ЛАБОРАТОРИЯ А.Г. Мордковича

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11 КЛАСС

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

Учебное пособие

В двух частях

Часть 1

2-е издание, стереотипное

МОСКВА
«Просвещение»
2026

УДК 373.167.1:51+51(075.3) 12+
ББК 22.1я721
М34

Серия «Лаборатория А. Г. Мордковича» основана в 2020 году

Авторы:

заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования, доктор педагогических наук, профессор Московского городского педагогического университета *А. Г. Мордкович*;

почётный работник высшего профессионального образования РФ, доктор физико-математических наук, профессор отдела математического образования НИУ ВШЭ *П. В. Семенов*;

отличник народного просвещения, учитель математики высшей категории *Л. А. Александрова*;

кандидат педагогических наук, доцент *Е. Л. Мардахаева*.

Математика. Алгебра и начала математического анализа :
М34 11-й класс : базовый и углублённый уровни : учебное пособие : в 2 частях / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева. — 2-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2026. — (Лаборатория А. Г. Мордковича).

ISBN 978-5-09-129508-5.

Ч. 1. — 240 с. : ил.

ISBN 978-5-09-129509-2.

Учебное пособие входит в завершённую предметную линию по алгебре и началам математического анализа базового и углублённого уровней для 10–11 классов. Учебное пособие разработано в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования.

Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением большого числа примеров, практические задания представлены на трёх уровнях сложности. В конце каждой главы приведены основные факты, а также вопросы и тест для самопроверки, дополнительные задачи и исторические сведения.

Учебное пособие содержит избранные темы курса «Вероятность и статистика».

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-129509-2 (ч. 1)
ISBN 978-5-09-129508-5

© АО «Издательство «Просвещение», 2025
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2025
Все права защищены

Условные обозначения

24.13. Задачи базового уровня сложности

24.14. Задачи повышенного уровня сложности

24.15. Задачи высокого уровня сложности

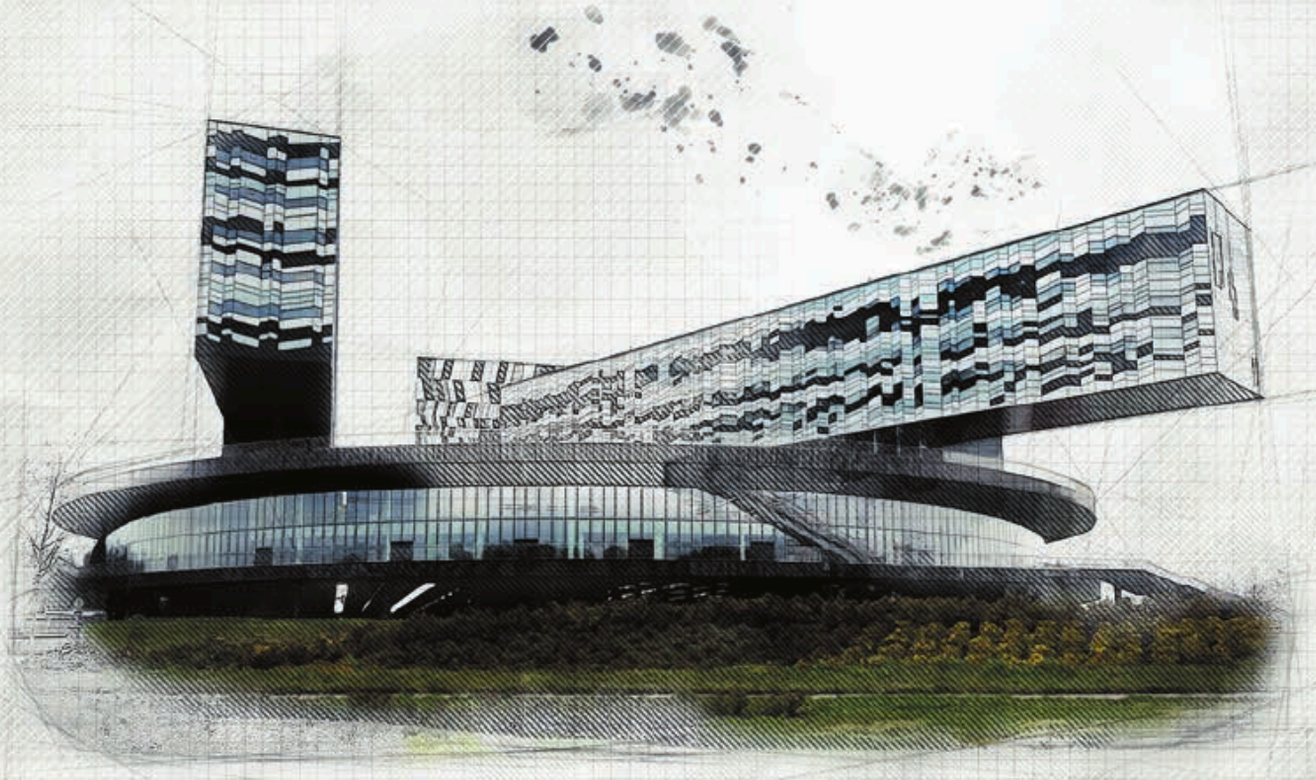
ИКТ Материал может быть рассмотрен с помощью ИКТ-средств

10.11
10.12 Упражнения с общим заданием

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения примера

* Материал, предназначенный для изучения на углублённом уровне.



Московская школа управления
или Российская бизнес-школа.
Москва (Сколково)

§1. Предел числовой последовательности
§2. Арифметические операции над пределами числовых последовательностей
§3. Предел функции на бесконечности
§4. Предел функции в точке
§5. Приращение аргумента. Приращение функции

Глава 1

Элементы теории пределов

§ 1. Предел числовой последовательности

Большое значение для теории и практики имеет математическая дисциплина, известная под названием «Математический анализ», в основном занимающаяся изучением числовых функций. При этом, разумеется, изучается поведение каждой конкретной функции в целом, на всей области определения (*глобальный подход*), но большее внимание уделяется *анализу* того, как ведёт себя функция около той или иной точки (*локальный подход*). Математический анализ — составная часть курса высшей математики, изучаемого в высших учебных заведениях, а наша цель — познакомить вас с некоторыми элементами математического анализа, имеющими общекультурное значение. При этом мы не будем стремиться всё строго доказать (в школьном курсе математики сделать это практически невозможно), во многих случаях мы будем полагаться на визуальные представления и интуицию.

Тот *анализ*, о котором мы упомянули выше, связан с понятием предела. В этом параграфе речь пойдёт о том, что такое предел числовой последовательности.

С числовыми последовательностями вы познакомились в курсе алгебры 9-го класса. Напомним, что *числовой последовательностью* называют функцию натурального аргумента, т. е. функцию вида $y = f(x)$, $x \in \boldsymbol{N}$. Числовую последовательность обозначают или $y = f(n)$, или коротко (y_n), или подробнее, выписывая несколько членов последовательности: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$.

Удобнее всего *аналитическое задание* последовательности, когда указана формула её n-го члена. Например, формулой $y_n = n^2 + 1$ задаётся последовательность 2, 5, 10, 17, 26, …, формулой $y_n = \frac{1}{n}$ — последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, а формулой $y_n = a + (n-1)d$ —

арифметическая прогрессия a, $a + d$, $a + 2d$, ... со знаменателем d и первым членом a.

Последовательность (y_n) называют *возрастающей*, если каждый её член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{n-1} < y_n < y_{n+1} < \ldots .$$

Последовательность (y_n) называют *убывающей*, если каждый её член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_{n-1} > y_n > y_{n+1} > \ldots .$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином *монотонные последовательности.*

Например,

3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., $2n + 1$, ... — возрастающая последовательность,

64, 32, 16, 8, 4, 2, ..., $\frac{64}{2^{n-1}}$, ... — убывающая последовательность;

а последовательность 3, 64, 5, 32, 7, 16, 9, 8, 11, 4, 13, 2, ... не является монотонной, она и не возрастающая, и не убывающая.

Познакомимся ещё с одним свойством числовых последовательностей.

Определение 1. Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если существует число M, такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Число M называют **верхней границей** последовательности. Последовательность (y_n) называют **ограниченной снизу**, если существует число m, такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число m называют **нижней границей** последовательности. Если последовательность ограничена и снизу, и сверху, то её называют **ограниченной последовательностью.**

Например,

— последовательность 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., $2n + 1$, ... ограничена снизу (в качестве нижней границы можно взять число 3, как, впрочем, и любое число, меньшее, чем 3),

— последовательность 64, 32, 16, 8, 4, 2, ..., $\frac{64}{2^{n-1}}$, ... ограничена сверху (в качестве верхней границы можно взять число 64, как, впрочем, и любое число, большее, чем 64).

Обратите внимание: последовательность 64, 32, 16, 8, 4, 2, …, $\frac{64}{2^{n-1}}$, … ограничена и снизу, ведь все её члены больше нуля. Это — ограниченная последовательность. А вот ещё один весьма показательный пример ограниченной последовательности: 1, –1, 1, –1, 1, –1, … .

Итак, мы обсудили два достаточно простых свойства числовых последовательностей: монотонность и ограниченность. Более сложным является свойство сходимости, к обсуждению которого мы сейчас приступим. Для этого нам понадобится понятие окрестности точки.

Определение 2. Интервал $(a - r; a + r)$, где $r > 0$, называют **окрестностью точки a**; число r называют **радиусом окрестности.**

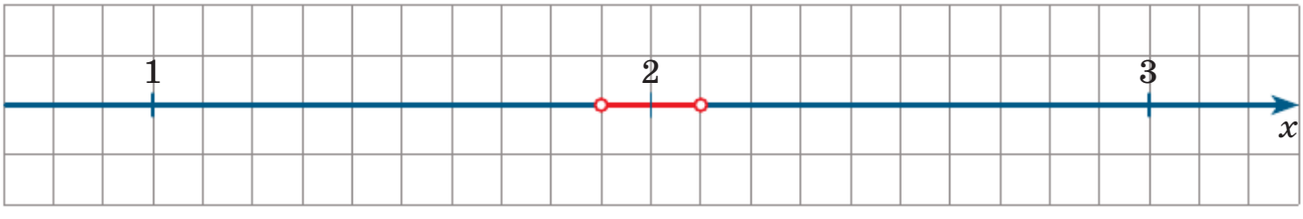
Например, на рисунке 1, *а* изображена окрестность точки 2 радиусом 0,1, а на рисунке 1, *б* — окрестность точки –3 радиусом 1.

