, а $p - 3 < 0$, то $\dfrac{-1+\sqrt{p-2}}{p-3} < \dfrac{-1-\sqrt{p-2}}{p-3}$, т. е. $x_1 < x_2$ (рис. 190).

Итак, $\dfrac{-1+\sqrt{p-2}}{p-3} < x < \dfrac{-1-\sqrt{p-2}}{p-3}$.

4) $p = 3$. Тогда получаем неравенство $2x - 1 > 0$, т. е. $x > \dfrac{1}{2}$.

5) $p > 3$. Ветви параболы $y = (p-3)x^2 + 2x - 1$ направлены вверх, она пересекает ось Ox в двух точках (рис. 191). В отличие от случая $2 < p < 3$, здесь $x_1 > x_2$, ведь $p - 3 > 0$.

Поэтому ответ для интересующего нас неравенства — либо $x < x_2$, либо $x > x_1$, т. е.:

$$x < \frac{-1-\sqrt{p-2}}{p-3}; \quad x > \frac{-1+\sqrt{p-2}}{p-3}.$$

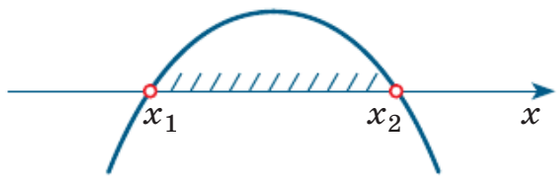


Рис. 190



Рис. 191

Подведём итоги. Ответ запишем в виде таблицы.

$p < 2$	$p = 2$	$2 < p < 3$	$p = 3$	$p > 3$
$\varnothing$	$x < 1;\ x > 1$	$x_1 < x < x_2$	$x > \frac{1}{2}$	$x < x_2;\ x > x_1,$

где $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{p-2}}{p-3}$, $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{p-2}}{p-3}$.

Пример 3* Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(p-2)x^2 - 2px + p + 3 = 0$ имеет корни, каждый из которых:

а) положителен;

б) меньше чем 3;

в) принадлежит интервалу $(1; 3)$.

Решение. а) Для $p = 2$ получаем: $-4x + 5 = 0$, $x = 1{,}25$. Число 1,25 положительно. Таким образом, выполняется условие задачи и значение $p = 2$ следует включить в ответ.

Если $p \neq 2$, то получаем квадратное уравнение. Оно имеет корни, если $D \geqslant 0$. Так как

$$\frac{D}{4} = (-p)^2 - (p-2)(p+3) = 6 - p,$$

то получаем, что $D \geqslant 0$, если $p \leqslant 6$.

Для $p = 6$ получаем: $4x^2 - 12x + 9 = 0$, $(2x-3)^2 = 0$, $x = 1{,}5$. Число 1,5 положительно. Таким образом, значение параметра $p = 6$ следует включить в ответ.

Осталось рассмотреть случай, когда $p < 6$, $p \neq 2$. Тогда $D > 0$ и парабола $y = (p-2)x^2 - 2px + p + 3$ пересекает ось Ox в двух точках: x_1, x_2. Найдём абсциссу вершины параболы (по формуле $x_{\text{верш}} = -\dfrac{b}{2a}$ для функции $y = ax^2 + bx + c$): $x_{\text{верш}} = \dfrac{p}{p-2}$. Заметим далее, что $y(0) = p + 3$, т. е. парабола пересекает ось Oy в точке $(0; p+3)$.

Итак, $x_{\text{верш}} = \dfrac{p}{p-2}$, $y(0) = p + 3$. Значит, в дальнейшем нам следует обратить особое внимание на такие значения параметра: $p = 0$, $p = 2$, $p = -3$.

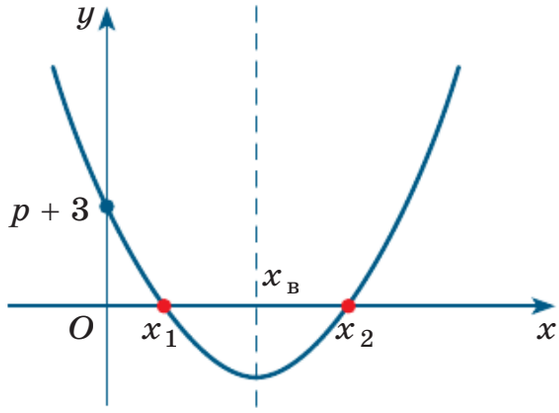


Рис. 192

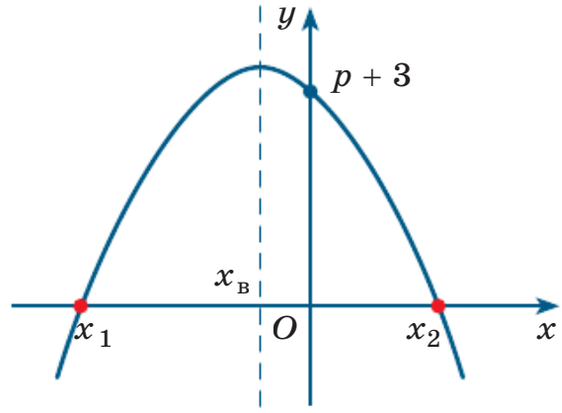


Рис. 193

Если $2 < p < 6$, то ветви параболы $y = (p-2)x^2 - 2px + p + 3$ направлены вверх, так как $p - 2 > 0$. Кроме того, $x_{\text{верш}} = \frac{p}{p-2} > 0$ и $y(0) = p + 3 > 0$ (рис. 192).

В этом случае x_1, x_2 положительны, т. е. условие задачи выполняется для обоих корней.

Если $0 \leqslant p < 2$, то $p - 2 < 0$, ветви параболы направлены вниз, $x_{\text{верш}} \leqslant 0$ и $y(0) = p + 3 > 0$ (рис. 193).

В этом случае меньший из корней x_1, x_2 отрицателен, т. е. условие задачи не выполнено.

Если $-3 \leqslant p < 0$, то $p - 2 < 0$, $x_{\text{верш}} > 0$ и $y(0) = p + 3 \geqslant 0$ (рис. 194).

В этом случае меньший из корней x_1, x_2 не положителен, т. е. условие задачи не выполнено.

Если $p < -3$, то $p - 2 < 0$, $x_{\text{верш}} > 0$ и $y(0) = p + 3 < 0$ (рис. 195).

В этом случае условие задачи выполнено.

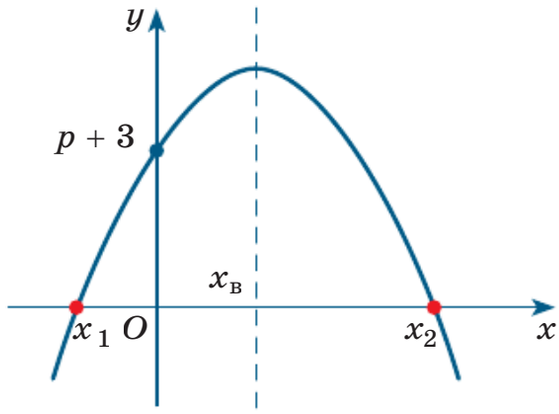


Рис. 194

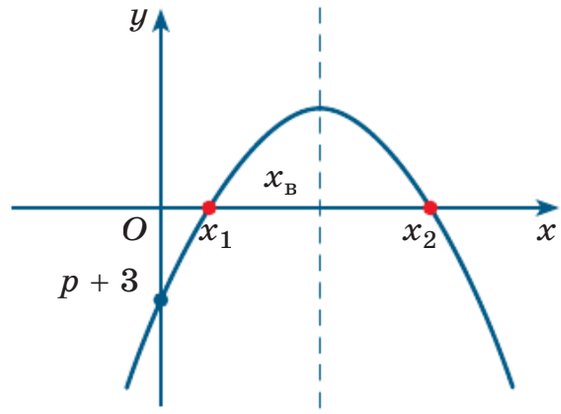


Рис. 195

Итак, все корни заданного уравнения положительны при следующих значениях параметра: $p < -3$, $2 \leqslant p \leqslant 6$.

б) В пункте «а» корни мы сравнивали с числом 0. Здесь нам нужно сравнить корни с числом 3. Поэтому мы будем сравнивать $x_{\text{верш}}$ не с числом 0, а с числом 3, а вместо $y(0)$ используем $y(3)$. Но сначала — «особые» случаи $p = 2$ или $p = 6$. Тогда $x = 1{,}25$ или $x = 1{,}5$. Оба числа меньше 3, т. е. условие задачи выполнено.

Рассмотрим случай $p < 6$, $p \neq 2$. Найдём разность $x_{\text{верш}} - 3$:

$$x_{\text{верш}} - 3 = \frac{p}{p-2} - 3 = \frac{2(3-p)}{p-2},$$

$$\text{и } y(3) = (p-2) \cdot 9 - 2p \cdot 3 + p + 3 = 4p - 15.$$

Если $\frac{15}{4} < p < 6$, то ветви параболы $y = (p-2)x^2 - 2px + p + 3$ направлены вверх, так как $p - 2 > 0$. Кроме того, $x_{\text{верш}} - 3 = \frac{2(3-p)}{p-2} < 0$, $x_{\text{верш}} < 3$ и $y(3) = 4p - 15 > 0$ (рис. 196).

В этом случае корни x_1, x_2 меньше 3.

Если $3 < p \leqslant \frac{15}{4}$, то ветви параболы направлены вверх, $x_{\text{верш}} < 3$, а $y(3) = 4p - 15 \leqslant 0$ (рис. 197).

В этом случае больший из корней x_1, x_2 больше или равен 3, т. е. условие задачи не выполнено.

Если $2 < p \leqslant 3$, то ветви параболы направлены вверх, $x_{\text{верш}} \geqslant 3$, а $y(3) = 4p - 15 < 0$ (рис. 198).

В этом случае больший из корней x_1, x_2 больше 3, т. е. условие задачи не выполнено.

Если $p < 2$, то ветви параболы направлены вниз, $x_{\text{верш}} < 3$, а $y(3) = 4p - 15 < 0$ (рис. 199).

В этом случае корни x_1, x_2 меньше 3, условие задачи выполнено.

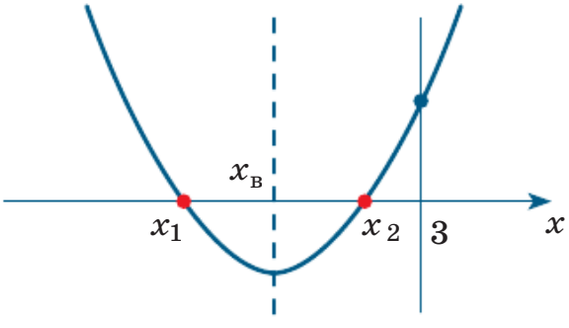


Рис. 196

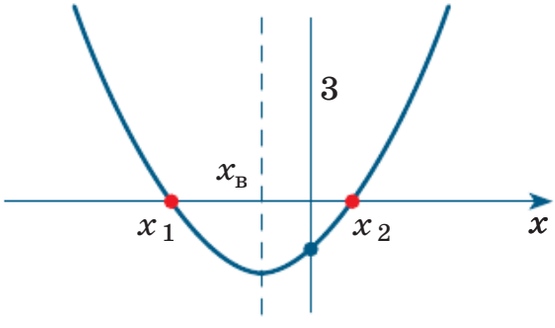


Рис. 197

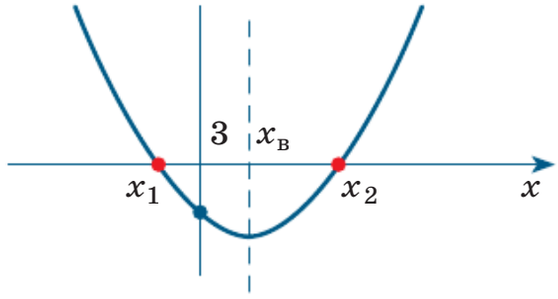


Рис. 198

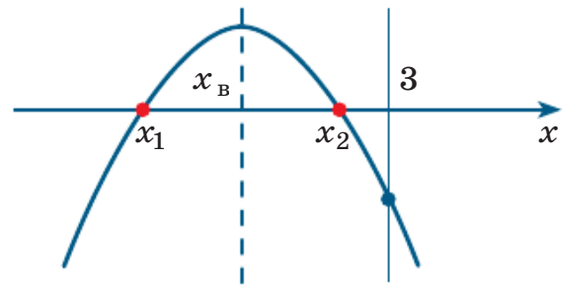


Рис. 199

Остаётся собрать все нужные случаи вместе и не забыть про $p = 2$ и $p = 6$. В итоге получаем, что все корни уравнения

$$(p - 2)x^2 - 2px + p + 3 = 0$$

меньше чем 3, если $p \leqslant 2$ или $\frac{15}{4} < p \leqslant 6$.

в) Если $p = 2$, то, как и выше, в пункте «а» $x = 1{,}25$. Этот корень принадлежит интервалу (1; 3), а потому значение $p = 2$ следует включить в окончательный ответ.

Если $p = 6$, то уравнение $(p - 2)x^2 - 2px + p + 3 = 0$ принимает вид $4x^2 - 12x + 9 = 0$, откуда находим $x = 1{,}5$. Этот корень принадлежит интервалу (1; 3), а потому значение $p = 6$ также следует включить в окончательный ответ.

Если $p > 6$, то, напомним, уравнение не имеет корней.

Если $p < 6$, $p \neq 2$, то графиком функции $y = (p - 2)x^2 - 2px + p + 3$ является парабола с ветвями вверх при $2 < p < 6$ и с ветвями вниз при $p < 2$, пересекающая ось абсцисс в двух точках; по условию задачи обе эти точки должны принадлежать интервалу (1; 3).

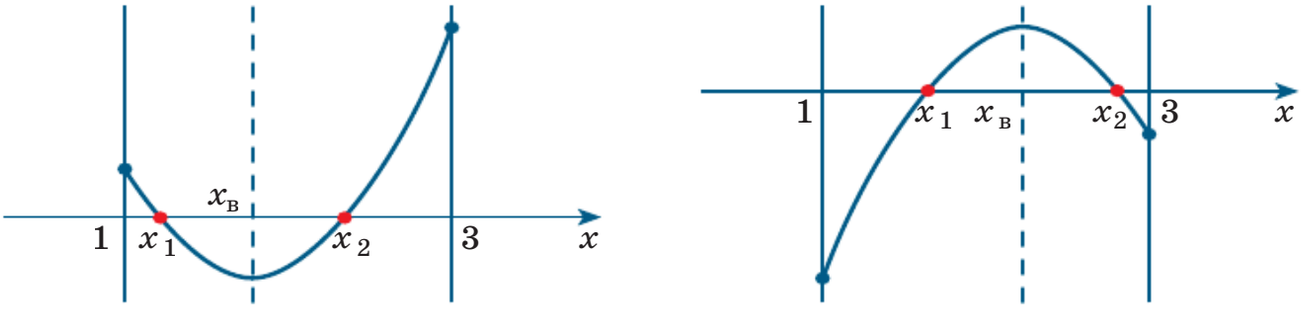
Имеет место следующее утверждение.

Для того чтобы парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекала ось Ox в точках, принадлежащих интервалу (1; 3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств

$$\begin{cases} 1 < x_{\text{верш}} < 3, \\ a \cdot y(1) > 0, \\ a \cdot y(3) > 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Справедливость этого утверждения наглядно демонстрирует рисунок 200.

Чтобы воспользоваться сформулированным выше утверждением, нам понадобятся $x_{\text{верш}}$, $y(1)$ и $y(3)$.