Рассмотрим две последовательности:

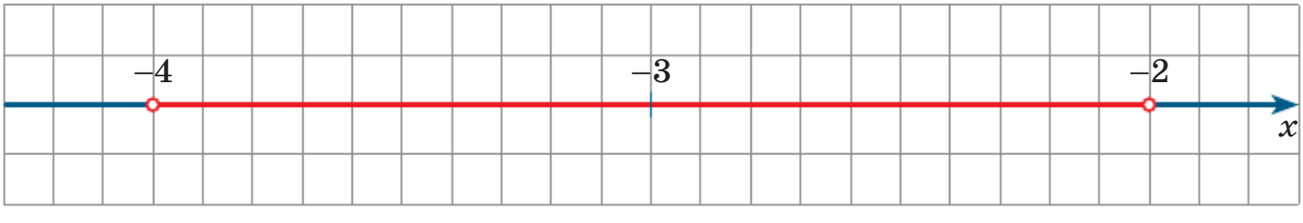
$$(x_n)\colon -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{n}, \ldots;$$

$$(y_n)\colon 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n, \ldots .$$

На рисунке 2 члены последовательности (x_n) изображены точками на числовой прямой. Обратите внимание: по мере увеличения номера члены последовательности всё ближе и ближе подходят к точке 0. Более точно: какую бы окрестность точки 0 ни выбрали, с некоторого номера все члены последовательности попадут в выбранную окрест-



а



б

Рис. 1

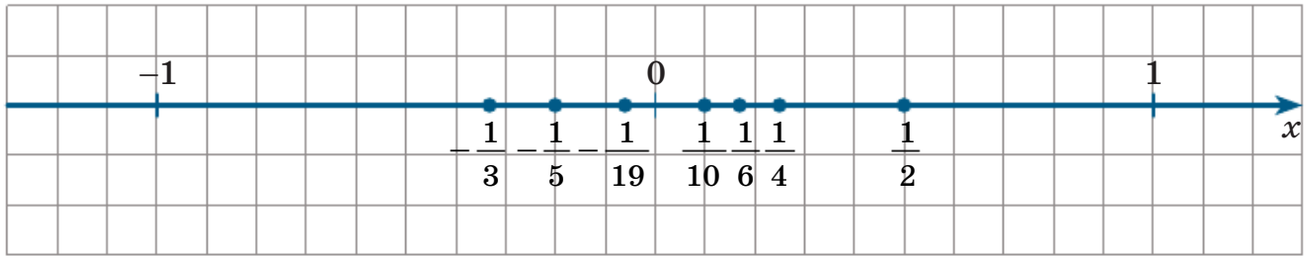


Рис. 2

ность. Пусть, например, радиус окрестности равен 0,1, т. е. речь идёт об интервале (–0,1; 0,1). Все члены последовательности, начиная с одиннадцатого, принадлежат выбранной окрестности:

$$-\frac{1}{11} \in (-0{,}1;\ 0{,}1), \quad \frac{1}{12} \in (-0{,}1;\ 0{,}1),$$

$$-\frac{1}{13} \in (-0{,}1;\ 0{,}1), \quad \frac{1}{14} \in (-0{,}1;\ 0{,}1), \ldots$$

Другой пример: радиус окрестности равен 0,03, т. е. речь идёт об интервале (–0,03; 0,03). Ясно, что $0{,}01 < 0{,}03$, т. е. $\frac{1}{100}$ принадлежит интервалу (–0,03; 0,03). Начиная с $\frac{1}{100}$, все члены последовательности $\left(\frac{1}{100}, -\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, -\frac{1}{103}, \ldots\right)$ попадают в окрестность точки 0 радиусом 0,03 (на самом деле, последовательность (x_n) попадает в эту окрестность даже с более раннего номера, с номера 34, поскольку $x_{34} = \frac{1}{34} < \frac{3}{100}$). Рассмотренную ситуацию обычно описывают словами так: последовательность (x_n) *сходится к числу* 0.

Теперь изобразим на числовой прямой последовательность (y_n) (рис. 3). Как видите, члены этой последовательности не концентрируются около какой-либо точки, про такую последовательность говорят, что она *расходится*.

Определение 3. Число b называют **пределом последовательности** (x_n), если в любой окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и говорят: *предел последовательности* (x_n) *равен* b. Правильнее было бы добавлять ещё и слова

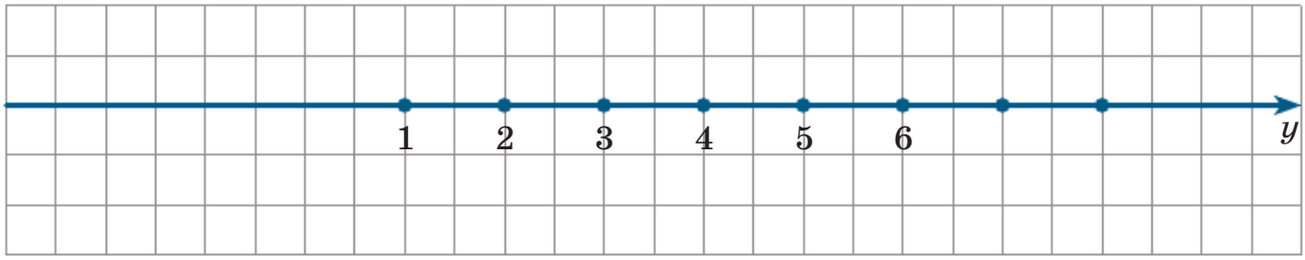


Рис. 3

«при стремлении n к бесконечности», но их, как правило, опускают, ведь уже записано, что $n \to \infty$. Используют и такую запись: $x_n \to b$ и говорят: *последовательность* (x_n) *сходится к* b.

Для рассмотренной выше последовательности (x_n) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = 0.$$

Определение 4. Если последовательность имеет предел, то её называют **сходящейся**; если последовательность не имеет предела, то говорят, что последовательность **расходится**.

Пример* Доказать, что сходится последовательность:

а) $c, c, c, \ldots, c, \ldots$;

б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

в) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$;

г) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$.

Решение. а) Ответ $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ интуитивно понятен. Проверим это равенство по определению предела. Смотрите: в любой окрестности $(c - r; c + r)$ числá c содержатся все члены последовательности, ведь все они равны c. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$. Последовательность $c, c, c, \ldots$ называют *стационарной*.

б) Если на рисунке 2 все отрицательные числа симметрично отразить относительно начала координат, то мы увидим, как располагаются члены последовательности $x_n = \frac{1}{n}$. Они неограниченно приближаются (стремятся) к нулю. Проверим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ по определению. В любой окрестности $(-r; r)$ числа 0 содержится число вида $\frac{1}{n_0}$, $n_0 \in \boldsymbol{N}$.

Имеем: $\frac{1}{n_0} \in (-r; r)$, $-r < \frac{1}{n_0} < r$, $0 < \frac{1}{n_0} < r$, $n_0 > \frac{1}{r}$.

Последнее неравенство имеет натуральные решения по принципу Архимеда. Так как последовательность является убывающей, $0 < \ldots < \frac{1}{n_0+3} < \frac{1}{n_0+2} < \frac{1}{n_0+1} < \frac{1}{n_0} < r$, то в окрестности $(-r; r)$ содержатся все члены последовательности, начиная с указанного выше номера n_0.

в) Действуя, как в пункте б), можно проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ по определению предела. Но обычно поступают проще: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$. Правда, для этого нужны факты об арифметических операциях над пределами (см. далее § 2).

г) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Действуем, как в пункте б). Сначала для фиксированного $r > 0$ найдём какое-нибудь натуральное решение неравенства $\frac{1}{2^{n_0}} < r$, $2^{n_0} > \frac{1}{r}$. Тут нам поможет частный случай бинома Ньютона:

$$2^{n_0} = (1+1)^{n_0} = 1^{n_0} + n_0 \cdot 1^{n_0-1} \cdot 1 + \frac{n_0(n_0-1)}{2} \cdot 1^{n_0-2} \cdot 1^2 + \ldots > 1 + n_0,$$

и нам достаточно взять любое натуральное решение неравенства $1 + n_0 > \frac{1}{r}$, $n_0 > \frac{1}{r} - 1$. Так как последовательность является убывающей, $0 < \ldots < \frac{1}{2^{n_0+2}} < \frac{1}{2^{n_0+1}} < \frac{1}{2^{n_0}} < r$, то в окрестности $(-r; r)$ содержатся все члены последовательности, начиная с указанного выше номера n_0.

Теорема 1. Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Доказательство*. Речь идёт о последовательности q, q^2, q^3, ... Если $q = 0$, то получаем стационарную последовательность 0, 0, 0, ...; предел этой последовательности равен нулю. При $q \neq 0$ для фиксированного $r > 0$ найдём натуральное решение n_0 неравенства

$$-r < q^{n_0} < r, \quad |q^{n_0}| < r, \quad |q|^{n_0} < r, \quad \left(\frac{1}{|q|}\right)^{n_0} > \frac{1}{r}.$$

Так как $0 < |q| < 1$, то $\frac{1}{|q|} > 1$, $\frac{1}{|q|} = 1 + x$ для какого-то $x > 0$. По формуле бинома Ньютона

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^{n_0} = (1+x)^{n_0} = 1^{n_0} + n_0 \cdot x \cdot 1^{n_0-1} + \frac{n_0(n_0-1)}{2} \cdot x^2 \cdot 1^{n_0-2} + \ldots > 1 + n_0 x$$

и нам достаточно взять любое натуральное n_0, такое, что $1 + n_0 x > \frac{1}{r}$, $n_0 > \frac{1}{x}\left(\frac{1}{r} - 1\right)$.

Начиная с такого номера n_0 имеем

$$0 \ldots < |q|^{n_0+3} < |q|^{n_0+2} < |q|^{n_0+1} < |q|^{n_0} < r,$$

т. е. все q^n содержатся в окрестности $(-r;\ r)$ числа 0. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

А что будет с последовательностью (q^n), если $|q| > 1$? Пусть, например, $q = 2$, т. е. речь идёт о последовательности 2, 4, 8, 16, ... Эта последовательность расходится.

Вообще справедливо утверждение:

если $|q| > 1$, то последовательность (q^n) не имеет предела (расходится).

Мы рассмотрели лишь простейшие случаи вычисления пределов, о более сложных случаях поговорим в следующем параграфе.

Отметим (без доказательства) два свойства сходящихся последовательностей.

1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Заметим, что обратное утверждение неверно; например, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ..., 1, 2, 3 — ограниченная последовательность, но она не имеет предела (расходится). А вот если последовательность не только ограниченна, но и монотонна, то она сходится.

Теорема 2 (теорема Вейерштрасса[1]). Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Доказательство*. Рассмотрим случай возрастающей последовательности $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ — множество её членов, а B — множество всех её верхних границ. Множество B непусто, так как A ограничено и A лежит левее B. По аксиоме непрерывности, о которой мы говорили в учебнике для 10-го класса (см. главу 4 «Числа»), существует число c, разделяющее множества A и B, т. е. такое число, что множество A располагается левее этого числа, а множество B — правее; это записывают так: $A \leqslant c \leqslant B$.

Рассмотрим любую окрестность $(c - r;\ c + r)$ числа c. Её левый конец $c - r$ не принадлежит B, ведь $c \leqslant B$. Значит, $c - r$ не верхняя граница множества A и какой-то член a_N последовательности лежит правее $c - r$, т. е. $c - r < a_N \leqslant c < c + r$. Тогда

$$c - r < a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \ldots \leqslant c < c + r,$$

т. е. все a_n содержатся в $(c - r;\ c + r)$, начиная с номера N. Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = c$.

Для убывающих последовательностей доказательство аналогично. Кроме того, теорема верна и в случаях, когда $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$ или $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$.

Приведём классические примеры из геометрии, в которых используется теорема Вейерштрасса.

1) Возьмём окружность и будем последовательно вписывать в неё правильные многоугольники: четырёхугольник, восьмиугольник, 16-угольник и т. д., каждый раз увеличивая число сторон вдвое. Последовательность площадей этих правильных многоугольников возрастает и ограничена: снизу числом 0, а сверху, например, числом, равным площади описанного около окружности квадрата. По теореме Вейерштрасса построенная последовательность сходится, её предел принимается за площадь S круга. Именно с помощью таких рассуждений и доказывают формулу площади круга $S = \pi r^2$ (установлено, что πr^2 — предел последовательности площадей вписанных в окружность радиусом r правильных многоугольников).

2) Снова возьмём окружность и будем последовательно вписывать в неё правильные многоугольники: четырёхугольник, восьмиуголь-

[1] Карл Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

ник, 16-угольник и т. д., каждый раз увеличивая число сторон вдвое. Последовательность периметров этих вписанных многоугольников возрастает и ограничена: снизу числом 0, а сверху, например, периметром описанного квадрата. По теореме Вейерштрасса построенная последовательность сходится, её предел принимается за длину L окружности. Именно с помощью таких рассуждений и доказывают формулу $L = 2\pi r$.

Приложение к § 1

Обсудим, какие есть связи между пределами и неравенствами. Сначала покажем, что из строгого неравенства между пределами последовательностей следует такое же строгое неравенство между их членами с достаточно большими номерами.

Теорема 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$ и если $b < c$, то $x_n < y_n$ для всех n, начиная с некоторого номера.

Доказательство. Отметим на координатной прямой числа $b < c$. Возьмём их непересекающиеся r-окрестности $(b - r;\ b + r)$ и $(c - r;\ c + r)$. В качестве радиуса r этих окрестностей можно взять, например, $r = 0{,}5(c - b) > 0$ (рис. 4).

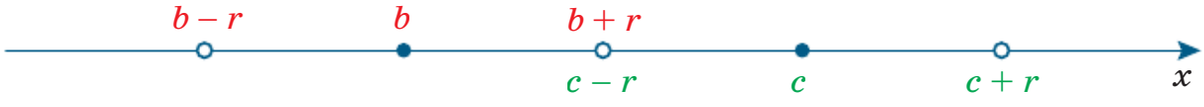


Рис. 4

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то, начиная с некоторого номера N_1, все x_n содержатся в $(b - r;\ b + r)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то, начиная с некоторого номера N_2, все y_n содержатся в $(c - r;\ c + r)$. Тогда, начиная с $N = \max\{N_1;\ N_2\}$, для всех номеров n верны неравенства

$b - r < x_n < b + r = c - r < y_n < c + r$, и в частности $x_n < y_n$. ■

А верно ли, что из неравенства между соответствующими членами двух сходящихся последовательностей вытекает такое же нера-

венство между пределами этих последовательностей? Ответ положителен, но только для *нестрогих* неравенств.

Следствие 1 (переход к пределу в неравенстве). Если $x_n \leqslant y_n$ для всех n, начиная с некоторого номера, и если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то $b \leqslant c$.

Доказательство от противного. Допустим, что $b > c$. Тогда по теореме 3 $x_n > y_n$ для всех n, начиная с некоторого номера, что противоречит условию.

Следствие 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < c$, то $x_n < c$ для всех n, начиная с некоторого номера.

Наконец, отметим, что если в формулировке теоремы 3 строгие неравенства заменить на нестрогие, то утверждение станет неверным. Например, если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots = 0$, а $y_n = -\frac{1}{n}$, то $b = 0 \leqslant 0 = c$, но неравенство $0 \leqslant -\frac{1}{n}$ неверно при всех $n \in \boldsymbol{N}$.

Упражнения

По заданной формуле n-го члена последовательности вычислите первые пять её членов.

1.1. а) $y_n = 5n - 3$; г) $y_n = 4 - 7n$;

б) $x_n = (-1)^n \cdot (n^2 - 2n)$; д) $x_n = (-1)^{n+1} \cdot (n^2 + 3n)$;

в) $a_n = \frac{3n-1}{n^2}$; е) $a_n = \frac{2n-1}{n}$.

1.2. а) $y_n = \sin\frac{\pi n}{2}$; г) $y_n = \cos\pi n$;

б) $x_n = \operatorname{tg}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi n}{4}\right)$; д) $x_n = \operatorname{ctg}\left((-1)^n\frac{\pi n}{4}\right)$;

в) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n!}$; е) $a_n = \frac{1}{n} + n(n+1)(n+2)$.

1.3. а) $\dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \ldots}$; б) $\dfrac{n!}{2n^2 - 1}$.

1.4. Запишите первые пять членов последовательности десятичных приближений:

а) числа $\sqrt{3}$ по недостатку;
б) числа π по избытку;
в) числа $\lg 3$ по недостатку;
г) числа $\sqrt{5}$ по избытку;
д) числа e по недостатку;
е) числа $\lg 3$ по избытку.

1.5. Запишите первые шесть членов последовательности (x_n), заданной рекуррентно:

а) $y_1 = 1$, $y_{n+1} = 2y_n + 3$;
б) $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}$ (последовательность Фибоначчи);
в) $y_1 = -2$, $y_{n+1} = ny_n$;
г) $y_1 = 2$, $y_2 = -8$, $y_{n+2} = \dfrac{y_n + y_{n+1}}{2}$.

1.6. Составьте одну из возможных формул n-го члена последовательности:

а) 4, 8, 12, 16, 20, ...;
б) 2, 5, 10, 17, 26, ...;
в) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$;
г) 6, 12, 18, 24, 30, ...;
д) 0, 3, 8, 15, 24, ...;
е) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots$.

1.7. Является ли последовательность возрастающей:

а) $y_n = 8 - 4(6 - n)$;
б) $y_n = -\dfrac{n}{n+3}$;
в) $a_n = 8 \cdot 0{,}8^{n+1}$;
г) $y_n = 4 - 3(n - 2)$;
д) $y_n = \dfrac{n-3}{n}$;
е) $x_n = \lg(n + 2)$?

1.8. Является ли последовательность убывающей:

а) $y_n = \sqrt{6 - n}$;
б) $y_n = \dfrac{n}{n+1}$;
в) $x_n = \log_{0,1}(n + 1)$;
г) $y_n = -\sqrt{n+2}$;
д) $y_n = \dfrac{n+1}{n}$;
е) $a_n = 0{,}2 \cdot 4^{n-1}$?

1.9. Является ли последовательность ограниченной сверху:

а) $y_n = 3 + 2(n + 2)$;
б) $x_n = 2 \cdot 0{,}4^{n+1}$;
в) $a_n = n(n - 7)$;
г) $y_n = 12(2 - n) + 11$;
д) $x_n = 5 \cdot 0{,}3^n$;
е) $a_n = n(10 - n)$?

1.10. Является ли последовательность ограниченной снизу:

а) $y_n = \frac{3}{n-1}$;

б) $x_n = \sqrt{n-2}$;

в) $a_n = 4 \cdot 2{,}2^n$;

г) $y_n = -\frac{4}{n+1}$;

д) $x_n = \log_2(n+1)$;

е) $a_n = n^2 + 4n - 5$?

1.11. Дана последовательность $y_n = \frac{2n+1}{n-1}$. Укажите верные утверждения и обоснуйте свой выбор:

1) последовательность ограничена сверху;
2) последовательность является убывающей;
3) последовательность ограничена снизу;
4) последовательность является возрастающей.

1.12. Дана последовательность $y_n = \frac{3n-2}{n+1}$. Укажите верные утверждения и обоснуйте свой выбор:

1) последовательность ограничена сверху;
2) последовательность является убывающей;
3) последовательность ограничена снизу;
4) последовательность является возрастающей.

1.13. Сколько членов последовательности (x_n) удовлетворяют неравенству $x_n < 1$, если:

а) $x_n = \frac{7n-6}{2n+11}$;

б) $x_n = n^2 - 17$;

в) $x_n = \frac{2n-1}{n+5}$;

г) $x_n = n^3 - 200$?

1.14. Найдите натуральные решения неравенства:

а) $\frac{1}{5^n} < c$, если $c = 0{,}01$;

б) $\frac{1}{2^n} < c$, если $c = 0{,}1$;

в) $\frac{1}{3^n} < c$, если $c = 0{,}001$;

г) $\frac{1}{3^n} < c$, если $c = 0{,}01$;

д) $\frac{1}{4^n} < c$, если $c = 0{,}1$;

е) $\frac{1}{5^n} < c$, если $c = 0{,}001$.

1.15. Дана последовательность $y_n = \frac{1}{n}$.

а) Постройте график последовательности.

б) Докажите, что последовательность убывает.

в) Докажите, что последовательность ограничена снизу.

г) Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

1.16. Дана последовательность $y_n = \frac{1}{3^n}$.

а) Постройте график последовательности.
б) Докажите, что последовательность убывает.
в) Докажите, что последовательность ограничена снизу.
г) Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

1.17. Для последовательности $y_n = -2n^2 + 19n - 42$ найдите все значения n, при которых:

а) $y_n = 0$;
б) $y_n > 0$;
в) $y_n < y_{n+1}$;
г) $y_n > y_{n+1}$;
д) $y_3 < y_n$;
е) y_n принимает наибольшее значение.

1.18. Укажите номера тех членов последовательности $a_n = -3 + 0{,}1n$, которые принадлежат окрестности точки a радиусом r:

а) $a = -3$, $r = 0{,}2$;
б) $a = -3$, $r = 0{,}1$;
в) $a = -3$, $r = 0{,}5$;
г) $a = -2$, $r = 0{,}2$;
д) $a = 4$, $r = \pi^{-2}$;
е) $a = \pi$, $r = 0{,}15$.

1.19. Найдите наибольшее значение r, при котором в окрестности точки a радиусом r нет ни одного члена последовательности $x_n = 1 + \frac{1}{n}$:

а) $a = 3$;
б) $a = 2{,}01$;
в) $a = 0$;
г) $a = 0{,}99$;
д) $a = 1{,}12$;
е) $a = 1$.

1.20. Найдите наименьшее значение n, начиная с которого все члены последовательности $x_n = \frac{10n + 21}{n + 1}$ принадлежат окрестности точки 10 радиусом r:

а) $r = 10$;
б) $r = 5$;
в) $r = 2$;
г) $r = 1$;
д) $r = 0{,}1$;
е) $r = 0{,}01$.

1.21. Найдите наименьшее натуральное значение n, начиная с которого все члены указанной последовательности лежат в указанной окрестности точки 0, и выскажите предположение о том, чему равен предел последовательности:

а) $y_n = \frac{2}{n}$, $(-0{,}2;\ 0{,}2)$;
б) $y_n = \frac{1}{n+2}$, $(-0{,}1;\ 0{,}1)$;
в) $y_n = \frac{2}{n^2+1}$, $(-0{,}5;\ 0{,}5)$;
г) $y_n = \frac{3}{n}$, $(-0{,}3;\ 0{,}3)$;

д) $y_n = \frac{2}{n+2}$, $(-0{,}5;\ 0{,}5)$; е) $y_n = \frac{1}{n^2-1}$, $(-0{,}1;\ 0{,}1)$.

Найдите наименьшее натуральное значение n, начиная с которого все члены указанной последовательности лежат в интервале $(-0{,}01;\ 0{,}01)$, и выскажите предположение о том, чему равен предел последовательности.

1.22. а) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2+2}$; г) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{(n+2)^2+2}$;

б) $a_n = \frac{5}{2^{n+1}}$; д) $a_n = \frac{2}{5^n}$;

в) $a_n = (-1)^n \frac{4}{3^n}$; е) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{6}{10^n}$.

1.23. а) $b_n = \frac{2}{\sqrt{n}+2}$; в) $b_n = \frac{3}{\sqrt{n}+3}$;

б) $b_n = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n}}$; г) $b_n = (-1)^{n+1} \frac{3}{\sqrt{n}}$.

Упражнения для повторения

1.24. Постройте график функции:

а) $y = \cos 1{,}5x$; г) $y = 0{,}5\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $y = -\sin 2x$; д) $y = 1 - \operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y = 3\sin\frac{x}{2}$; е) $y = 2\operatorname{ctg}\frac{2}{3}x - 1$.

1.25. Решите уравнение:

а) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin 2{,}5x = -1$;

б) $2\cos x = \sqrt{2}$; д) $3\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$;

в) $\cos 4x = 1$; е) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

1.26. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а) $\sin 2x - \sqrt{2}\cos(\pi - x) = 0$, $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\cos 2x + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0$, $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

1.27. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sin 76^\circ}{5\sin 38^\circ \cos 52^\circ}$;

б) $\frac{3\sin 82^\circ}{4\sin 49^\circ \cos 41^\circ}$;

в) $\frac{12\cos 142^\circ}{5(\cos^2 19^\circ - \sin^2 19^\circ)}$;

г) $\frac{15(\cos^2 23^\circ - \sin^2 23^\circ)}{\cos 134^\circ}$;

д) $\frac{\operatorname{tg} 153^\circ}{6\operatorname{ctg} 63^\circ}$;

е) $\frac{\operatorname{ctg} 108^\circ}{8\operatorname{tg} 18^\circ}$.

1.28. Теннисный мяч бросили под острым углом β к горизонтальной поверхности поля с начальной скоростью $v_0 = 14$ (м/с). Расстояние, которое пролетит мяч, вычисляется по формуле $l = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\beta$ (м), где $g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Найдите наименьшее значение угла, при котором мяч пролетит 20 м.