а *б*

Рис. 200

Имеем:

$$x_{\text{верш}} = \frac{p}{p-2};\ y(1) = (p-2) - 2p + (p+3) = 1;\ y(3) = 4p - 15.$$

Составим систему неравенств, о которой идёт речь в утверждении:

$$\begin{cases} 1 < \dfrac{p}{p-2} < 3, \\ (p-2) \cdot 1 > 0, \\ (p-2)(4p-15) > 0, \\ p < 6. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $\frac{15}{4} < p < 6$.

Итак, $\frac{15}{4} < p \leqslant 6$.

Ответ: а) $p < -3$, $2 \leqslant p \leqslant 6$; б) $p \leqslant 2$, $\frac{15}{4} < p \leqslant 6$; в) $p = 2$, $\frac{15}{4} < p \leqslant 6$.

Пример 4 Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\frac{x-2a+3}{x+a} < 0$ выполняется для всех значений x из отрезка $[-3; 5]$.

Решение. Числитель дроби $\frac{x-(2a-3)}{x+a}$ обращается в 0 при $x = 2a - 3$, а знаменатель — при $x = -a$. Относительно чисел $2a - 3$, $-a$ имеются три возможности: $2a - 3 < -a$, $2a - 3 = -a$, $2a - 3 > -a$. Поэтому решим данное неравенство в каждом из этих трёх случаев и затем ответим на вопрос задачи.



а *б*

Рис. 201

1) $2a - 3 < -a$. В этом случае точка $2a - 3$ располагается на числовой прямой левее точки $-a$ и решение неравенства $\frac{x - 2a + 3}{x + a} < 0$ таково: $2a - 3 < x < -a$ (рис. 201, *а*).

А что означает требование, чтобы заданное неравенство выполнялось для всех значений x из отрезка $[-3; 5]$? Это означает, что отрезок $[-3; 5]$ содержится в интервале $(2a - 3; -a)$, т. е. должны одновременно выполняться два условия: $2a - 3 < -3$ и $5 < -a$ (рис. 201, *б*). И не забудем про условие $2a - 3 < -a$. Вывод: нам нужно найти решение системы трёх неравенств: $\begin{cases} 2a - 3 < -a, \\ 2a - 3 < -3, \\ 5 < -a. \end{cases}$

Имеем: $\begin{cases} a < 1, \\ a < 0, \\ a < -5; \end{cases}$ получаем: $a < -5$.

2) $2a - 3 = -a$, т. е. $a = 1$. В этом случае неравенство $\frac{x - 2a + 3}{x + a} < 0$ принимает вид $\frac{x + 1}{x + 1} < 0$, оно не имеет решений.

3) $2a - 3 > -a$. В этом случае точка $2a - 3$ располагается на числовой прямой правее точки $-a$ и решение неравенства $\frac{x - 2a + 3}{x + a} < 0$ таково: $-a < x < 2a - 3$ (рис. 202, *а*).

Отрезок $[-3; 5]$ должен содержаться в интервале $(-a; 2a - 3)$, т. е. должны одновременно выполняться два условия: $-a < -3$ и $5 < 2a - 3$ (рис. 202, *б*).



а *б*

Рис. 202

Вывод: нам нужно найти решение системы трёх неравенств:

$$\begin{cases} 2a-3>-a, \\ -a<-3, \\ 5<2a-3. \end{cases}$$ Имеем: $$\begin{cases} a>1, \\ a>3, \\ a>4; \end{cases}$$ получаем: $a>4$.

Ответ: $a<-5$; $a>4$.

Пример 5 Найти все значения параметра a, при которых функция $y=ax^3+3ax^2+6x+7$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение. Если $a=0$, то заданная функция — линейная: $y=6x+7$; эта функция возрастает на всей числовой прямой.

Если $a\neq 0$, то заданная функция — кубическая. Как вы знаете, исследование функции на монотонность связано со знаком её производной. Имеем: $y'=(ax^3+3ax^2+6x+7)'=3ax^2+6ax+6$.

Чтобы функция возрастала на всей числовой прямой, квадратный трёхчлен $3ax^2+6ax+6$ должен быть неотрицательным при любых значениях x. А это будет тогда и только тогда, когда старший коэффициент (в данном случае $3a$) — положительное число, а дискриминант D — неотрицательное число. Найдём дискриминант:

$$D=(6a)^2-4\cdot 3a\cdot 6=36a^2-72a=36a(a-2).$$

Итак, нам нужно решить систему неравенств: $$\begin{cases} 3a>0, \\ 36a(a-2)\geqslant 0. \end{cases}$$

Получаем $a\geqslant 2$.

Ответ: $a=0$; $a\geqslant 2$.

Пример 6 При каких значениях параметра a функция $y=2x^3-6a^2x+3$ имеет минимум в точке $x=3$?

Решение. $y'=(2x^3-6a^2x+3)'=6x^2-6a^2=6(x-a)(x+a)$.

Если $a=0$, то $y'=6x^2$. Производная всюду неотрицательна, следовательно, функция $y=2x^3-6a^2x+3$ возрастает на всей числовой прямой, точек экстремума у неё нет; в частности, точка $x=3$ не может быть точкой минимума.

Если $a\neq 0$, то заданная функция имеет две стационарные точки: a, $-a$, которые разбивают ось абсцисс на три промежутка. Тут две возможности: $a<-a$, $-a<a$.

Рассмотрим первый случай: $a<-a$. Знаки производной на полученных промежутках указаны на рисунке 203. Как видим, $x=-a$ — точка минимума. Но по условию точкой минимума должна быть точка $x=3$. Значит, $-a=3$, $a=-3$.



Рис. 203



Рис. 204

Рассмотрим второй случай: $-a < a$. Знаки производной на полученных промежутках указаны на рисунке 204. Как видим, $x = a$ — точка минимума. Но по условию точкой минимума должна быть точка $x = 3$. Значит, $a = 3$.

Ответ: $a = \pm 3$.

Пример 7* При каком значении параметра a прямая $y = ax + 1$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{4x + 1}$?

Решение. Как известно, угловой коэффициент касательной (в данном случае он равен a) равен значению производной заданной функции в абсциссе точки касания. Обозначим абсциссу точки касания буквой b. Запишем уравнение касательной в общем виде:

$$y = f(b) + f'(b)(x - b). \qquad (1)$$

В рассматриваемом примере $f(x) = \sqrt{4x + 1}$, $f(b) = \sqrt{4b + 1}$. Найдём $f'(b)$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x + 1}\right)' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x + 1}} = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}}; \quad f'(b) = \frac{2}{\sqrt{4b + 1}}.$$

Подставим найденные значения $f(b)$, $f'(b)$ в уравнение (1):

$$y = \sqrt{4b + 1} + \frac{2}{\sqrt{4b + 1}}(x - b); \quad y = \frac{2}{\sqrt{4b + 1}}x + \left(\sqrt{4b + 1} - \frac{2b}{\sqrt{4b + 1}}\right).$$

Но по условию уравнение касательной таково: $y = ax + 1$. Значит, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4b + 1}} = a, \\ \sqrt{4b + 1} - \dfrac{2b}{\sqrt{4b + 1}} = 1. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$4b + 1 - 2b = \sqrt{4b + 1}; \quad 2b + 1 = \sqrt{4b + 1};$$
$$4b^2 + 4b + 1 = 4b + 1; \quad 4b^2 = 0; \quad b = 0.$$

Если $b = 0$, то из первого уравнения системы находим $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

Упражнения

38.1. Для всех значений параметра a решите уравнение:
а) $(a^2 - 4)x - a + 2 = 0$;
б) $(2a^2 - 3a - 9)x - 2a - 3 = 0$;
в) $(25 - 4a^2)x - 2a - 5 = 0$;
г) $(a^2 - 3a - 4)x - a - 1 = 0$.

38.2. Для всех значений параметра a решите неравенство:
а) $(25 - a^2)x \geqslant 5 - a$;
б) $(a^2 + 4a - 5)x < a + 5$;
в) $(9a^2 - 16)x \leqslant 3a + 4$;
г) $(a^2 - 2a - 8)x < a - 4$.

38.3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax - x - 1 = a^2 - 2$:
а) имеет ровно один корень;
б) имеет хотя бы один положительный корень;
в) не имеет корней;
г) имеет более одного корня.

38.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых прямая $y = (a + 2)x + 3 - 2a$:
а) пересекает ось Oy в точке, расположенной выше начала координат;
б) пересекает ось Ox в точке, расположенной левее начала координат;
в) пересекает ось Oy в точке, расположенной выше точки $(0; -3)$ и ниже точки $(0; -2)$;
г) пересекает ось Ox в точке, расположенной правее точки $(2; 0)$ и левее точки $(4; 0)$.

38.5. При каких значениях параметра a уравнение $a^2x - 4x + 6 = a^2 + a$:
а) имеет ровно один корень;
б) не имеет корней;
в) имеет положительный корень;
г) имеет более одного корня?

38.6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + 6x - a + 10 = 0$:
а) имеет два различных корня;
б) имеет ровно один корень;
в) не имеет действительных корней;
г) имеет хотя бы один корень.

38.7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+1)x^2 - 4ax + 2a + 3 = 0$:
а) является линейным относительно x;
б) имеет ровно один корень;
в) имеет два различных корня;
г) не имеет корней.

38.8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+1)x^2 - 2(a+3)x + 2a + 3 = 0$:
а) является линейным относительно x;
б) имеет ровно один корень;
в) имеет два различных корня;
г) не имеет корней.

38.9. Для всех значений параметра a решите уравнение:
а) $(a-3)x^2 + 2x - 5 = 0$;
б) $(a-3)x^2 - 2(a+1)x + a + 2 = 0$.

38.10. Для всех значений параметра a решите неравенство:
а) $(a-2)x^2 - 4x - 3 \geqslant 0$;
б) $(a-3)x^2 - 2(a+1)x + a + 2 > 0$.

Для всех значений параметра a решите уравнение.

38.11. а) $\sin x = 3a + 2$;
б) $\cos 2x = 4a - 3$;
в) $\cos x = 3 - 2a$;
г) $\sin 2x = 3 - a$.

38.12. а) $\cos\left(\frac{1}{3}x\right) = a^2 - 1$;
б) $\sin x = a^2 + 4a + 4$;
в) $\sin\left(-\frac{2}{5}x\right) = 1 - a^2$;
г) $\cos x = a^2 - 5a - 5$.

38.13. При каких значениях параметра a:
а) ось симметрии параболы $y = 2x^2 - 5ax + 4$ пересекает ось абсцисс левее точки $(-5; 0)$;
б) ось симметрии параболы $y = 3x^2 - 4ax + 2$ пересекает ось абсцисс правее точки $(6; 0)$?

38.14. а) При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x - 3a + 1}{x + a} \leqslant 0$ выполняется для всех значений x из отрезка $[-2; 3]$?
б) При каких значениях параметра a неравенство $\frac{2x - 4a + 1}{x + a} < 0$ выполняется для всех значений x из отрезка $[-1; 5]$?

38.15. а) При каких значениях параметра a функция

$$y = ax^3 - 6ax^2 + 8x - 3$$

возрастает на всей числовой прямой?
б) При каких значениях параметра a функция

$$y = ax^3 + 6ax^2 - 8x + 5$$

убывает на всей числовой прямой?

38.16. а) При каких значениях параметра a функция

$$y = x^3 - 3a^2x + 7$$

имеет точку максимума $x = -4$?
б) При каких значениях параметра a функция

$$y = x^3 - 27a^2x - 1$$

имеет точку минимума $x = 6$?

38.17. При каких значениях параметра a прямая $y = ax - 2$ является касательной к графику функции:

а) $y = \sqrt{2x - 5}$; б) $y = -\sqrt{2x + 3}$?

38.18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{6x - 2}{x + 1} < a$:

а) содержит число 0;
б) содержит число 0, но не содержит число 1;
в) не содержит положительных чисел;
г) содержит ровно три натуральных числа.

ИКТ **38.19.** При каких значениях параметра a графики данных функций имеют хотя бы одну общую точку:

а) $y = x^2 - 6x + 7$ и $y = 2x + a$;
б) $y = x^2 + 4x - 3$ и $y = -3x + a$?

ИКТ **38.20.** При каких значениях параметра a имеет решения система уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 - 3x = y - 1, \\ y = 5x + a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - y = 3x + 2, \\ 9x + y = a? \end{cases}$

38.21. Для всех значений параметра a решите неравенство:

а) $(x - a)\sqrt{2x - 3} \geqslant 0$; в) $(3x - 4)\sqrt{x - a} \leqslant 0$;
б) $(x - a)\lg(2x - 3) \geqslant 0$; г) $(3x - 4)\lg(x - a) \leqslant 0$.

38.22. Найдите наименьшее целочисленное значение параметра a, при котором имеет два корня уравнение:
а) $x^2 - 2ax + a^2 - 5a + 4 = 0$;
б) $x^2 + 2(a - 1)x + a^2 - 5a + 17 = 0$.

38.23. При каких значениях параметра a вершина параболы $y = (2a - 1)x^2 - 4x + 3$ лежит внутри:
а) первого координатного угла;
б) третьего координатного угла;
в) второго координатного угла;
г) четвёртого координатного угла?

38.24. а) Найдите все положительные значения параметра a, при которых уравнение

$$(\log_5 a)x^2 - (2\log_5 a - 3)x + \log_5 a - 2{,}5 = 0$$

имеет единственный корень.
б) Найдите все положительные значения параметра a, при которых уравнение

$$(\log_8 a)x^2 + (2\log_8 a + 1)x + \log_8 a - 3 = 0$$

не имеет корней.

38.25. При каких значениях параметра a не имеет корней уравнение:
а) $27 \cdot 3^x + 16 = a + a \cdot 3^{x+2}$;
б) $49^x - 2a \cdot 7^{x+1} + 9 = 0$?

38.26. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 6x^2 + 3 = a$:
а) не имеет корней;
б) имеет четыре корня?

38.27. Найдите все значения параметра a, при которых:
а) уравнение $11^{2x} - 6 \cdot 11^x + a - 3 = 0$ имеет единственный корень;
б) уравнение $\left(\frac{4}{9}\right)^x - 2(a+1) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 4 = 0$ не имеет корней.

ИКТ **38.28.** а) При каких значениях параметра a уравнение

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 = a$$

имеет не менее трёх корней?
б) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 - 12x + 1 = a$$

имеет ровно три корня?

Решите уравнение.

38.29. $(a-1)x^2+2(2a+1)x-4a+3=0$.

38.30. $\dfrac{x}{a(x+1)}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$.

38.31. $\sqrt{x}=x-a$.

38.32. $|x-1|+|x-3|=a$.

38.33. $\sin^4 x+\cos^4 x=a$.

38.34. Решите неравенство:

а) $\dfrac{7x-11}{a+3}>\dfrac{(1+3a)x}{4}$; б) $ax^2-2x+4>0$.

38.35. а) Сколько корней имеет данное уравнение при различных значениях параметра a:

а) $\sqrt{4-x^2}=x+a$; б) $||x|-2|=a$?

38.36. При каких значениях параметра $a>0$ неравенство $2x^2-a\ln x<0$ имеет хотя бы одно решение?

38.37. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases}\left|x^2-7x+6\right|+x^2+5x+6-12|x|=0,\\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0\end{cases}$$

имеет два решения?

§ 39*. Уравнения, неравенства и функции в задачах о среднем арифметическом

Среднее арифметическое — интересное и важное понятие. Оно широко и разнообразно используется и в классических разделах математики, и в современной математике, и в статистике и теории вероятностей, и в их многочисленных приложениях, в особенности при обработке данных и работе с информацией, и т. п. Наконец, оно прочно входит в нашу повседневную жизнь, в обычный разговорный язык. Всем нам знакомы и привычны термины: средняя отметка по предмету в школе или вузе, среднесуточная температура, средняя ре-

зультативность команды, средняя скорость, средняя продолжительность жизни, средняя зарплата и т. д.