§ 2. Арифметические операции над пределами числовых последовательностей

В предыдущем параграфе мы отметили следующие соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} c = c; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ если } |q| < 1.$$

Для вычисления пределов последовательностей в более сложных случаях используются указанные соотношения и следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc;$$

3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}\ (c \neq 0);$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(kx_n) = kb.$$

Пример Вычислить:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^4}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n} - \frac{2}{n^7} + 3\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 5}$.

Решение. а) Имеем: $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$. Применив правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\cdot 0\cdot 0 = 0.$$

б)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{n^4}\right) = 3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} =$$
$$= 3\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0 = 0.$$

Вообще для любого натурального показателя степени m и любого коэффициента k справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^m} = 0.$$

в) Применив правило «предел суммы», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n} - \frac{2}{n^7} + 3\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^7} + \lim_{n\to\infty}3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

г) Разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{2n^2+3n-1}{n^2+5}$ почленно на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}.$$

А теперь смотрите: предел числителя равен 2, предел знаменателя 1, значит, предел дроби равен $\frac{2}{1}$, т. е. равен 2.

Ответ: а) 0; б) 0; в) 3; г) 2.

Теорема 2. Если знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) удовлетворяет неравенству $|q|<1$, то сумма S прогрессии вычисляется по формуле $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Этой формулой мы уже пользовались в курсе алгебры 9-го класса. Но тогда она была получена на основе правдоподобных рассуждений, а теперь мы можем эту формулу доказать.

Доказательство. Под суммой S геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, ... понимается $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, где $S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$. Напомним формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Пользуясь теоремой 1, вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{q-1}\cdot(q^n-1)=$$
$$=\frac{b_1}{q-1}\cdot\lim_{n\to\infty}(q^n-1)=\frac{b_1}{q-1}(0-1)=\frac{b_1}{1-q}.$$

Итак, $S=\frac{b_1}{1-q}$, что и требовалось доказать.

Приложение 1* к § 2

Продолжим разговор, который мы начали в Приложении к § 1, добавив к нему полученные в § 2 сведения об арифметических операциях над пределами последовательностей. Рассмотрим пример.

Пример Что больше при всех достаточно больших n:

а) $(2n - 17)(5n^2 - 71)$ или $(3n^2 + 70)(3n + 700)$;

б) 100^n или $n!$?

Решение. а) Составим дробь $\dfrac{(3n^2 + 70)(3n + 700)}{(2n - 17)(5n^2 - 71)}$ и вычислим её предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2 + 70)(3n + 700)}{(2n - 17)(5n^2 - 71)} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0}{10n^3 + b_2n^2 + b_1n + b_0} = \frac{9}{10} < 1.$$

Значит, $(3n^2 + 70)(3n + 700) < (2n - 17)(5n^2 - 71)$, начиная с некоторого номера n. Грубо говоря, скорость роста многочлена определяет его старший коэффициент.

б) Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{100^n}{n!}$ и найдём отношение её последующего члена к предыдущему:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100^n} = \frac{100}{n+1}.$$

Значит, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ для всех $n \geqslant 100$. Поэтому $x_{101} = \dfrac{x_{101}}{x_{100}} \cdot x_{100} < x_{100}$, $x_{102} = \dfrac{x_{102}}{x_{101}} \cdot x_{101} < x_{101} < x_{100}$, т. е. последовательность x_{100}, x_{101}, x_{102}, x_{103}, ... монотонно убывает. Она ограничена снизу, ведь все её члены больше нуля. По теореме Вейерштрасса она сходится, т. е. у неё существует предел, скажем, b. К тому же пределу стремится и последовательность x_{101}, x_{102}, x_{103}, ... По теореме о пределе произведения получаем:

$$b = \lim_{n\to\infty,\, n\geqslant 100} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty,\, n\geqslant 100} \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot x_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty,\, n\geqslant 100} \frac{100}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty,\, n\geqslant 100} x_n = 0 \cdot b = 0; \quad b = 0.$$

Применяем следствие 2: так как $\lim\limits_{n\to\infty,\, n\geqslant 100} x_n = 0 < 1$, то $x_n < 1$, $100^n < n!$ при всех достаточно больших n.

Отметим, что при сравнительно небольших n верно неравенство $100^n > n!$. Например, число 100^{10} состоит из 21 цифры, а число 10! всего лишь семизначно. В целом, конечная последовательность $x_n = \dfrac{100^n}{n!}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, 100)$ возрастает, а бесконечная последовательность $x_n = \dfrac{100^n}{n!}$ $(n = 101, 102, 103, \ldots)$ убывает.

Приложение 2* к § 2
Задача о непрерывных процентах

В 10 классе, используя наглядные представления о проведении касательной к графику функции, мы познакомились с числом e и с экспоненциальной функцией $y = e^x$, которые играют важную роль в математике. Познакомим вас с задачей о так называемых *непрерывных процентах*.

Допустим, что банк даёт $p\,\%$ годовых, например, в рублях. Это означает, что, положив в банк S р., через год вы получите сумму $\left(S + \dfrac{p}{100}S\right)$ р. Обозначим $x = \dfrac{p}{100}$. Итак, было S р., через год стало $(1 + x)S$ р.

Допустим, что по договору проценты можно получать каждые полгода и переоформлять вклад на тех же условиях. Тогда через первые полгода получится сумма $\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)S$ р. Если всю сумму перевложить ещё на полгода, то в итоге через год на счёте будет

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(\left(1 + \frac{x}{2}\right)S\right) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 S \text{ р.}$$

Это больше, чем просто за год, так как

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4} > 1 + x.$$

Если проценты можно получать каждые четыре месяца, т. е. три раза за год, то в итоге получится

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)S=\left(1+\frac{x}{3}\right)^3 S \text{ р.}$$

Это больше, чем при выплатах каждые полгода:

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^3=1+3\cdot\frac{x}{3}+3\cdot\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{27}>1+x+\frac{x^2}{4}.$$

При получении процентов каждый квартал, т. е. 4 раза в год, итоговая сумма снова увеличится. Она станет равной $\left(1+\frac{x}{4}\right)^4 S$ р., и можно проверить, что $\left(1+\frac{x}{4}\right)^4>\left(1+\frac{x}{3}\right)^3$. А если представить, что проценты можно получать ежедневно, то за год наберётся сумма $\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365} S$ р. При этом

$$1+x<\left(1+\frac{x}{2}\right)^2<\left(1+\frac{x}{3}\right)^3<\left(1+\frac{x}{4}\right)^4<\ldots<\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365}<\ldots.$$

Казалось бы, увеличивая частоту получения процентов, т. е. получая их или каждый час, или каждую минуту и т. п., можно неограниченно увеличивать общий годовой итог $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n S$. Оказывается, эта неограниченность — иллюзия. На самом деле возрастающая последовательность $y_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, где $x>0$, *ограничена сверху* и, как всякая монотонная ограниченная последовательность, имеет предел (см. теорему 2 в § 1). Интересно, что предел этой последовательности равен как раз значению экспоненциальной функции в точке x. И это верно для любых, не только положительных значений x.

Теорема 3 (второй замечательный предел). Для любого $x\in\boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$

В частности, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828182845\ldots$.

Почему предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ назван *вторым* замечательным пределом? Потому что существует и *первый замечательный предел*, с которым вы познакомитесь в § 4.

Упражнения

Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.1. а) $x_n = \frac{2}{3^n}$; г) $x_n = \frac{5}{4^n}$;

б) $x_n = \frac{11}{2^n - 1}$; д) $x_n = \frac{9}{5^n + 1}$;

в) $x_n = 3 \cdot 4^{1-n}$; е) $x_n = 6 \cdot 3^{-n-1}$.

2.2. а) $x_n = \frac{5n+2}{n+1}$; г) $x_n = \frac{2n+1}{n+3}$;

б) $x_n = \frac{8n+5}{n-3}$; д) $x_n = \frac{7n+4}{n-2}$;

в) $x_n = \frac{3n+1}{2n+3}$; е) $x_n = \frac{4n-3}{3n+1}$.

2.3. а) $x_n = \frac{n^2+2}{n^2}$; г) $x_n = \frac{n^2-11}{n^2}$;

б) $x_n = \frac{4-4n+n^2}{n^2}$; д) $x_n = \frac{5n-4-2n^2}{n^2}$;

в) $x_n = \frac{2n^3+n^2+1}{n^3}$; е) $x_n = \frac{4n^3-3n^2+n}{n^3}$.

2.4. а) $x_n = \frac{(3n+1)(2n-3)}{n^2}$; г) $x_n = \frac{(2n-5)(4n+3)}{n^2}$;

б) $x_n = \frac{4n+3}{(n+1)^2}$; д) $x_n = \frac{(5n-4)(2n-3)}{(n-3)^5}$;

в) $x_n = \frac{(2n+3)(4-n^3)}{(n-1)^4}$; е) $x_n = \frac{(4n^2-1)(2-3n^2)}{(n-2)^4}$.

2.5. а) $x_n = \dfrac{(4n-1)(2n+5)-8n^2-10n}{n-3}$;

б) $x_n = \dfrac{n^2(2n+5)-n(2n^2+5n)-13}{n(n+1)(n-7)-(n-1)}$;

в) $x_n = \dfrac{n^3-(n-1)(n^2+1)}{n^2+2n}$;

г) $x_n = \dfrac{(3n-2)(2n-3)-6n^2+20n}{n+2}$;

д) $x_n = \dfrac{n(n^2-3)-n(n^2-7)-1}{(n+1)(n+2)+(2n^2+1)}$;

е) $x_n = \dfrac{(2n-1)(n^2+1)-2n^3}{n^2-3n}$.

2.6. Докажите справедливость равенства:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = -1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} = 1$.

2.7. Имеет ли последовательность, заданная формулой n-го члена, предел:

а) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$;

б) $a_n = \dfrac{5+(-1)^n}{n^4}$;

в) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{(-1)^n-3}{12}$?

2.8. а) Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 2, а сумма первых трёх членов этой прогрессии 1,75. Чему равен первый член этой прогрессии?

б) Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 0,8, а сумма квадратов первых двух членов этой прогрессии равна $\dfrac{5}{16}$. Чему равен знаменатель этой прогрессии?

2.9. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

а) $25+5+1+\dfrac{1}{5}+\ldots$;

б) $-18+6-2+\dfrac{2}{3}-\ldots$;

в) $\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin^2\dfrac{\pi}{6}+\sin^3\dfrac{\pi}{6}+\ldots+\sin^n\dfrac{\pi}{6}+\ldots$;

г) $2+\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots$;

д) $36-18+9-4{,}5+\ldots$;

е) $\cos\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^3\frac{\pi}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cos^n\frac{\pi}{3}+\ldots$.

2.10. Решите неравенство:

а) $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x+\ldots<1;\ x\neq\frac{\pi n}{2}, n\in\boldsymbol{Z}$;

б) $\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x+\ldots\leqslant\frac{1}{3};\ x\neq\pi n, n\in\boldsymbol{Z}$.

2.11. Для бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой по модулю меньше единицы, по известным двум из трёх значений S, b_1, q вычислите третье:

а) $b_1=4$, $q=0{,}5$;
б) $b_1=-6$, $q=-0{,}2$;
в) $S=2$, $q=0{,}3$;
г) $S=-3$, $q=-0{,}3$;
д) $S=\sqrt{2}+1$, $b_1=1$;
е) $S=1\,000\,000$, $b_1=1000$.

2.12. В бесконечной геометрической прогрессии первый член наудачу выбирают из чисел 1, 2, 3, 4, 5, а знаменатель — из чисел 0,5 и 0,9. Найдите вероятность события:

а) второй член прогрессии меньше 5;
б) второй член прогрессии меньше 0,5;
в) третий член прогрессии равен 1;
г) третий член прогрессии меньше 3;
д) сумма прогрессии равна 10;
е) сумма прогрессии больше 20.

2.13. В последовательности $z_n=\frac{an+3}{(2+a)n-3}$, $n\in\boldsymbol{N}$, значение коэффициента a наудачу выбирают из чисел 1, 2, …, 10. Найдите вероятность того, что $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$:

а) положителен;
б) больше 1;
в) равен 0,5;
г) больше 0,5;
д) больше 0,7;
е) меньше 0,8.

Упражнения для повторения

2.14. а) Автомобиль выезжает на прямолинейный участок автострады с разрешённой скоростью 110 км/ч и начинает разгон с ускорением a км/ч^2. Скорость автомобиля вычисляется по формуле

$v = \sqrt{2al}$, где l — длина пройденного отрезка пути в километрах. С каким наименьшим ускорением должен двигаться автомобиль, чтобы, преодолев 0,55 км, развить скорость 110 км/ч?

б) Автомобиль выезжает на прямолинейный участок автострады с разрешённой скоростью 130 км/ч и начинает разгон с ускорением a км/ч^2. Скорость автомобиля вычисляется по формуле $v = \sqrt{2al}$, где l — длина пройденного отрезка пути в километрах. Какое расстояние преодолеет автомобиль, пока разгонится до 120 км/ч, если его ускорение равно 10 000 км/ч^2?

2.15. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\left(\sqrt{17}-\sqrt{3}\right)^2}{10-\sqrt{51}}$;

б) $\dfrac{10+\sqrt{143}}{\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}\right)^2}$;

в) $\dfrac{\left(\sqrt{19}+\sqrt{5}\right)^2}{-12-\sqrt{95}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{161}-15}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{13}\right)^2}$;

д) $\dfrac{\left(\sqrt{15}-2\sqrt{3}\right)^2}{8\sqrt{5}-18}$;

е) $\dfrac{21-12\sqrt{3}}{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2}$.

2.16. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{\dfrac{2x^2-3x+1}{x-3}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{x-3}{2x^2-3x+1}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{\sqrt{x-3}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{\sqrt{3-x}}$;

д) $\dfrac{\sqrt{3-x}}{2x^2-3x+1}$;

е) $\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{x-3}$.

2.17. Решите уравнение:

а) $x-4\sqrt{x-1}+2=0$;

б) $\sqrt{x^3-2x^2-5x+7}=2-x$;

в) $\sqrt{x^2-5x+20}+x^2=5x$;

г) $x-5\sqrt{x+1}+5=0$;

д) $\sqrt{x^3-4x^2-17x+61}=4-x$;

е) $\sqrt{x^2-6x+30}+x^2=6x$.

2.18. При каких значениях параметра p уравнение

$$\left|x^2+\sqrt{x-4p}\right|=\left|\sqrt{x-4p}-4x+4\right|$$

имеет на отрезке $[-2;\ 2]$ единственный корень?

§ 3. Предел функции на бесконечности

На рисунке 5 изображён график функции $y=f(x)$, прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x\to+\infty$. В подобных случаях используют короткую запись: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (читают: *предел функции $y=f(x)$ при стремлении x к плюс бесконечности равен b*).

На рисунке 6 изображён график показательной функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, у него есть горизонтальная асимптота $y=0$ (при $x\to+\infty$). Это значит, что справедливо соотношение $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$.

На рисунке 7 изображён график функции $y=f(x)$, прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x\to-\infty$.

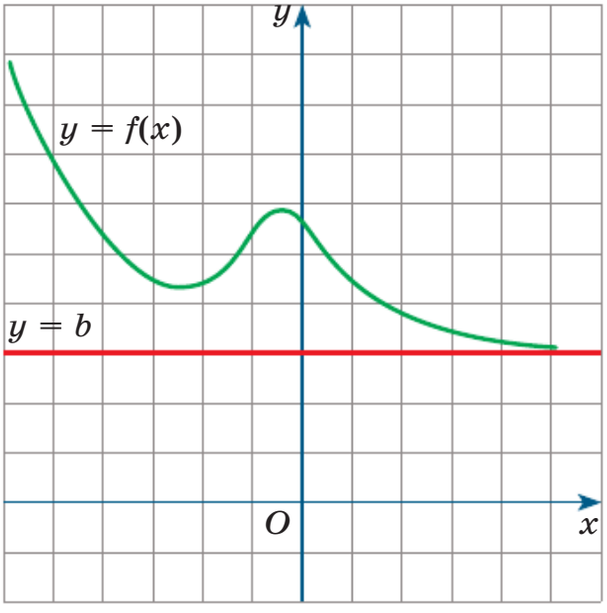


Рис. 5

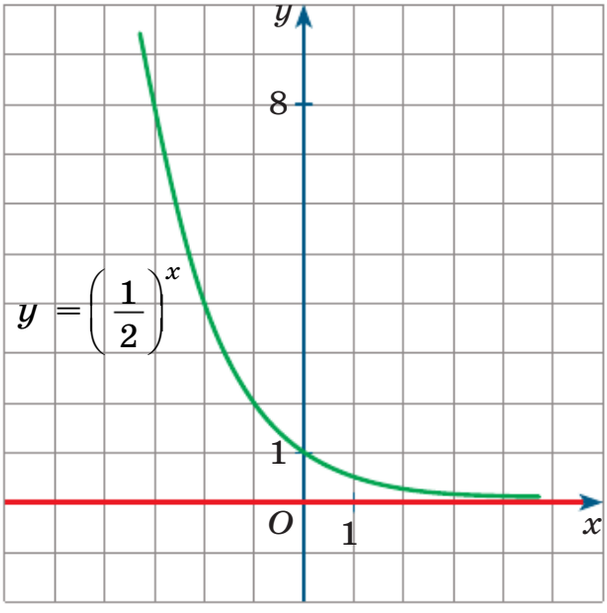


Рис. 6

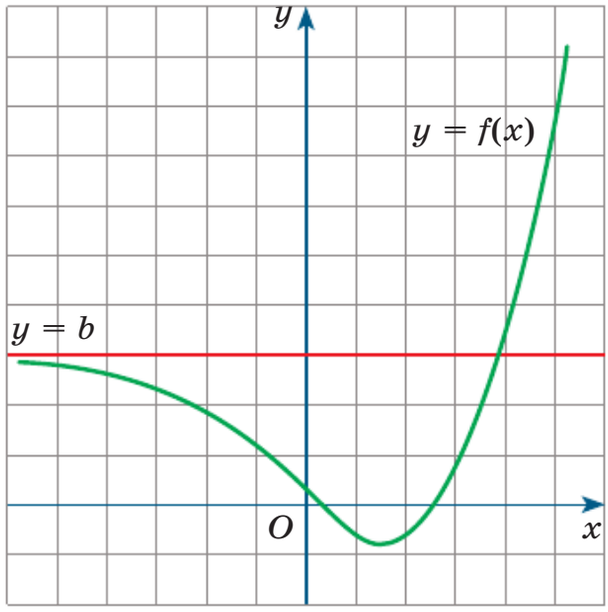


Рис. 7

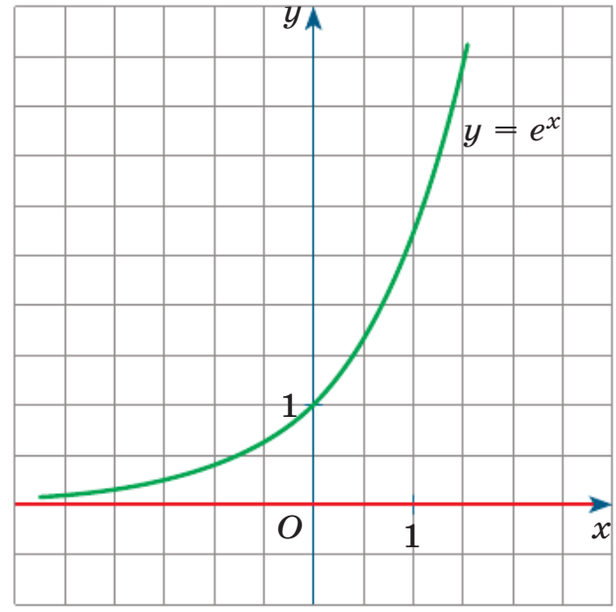


Рис. 8

В подобных случаях используют короткую запись: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ (читают: *предел функции* $y = f(x)$ *при стремлении* x *к минус бесконечности равен* b).

На рисунке 8 изображён график показательной функции $y = e^x$ (экспонента). У него есть горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to -\infty$. Это значит, что справедливо соотношение $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Если для функции $y = f(x)$ одновременно выполняются соотношения $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то их можно объединить одной записью: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ (читают: *предел функции* $y = f(x)$ *при стремлении* x *к бесконечности равен* b). В этом случае у графика функции $y = f(x)$ имеется горизонтальная асимптота $y = b$ и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$ (рис. 9).

На рисунке 10 изображён график степенной функции $y = x^{-4}$, у него есть горизонтальная асимптота $y = 0$ (и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$). Это значит, что справедливо соотношение $\lim\limits_{x \to \infty} x^{-4} = 0$, т. е. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^4} = 0$.

Вообще для любого натурального числа n справедливо соотношение

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

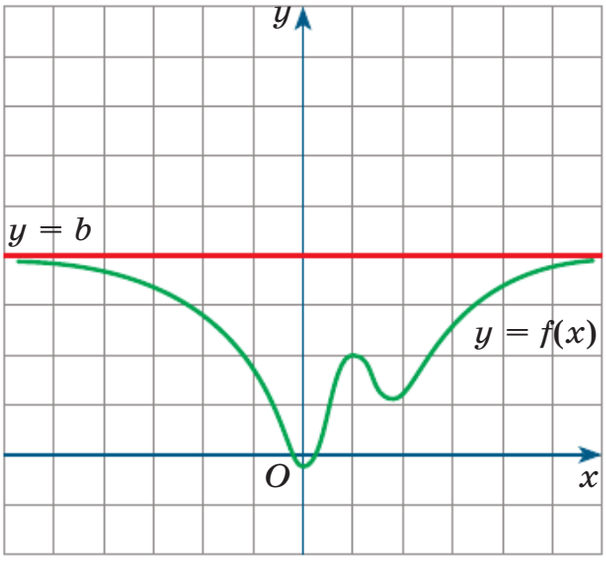


Рис. 9

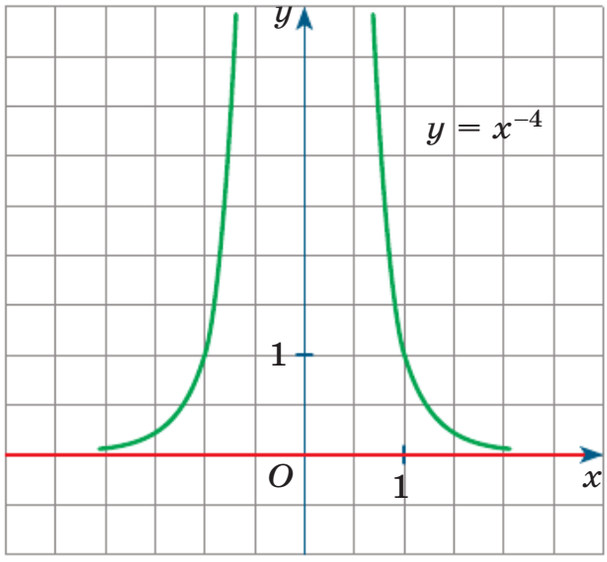


Рис. 10

Отметим ещё несколько полезных соотношений.

1. Если $r > 0$ — рациональное число, то график степенной функции $y = x^{-r}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$ (он похож на правую ветвь графика на рисунке 10). Значит, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-r} = 0$.