В этом параграфе мы разберём несколько примеров того, как наши знания об основных математических моделях — уравнениях, неравенствах и функциях — помогают в решении разнообразных задач, связанных с одним и тем же понятием — средним арифметическим.

Напомним, что *среднее арифметическое значение*[1] чисел x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n равно сумме этих чисел, делённой на их количество:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}.$$

Эту формулу можно записать и так: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \bar{x} \cdot n$. Получаем простое, но важное свойство — *сумма чисел равна произведению их среднего на количество этих чисел*.

Пример 1 До 31 октября Петя получил по русскому языку такие отметки: 4, 2, 4, 4, 5, 5. После этого он подряд получил несколько пятёрок. Могло ли среднее его отметок оказаться равным:

а) 4; б) 4,4; в) 4,45; г) 5?

Решение. Составим математическую модель. Для этого обозначим n — количество полученных пятёрок. Тогда количество всех отметок равно $6 + n$, а их сумма равна

$$4 + 2 + 4 + 4 + 5 + 5 + \overbrace{5 + \ldots + 5}^{n} = 24 + 5n.$$

Поэтому среднее отметок равно $\bar{x} = \frac{24 + 5n}{6 + n}$ — это дробно-линейная функция от переменной n.

а) Уравнение $\frac{24 + 5n}{6 + n} = 4$; $24 + 5n = 24 + 4n$ имеет корень $n = 0$, но по условию $n > 0$.

б) Уравнение $\frac{24 + 5n}{6 + n} = 4{,}4$; $24 + 5n = 26{,}4 + 4{,}4n$; $0{,}6n = 2{,}4$ имеет корень $n = 4$ и он удовлетворяет условию задачи.

[1] Кратко — среднее.

в) Уравнение $\frac{24+5n}{6+n}=4{,}45$; $24+5n=26{,}7+4{,}45n$; $0{,}55n=2{,}7$ имеет корень, но это не целое число и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

г) Уравнение $\frac{24+5n}{6+n}=5$; $24+5n=30+5n$ не имеет корней.

Ответ: а) нет; б) да, при $n=4$; в) нет; г) нет.

Отметим, что ответ «нет» в пункте «г» можно получить без всяких вычислений, используя следующее свойство среднего:

среднее чисел не больше наибольшего из них (не меньше наименьшего) и при этом равенство возможно только в случае, когда все числа равны между собой.

Смотрите, все неравенства $x_1 \leqslant x_{\text{наиб}}$, $x_2 \leqslant x_{\text{наиб}}$, ..., $x_n \leqslant x_{\text{наиб}}$ верны. Значит,

$$n\cdot\bar{x}=x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant\underbrace{x_{\text{наиб}}+\ldots+x_{\text{наиб}}}_{n}=n\cdot x_{\text{наиб}},\quad \bar{x}\leqslant x_{\text{наиб}},$$

а если хотя бы одно из неравенств $x_1 \leqslant x_{\text{наиб}}$, ..., $x_n \leqslant x_{\text{наиб}}$ — строгое, то $\bar{x} < x_{\text{наиб}}$. Так как среди отметок в примере 1 уже есть различные и $x_{\text{наиб}}=5$, то $\bar{x}<5$.

Пример 2 В 20 отделах компании в среднем работает по 50 сотрудников. Число сотрудников можно увеличить, но так, чтобы в среднем в отделах компании работало не более чем по 55 сотрудников. Решено число сотрудников в отделах увеличивать так: в отделе, первом в очереди, — на 1, во втором — на 2, в третьем — на 3 и т. д. В каком наибольшем числе отделов можно провести такое увеличение числа сотрудников?

Решение. Составим математическую модель. Для этого обозначим n — число отделов, в которых проводят увеличение числа сотрудников. По условию общее число новых рабочих мест равно $1+2+\ldots+(n-1)+n$. Это сумма арифметической прогрессии, она равна $\frac{n(n+1)}{2}$. По условию число работающих сотрудников равно $50\cdot 20=1000$, а после увеличений это число станет равным

$1000 + \frac{n(n+1)}{2}$. Так как число отделов останется равным 20, то новое среднее числа сотрудников равно

$$\frac{1000 + \frac{n(n+1)}{2}}{20} = 50 + \frac{n(n+1)}{40}.$$

Получаем неравенство

$$50 + \frac{n(n+1)}{40} \leqslant 55; \quad \frac{n(n+1)}{40} \leqslant 5;$$
$$n(n+1) \leqslant 200.$$

Его можно решить, как обычное квадратное неравенство (ветви параболы — вверх):

$$n^2 + n - 200 \leqslant 0,$$
$$\frac{-1-\sqrt{801}}{2} \leqslant n \leqslant \frac{-1+\sqrt{801}}{2} \approx \frac{27{,}3}{2} = 13{,}65$$

и выбрать его наибольшее натуральное решение $n = 13$.

Но проще и быстрее провести подбор, подставляя $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ... в неравенство $n(n+1) \leqslant 200$. Если $n = 13$, то $13 \cdot 14 < 200$. Если $n = 14$, то $14 \cdot 15 > 200$.

Ответ: в 13 отделах.

В следующем примере речь пойдёт о школьных отметках и об изменении среднего арифметического этих отметок. Школьные отметки — это 1, 2, 3, 4 или 5.

Пример 3 Среднее всех отметок ученика по истории равно 4,2. Ученик решил улучшить это среднее. Для этого он планирует в электронном журнале «удвоить» пятёрки: к каждой уже имеющейся пятёрке дописать ещё одну. Найти наибольшее возможное значение среднего отметок после такой замены.

Решение. Составим математическую модель. Для этого обозначим n — число отметок и k — число пятёрок. По условию сумма уже выставленных отметок равна $4{,}2n$. После «удвоения» пятёрок сумма отметок станет равной $4{,}2n + 5k$, а их число станет равным $n + k$. Поэтому

$$\bar{x}_{\text{нов}} = \frac{4{,}2n + 5k}{n + k} = \frac{4{,}2 + 5 \cdot \frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{4{,}2 + 5t}{1 + t},$$

где $t = \frac{k}{n} \in [0; 1]$ — частота пятёрок среди уже выставленных отметок.

График дробно-линейной функции $y = \frac{4{,}2 + 5t}{1 + t}$, $t \geqslant 0$, — часть ветви гиперболы, расположенной в первой координатной четверти (рис. 205).

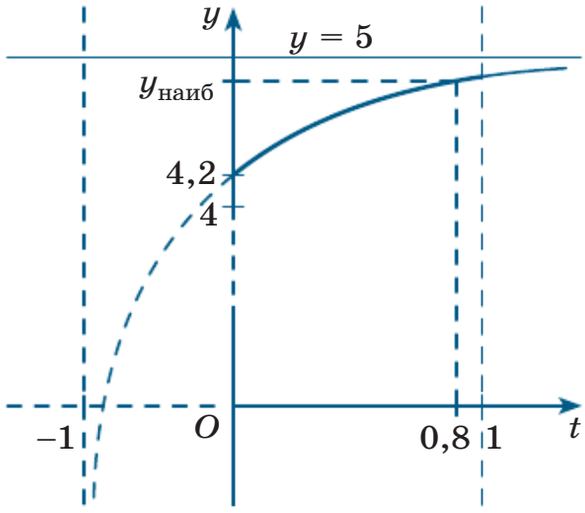


Рис. 205

При $t \geqslant 0$ наименьшее значение равно $y(0) = 4{,}2$, а график функции при $t \to +\infty$ приближается к горизонтальной асимптоте $y = 5$. Значит, новое среднее будет наибольшим при наибольшем значении частоты $t = \frac{k}{n}$. Найдём его.

Сумма S всех отметок никак не меньше чем $5k + (n - k)$. Действительно, $5k$ — это сумма всех пятёрок, а остальные $n - k$ отметок не меньше 1. Значит,

$$4{,}2n = S \geqslant 5k + (n - k); \quad 4{,}2n \geqslant 4k + n;$$
$$4{,}2 \geqslant 4\frac{k}{n} + 1; \quad 3{,}2 \geqslant 4\frac{k}{n}; \quad \frac{k}{n} \leqslant 0{,}8.$$

Равенство достигается на наборе отметок 5, 5, 5, 5, 3. В итоге наибольшее значение нового среднего равно

$$y(0{,}8) = \frac{4{,}2 + 5 \cdot 0{,}8}{1 + 0{,}8} = \frac{8{,}2}{1{,}8} = \frac{41}{9} = 4{,}(5).$$

Например, оно не может равняться 4,6.

Ответ: $4\frac{5}{9}$.

Вот ещё один пример, в котором свойства дробно-линейной функции и соответствующие неравенства составляют основу решения.

Пример 4 Финансовая компания имела вклады в 30 банках. Среднее вкладов было равно 7 млн р., а размер каждого вклада — целое число миллионов рублей, не превосходящее 40. Решено было все вклады в 1 млн р. закрыть, остальные вклады уменьшить вдвое, а высвободившиеся средства вложить в производство. Найти наибольшее возможное значение среднего новых вкладов компании в банках.

Решение. Составим математическую модель. Для этого обозначим n количество вкладов в 1 млн р. Все они будут закрыты. Остальные $30 - n$ вкладов не меньше 2, все они будут уменьшены вдвое и составят набор новых вкладов.

Общая сумма вкладов (в млн р.) была равна $30 \cdot 7 = 210$. Она состояла из двух слагаемых. Во-первых, это сумма вкладов, равных 1, она равна n. Во-вторых, это сумма чисел, больших 1, она, соответственно, равна $210 - n$. По условию все числа не превосходят 40 и поэтому их сумма не больше $40(30 - n)$. Получаем:

$$210 - n \leqslant 40(30 - n);$$
$$39n \leqslant 1200 - 210;$$
$$n \leqslant \frac{990}{39} \approx 25{,}3.$$

Так как n — число целое, то $n \leqslant 25$.

Среднее $30 - n$ новых вкладов равно $\frac{1}{2} \cdot \frac{210 - n}{30 - n}$, и нужно найти наибольшее значение функции $y = \frac{210 - n}{2(30 - n)}$, $n \leqslant 25$. График дробно-линейной функции $y = \frac{210 - x}{2(30 - x)}$ — это гипербола, $x = 30$ — её вертикальная асимптота, $y = 0{,}5$ — горизонтальная асимптота, $y(0) = 3{,}5$ (рис. 206).

Нам нужна часть левой ветви при $0 \leqslant x \leqslant 25$. На этом отрезке функция возрастает и её наибольшее значение равно

$$y_{\text{наиб}} = y(25) = \frac{210 - 25}{2(30 - 25)} = \frac{185}{10} = 18{,}5.$$

Ответ: 18,5 млн р.

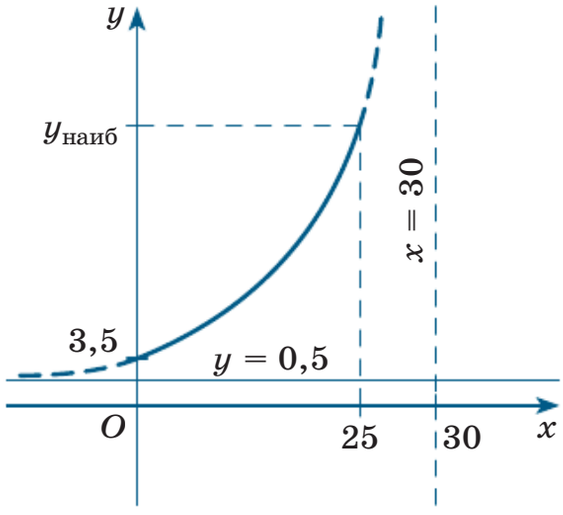


Рис. 206

В заключение рассмотрим пример, решение которого в пункте «а» наглядно показывает, как составление уравнения (математической модели) позволяет получить ответ, а решение в пунктах «б» и «в» основано на графическом способе решения систем линейных уравнений и неравенств.

Пример 5 На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение. а) Заранее неизвестно, сколько каких чисел имеется. Обозначим эти неизвестные:

— положительных чисел — x, их сумма равна $9x$;

— отрицательных чисел — y, их сумма равна $-18y$;

— чисел, равных нулю, — z, их сумма равна 0.

Всего чисел $x + y + z$ штук и их сумма по условию равна $-5(x + y + z)$. Получаем:

$$9x - 18y + 0 \cdot z = -5(x + y + z); \quad 9(x - 2y) = -5(x + y + z).$$

Левая часть кратна 9, значит, и правая часть кратна 9. Поэтому общее количество $x + y + z$ чисел кратно 9, больше 27 и меньше 45. Вывод: $x + y + z = 36$.

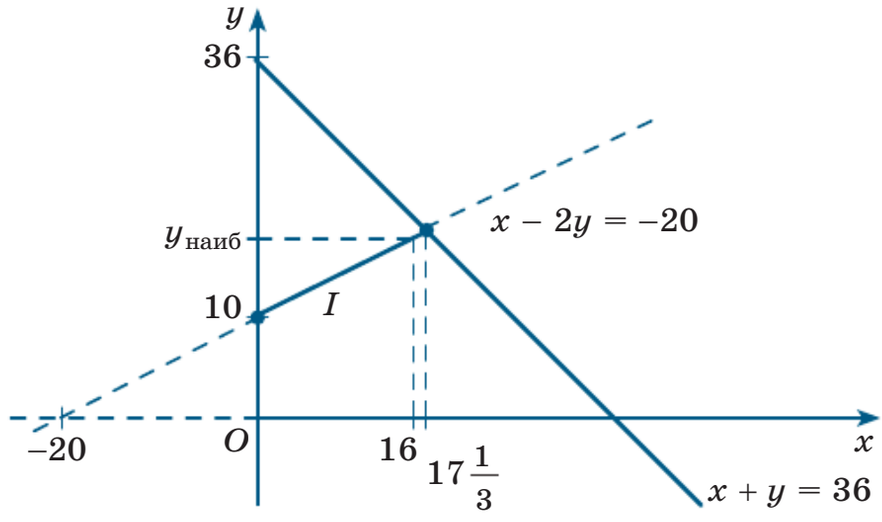


Рис. 207

б) $9(x - 2y) = -5 \cdot 36$; $x - 2y = -20$. Построим график уравнения $x - 2y = -20$. Это прямая, проходящая через точки (0; 10) и (–20; 0). Нам нужна её часть в первой четверти. Точнее, нужна часть, лежащая и в полуплоскости $x + y \leqslant 36$. Решая систему $\begin{cases} x - 2y = -20, \\ x + y = 36, \end{cases}$ находим, что это отрезок I с концами в точках (0; 10) и $\left(17\frac{1}{3}; 18\frac{2}{3}\right)$ (рис. 207).

Он лежит выше прямой $y = x$ и для его точек $y > x$. Значит, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Числа x и y — целые, а $x = 2y - 20$. Поэтому на отрезке I нужны только точки с чётными абсциссами: (2; 11), (4; 12), (6; 13), ..., (16; 18). Поэтому $x_{\text{наиб}} = 16$; $y_{\text{наиб}} = 18$.

Ответ: а) 36; б) отрицательных; в) 16.

Упражнения

39.1. Вычислите среднее следующего набора чисел:

а) 1, 2, 3, 4, 5;
б) –1, 2, 3, 4, 5;
в) –1, –2, 3, 4, 5;
г) –1, –2, –3, 4, 5;
д) 1, –2, 3, –4, 5;
е) 1, –2, –3, –4, 5.