2. Если $a > 1$, то график показательной функции $y = a^x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$ (рис. 11). Значит, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

3. Если $0 < a < 1$, то график показательной функции $y = a^x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$ (рис. 12). Значит, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

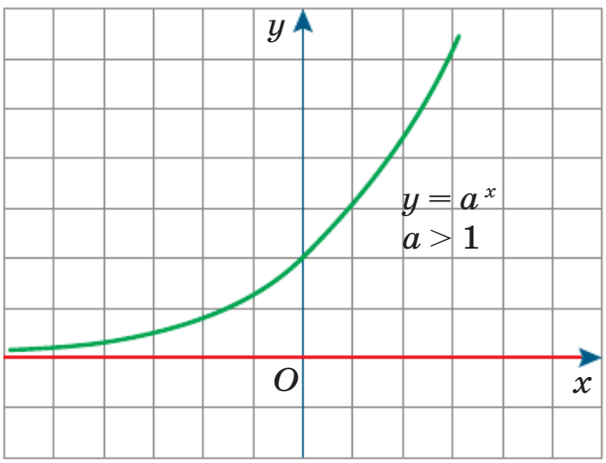


Рис. 11

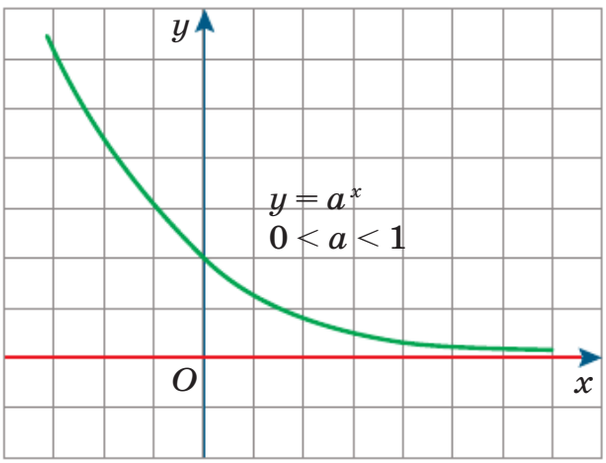


Рис. 12

Пример 1 Построить график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) $y = f(x)$ — непрерывная функция;
3) $f(0) = 5$;
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$;
5) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$.

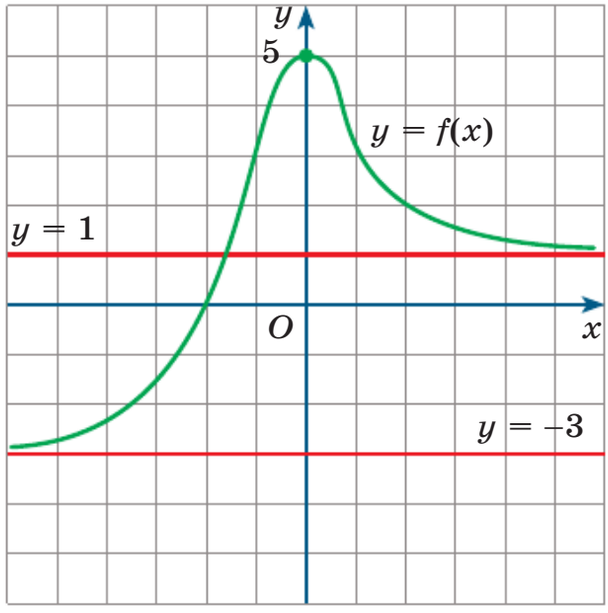


Рис. 13

Решение. Нам нужно построить график непрерывной функции, определённой на $(-\infty; +\infty)$, у которой есть две горизонтальные асимптоты: $y = 1$ при $x \to +\infty$, $y = -3$ при $x \to -\infty$. Кроме того, график функции должен проходить через точку $(0; 5)$. Один из возможных вариантов такого графика представлен на рисунке 13.

Для вычисления предела функции на бесконечности используют следующую теорему об арифметических операциях над пределами (приводим её без доказательства).

Теорема 1. Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = c$, то:

а) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = b + c;$$

б) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c;$$

в) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0);$$

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \to \infty} kf(x) = kb.$$

Пример 2 Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-7}{5x^2-3x+2}$.

Решение. Выполним некоторые преобразования алгебраической дроби $\dfrac{2x^2+x-7}{5x^2-3x+2}$. Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на x^2:

$$\frac{2x^2+x-7}{5x^2-3x+2}=\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{5x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}}=\frac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{x^2}}{5-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}.$$

Вычислим предел числителя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}=2+0-0=2.$$

Вычислим предел знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}5-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=5-0+0=5.$$

Поскольку предел частного равен частному пределов, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-7}{5x^2-3x+2}=\frac{2}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{5}$.

Пример 3 Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-3\cdot2^x+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}+5\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3^x+5^x}{5^x}$.

Решение. а) Воспользуемся теоремой об арифметических операциях над пределами:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2e^x-3\cdot2^x+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+5\right)=2\lim_{x\to-\infty}e^x-3\lim_{x\to-\infty}2^x+4\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{x\to-\infty}5.$$

Далее, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}5=5$, а потому

$$2\lim_{x\to-\infty}e^x-3\lim_{x\to-\infty}2^x+4\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{x\to-\infty}5=2\cdot0-3\cdot0+4\cdot0+5=5.$$

б) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x+5^x}{5^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x+\lim_{x\to+\infty}1=0+0+1=1.$$

Ответ: а) 5; б) 1.

Приложение* к § 3

Как и для последовательностей, для функций верны теоремы о пределах и неравенствах.

Теорема 2. а) Если $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=c$ и если $b<c$, то $f(x)<g(x)$ для всех достаточно больших по модулю значений x.

б) (Переход к пределу в неравенстве.) Если $f(x)\leqslant g(x)$ для всех значений x, которые по модулю больше некоторой константы M, и если $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=c$, то $b\leqslant c$.

в) Если $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)<c$, то $f(x)<c$ для всех достаточно больших по модулю значений x.

г) Если $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=b$ и если $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ для всех значений x, которые по модулю больше некоторой константы M, то $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=b$.

Подчеркнём, что при переходе к пределу сохраняется *только нестрогое неравенство*. Например, $\frac{1}{x^2}<\frac{2}{x^2}$, но неверно, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}<\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}$: оба предела равны нулю (рис. 14).

Упражнения

3.1. Имеет ли функция $y=f(x)$ предел при $x\to+\infty$, при $x\to-\infty$ или при $x\to\infty$ и чему он равен, если:
а) прямая $y=-5$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[-8;+\infty)$;
б) прямая $y=4$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $(-\infty;-2]$;

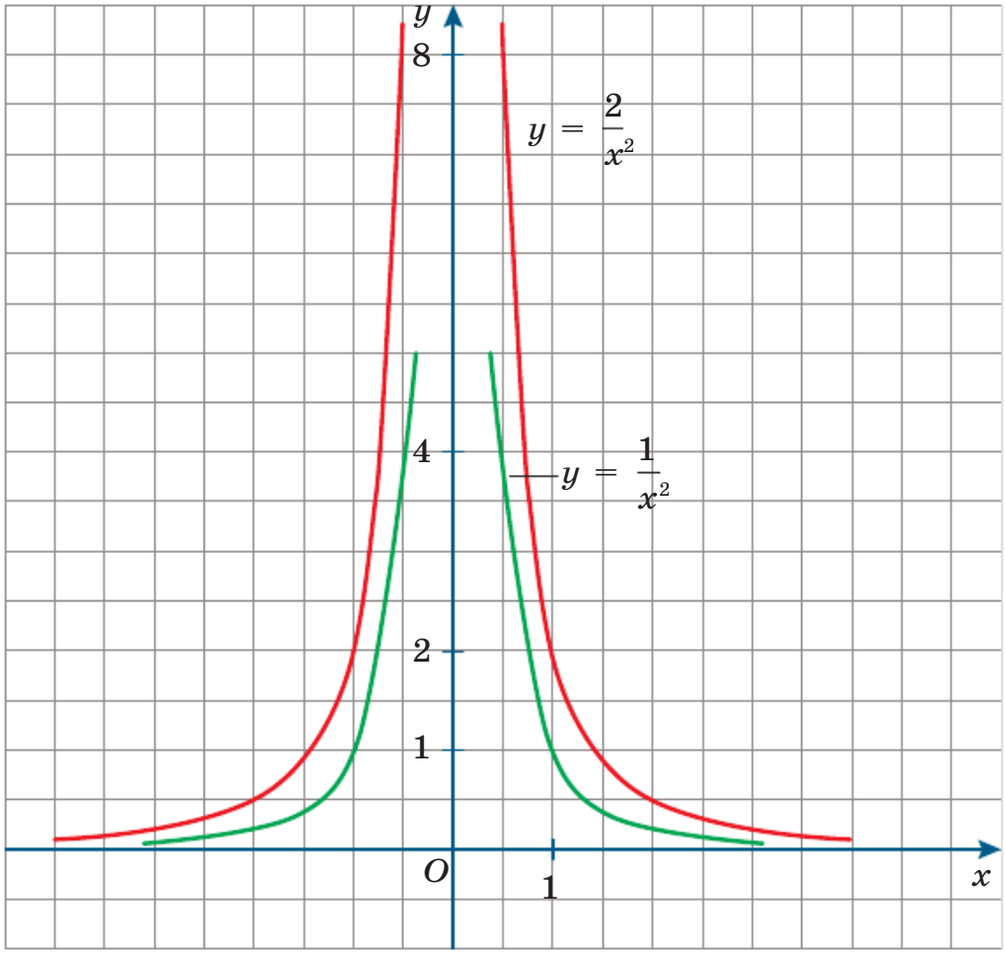


Рис. 14

в) прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции, а прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[3; +\infty)$;

г) прямая $y = 5$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $(-\infty; 4]$;

д) прямая $y = -4$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[6; +\infty)$;

е) прямая $x = -3$ является вертикальной асимптотой графика функции?

3.2. Распределите функции, графики которых изображены на рисунке 15, *а*—*з*, на четыре группы:

1) не имеют предела ни при $x \to +\infty$, ни при $x \to -\infty$;

2) имеют предел при $x \to +\infty$;

3) имеют предел при $x \to -\infty$;

4) имеют предел при $x \to \infty$.