39.2. Вычислите среднее следующего набора натуральных чисел:
а) от 1 до 5 включительно;
б) от 2 до 6 включительно;
в) от 3 до 12 включительно;
г) от 4 до 23 включительно;
д) состоящего из всех нечётных однозначных чисел;
е) состоящего из всех простых однозначных чисел.

39.3. Какое число следует включить в набор $-3, 4, 5, 6$ для того, чтобы среднее стало равняться:
а) -2; б) 0; в) 100; г) 1000; д) 2020; е) π?

39.4. Ученик хочет, чтобы его средняя отметка стала больше 4. Какое наименьшее количество пятёрок подряд он должен для этого получить, если сейчас его отметки таковы:
а) 4, 4, 4, 4, 4, 3;
б) 4, 4, 4, 4, 3, 3;
в) 4, 4, 4, 4, 4, 2;
г) 4, 4, 3, 3, 2, 2;
д) 3, 3, 3, 3, 2, 2;
е) 2, 2, 2, 2, 2?

39.5. По плану средний ежемесячный доход предприятия за год должен быть не менее a млн р., но за первые полгода он оказался равным b млн р., $b < a$. Найдите наименьшее среднее значение c ежемесячного дохода за вторые полгода, обеспечивающего выполнение плана, если:
а) $a = 2$, $b = 1$;
б) $a = 3$, $b = 2$;
в) $a = 10$, $b = 9$;
г) $a = 10$, $b = 7$;
д) $a > 1$, $b = a - 1$;
е) $a > b > 0$.

39.6. По плану средние ежемесячные расходы на услуги связи за год должны быть не более a тыс. р., но за первые 7 месяцев года они оказались равны b тыс. р., $b > a$. Найдите наибольшее среднее значение c ежемесячных расходов на услуги связи за оставшиеся месяцы, обеспечивающее выполнение плана, если:
а) $a = 10$, $b = 11$, c — целое число тысяч рублей;
б) $a = 11$, $b = 13$, c — целое число тысяч рублей;
в) $a = 20$, $b = 23$, c — целое число тысяч рублей;
г) $a = 20$, $b = 23$, c — целое число сотен рублей;
д) $a > 5$, $b = a + 3$;
е) $0 < a < b$.

39.7. Компании № 1, № 2, ..., № 20 имеют по несколько счетов в банке B, в среднем по a счетов. Банк решил увеличить это среднее, предложив открыть дополнительно компании № 1 один счёт, компании № 2 — два счёта, компании № 3 — три счёта и т. д. В каком наименьшем числе компаний следует таким образом открыть счета для того, чтобы среднее числа счетов стало не меньше b, если:

а) $a = 2$, $b = 3$;

б) $a = 3$, $b = 5$;

в) $a = 10$, $b = 15$;

г) $a = 10$, $b = 20$;

д) $a = 2$, $b > 2$;

е) $b > a > 0$?

39.8. Среднее всех отметок ученика по физкультуре равно 3,8. Ученик решил улучшить это среднее. Для этого он планирует в электронном журнале «удвоить» пятёрки: к каждой уже имеющейся пятёрке дописать ещё одну пятёрку.

а) Вычислите среднее отметок $\underbrace{5, \ldots, 5}_{7}$, 1, 1, 1.

б) Приведите пример того же среднего 3,8 для отметок без единиц.

в) Приведите пример того же среднего 3,8 для отметок без пятёрок.

г) Докажите, что наибольшая возможная частота пятёрок равна 0,7.

д) Докажите, что среднее значение новых отметок есть дробно-линейная функция от частоты пятёрок в первоначальном наборе отметок.

е) Найдите наибольшее возможное значение среднего новых отметок.

39.9. Финансовая компания имела вклады в 20 банках. Среднее вкладов равно 27 млн р. Размер каждого вклада — целое число миллионов рублей, не превосходящее 40. Компания сняла по 1 млн р. с некоторых (быть может, одного) вкладов и закрыла после этого все обнулившиеся вклады.

а) Могла ли половина вкладов быть по 1 млн р.?

б) Могло ли быть 7 вкладов по 1 млн р.?

в) Докажите, что имелось не более 6 вкладов по 1 млн р.

г) Вклады (в млн р.) были следующие: 1, 14, 15, 30, ..., 30; уменьшались первые три вклада (в 1, 14 и 15 млн р.). Найдите среднее новых вкладов.

д) Вклады (в млн р.) были следующие: $\underbrace{1, \ldots, 1}_{6}$, 14, $\underbrace{40, \ldots, 40}_{13}$, уменьшались первые шесть вкладов (в млн р.). Найдите среднее новых вкладов.

е) Докажите, что ответ в «д» — наибольший из всех возможных значений нового среднего.

39.10. В ряд через запятую произвольно написали 47 натуральных чисел, для которых среднее арифметическое любых 9 подряд идущих чисел меньше 1,7.

а) Может ли среди 9 подряд идущих чисел быть ровно одна единица?

б) Может ли среди 9 подряд идущих чисел быть ровно две единицы?

в) Докажите, что среди 9 подряд идущих чисел всегда есть хотя бы три единицы.

г) Какое наименьшее количество единиц может быть среди всех выписанных чисел?

д) Докажите, что сумма всех 47 чисел не больше 83.

е) Приведите пример того, что сумма всех 47 чисел может равняться 83.

Приложение

Таблица приближённых значений функции Лапласа $y = \Phi(x)$ для $x \geqslant 0$

(вместо значения 0,abcd указаны четыре знака abcd после запятой)

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633

1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4081
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3,2	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995	4995
3,4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4998
3,5	0,4998									
3,6	4998	4998	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,7	0,4999									
3,8	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,9	0,499952									
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,49999971									

Ответы

Глава 4

§ 21 **21.8.** г) $-\frac{1}{4}\cos 2x$; д) $\operatorname{tg} x - x$; е) $-\operatorname{ctg} x$. **21.9.** г) $\sqrt{x} + 1{,}5$; д) $x^4 - 1{,}5$; е) $\ln x + 1$. **21.10.** г) $-\sqrt{2}\cos x + 2$; д) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 4$; е) $-2\cos x - 4$. **21.15.** а) $x = 3{,}25$; б) $x = -7{,}2$. **21.16.** $p = \pm 4$. **21.17.** г) $y_{\text{наим}} = 10$; $y_{\text{наиб}} = 266$; д) $y_{\text{наим}} = -12$; $y_{\text{наиб}} = -8$; е) $y_{\text{наим}} = \frac{11\pi - 12}{2}$, $y_{\text{наиб}} = 2\pi + 6\sqrt{3}$. **21.18.** а) 148 750 человек; б) 63 ученика. **21.19.** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 22 **22.6.** г) $\frac{(x-2)^4}{4}$; д) $-\frac{3}{2(4x+3)^2}$; е) $\frac{3}{2}\sqrt{6x+1}$. **22.7.** г) $2\cos x + \sin x$; д) $3\sin\frac{x}{3} - 4\operatorname{tg} x$; е) $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$. **22.8.** г) $\frac{10^x}{\ln 10} + 3\ln x$; д) $-\frac{1}{3}e^{2-3x} - 2\ln x$; е) $\frac{1}{5}e^{5x-4} + \frac{1}{5}\ln x$. **22.10.** г) $0{,}2\sin(5x - 3) + C$; д) $-0{,}5\cos(5x - 6) + C$; е) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - 1\right) + C$. **22.11.** г) $-\frac{1}{2(4x-3)^2} + C$; д) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(5x+2)^2} + C$; е) $-\frac{2}{21}\sqrt[4]{(5-6x)^7} + C$. **22.12.** г) $0{,}5e^{0,5x} - 2x + C$; д) $-0{,}5e^{1-2x} - 3\ln x + C$; е) $\frac{1}{5\ln 3}\cdot 3^{5x-2} + \frac{1}{5}\ln x + C$. **22.13.** г) $\sin\frac{5x}{2} + 4\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$; д) $\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$; е) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(3x+1)^4} + \frac{1}{x+2} + C$. **22.14.** г) $2x^2 - 3x - 4$; д) $2x^3 + x^2 + 2$; е) $\sqrt{2x-1} + 1$. **22.15.** г) $-2\cos x - \sin x + 9$; д) $-3\operatorname{ctg} x - 2\sin\frac{x}{2} + 1$; е) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{x^2}{2} - 2{,}5$. **22.16.** $s = 0{,}5(t+1)^4 - 6t + 1$.

22.17. г) $s = 2t^2 + 3t - 35$; д) $s = 0{,}5\sin 4t + 3{,}5$; е) $s = \frac{2}{t} - 3$.

22.18. а) $\frac{9-5\pi}{12}$; б) $\frac{1}{3}$. **22.19.** в) $F(x) = 3x - 2x^2 - \frac{1}{8}$; г) $F(x) = 9\cos 3x + 2$.

22.21. г) $-0{,}5e^{1-2x} + 4\sin\frac{x}{2} + C$; д) $\ln|x| - 0{,}5\operatorname{ctg} 6x + C$; е) $4\sqrt{x} - 2{,}5\sqrt[5]{x^2} + C$.

22.22. г) $\frac{x^4}{4} + x^3 + C$; д) $\frac{1}{4}\sin 4x + C$; е) $\ln|x-3| + C$.

22.23. в) $\frac{2}{3}e^{3x-1} - \operatorname{ctg} 5x - \frac{5}{6}\sqrt[5]{(4x+1)^6} + C$;

г) $x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\arcsin x + C$. **22.24.** а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{4}{9}$. **22.25.** а) 0,63;

б) 0,97; в) 0,27; г) 0,73. **22.26.** а) ≈0,03; б) ≈0,07. **22.27.** а) $a > 0$; б) $a > 0$.

22.28. а) $-\frac{7\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

§ 23 **23.2.** б) 26; в) 47; г) 9,25; д) 9; е) 0,25. **23.3.** а) 26,5; б) 21,5. **23.4.** б) 4;

г) 3,75; е) 2. **23.5.** б) $\frac{7}{288}$; г) $-\frac{2}{15}$; е) 3. **23.6.** б) −18; г) $69\frac{1}{3}$; е) $14\frac{2}{3}$.

23.7. г) −18; д) 6; е) 62. **23.8.** г) 0; д) $-1\frac{1}{15}$; е) −140. **23.9.** б) 21; г) 312,4;

е) $\frac{81-12^4}{20}$. **23.10.** б) 0,75; г) $\frac{4}{15}$; е) $\frac{9^3-5^3}{45^3}$. **23.11.** б) 2; г) $\frac{14}{15}$; е) 12.

23.12. б) −1; г) 2; е) 2. **23.13.** г) 1; д) $\sqrt{3} - 1$; е) −0,25. **23.14.** б) $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$;

г) $e^3 - e$; е) $\frac{8}{\ln 3}$. **23.15.** б) 2; г) $3\ln 3$; е) $\frac{1}{3}\ln 2$. **23.16.** в) 0; г) $\frac{7\pi}{4}$.

23.17. г) $\frac{1}{3}\ln 16$; д) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$; е) $6 + 14\ln 3$. **23.18.** г) −1,5; д) $\frac{\pi}{2}$; е) −2. **23.19.** г) 45;

д) 50; е) $4\left(4 - \sqrt{6}\right)$. **23.20.** б) $\frac{\pi}{2} - 1$. **23.21.** а) $\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sin 2 + \frac{1}{32}\sin 4$; б) $3 - \ln 2$.

23.22. а) $\frac{1}{3}$; б) $10\frac{2}{3}$. **23.23.** а) $\ln 2 + 5\frac{5}{8}$; б) $15 + \ln 4$. **23.24.** а) $1{,}5 + \frac{\pi}{3}$; б) $2 - \frac{\pi}{4}$.

23.25. а) $25\frac{1}{3}$; б) 3; в) 52,5; г) −0,25. **23.26.** а) $4\frac{1}{3} - 3\ln 1{,}5$; б) $22\frac{2}{3} + 9\ln 5$;

в) $3\frac{13}{15} + 4\ln 3$; г) $21{,}4 - \frac{4}{3}\ln 2$. **23.27.** г) $2{,}25\pi$; д) $12{,}5\pi$; е) 4π. **23.28.** 0,96.

23.29. 0,48. **23.30.** а) $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{13\pi}{6}$; б) $\pi, 3\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$. **23.31.** а) $-3 < x \leqslant -2{,}5$;

$x = 0$, $x = 4$; б) $-4 < x \leqslant 0$; $2 \leqslant x \leqslant 6$. **23.32.** а) 72 кг; б) на 150 кг.

§ 24 **24.1.** г) 4; д) $16\frac{2}{3}$; е) 6. **24.2.** г) $\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$; д) 1,5; е) 1. **24.3.** г) $\sqrt{2}$; д) $2-\sqrt{2}$; е) $\frac{2\pi-3}{6}$. **24.4.** г) $1-\frac{1}{e}$; д) $\frac{3}{2\ln 2}$; е) $2\ln 2$. **24.5.** г) $\frac{1}{2}(e^4-1)$; д) $\frac{1}{3}\ln 2$; е) $\frac{9}{10\ln 10}$. **24.6.** в) $1{,}5\pi+4$; г) $\frac{4\pi+1}{12}$. **24.7.** б) 4; д) $7{,}5-8\ln 2$; е) $5-\frac{3}{\ln 2}$. **24.8.** г) 36; д) $1\frac{1}{3}$; е) 0,4. **24.9.** г) $10\frac{2}{3}$; д) $1\frac{1}{3}$; е) $2\frac{2}{3}$. **24.10.** в) $2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}$; г) 1. **24.11.** а) 4,5; б) $4\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) 22,5. **24.12.** а) $\frac{24}{\ln 3}-4\frac{2}{3}$; б) $10{,}5-\ln 2$; в) 13,25; г) $\frac{12-\pi}{6}$. **24.13.** г) 3 : 1; д) 1 : 3; е) 1 : 2. **24.14.** а) 4,5; б) 4,5. **24.16.** г) $14\frac{5}{12}$; д) $5\frac{1}{3}$; е) $4+\frac{1}{\ln 2}$. **24.17.** а) $\frac{1}{12}$; б) 6,75. **24.18.** а) 6,72; б) $1\frac{1}{3}$. **24.19.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **24.20.** а) $a=4$; б) $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **24.21.** 0,005. **24.22.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{8}$. **24.23.** а) $2<x<3$; $7<x<8$; б) $x>7$. **24.24.** а) 36; б) 32.

Приложение к главе 4 **1.** а)—в) Окружность; г) круг; д) боковую поверхность цилиндра; е) цилиндр. **3.** а), б) Окружность радиусом R; в) круг радиусом R; г) круг радиусом $0{,}5R$; д) цилиндр с радиусом R основания и высотой H; е) конус с радиусом R основания и высотой H. **6.** а) πR^2; б) $\frac{\pi R^2}{4}$; в) $y=\frac{R}{H}x$; г) $a=0$, $b=H$, $f(x)=\frac{R}{H}x$; д) $\frac{1}{3}\pi R^2H$; е) $V_{\text{конуса}}=\frac{1}{3}\pi R^2H$. **7.** а) πr^2; б) πR^2; в) $y=\frac{R-r}{H}x+r$; г) $a=0$, $b=H$, $f(x)=\frac{R-r}{H}x+r$; д) $\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$; е) $V_{\text{ус.конуса}}=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$. **8.** а) $\frac{2\pi}{3}$; б), в) $\frac{4\pi}{3}$; г) $1{,}5\pi$; д) π; е) $\frac{7\pi}{6}$. **9.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) 2π; в) $1{,}5\pi$; г) 60π; д) 80π; е) 104π. **10.** а) 1 : 1; б) 27 : 5; в) 27 : 5; г) 20 : 7; д) 25 : 2; е) 81 : 44.

Тест **1.** в), г). **2.** б). **3.** а). **4.** г). **5.** б). **6.** 6,5. **7.** А — 4; Б — 2; В — 1. **8.** б). **9.** 28. **10.** 3,25.

Глава 5

§ 25 **25.3.** а) 0,2; б) 0; в) 0,3; г) 0,8; д) 1; е) 0. **25.4.** а) 0,9; б) 0; в) 0,2; г) 0,9; д) 0,4; е) 0,925. **25.5.** а) 0,4; б) 0,4; в) 0,2; г) 0,6; д) 0,5; е) $\frac{1}{3}$. **25.6.** а) $a<4$; б) $a>9$; в) $a\geqslant 9$; г) $0<a<1$; д) $9\leqslant a$; е) $a\geqslant 9$. **25.7.** а) 0; б) 1; в) 0,25; г) 0; д) $\frac{5}{9}$; е) $\frac{1}{3}$. **25.8.** а) 0; б) 0; в) 0,4; г) 0,25; д) 0,1; е) 0,4. **25.9.** а) 1; б) 0; в) 0,25;

г) $\frac{1}{16}$; д) $\frac{8}{9}$; е) $\frac{119}{144} \approx 0{,}826$. **25.10.** а) 0; б) 0,5; в) 0,5; г) 0,5; д) 0,2; е) 0,21.

25.11. а) 1; б) $\frac{4}{15}$; в) $\frac{2}{\pi}$; г) 1; д) $\frac{4}{15}$; е) $\frac{\ln 5}{4} - 0{,}2 \approx 0{,}202$. **25.12.** а) $a \leqslant 0$; б) $a \geqslant 1$; в) $a < 1$; г) $a > 0$; д) $a = \frac{1}{3}$; е) $a > \frac{99}{101}$. **25.13.** а) 0; б) 1; в) 0; г) $\frac{8}{27}$; д) $\frac{1}{27}$; е) $\frac{2}{9}$. **25.14.** а) 1; б) 0; в) $\frac{1}{36}$; г) $\frac{3}{4}$; д) $\frac{35}{36}$; е) $\frac{7}{9}$. **25.15.** а), б), в) Таких значений a нет; г) $a < 1$; д) $a \geqslant \frac{3}{7}$; е) $a < \frac{3}{97}$. **25.18.** а) 4; б) 0,2. **25.19.** 25 320 р. **25.20.** $-\sqrt[4]{3} < m < -\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{2} < m < \sqrt[4]{3}$.

§ 26 **26.1.** а) 1; б) 0; в) 0,5; г) 0,5; д) 0,25; е) 0,05. **26.2.** а) 1; б) 0; в) 0,2; г) 0,4; д) 0,8; е) 0,4. **26.3.** а) 3; б) 5; в) 21; г) $2\frac{1}{999}$; д) таких значений a не существует; е) $1 < a \leqslant 2$. **26.4.** а) 0; б) 0; в) 1; г) 0,5; д) 0,25; е) 0,01. **26.5.** а) 1; б) 0; в) 0,5; г) 0,405; д) 0,875; е) 0,775. **26.6.** б) $p(x) = \frac{5-x}{7}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{4}{7}$; д) $\frac{4}{7}$; е) $a = \frac{9}{4}$. **26.7.** а) 0; в) $p(x) = \frac{3}{4}(x-1)(3-x)$; г) 1; д) 0,5; е) $\frac{3}{16}$. **26.8.** а) 0,2; в) $a = \frac{8}{3}$; г) 0,6; д) 0,3. **26.9.** а) 0; б) 0,1915; в) 0,3413; г) 0,4332; д) 0,4772; е) 0,4938. **26.10.** а) 0,0478; б) –0,1331; в) 0,2123; г) –0,2823; д) 0,4625; е) 0,498. **26.11.** а) 0,2853; б) 0,4068; в) 0,4664; г) 0,5746; д) 0,6651; е) 0,895. **26.12.** а) $P(S \leqslant 0)$; б) $P(-1 \leqslant S \leqslant 1)$; в) $P(-3 \leqslant S \leqslant 1)$; г) $P(S \geqslant 0{,}2)$; д) $P(S = 0)$; е) $P(-2 \leqslant S \leqslant 0)$. **26.13.** а) 0,3413; б) 0,1359; в) 0,8185; г) 0,6247; д) 0,53897; е) 0,1309. **26.14.** а) 0,1915; б) 0,2857; в) 0,9104; г) 0,8185; д) 0,6826; е) 0,9772. **26.15.** а) 0,3413; б) 0,1915; в) 0,3413; г) 0,1359; д) 0,0919; е) 0. **26.16.** а) 0; б) 2; в) $-\frac{2}{3}$; г) 135°. **26.18.** а) –200; б) 271. **26.19.** в) 104; г) 502. **26.20.** 7 л.

§ 27 **27.1.** а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{5}{9}$; г) $\frac{2}{9}$; д) $\frac{1}{15}$; е) $\frac{28}{45}$. **27.2.** а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{24}$; е) $\frac{7}{15}$. **27.3.** а) $\frac{C_a^2}{C_{a+b+c}^2}$; б) $\frac{C_{b+c}^2}{C_{a+b+c}^2}$; в) $\frac{a(b+c)}{C_{a+b+c}^2}$; г) $\frac{ac}{C_{a+b+c}^2}$; д) $\frac{C_b^2}{C_{a+b+c}^2}$; е) $\frac{C_{a+b}^2}{C_{a+b+c}^2}$. **27.4.** а) $\frac{C_a^3}{C_{a+b+c}^3}$; б) $\frac{C_{b+c}^3}{C_{a+b+c}^3}$; в) $\frac{abc}{C_{a+b+c}^3}$; г) $\frac{C_a^2 \cdot b}{C_{a+b+c}^3}$; д) $\frac{a \cdot C_c^2}{C_{a+b+c}^3}$; е) $\frac{C_{a+b}^3}{C_{a+b+c}^3}$. **27.5.** а) $P_{16}(6) = C_{16}^6 \cdot 0{,}5^{16}$; б) $P_{24}(4) = C_{24}^4 \cdot 0{,}5^{24}$; в) $P_{199}(99) = C_{199}^{99} \cdot 0{,}5^{199}$; г) $P_{500}(50) = C_{500}^{50} \cdot 0{,}4^{50} \cdot 0{,}6^{450}$;

д) $P_{700}(170) = C_{700}^{170} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{170} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{530}$; е) $P_{735}(573) = C_{735}^{573} \cdot \frac{2^{162}}{3^{735}}$.

27.6. а) $P_{60}(6) = C_{60}^{6} \cdot 0{,}4^{54} \cdot 0{,}6^{6}$; б) $P_{34}(6) = C_{34}^{6} \cdot 0{,}7^{6} \cdot 0{,}3^{28}$;

в) $P_{55}(5) = C_{55}^{5} \cdot 0{,}5^{55}$; г) $P_{100}(10) = C_{100}^{10} \cdot 0{,}9^{10} \cdot 0{,}1^{90}$;

д) $P_{33}(11) = C_{33}^{11} \cdot 0{,}6^{11} \cdot 0{,}4^{22}$; е) $P_{50}(45) = C_{50}^{45} \cdot 0{,}6^{45} \cdot 0{,}4^{5}$.

27.7. а) $M_{\text{усп}} = M_{\text{неуд}} = 8$; б) $M_{\text{усп}} = M_{\text{неуд}} = 12$; в) $M_{\text{усп}} = M_{\text{неуд}} = 99{,}5$;

г) $M_{\text{усп}} = 200$, $M_{\text{неуд}} = 300$; д) $M_{\text{усп}} = 200$, $M_{\text{неуд}} = 500$; е) $M_{\text{усп}} = 245$,

$M_{\text{неуд}} = 490$. **27.8.** а) 4 и 2; б) 6 и $\sqrt{6}$; в) 49,75 и 7,053; г) 120 и 10,954;
д) 142,858 и 11,952; е) 150 и 12,247. **27.9.** а) 0,2; б) 0,8; в) 2000; г) 40; д) 1960 и 2040; е) 0,6826. **27.10.** а) 500; б) 20; в) практически 1; г) практически 0; д) 0,5; е) 0,9876. **27.11.** а) 0; б) 0,5; в) 1; г) 0,4772; д) 0,4772; е) 0,6826. **27.12.** а) 0,0796; б) 0,0671; в) 0,0781; г) 0,0108; д) 0,0736; е) 0,0009. **27.13.** а) Практически 0; б) практически 1; в) 0,5; г) 0,0671; д) 0,6826; е) 0,9544. **27.14.** а)—в) Практически 0; г) 0,0638; д) 0,0544; е) 0,0278. **27.15.** г) $x = -1$ — точка минимума, $x = 3$ — точка максимума; д) $x = 1$ — точка минимума, $x = 0$ — точка максимума; е) $x = -0{,}5$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума.
27.16. г) $y_{\text{наим}} = 0$; $y_{\text{наиб}} = e^4$; д) $y_{\text{наим}}$ не существует; $y_{\text{наиб}} = 9$; е) $y_{\text{наим}} = 1 - \pi$; $y_{\text{наиб}} = 1$. **27.17.** б) $a = 1$. **27.19.** В конце четвёртого года.

§ 28 **28.1.** а) 0,5; б) 0,25; в) 0,75; г) 0,125; д) 0,0625; е) 0,0625. **28.2.** а) $\frac{1}{4}$;

б) $\frac{3}{16}$; в) $\frac{7}{16}$; г) $\frac{9}{64}$; д) $\frac{27}{256}$; е) $\frac{17}{64}$. **28.3.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{25}{216}$; в) $\frac{155}{216}$; г) $\frac{61}{216}$;

д) $\frac{5}{6}$; е) $\frac{1021}{1296}$. **28.4.** а) $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$; б) 0,1875; в) $0{,}75^2 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}141$;

е) 13. **28.5.** а) $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$; б) 0,081; в) 0,0729; е) 8. **28.6.** а) q^2p; б) $q^{35}p$;

в) $p(1 + q)$; г) q^3; д) $\frac{1}{1+q}$; е) $\frac{q}{1+q}$. **28.8.** а) 0,018; б) 0,0733; в) 0,238; г) 0,1465;

д) 0,968; е) 0,567. **28.9.** а) 0,135; б) 0,27; в) 0,675; г) 0,09; д) 0,595; е) 0,145.
28.10. а) 0,05; б) 0,8; в) 0,219; г) 0,225; д) 0,2; е) 0,55. **28.11.** а) 0; б) 1;
в) 0,287; г) 1; д) 0,544; е) 0,456. **28.12.** а) 0,095; б) 0,181; в) 0,393; г) 0,593;
д) 0,632; е) 0,865. **28.13.** а) 0; б) 0,01; в) 0,01; г) 0; д) 0,98; е) 0,981.
28.14. а) 0; б) 1; в) 0,632; г) 0; д) 0; е) 0,368. **28.15.** а) 0,451; б) 0,166;
в) 0,136; г) 0,301; д) 0,315; е) 0,384. **28.16.** а) 26; б) 19. **28.17.** а) 12; б) 16.
28.18. $8 - 6\ln 3$. **28.19.** На 3-й год после приобретения марки. **28.20.** а) Да, если в первый день Маша решила на 3 задачи больше Лены; б) нет, так как 12 — чётное число.

Тест **1.** в). **2.** г). **3.** а). **4.** б). **5.** в). **6.** г). **7.** а). **8.** б). **9.** в). **10.** г).

Глава 6

§ 29 **29.1.** а) $i - 17$; б) $0{,}04 - 0{,}72i$; в) $14 - 23i$; г) $0{,}64 - 2{,}52i$. **29.2.** а) $-\frac{17+i}{300}$; б) $\frac{1+18i}{3}$; в) $23 - 14i$; г) $-2{,}52 + 0{,}64i$. **29.3.** а) $2(\cos(-0{,}5\pi) + i\sin(-0{,}5\pi))$; б) $6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; в) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; г) $2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. **29.5.** Квадрат с вершинами: а) $w_1 = 0$, $w_2 = -3$, $w_3 = -3 + 3i$, $w_4 = 3i$; б) $w_1 = 0$, $w_2 = -6$, $w_3 = -6 + 6i$, $w_4 = 6i$; в) $w_1 = 4$, $w_2 = 7$, $w_3 = 7 - 3i$, $w_4 = 4 - 3i$; г) $w_1 = 1 - i$, $w_2 = 7 - i$, $w_3 = 7 - 7i$, $w_4 = 1 - 7i$. **29.6.** а) $5 + \sqrt{13}$ и 3; б) $10 + 2\sqrt{13}$ и 6; в) $5 + \sqrt{13}$; г) $25 + 5\sqrt{13}$ и 15. **29.7.** *Указание.* Проверьте треугольники на подобие. **29.9.** а) $A = 2$, $B = 3$, $C = -1$; б) $A = -2$, $B = -i$, $C = i$; в) $A = 2$, $B = -i$, $C = i$; г) $A = 2 - i$, $B = 3i$, $C = -i$. **29.10.** а) Окружность $(u + 0{,}5)^2 + v^2 = 0{,}5^2$; б) дуга предыдущей окружности в третьей четверти между отрицательным направлением оси абсцисс и прямой $v = -4u$; в) окружность $u^2 + (v + 0{,}25)^2 = 0{,}25^2$; г) дуга окружности, проходящая через точки -1, $-0{,}5i$, $-0{,}6 - 0{,}8i$.

§ 30 **30.1.** а) $-2i$; б) $5 - 12i$; в) -4; г) $-597 + 122i$. **30.2.** а) 2; б) $12 + 5i$; в) $-4i$; г) $-\frac{12+5i}{169}$. **30.3.** а) 119; б) -144; в) -99; г) 84. **30.4.** а) 7; б) 4; в) 4; г) 4. **30.5.** а) $u = x^2 - y^2$; б) $v = 2xy$; в) $u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2$; г) $u = x^2 - \frac{v^2}{4x^2}$. **30.6.** а) Луч $\{(u; 0) \mid u \leqslant 0\}$; б) луч $\{(u; 0) \mid u \geqslant 0\}$; в) парабола $u = 1 - \frac{v^2}{4}$; г) парабола $u = \frac{v^2}{16} - 4$. **30.7.** а) $-2i$; i; б) $-i$; $i + 1$; в) -1; i; г) $i + 2$; $2i + 1$. **30.8.** а) $\left\{1; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$; б) $\left\{2(\cos 15^\circ - i\sin 15^\circ); 2(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ); -\sqrt{2}(1+i)\right\}$; в) $\left\{i; \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$; г) $\{0{,}5(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ); 0{,}5(\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ); 0{,}5(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)\}$. **30.9.** а) $\{\pm 1; \pm i\}$; б) $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}; \pm\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$; в) $\left\{\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}\right\}$; г) $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}; \pm\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$. **30.10.** а) $2\sin\frac{\pi}{n}$; в) $2\sin\frac{\pi}{n}$.

§ 31 **31.6.** а) 2; б) 2; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{n+1}$. **31.9.** а) 0,479; б) 0,98; в) 0,2955; г) 0,995. **31.10.** а) 0,0003; б) 0,00007; в) 0,00002; г) 0,000004.

§ 32 **32.1.** а) 1; б) 1; в) -1; г) $-i$. **32.2.** а) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; б) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; в) $-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. **32.5.** а) 2; б) -5; в) $-0{,}5i$; г) $0{,}2i$. **32.6.** а) $z = 2\pi n i$; б) $z = (2n+1)\pi i$; в) $z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$; г) $z = \ln 5 + \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi i$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **32.10.** а) $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $z = \pi(2n+1) + i\ln\left(3 \pm \sqrt{8}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $z_1 = \pi(2n+1) - i\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $z_2 = 2\pi n - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Тест **1.** а). **2.** г). **3.** г). **4.** в). **5.** б). **6.** в). **7.** а). **8.** а). **9.** б). **10.** в).