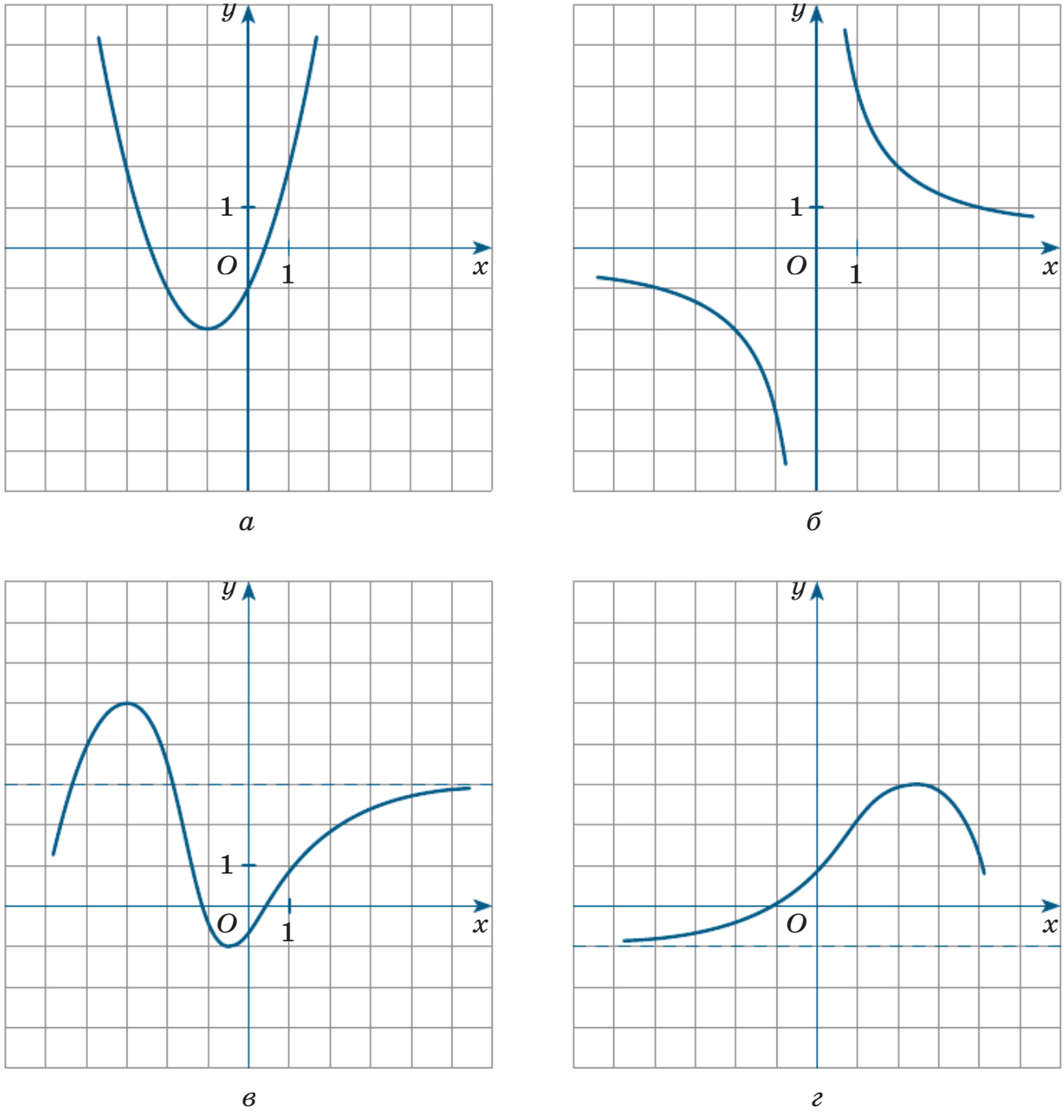
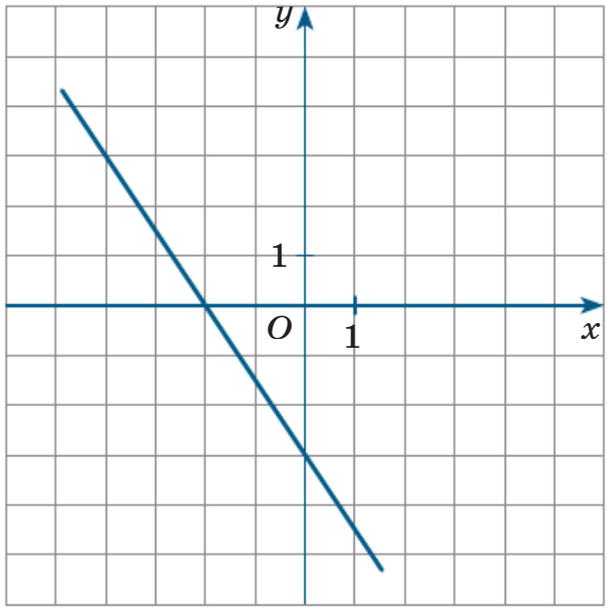


Рис. 15 (начало)

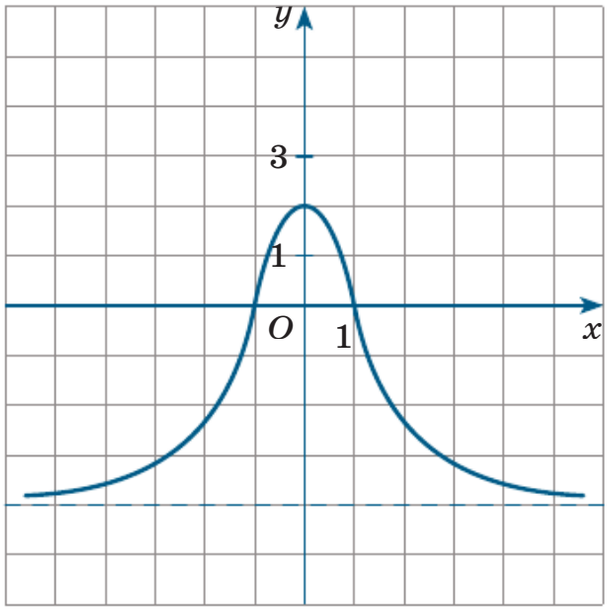
3.3. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ и $f(x) \geqslant 0$ на $(-\infty; +\infty)$;

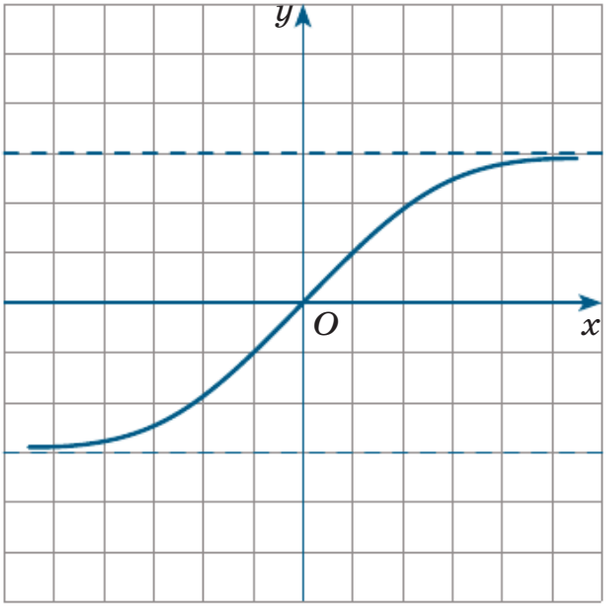
б) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ и $f(x) < 0$ на $(-\infty; +\infty)$.



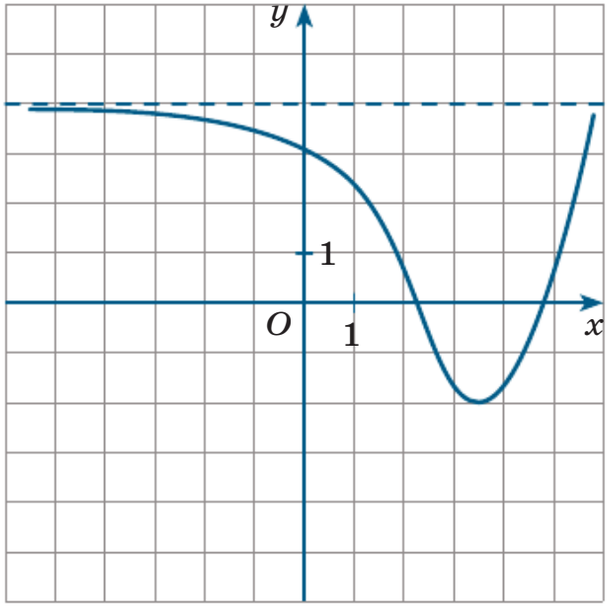
д



е



ж



з

Рис. 15 (окончание)

3.4. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) функция убывает и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 6$;

б) функция возрастает и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 6$.

3.5. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) функция ограничена сверху и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$;

б) функция ограничена снизу и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$.

3.6. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) функция возрастает и ограничена, и $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$;

б) функция убывает и ограничена, и $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

3.7. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $y = f(x)$ — непрерывная функция, $f(0) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$;

б) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $y = f(x)$ — непрерывная функция, $f(0) = -4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -6$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

3.8. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, функция непрерывна на промежутках $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$;

б) $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$, $f(0) = -3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

3.9. Известно, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 2$ и $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 6$. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + g(x))$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) \cdot g(x))$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2f(x) + g(x)}{h(x)}$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} (g(x) - h(x))$;

д) $\lim\limits_{x \to \infty} (3g(x) - f(x))$;

е) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4f(x)}{h(x) + g(x)}$.

3.10. Постройте график данной функции и установите, имеет ли она предел при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$:

а) $y = 2^x$;

б) $y = 2^{1-2x}$;

в) $y = 2^{2-\frac{1}{2}x}$;

г) $y = 2^{-x}$;

д) $y = 2^{2x-1}$;

е) $y = 2^{\frac{1}{2}x-2}$.

Вычислите.

3.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^2}+3\right)\cdot\left(\frac{2}{x^3}-3\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{x^4}+2\right)\cdot\left(\frac{6}{x^3}-4\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-5\right)\cdot\left(\frac{7}{x^4}+1\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-5\right)\cdot\left(-3-\frac{4}{x^2}\right)$.

3.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+4}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x-3}{2x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+4}{(x+1)(3x^2-1)}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x^2-11}{7x^3+3}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^2-7}{3x^2-2}$.

3.13. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+2}{3^x}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5\cdot 3^x+2}{3^{x+1}+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6\cdot 3^x-1}{3^{x+2}}+\frac{x+4}{x-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x}{3^x+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4\cdot 3^x+3}{3^{x+1}}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3^{x+2}+2}{3^{x-1}}+\frac{x-2}{x+1}\right)$.

3.14. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4^x+8}{6^x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}(7+4\cdot 9^x+2\cdot 3^x)$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^x-3}{2^x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7^x+9}{8^x-3}$;

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}(10+6^{2x+1}+5\cdot 6^x)$.

3.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+\cos x}{x^2+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos^3 x}{4^x+3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-3\sin 2x}{4x-3}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin^2 x}{2^x+x}$.

3.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\sqrt[3]{x}+\sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{8x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+5^x+10^{x+1}}{10^x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3\sqrt[5]{x}+4x^3}{6x^3+x^2-2x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{x+3}+3^{x+1}-4^{x-2}}{2^x}$.

Упражнения для повторения

3.17. На своём дачном участке хозяин решил выкопать колодец и заключил договор с бригадой рабочих по следующему прейскуранту цен: установка первого железобетонного кольца стоит 1500 р., каждого следующего — на 500 р. дороже предыдущего. В результате вся работа обошлась хозяину в 21 000 р. Какой глубины был вырыт колодец, если высота каждого кольца 1 м?

3.18. Три различных натуральных числа, произведение которых равно 792, образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

3.19. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\left(3^{0,6}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{15^9}$;

б) $\left(\dfrac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{2}}\right)^{-3}$;

в) $\dfrac{0{,}2^{\sqrt{2}-1}}{5^{-\sqrt{2}}}$;

г) $\dfrac{\left(7^{1,5}\cdot 5^{\frac{4}{3}}\right)^{12}}{35^{16}}$;

д) $\left(\dfrac{3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{0,25}}{\sqrt[12]{3}}\right)^{4}$;

е) $\dfrac{2^{\sqrt{3}-2}}{0{,}5^{-\sqrt{3}}}$.

3.20. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(3x-5)^2}{x-2}\geqslant\dfrac{25-30x+9x^2}{12-8x+x^2}$;

б) $\dfrac{(2x-7)^2}{x-3}\leqslant\dfrac{49-28x+4x^2}{15-8x+x^2}$.

3.21. При каких значениях параметра p уравнение $\left|\dfrac{4}{x}-3\right|+1=px$ имеет ровно три различных корня на промежутке $(0;+\infty)$?

§ 4. Предел функции в точке

На рисунке 16 изображён график непрерывной функции $y=f(x)$. На графике специально отмечена точка $(a;b)$, это значит, что $f(a)=b$.

Теперь сделаем следующее: воспользуемся тем же графиком, но точку $(a; b)$ исключим из рассмотрения (рис. 17). Это графическое задание другой функции, она отличается от функции $y = f(x)$ своей областью определения: первая функция определена в точке a, а вторая — нет. Поэтому функцию, график которой изображён на рисунке 17, мы обозначили по другому: $y = g(x)$.

Воспользуемся графиком функции $y = g(x)$ и сделаем следующее: «выколотую» точку $(a; b)$ расположим вне построенной кривой (рис. 18). Это уже третья функция, обозначим её $y = h(x)$: от функции $y = f(x)$ она отличается значением в точке a ($f(a) = b$, $h(a) \neq b$), а от функции $y = g(x)$ она отличается тем, что функция $y = h(x)$ определена в точке a (хотя и «неудачно»), а функция $y = g(x)$ не определена в точке a.