Глава 7

§ 33 **33.2.** г) Да; д) нет; е) да. **33.5.** г) Нет; д) да; е) да. **33.6.** г) Нет; д) да; е) нет. **33.7.** г) Да; д) да; е) нет. **33.8.** г) $2 < x \leqslant 5$; д) $2 < x < 3$; $3 < x < 5$; е) $2 < x \leqslant 5$. **33.10.** г) 2; 7; д) 6; е) 3. **33.11.** в) 4; г) 0,25. **33.12.** а) Нет корней; б) нет корней. **33.13.** г) 2; -5; д) нет корней; е) -3. **33.14.** г) ± 1; $\pm\frac{\pi}{6}$; д) 0; 2; -3; $\pm\frac{\pi}{2}$; е) $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm 2\sqrt{2}$.

§ 34 **34.1.** в) 3; $\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$; г) $\frac{4}{3}$. **34.2.** в) -1; 3; г) -1; 2; 3. **34.3.** в) -1; -3; -5; г) 0; -1; 2; -4. **34.4.** а) -3; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{4}{3}$; б) -2. **34.5.** в) 1; -2, $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; г) -1; -2; ± 3. **34.6.** в) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$; г) 1; $-\frac{1}{2}$; $-2 \pm \sqrt{3}$. **34.7.** в) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; г) $\varnothing$.

§ 35 **35.1.** в) 2; г) $5\frac{2}{3}$. **35.2.** в) 2; $-0{,}6$; г) 2; $1\frac{3}{8}$. **35.3.** в) 3; г) 2. **35.4.** в) ± 2; г) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **35.5.** а) 1; б) 3; в) 1; г) 4. **35.6.** в) 7; г) -1. **35.7.** в) 6; г) 6. **35.8.** в) Нет корней; г) 5. **35.9.** в) 0,6; г) 2. **35.10.** а) 0; $(-1)^n\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; б) 8, 120, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$. **35.11.** в) 0; г) 2. **35.12.** в) 4; г) -2; -1. **35.13.** в) -1; г) 8. **35.14.** в) 1; г) 2. **35.15.** а) 4; б) 0; в) 0,5; г) 3. **35.16.** а) 0,1; б) 1,5; в) 0; г) 7. **35.17.** а) 2; б) 1. **35.18.** а) 1; б) 7. **35.19.** а) 1; б) 0; в) 0; г) 0,25. **35.20.** в) ± 1; г) 0; $\frac{4}{3}$. **35.21.** в) 2; -1; г) $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. **35.22.** в) 9; 16; г) 1. **35.23.** в) 1; $\frac{16}{81}$; г) 729. **35.24.** в) Нет корней; г) 38. **35.25.** в) $14\frac{2}{3}$; г) 1; $-3\frac{2}{15}$.

35.26. в) -2; 1; г) 1. **35.27.** а) 3; б) $\frac{-1 \pm \sqrt{82}}{18}$; в) 5; г) $\frac{841}{144}$. **35.28.** в) 0; 2; г) 4; $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3}$. **35.29.** в) 25; 625; г) 10; $\frac{1}{\sqrt[9]{10^{10}}}$. **35.30.** в) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **35.31.** в) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

35.32. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

35.33. в) 0; 3; 8; г) -1; $\pm\sqrt{11}$. **35.34.** в) 0; $\frac{2}{3}$; 7; г) 0; 1. **35.35.** в) 0,5; 1; г) $\pm\frac{1}{3}$; $-\pi + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **35.36.** в) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $2\pi n$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

35.37. в) $\frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

35.38. в) $\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{8}$, $\frac{\pi n}{16}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

35.39. а) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi n}{5}$; $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\arccos \frac{5}{13}}{2} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\arccos \frac{5}{13}}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$. **35.40.** а) $\log_{25} 6$, $\log_6 5$; б) 1; 4. **35.41.** а) 3; б) 2. **35.42.** а) 0; 2; б) 2. **35.43.** 0,25; 2. **35.44.** $-2{,}6$; -1; 3. **35.45.** 3. **35.46.** 3. **35.47.** $5\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **35.48.** -2. **35.49.** а) 3; б) 2; 28.

35.50. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. **35.51.** а) πn, $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$.

35.52. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **35.53.** $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 36

36.1. в) (1; 4); г) (9; 3). **36.2.** в) (2; 0), (-1; -1); г) (4; 8). **36.3.** в) (0,5; 4); г) (4; 2). **36.4.** в) $\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$; г) $\left(-\frac{1}{4}; 2\frac{1}{4}\right)$. **36.5.** в) (3; 1); г) (2; -1). **36.6.** в) (2; 3), (-12; 31); г) (1,2; 0,6). **36.7.** в) (1; 3), (3; 1); г) $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$. **36.8.** в) (6; 2); г) (1; 4). **36.9.** а) $(4t; t)$, $t \in \boldsymbol{R}$; б) $(t; 3t)$, $t \in \boldsymbol{R}$. **36.10.** в) (1, 2), $\left(\frac{31}{16}; -\frac{13}{16}\right)$; г) (2; -4), $\left(\frac{29}{16}; -\frac{55}{16}\right)$. **36.11.** в) (1; 4), $\left(\frac{49}{9}; \frac{16}{9}\right)$; г) (16; 1). **36.12.** в) (3; 1); г) (8; 1), (1; 8). **36.13.** в) (2; 6), (-2; 10); г) (3; 1), (5; 3). **36.14.** а) (3; 0); б) (5; 1). **36.15.** а) (4; 16);

б) $\left(9;\sqrt[3]{9}\right)$, $\left(\sqrt[3]{9};9\right)$. **36.16.** а) (1; 1), (–1; –1), $\left(\frac{1}{8};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\sqrt{0,4};-2\sqrt{0,4}\right)$, $\left(-\sqrt{0,4};2\sqrt{0,4}\right)$; в) (1; 3), (–1; –3), $\left(\frac{8\sqrt{14}}{7};-\frac{20\sqrt{14}}{7}\right)$, $\left(-\frac{8\sqrt{14}}{7};\frac{20\sqrt{14}}{7}\right)$; г) (1; 2), (–1; –2), (2; 1), (–2; –1). **36.17.** а) (3; 2), (–4; –12), (0; 0); б) (2; 1), (–2; –1); в) (0; 0), (2; 3), (3; 2), (–2; –3), (–3; –2), $\left(\sqrt{7};\sqrt{7}\right)$,$\left(-\sqrt{7};-\sqrt{7}\right)$, $\left(\sqrt{19};-\sqrt{19}\right)$,$\left(-\sqrt{19};\sqrt{19}\right)$; г) (0; 0), (3; 2), (–2; –3). **36.18.** а) (2; 3), (3; 2); б) (0; 0), (2; 1), (1; 2), (–2; –1), (–1; –2); в) (–2; 3), (–3; –2); г) (3; 1), (1; 3), (–1; –3), (–3; –1). **36.19.** в) $\left(2\pi n;(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; г) $\left((-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}\right)$; $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **36.20.** а) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left((-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};2\pi k\right)$; $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$; $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **36.21.** а) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(n+k);\frac{\pi}{3}+\pi(n-k)\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $\left(\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$; $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **36.22.** а) (1; –1; 2); б) (1; 2; –2). **36.23.** а) (0; –2; 3), $\left(\frac{13}{7};\frac{12}{7};-\frac{18}{7}\right)$; б) (3; –2; 1), (–1; 0; 3). **36.24.** а) (3; 1; –2), (5; –1; 0); б) (3; –2; 1), (–1; 0; 3). **36.25.** а) $y=-x^2+12$; б) $y=x^2-6x+3$. **36.26.** а) $y=-x^2+4x+6$; б) $y=-x^2-2x+5$. **36.27.** а) (2; 1), $\left(1\pm\sqrt{1+\pi n};1\right)$; $n\in\boldsymbol{N}$; б) $(\pi+2\pi n;\log_3(\pi+2\pi n))$, $\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\log_3(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$; $n\in\boldsymbol{Z}$, $k=0,1,2,3,\ldots$. **36.28.** а) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$; $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$; $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **36.29.** а) (3; 4);

б) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi k\right)$; $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **36.30.** а) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ 1\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$;
б) $(1;\ 1+2\pi n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **36.31.** а) 235; б) 264. **36.32.** а) 2 км/ч; б) 210 км.
36.33. а) 2 ч, 5 ч; б) 15 км/ч, 75 км/ч. **36.34.** а) 60 ч, 90 ч; б) 12 м^3/ч.
36.35. а) 10 кг, 69 %; б) 80 %. **36.36.** 60 000 р.

§ 37 **37.1.** а) Да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) да. **37.2.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) нет. **37.4.** а) $-3<x<3$; б) $x>5$; в) $x\leqslant -2$, $\frac{2}{3}\leqslant x<\frac{5}{4}$; г) $x<-1$, $x>1$; д) $\frac{11}{6}<x<\frac{13}{3}$; е) $-1<x<\frac{3}{2}$. **37.5.** а) $x>6$; б) $1<x<6$; в) $x\geqslant -2$; г) $x<7$; д) $x\leqslant -1$, $x\geqslant 6$; е) $x\geqslant 5$. **37.6.** а) $0\leqslant x\leqslant 64$; б) $x<-6$, $-1<x<1$, $x>6$; в) нет решений; г) $0\leqslant x<1024$, $x>1\ 048\ 576$; д) $-2<x<2$; е) $-\infty<x<+\infty$.
37.7. а) $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$; б) $x\geqslant 1$; в) $x\leqslant -\log_5 2$, $x\geqslant 1$; г) $x\geqslant 1$. **37.8.** а) $x<-\frac{3}{2}$; б) $x>9$; в) $-1\leqslant x\leqslant 1$; г) $x>\frac{5}{3}$; д) $0<x<4$; е) $x\leqslant -1$, $x\geqslant 1$.
37.9. а) $-2<x<25$, $x>241$; б) $-0{,}96<x<624$. **37.10.** а) $x>3$; б) $0<x<1$; в) $x<1$; г) $x<3$; д) $x>1$; е) $x\geqslant 1$. **37.11.** а) $0<x<1$; б) $0<x\leqslant 16$; в) $x>4$; г) $x\geqslant 1$; д) $x\geqslant 16$; е) $0<x<4$. **37.12.** а) $x>-0{,}5$; б) $x<1$; в) $x\leqslant 1$; г) $x\geqslant 0$; д) $x\geqslant -2$; е) $x<1$. **37.13.** а) $x<-2$, $x>2$; б) $0\leqslant x\leqslant 2$; в) $x<-2$; г) $-4\leqslant x\leqslant 0$; д) $x<-2$, $x>0$; е) $x<1{,}2$. **37.14.** а) $-\infty<x<+\infty$; б) $x=-\frac{\pi}{2}$; в) $x=0$; д) $-\infty<x<+\infty$. **37.15.** а) $7<x<9$; б) $-\infty<x<+\infty$; в) нет решений; г) $x\leqslant 1$, $x\geqslant 19$. **37.16.** а) Нет решений; б) $x<-11$, $x>2$; в) $x=-2$; г) $-\infty<x<+\infty$.
37.17. а) $x<-3$, $3<x<4$; б) $-\infty<x<+\infty$; в) нет решений; г) $-2<x<0$, $x>2$.
37.18. а) $x<-5$, $\frac{1}{3}<x<2$; б) $x<-2$, $x>0$; в) $x<-\frac{2}{7}$, $0{,}5<x<7$; г) $-\infty<x<+\infty$.
37.19. а) $-3<x<-2$, $-2<x<4$; б) $-6<x<-2$, $x>-2$; в) $-5<x\leqslant 2$, $3{,}5\leqslant x<5$; г) $-\infty<x<+\infty$. **37.20.** а) Нет решений; б) $x\leqslant\frac{13}{4}$, $x\geqslant 5$; в) $x<-11$; г) $x\leqslant 3$, $x>11$. **37.21.** а) $x>25$; б) $x\leqslant 7$; в) $x<2$; г) $0\leqslant x<16$; д) $x\geqslant 28$; е) $-11\leqslant x\leqslant 5$. **37.22.** а) $x>2$; б) $0\leqslant x\leqslant 2$; в) $x\geqslant 3$; г) $-3<x<0$; д) $x\geqslant 1$; е) нет решений. **37.23.** а) $x<2$, $x>3$; б) $3+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x<4$; в) $x\leqslant -2$, $x\geqslant 6$; г) $2\leqslant x\leqslant 3$; д) $-\infty<x<+\infty$; е) $-\frac{1+\sqrt{1729}}{24}\leqslant x<-1$, $\frac{11}{12}<x\leqslant\frac{-1+\sqrt{1729}}{24}$.
37.24. а) $2{,}5\leqslant x<8$; б) $\frac{2}{3}<x\leqslant 2{,}5$; в) $-12\leqslant x<4$; г) $x\geqslant 2{,}5$; д) $\frac{2}{7}<x\leqslant 2{,}5$; е) $x>6$. **37.25.** а) $x>1$; б) $x<-\frac{21}{4}$, $x>1$; в) нет решений; г) $2\leqslant x<3$; д) $-\frac{5}{2}<x\leqslant -\frac{3}{2}$, $2\leqslant x<3$; е) $x>3$. **37.26.** а) $x\geqslant\frac{\sqrt{69}-5}{2}$;

б) $\frac{5-\sqrt{173}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5+\sqrt{173}}{2}$; в) $2 \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{10}$; г) $x \leqslant 3$, $x > \frac{13}{3}$; д) нет решений;

е) $1 \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{2{,}5}$. **37.27.** а) $x \leqslant 1$, $5 \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{14}$; б) $1 \leqslant x \leqslant 4$,

$5 \leqslant x \leqslant \frac{5+\sqrt{41}}{2}$. **37.28.** а) $\frac{1}{3} < x < 2$; б) $x < 0$, $1 < x < 2$; в) $x \leqslant -5$, $x \geqslant 1$;

г) $x < -3{,}5$, $-3{,}5 < x < \frac{1}{12}$, $x > \frac{1}{12}$; д) $x \leqslant 0$, $1{,}5 \leqslant x \leqslant 2$; е) $-\infty < x < +\infty$.

37.29. а) $\frac{1}{e} < x < e$; б) $x \leqslant -9$, $x \geqslant 9$; в) $x < -11$, $-1{,}1 < x < -1$, $1 < x < 1{,}1$,

$x > 11$; г) $0 < x < 1$, $x > e^2$; д) $x \leqslant -9$, $x \geqslant 9$; е) $-11 \leqslant x < -1$, $1 < x \leqslant 11$.

37.30. а) $x > \frac{1}{16}$; б) $0 < x < 4$. **37.31.** а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

37.32. а) $0{,}1^{\log_5 4} \leqslant x \leqslant 1$; б) $x \geqslant 2^{\frac{3}{\ln 7}}$. **37.33.** а) $-3 < x \leqslant -2$, $x \geqslant 3$;

б) $-\frac{7}{4} \leqslant x \leqslant \log_3 5$; в) $x = 3$, $x \geqslant 5$; г) $-4 < x \leqslant -3$, $x \geqslant 3$; д) $x \leqslant -\frac{8}{5}$, $x \geqslant \log_6 3$;

е) $x = 6$, $x \geqslant 12$. **37.34.** а) $x > 0$; б) $x > 2$; в) $1 \leqslant x \leqslant 16$; г) $\log_5 7 \leqslant x \leqslant 2$.
37.35. а) $2 < x < 3$; $4 \leqslant x < 5$; $5 < x \leqslant 6$; б) $-7 < x \leqslant -6$; $5 < x < 6$; в) $0 \leqslant x < 6$;
$6 < x \leqslant 9$; г) $-3 < x < -1-\sqrt{3}$; $1 < x < 5$. **37.36.** а) $-4 \leqslant x < -\pi$, $-\pi < x < 0$;

б) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}$; в) $-2 < x < 1$, $1 < x < 4$; г) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x \leqslant 2$; д) $x = \frac{\pi}{2}$;

е) $-4 < x < \frac{-1-\sqrt{41}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{41}}{2} < x < 3$. **37.37.** а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$,

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **37.38.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n$,

$n \in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **37.39.** а) $2\pi n < x < \frac{\pi}{24} + 2\pi n$,

$\frac{5\pi}{24} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6} + \pi n < x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

37.40. а) $2\pi n < x < \arccos\dfrac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $2\pi n < x < \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$,

$\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 38 **38.1.** а) Нет корней при $a = -2$; $-\infty < x < +\infty$ при $a = 2$; $x = \dfrac{1}{a+2}$

при всех $a \neq -2$; 2; б) нет корней при $a = 3$; $-\infty < x < +\infty$ при $a = -1{,}5$; $x = \dfrac{1}{a-3}$

при всех $a \neq -1{,}5$; 3; в) нет корней при $a = 2{,}5$; $-\infty < x < +\infty$ при $a = -2{,}5$;

$x = \dfrac{1}{5-2a}$ при всех $a \neq -2{,}5$; 2,5; г) нет корней при $a = 4$; $-\infty < x < +\infty$

при $a = -1$; $x = \dfrac{1}{a-4}$ при всех $a \neq -1$; 4. **38.2.** а) $x \leqslant \dfrac{1}{a+5}$ при $a < -5$ и $a > 5$;

нет решений при $a = -5$; $x \geqslant \dfrac{1}{a+5}$ при $-5 < a < 5$; $-\infty < x < +\infty$ при $a = 5$;

б) $x < \dfrac{1}{a-1}$ при $a < -5$ и $a > 1$; нет решений при $a = -5$; $x > \dfrac{1}{a-1}$

при $-5 < a < 1$; $-\infty < x < +\infty$ при $a = 1$; в) $x \leqslant \dfrac{1}{3a-4}$ при $a < -\dfrac{4}{3}$ и $a > \dfrac{4}{3}$;

$x \geqslant \dfrac{1}{3a-4}$ при $-\dfrac{4}{3} < a < \dfrac{4}{3}$; $-\infty < x < +\infty$ при $a = -\dfrac{4}{3};\ \dfrac{4}{3}$; г) $x < \dfrac{1}{a+2}$

при $a < -2$ и $a > 4$; нет решений при $a = -2$; 4; $x > \dfrac{1}{a+2}$ при $-2 < a < 4$.

38.3. а) $a \neq 1$; б) $a > -1$; в) таких значений нет; г) $a = 1$. **38.4.** а) $a < 1{,}5$;
б) $-2 < a < 1{,}5$; в) $2{,}5 < a < 3$; г) $a < -5{,}5$. **38.5.** а) $a \neq -2$, $a \neq 2$; б) $a = -2$;
в) $a < -3$, $a > 2$; г) $a = 2$. **38.6.** а) $a < 0$, $0 < a < 1$, $a > 9$; б) $a = 0$, $a = 1$, $a = 9$;
в) $1 < a < 9$; г) $a \leqslant 1$, $a \geqslant 9$. **38.7.** а) $a = -1$; б) $a = -1$, $a = -0{,}5$, $a = 3$; в) $a < -1$,
$-1 < a < -0{,}5$, $a > 3$; г) $-0{,}5 < a < 3$. **38.8.** а) $a = -1$; б) $a = -2$, $a = 2$, $a = 3$;
в) $-2 < a < -1$, $-1 < a < 3$; г) $a < -2$, $a > 3$. **38.9.** а) $x = 2{,}5$ при $a = 3$; нет корней

при $a < 2{,}8$; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5a-14}}{a-3}$ при остальных a; б) $x = \dfrac{5}{8}$ при $a = 3$;

$x = \dfrac{a+1 \pm \sqrt{3a+7}}{a-3}$ при $a \geqslant -\dfrac{7}{3}$; нет корней при остальных a. **38.10.** б) $x < \dfrac{5}{8}$

при $a = 3$; нет решений при $a \leqslant -\dfrac{7}{3}$; $\dfrac{a+1+\sqrt{3a+7}}{a-3} < x < \dfrac{a+1-\sqrt{3a+7}}{a-3}$

при $-\dfrac{7}{3} < a < 3$; $x < \dfrac{a+1-\sqrt{3a+7}}{a-3}$, $x > \dfrac{a+1+\sqrt{3a+7}}{a-3}$ при $a > 3$.

38.11. а) Нет корней при $a < -1$, $a > -\dfrac{1}{3}$; $x = (-1)^k \arcsin(3a+2) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$,

при остальных значениях a; б) нет корней при $a < 0{,}5$, $a > 1$;

$x = \pm 0{,}5 \arccos(4a - 3) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, при остальных значениях a; в) нет корней при $a < 1$, $a > 2$; $x = \pm \arccos(3 - 2a) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, при остальных значениях a; г) нет корней при $a < 2$, $a > 4$; $x = 0{,}5((-1)^k \arcsin(3 - a) + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, при остальных значениях a. **38.12.** а) Нет корней при $a < -\sqrt{2}$, $a > \sqrt{2}$; $x = \pm 3\arccos(a^2 - 1) + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, при остальных значениях a; б) нет корней при $a < -3$, $a > -1$; $x = (-1)^k \arcsin(a + 2) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, при остальных значениях a; в) нет корней при $a < -\sqrt{2}$, $a > \sqrt{2}$; $x = -2{,}5((-1)^k \arcsin(1 - a^2) + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, при остальных значениях a; г) нет корней при $a < -1$, $a > 6$, $\frac{5 - \sqrt{41}}{2} < a < \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$; $x = \pm \arccos(a^2 - 5a - 5) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, при остальных значениях a. **38.13.** а) $a < -4$; б) $a > 9$. **38.14.** а) $a < -3$; $a > 2$; б) $a < -5$, $a > 2{,}75$. **38.15.** а) $0 \leqslant a \leqslant \frac{2}{3}$; б) $-\frac{2}{3} \leqslant a \leqslant 0$. **38.16.** а) $a = -4$, $a = 4$; б) $a = -2$, $a = 2$. **38.17.** а) $a = 1$; б) $a = -1$, $a = -\frac{1}{3}$. **38.18.** а) $a < -2$; б) $-2 < a \leqslant 2$; в) $a \leqslant -2$; г) $4 < a \leqslant 4{,}4$. **38.19.** а) $a \geqslant -9$; б) $a \geqslant -\frac{61}{4}$. **38.20.** а) $a \geqslant -7$; б) $a \geqslant -5$. **38.21.** а) $x \geqslant 1{,}5$ при $a \leqslant 1{,}5$; $x \geqslant a$, $x = 1{,}5$ при остальных значениях a; б) нет решений при $a \leqslant 1{,}5$; $1{,}5 < x \leqslant a$ при $1{,}5 < a \leqslant 2$; $x \geqslant 1{,}5$ при $a \geqslant 2$; в) $a \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$ при $a \leqslant \frac{4}{3}$; нет решений при остальных значениях a; г) $a + 1 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$ при $a \leqslant \frac{1}{3}$; $\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant a + 1$ при $\frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$; $a < x \leqslant a + 1$ при остальных значениях a. **38.22.** а) $a = 1$; б) $a = 6$. **38.23.** а) $a > \frac{7}{6}$; б) таких значений нет; в) $a < 0{,}5$; г) $0{,}5 < a < \frac{7}{6}$. **38.24.** а) $a = 1$, $a = 5^{4{,}5}$; б) $0 < a < 8^{-\frac{1}{16}}$. **38.25.** а) $a \leqslant 3$, $a \geqslant 16$; б) $|a| < \frac{3}{7}$, $|a| > \frac{\sqrt{58}}{7}$. **38.26.** а) $a < -6$; б) $-6 < a < 3$. **38.27.** а) $a = 12$; б) $a < 1$. **38.28.** а) $-5 \leqslant a \leqslant 0$; б) $-2 < a < 2$. **38.29.** Если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет; если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$; если $a \geqslant -\frac{4}{5}$, $a \neq 1$, то $x_{1,2} = \frac{-(2a + 1) \pm \sqrt{5a + 4}}{a - 1}$. **38.30.** Если $a = -3$, то $x = -6$; если $a = -2$, то $x = -5$; если $a = 0$, то корней нет; если $a = 1$, то $x = 2$; если $a = 2$, то $x = 3$; если $a \neq -3$, -2, 0, 1, 2, то $x_1 = a + 1$, $x_2 = a + 2$. **38.31.** Если $a > 0$, то $x = \frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$; если $-\frac{1}{4} < a \leqslant 0$, то $x_{1,2} = \frac{2a + 1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}$; если $a = -\frac{1}{4}$, то $x = \frac{1}{4}$; если $a < -\frac{1}{4}$, то корней нет. **38.32.** Если $a < 2$, то корней нет; если $a = 2$,

то $1 \leqslant x \leqslant 3$; если $a > 2$, то $x_{1,\,2} = \frac{4 \pm a}{2}$. **38.33.** Если $a < \frac{1}{2}$, $a > 1$, то корней нет; если $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, то $x = \pm \frac{1}{4} \arccos(4a - 3) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **38.34.** а) Если $a = -3$, $a = \frac{5}{3}$, то решений нет; если $a < -5$, $-3 < a < \frac{5}{3}$, то $x > \frac{-44}{3a^2 + 10a - 25}$; если $-5 < a < -3$, $a > \frac{5}{3}$, то $x < \frac{-44}{3a^2 + 10a - 25}$; если $a = -5$, то $-\infty < x < +\infty$;

б) если $a > \frac{1}{4}$, то $-\infty < x < +\infty$; если $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$, то $x < \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}$, $x > \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$; если $a = 0$, то $x < 2$; если $a < 0$, то $\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$.

38.35. а) Нет корней, если $a < -2$, $a > 2\sqrt{2}$; один корень, если $-2 \leqslant a < 2$, $a = 2\sqrt{2}$; два корня, если $2 \leqslant a < 2\sqrt{2}$; б) нет корней, если $a < 0$; два корня, если $a = 0$, $a > 2$; три корня, если $a = 2$; четыре корня, если $0 < a < 2$.
38.36. $a > 4e$. **38.37.** $a = 1$, $a = 2$, $5 \leqslant a \leqslant 6$.

§ 39 **39.4.** а) 2; б) 3; в) 3; г) 7; д) 9; е) 11. **39.5.** а) 3; б) 4; в) 11; г) 13; д) $a + 1$; е) $2a - b$. **39.6.** а) 8 тыс. р.; б) 9 тыс. р.; в) 15 тыс. р.; г) 15 800 р.; д) $c = a - 4{,}2$; е) $c = a - 1{,}4(b - a)$. **39.7.** а) 6; б) 9; в) 14; г) 20; д) n — наименьшее натуральное решение неравенства $n(n + 1) \geqslant 40(b - 2)$; е) n — наименьшее натуральное решение неравенства $n(n + 1) \geqslant 40(b - a)$. **39.8.** а) 3,8; б) $\underbrace{5, \ldots, 5}_{4}$, 4, 4, 4, 2, 2, 2; в) $\underbrace{4, \ldots, 4}_{8}$, 3, 3; е) $4\frac{5}{17}$. **39.9.** а) Нет; б) нет; г) $28\frac{5}{19}$; д) $38\frac{1}{7}$. **39.10.** а) Нет; б) нет; г) 15; е) $\overbrace{7, \underbrace{1, \ldots, 1}_{8}, \ldots, 7, \underbrace{1, \ldots, 1}_{8}}^{5}$, 1, 7.

Числовые последовательности

Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если существует число M, такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Число M называют **верхней границей** последовательности.

Последовательность (y_n) называют **ограниченной снизу**, если существует число m, такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число m называют **нижней границей** последовательности.

Если последовательность ограничена и снизу, и сверху, её называют **ограниченной последовательностью**.

Число b называют **пределом последовательности (x_n)**, если в любой окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера. Если последовательность имеет предел, то её называют **сходящейся**; если последовательность не имеет предела, то говорят, что последовательность **расходится**.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc;$$

3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c},\ c \neq 0;$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(kx_n) = kb.$$

Предел функции

Равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ означает следующее: если значения аргумента x приближаются к значению $x = a$, то соответствующие значения функции приближаются к предельному значению b:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Равенство $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ означает следующее: у графика функции $y = f(x)$ имеется горизонтальная асимптота $y = b$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^r} = 0\ (r > 0).$$

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$;

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = b\cdot c$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ (при условии, что $c \neq 0$);

4) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = kb$.

Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной в точке $x = a$**, если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке a, т. е. если выполняется соотношение

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Производная

Если функция $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x, то разность $x - x_0$ называют **приращением аргумента** и обозначают Δx, а разность $f(x) - f(x_0)$ называют **приращением функции** и обозначают Δy.

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой a.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Найти $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в формулу

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Правила дифференцирования

$$(ay + bz)' = ay' + bz'$$
$$(yz)' = y'z + yz'$$
$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m)$$
$$\left(\frac{y}{z}\right)' = \frac{y'z - yz'}{z^2}$$

Формулы дифференцирования

$$(C)' = 0$$
$$(kx + m)' = k$$
$$(x^r)' = rx^{r-1}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Исследование функций

Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$ (причём равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то **функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.**

Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$ (причём равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то **функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.**

Точку x_0 называют **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек $x \neq x_0$ которой выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$. Значение функции в точке минимума обозначают $y_{\min}$.

Точку x_0 называют **точкой максимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек $x \neq x_0$ которой выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Значение функции в точке максимума обозначают $y_{\max}$.

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то в этой точке производная функции либо равна нулю (стационарная точка), либо не существует (критическая точка).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что и слева, и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти стационарные ($f'(x) = 0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$.

3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной внутри получившихся промежутков.

4. Сделать выводы о монотонности функции и о её точках экстремума.

Непрерывная функция на отрезке достигает своих наименьшего и наибольшего значений либо в концевой точке отрезка, либо в стационарной или критической внутренней точке отрезка.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$, то:

— если x_0 — точка минимума, то $f(x_0)$ — наименьшее значение функции на этом промежутке;

— если x_0 — точка максимума, то $f(x_0)$ — наибольшее значение функции на этом промежутке.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.

3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{\text{наим}}$) и наибольшее (это будет $y_{\text{наиб}}$).

Первообразная и неопределённый интеграл

Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной** для функции $y = f(x)$ на промежутке X, если для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Таблица первообразных

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	x
x^r $(r \neq 1)$	$\frac{x^r}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$, $x \in (0; +\infty)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

Если функция $y = f(x)$ имеет на множестве X первообразную $y = F(x)$, то множество всех первообразных, т. е. множество $\{F(x) + C \mid C \in \boldsymbol{R}\}$, называют **неопределённым интегралом** от функции $y = f(x)$ и обозначают так: $\int f(x)dx$.

Если функции $y = f(x)$, $y = h(x)$ имеют на множестве X первообразные $y = F(x)$, $y = H(x)$ соответственно, то функция $y = F(x) + H(x)$ является первообразной для функции $y = f(x) + h(x)$.

Если функция $y = f(x)$ имеет на множестве X первообразную $y = F(x)$, то для любого числа k функция $y = kF(x)$ является первообразной для функции $y = kf(x)$.

Если функция $y = f(x)$ имеет на множестве X первообразную $y = F(x)$, то функция $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$ является первообразной для функции $y = f(kx + m)$.

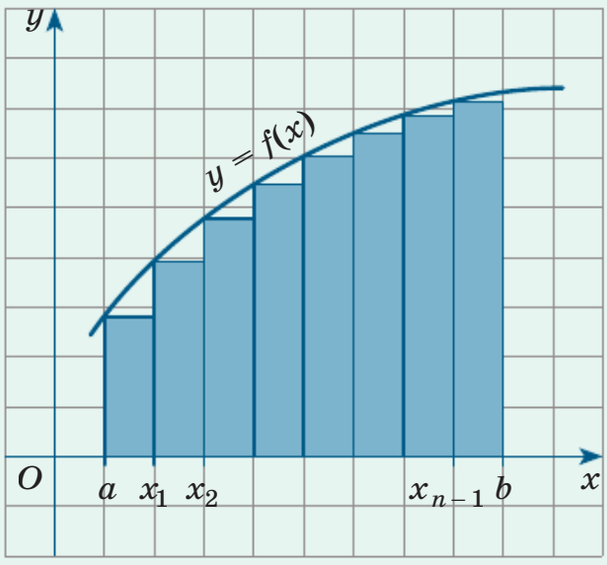
Свойства первообразных

1. Первообразная суммы равна сумме первообразных.
2. Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.

Определённый интеграл

Дана непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$; составим сумму

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$



Определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Число a называют *нижним пределом интегрирования*, а число b — *верхним пределом интегрирования*.

Свойства определённого интеграла

1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

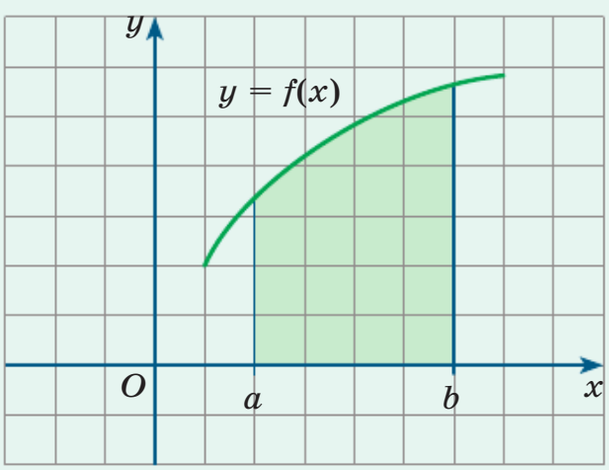
2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

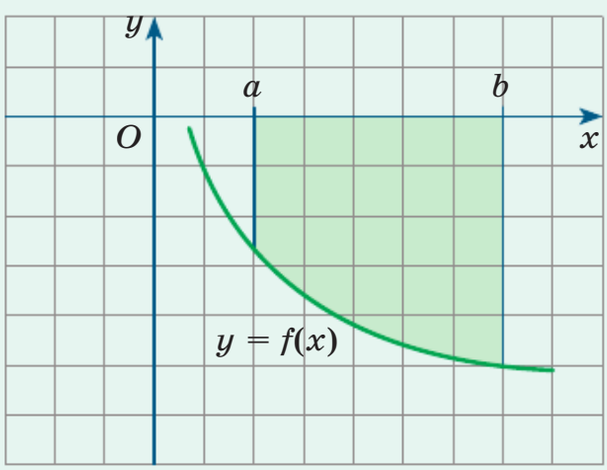
3. (Аддитивное свойство интеграла). Если $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Площадь криволинейной трапеции



$$S = \int_a^b f(x)dx$$



$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Уравнения

Уравнения $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Уравнения с пустым множеством корней равносильны.

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ (или областью допустимых значений — ОДЗ) называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл (определены) выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Теоремы о равносильности уравнений

1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же *нечётную степень*, то получится уравнение, равносильное данному.

3. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же отличное от нуля число или на одно и то же выражение $h(x)$, которое:

а) имеет смысл всюду в области определения уравнения $f(x) = g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в 0,

то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному.

5. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же *чётную степень* получится уравнение, равносильное данному.

6. Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ для всех допустимых значений x, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Неравенства

Два **неравенства** с одной переменной называют **равносильными**, если они имеют одинаковые решения (т. е. если равны множества их частных решений).

Теоремы о равносильности неравенств

1. Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

2. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ возвести в одну и ту же *нечётную степень* n, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство $(f(x))^n > (g(x))^n$, равносильное данному.

3. Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно:

а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

4. а) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, *положительное* при всех x из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства $f(x) > g(x)$, оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство $f(x)h(x) > g(x)h(x)$, равносильное данному.

б) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, *отрицательное* при всех x из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства $f(x) > g(x)$, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство $f(x)h(x) < g(x)h(x)$, равносильное данному.

5. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же *чётную степень* n получится неравенство того же смысла $(f(x))^n > (g(x))^n$, равносильное данному.

6. Если $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно:

а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все такие значения

переменной, каждое из которых является частным решением *всех* заданных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют **частным решением системы неравенств.**

Множество *всех* частных решений системы неравенств представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят просто: **решение системы неравенств**).

Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением *хотя бы одного* из заданных неравенств. Каждое такое значение переменной называют **частным решением совокупности неравенств.** Множество *всех* частных решений совокупности неравенств представляет собой **решение совокупности неравенств.**

Геометрическая вероятность

При равномерном распределении вероятность того, что точка, выбираемая из множества X, окажется точкой подмножества $Y \subset X$, равна отношению:

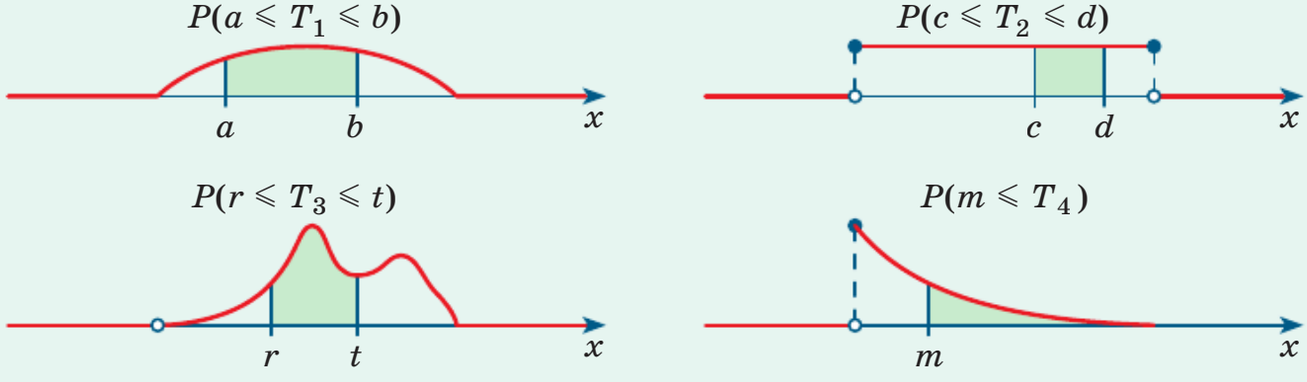
— длин $l(Y) : l(X)$ для числовых множеств;

— площадей $S(Y) : S(X)$ для плоских фигур;

— объёмов $V(Y) : V(X)$ для пространственных тел.

Нормальные и биномиальные распределения

Вероятность того, что значения случайной величины T находятся между a и b, равна площади фигуры, ограниченной снизу осью Ox, сверху — графиком функции $y = p(x)$ плотности с. в. T, слева и справа — прямыми $x = a$ и $x = b$.



Вероятность того, что непрерывная случайная величина T принимает значения от a до b, равна результату интегрирования функции $y = p(x)$ плотности этой с. в. в пределах от a до b:

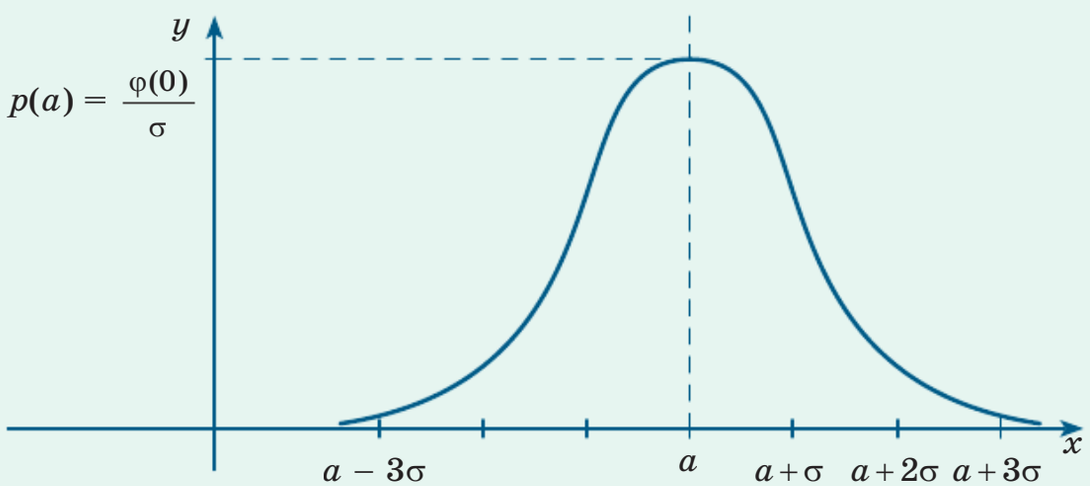
$$P(a \leqslant T \leqslant b) = \int_a^b p(x)dx.$$

Случайную величину T называют **нормально распределённой**, если её плотность распределения имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2},$$

где a и $\sigma > 0$ — константы распределения.

Площадь под кривой нормального распределения равна 1, и она довольно кучно сосредоточена рядом с точкой $x = a$ максимума: на отрезке $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$ она превышает 0,99:



Функцией Лапласа $y = \Phi(x)$ называют функцию, которая каждому числу $x > 0$ ставит в соответствие значение площади фигуры, заключённой между осью Ox и гауссовой кривой на отрезке от 0 до x. Эту функцию доопределяют для $x = 0$ и $x < 0$, полагая соответственно $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Функция Лапласа — это первообразная *гауссовой функции* $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$, т. е. $\Phi'(x) = \varphi(x)$ для всех x. По формуле Ньютона — Лейбница для случайной величины S со стандартным нормальным распределением $N(0; 1)$:

$$P(c \leqslant S \leqslant d) = \int_c^d \varphi(x)dx = \Phi(d) - \Phi(c).$$

Для чисел $a < b$ вероятность $P_n(a \leqslant k \leqslant b)$ того, что количество k «успехов» в n испытаниях Бернулли не меньше a и не больше b, вычисляется по формуле

$$P_n(a \leqslant k \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Закон больших чисел (в форме Бернулли)

При неограниченном увеличении n частота $\frac{k}{n}$ наступления «успеха» в n испытаниях Бернулли практически совпадает с вероятностью p «успеха» в одном испытании.

Неравенство Чебышёва

$$P(|S - M(S)| \leqslant t) \geqslant 1 - \frac{D(S)}{t^2},$$

где S — случайная величина, $M(S)$ — её математическое ожидание, $D(S)$ — дисперсия.

Неравенство Чебышёва для среднего арифметического

$$P\left(\left|\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n} - M\right| \leqslant t\right) \geqslant 1 - \frac{C}{nt^2}$$

для независимых случайных величин S_1, S_2, ..., S_n с одинаковым математическим ожиданием M и дисперсиями, не превосходящими константы C.

Список дополнительной литературы

1. *Арнольд В. И.* Задачи для детей от 5 до 15 лет / В. И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2018.

2. *Гиндикин С. Г.* Рассказы о физиках и математиках / Семён Гиндикин. — М. : Книговек, 2013. — (Мир вокруг нас).

3. *Каганов М. И.* Абстракция в математике и физике / М. И. Каганов, Г. Я. Любарский. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005.

4. *Клайн Морис.* Математика. Утрата определённости / Морис Клайн. — М. : Римис, 2007.

5. *Колмогоров А. Н.* Введение в теорию вероятностей / А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. — М. : МЦНМО, 2015. — (Библиотечка «Квант»).

6. *Математическая составляющая* / Редакторы-составители Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин ; художник-оформитель Р. А. Кокшаров. — М. : Фонд «Математические этюды», 2015.

7. *Пиковер Клиффорд.* Великая математика. От Пифагора до 57-мерных объектов. 250 вех в истории математики / Клиффорд Пиковер. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.

8. *Писаревский Б. М.* Беседы о математике и математиках / Б. М. Писаревский, В. Т. Харин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006.

9. *Уилан Чарльз.* Голая статистика. Самая интересная книга о самой скучной науке / Чарльз Уилан. — М. : Манн, Иванов и Фербер, 2016. — (МИФ. Научпоп).

Оглавление

Глава 4. **Определённый интеграл** 5
§ 21. Понятие первообразной 5
§ 22. Правила интегрирования 13
§ 23. Понятие определённого интеграла. Формула Ньютона — Лейбница 21
§ 24. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла 38
Приложение* к главе 4. Использование определённого интеграла для вычисления объёмов тел вращения 50
Итак, в главе 4 54
Вопросы 54
Тест 55
Из истории математики 57

Глава 5. **Основные распределения случайных величин** 61
§ 25. Геометрические вероятности 62
§ 26. Нормальное распределение 72
§ 27. Нормальные и биномиальные распределения. Законы больших чисел 87
§ 28. Другие распределения случайных величин 100
Итак, в главе 5 113
Вопросы 115
Тест 116
Из истории математики 118

Глава 6*. **Элементарные функции комплексной переменной** 123
§ 29. Линейная и дробно-линейная функции 124
§ 30. Степенная функция. Корни n-й степени 134
§ 31. Приближения функций многочленами. Степенные ряды 143
§ 32. Тригонометрические функции комплексной переменной. Тождество Эйлера 150
Итак, в главе 6 155
Вопросы 155
Тест 156
Из истории математики 158

Глава 7. **Уравнения, неравенства, системы уравнений, системы неравенств** 161
§ 33. Равносильность уравнений 161
§ 34*. Уравнения вида $p(x) = 0$, где $p(x)$ — многочлен 168
§ 35. Основные методы решения уравнений с одной переменной . . . 176
§ 36. Системы уравнений 193
§ 37. Неравенства с одной переменной 208
§ 38. Уравнения и неравенства с параметрами 228
§ 39*. Уравнения, неравенства и функции в задачах о среднем арифметическом 245

Приложение. Таблица приближённых значений функции Лапласа $y = \Phi(x)$ для $x \geqslant 0$ 256

Ответы 258

Справочные материалы 272



Учебное издание

Серия «Лаборатория А. Г. Мордковича»

Мордкович Александр Григорьевич
Семенов Павел Владимирович
Александрова Лидия Александровна
Мардахаева Елена Львовна

МАТЕМАТИКА
Алгебра и начала математического анализа

11 класс

Базовый и углублённый уровни

Учебное пособие
В двух частях

Часть 2

Центр информатики, технологии и профильного обучения

Ответственный за выпуск *Л. В. Кузнецова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Внешнее оформление *В. А. Андрианова*
Художественный редактор *А. А. Павлов*
Иллюстрации: *«Фотобанк Лори»*
Компьютерная вёрстка *А. А. Павлова*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *О. Ч. Кохановская*

Подписано в печать 02.10.2025. Формат 70×90/16.
Усл. печ. л. 21,06. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва,
ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, помещение 1Н.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru.**