Итак, с помощью незначительных манипуляций с одной и той же кривой мы получили три различные функции. Они отличаются друг от друга только своим поведением в точке $x = a$. Если же точку $x = a$ исключить из рассмотрения, то все три функции будут служить геометрической моделью одного и того же процесса. Учитывая это обстоятельство, математики решили во всех трёх случаях использовать родственные соотношения:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = b, \quad \lim_{x \to a} h(x) = b$$

(читают: *предел функции* $y = f(x)$ ($y = g(x)$, $y = h(x)$ соответственно) *при стремлении* x *к* a *равен* b).

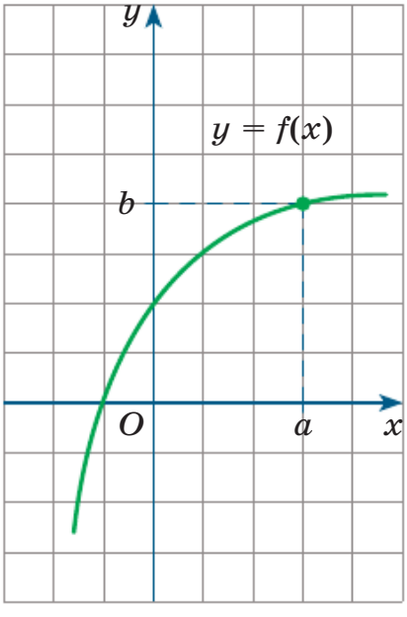


Рис. 16

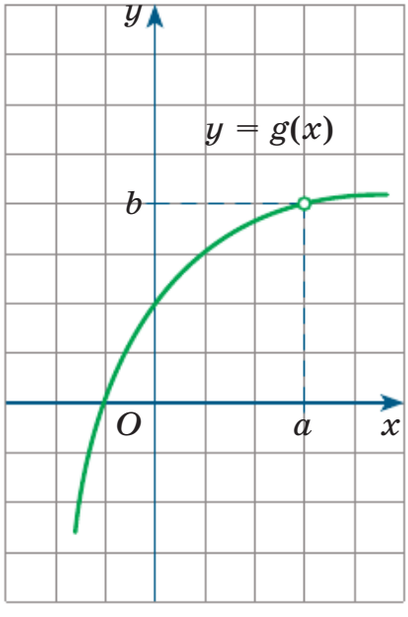


Рис. 17

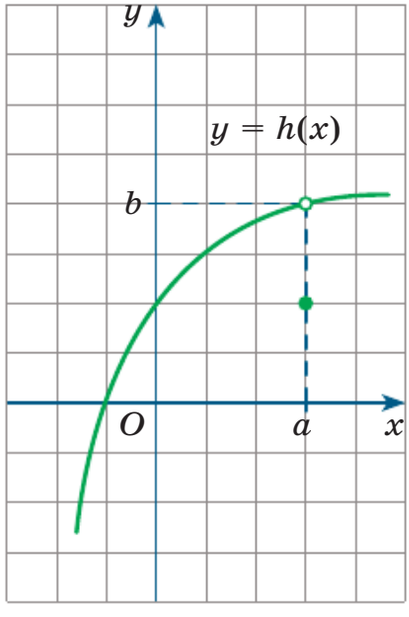


Рис. 18

Равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ означает следующее: если значения аргумента x приближаются к значению $x = a$, то соответствующие значения функции приближаются к предельному значению b. При этом подчеркнём ещё раз, сама точка $x = a$ *исключается* из рассмотрения.

Вернёмся снова к рисункам 16—18, на которых изображены графики трёх функций, обладающих одним и тем же свойством: предел функции при $x \to a$ равен b. Какую из рассмотренных трёх функций естественно считать непрерывной в точке $x = a$? Ответ очевиден: непрерывной является первая функция $y = f(x)$ (рис. 16), которая удовлетворяет условию $f(a) = b$.

Понятие непрерывности функции мы использовали, начиная с 7-го класса. Мы говорили, что функция непрерывна, если, опираясь на интуицию, считали, что её график представляет собой сплошную линию. Теперь же мы можем сформулировать строгое определение.

Определение. Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной в точке $x = a$**, если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке a, т. е. если выполняется соотношение

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Пример 1 Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;

2) $f(0) = 5$;

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$;

4) $f(2) = 0$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Решение. Расшифруем указанные условия. Функция определена на луче $[0; +\infty)$ и $f(0) = 5$. Значит, график представляет собой линию, начинающуюся в точке $(0; 5)$. Далее, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$, но $f(2) = 0$, т. е. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$. Это значит, что в точке $x = 2$ функция не является не-

прерывной, (2; 0) — изолированная точка графика (как точка (a, b) на рисунке 18).

И наконец, соотношение $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ означает, что у графика функции имеется горизонтальная асимптота $y = 0$ (ось Ox). Учитывая всё вышесказанное, строим возможный график, он представлен на рисунке 19.

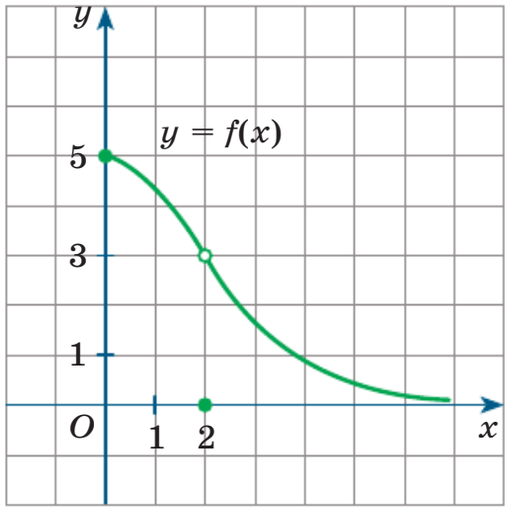


Рис. 19

Справедлива следующая теорема об арифметических операциях над пределами.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$;

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ $(c \neq 0)$;

4) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = kb$.

В курсе высшей математики доказано следующее утверждение:

если выражение f(x) составлено с помощью алгебраических операций из рациональных, иррациональных, тригонометрических, обратных тригонометрических, показательных, логарифмических выражений, то функция y = f(x) непрерывна в любой точке, в которой определено выражение f(x).

Покажем, как это утверждение используется для вычисления пределов функций.

Пример 2 Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + x + 6}{x^3 + 3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos \pi x + \lg x}{2^x + 1}$.

Решение. а) Выражение $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 6}{x^3 + 3}$ определено в точке $x = 0$, значит, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, а потому $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x + 6}{x^3 + 3} = \frac{0^2 + 0 + 6}{0^3 + 3} = 2.$$

б) Выражение $f(x) = \dfrac{\cos \pi x + \lg x}{2^x + 1}$ определено в точке $x = 1$, значит, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$, а потому $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Таким образом,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos \pi x + \lg x}{2^x + 1} = \frac{\cos \pi + \lg 1}{2^1 + 1} = \frac{-1 + 0}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: а) 2; б) $-\dfrac{1}{3}$.

В примерах 2а и 2б вычисление пределов было весьма простым: достаточно было найти значение функции, предел которой вычисляется, в точке, к которой стремится аргумент x. К сожалению, этот приём срабатывает не всегда.

Пример 3 Вычислить:

а) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$;

б*) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{5x - 15}$;

в*) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 4x}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

Решение. а) Если подставить значение $x = -2$ в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0 (в таких случаях в математике принято говорить «имеется неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$ (ноль на ноль)»). Про значение функции в точке -2 ничего сказать нельзя (его просто нет). Что делать? Находящуюся под знаком предела алгебраическую дробь можно сократить:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x - 2}{x - 1}.$$

Значит, функции $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$ и $y = \dfrac{x - 2}{x - 1}$ совпадают при условии $x \neq -2$. Но напомним ещё раз: при вычислении предела функции при $x \to -2$ саму точку $x = -2$ исключают из рассмотрения. Значит,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to -2} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{-2 - 2}{-2 - 1} = \frac{4}{3}.$$

б) Если подставить значение $x = 3$ в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0; как видите, опять имеется неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы избавиться от неопределённости, поступим так: домножим и числитель, и знаменатель дроби $\dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{5x - 15}$ на выражение, сопряжённое числителю, т. е. на $\sqrt{x+1} + 2$. Что это даст? Смотрите:

$$\frac{\sqrt{x+1} - 2}{5x - 15} = \frac{\left(\sqrt{x+1} - 2\right)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{(5x - 15)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2^2}{5(x-3)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} = \frac{x + 1 - 4}{5(x-3)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} =$$

$$= \frac{x - 3}{5(x-3)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} = \frac{1}{5\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}.$$

Значит,

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{5x - 15} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{5\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}.$$

Выражение $f(x) = \dfrac{1}{5\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}$ определено в точке $x = 3$, а значит, функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$:

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{5\left(\sqrt{x+1} + 2\right)} = \frac{1}{5\left(\sqrt{3+1} + 2\right)} = \frac{1}{20}.$$

в) Здесь, как и в пунктах «а» и «б», мы имеем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы избавиться от неё, домножим и числитель, и знаме-

натель дроби на неполный квадрат суммы выражений $\sqrt[3]{x}$ и 1 (тогда в знаменателе получим разность кубов); кроме того, разложим на множители числитель. Приступим:

$$\frac{x^3-5x^2+4x}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{x(x^2-5x+4)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=$$

$$=\frac{x(x-1)(x-4)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3}=x(x-4)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right).$$

Вот теперь перейдём к вычислению предела:

$$\lim_{x\to 1}x(x-4)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)=1\cdot(1-4)\cdot(1+1+1)=-9.$$

Ответ: а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{1}{20}$; в) -9.

Наше знакомство с понятием предела, как вы, наверное, заметили, зачастую опирается на интуицию и наглядные представления. Тем не менее и на этом уровне можно получать важные результаты, полезные в приложениях. Рассмотрим один из таких результатов.

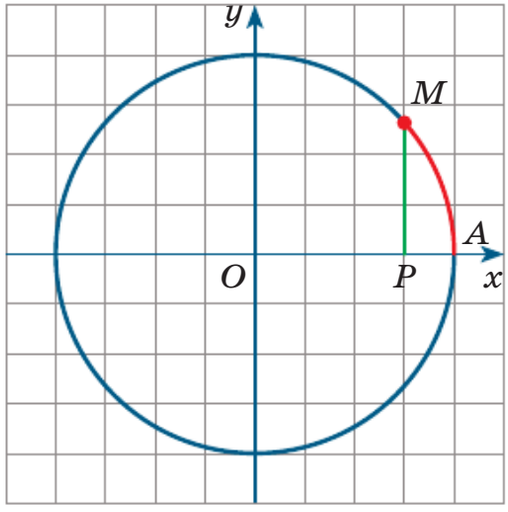


Рис. 20

Возьмём числовую окружность, выберем достаточно малое положительное значение t, отметим на окружности точку $M(t)$ и её ординату, т. е. $\sin t$; значит, t — это длина дуги AM, $\sin t$ — это длина перпендикуляра MP (рис. 20).

Для достаточно малых значений t длина дуги AM примерно равна длине отрезка MP, т. е. выполняется приближённое равенство $\sin t \approx t$, и, следовательно, $\frac{\sin t}{t}\approx 1$. Чем меньше t, тем точнее это приближённое равенство. Если t — достаточно малое по модулю отрицательное число, то также $\frac{\sin t}{t}\approx 1$. Естественно предположить, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

В курсе высшей математики доказано, что это предположение верно. Равенство $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ называют в математике так: *первый замечательный предел* (а о втором замечательном пределе $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ мы говорили в приложении 2 к § 2).

Пример 4 Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$.

Решение. а) Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}.$$

Положим $t=2x$ и заметим, что если $x\to 0$, то и $t\to 0$. Значит,

$$\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{5}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{2}{5}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\frac{2}{5}$.

б)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(6\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=$$
$$=6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=6\cdot 1\cdot 1=6.$$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$; б) 6.

Приложение* к § 4

Теорема 2. а) Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$ и если $b<c$, то $f(x)<g(x)$ для всех $x\neq a$ из некоторой окрестности точки a.

б) (Переход к пределу в неравенстве.) Если $f(x)\leqslant g(x)$ для всех $x\neq a$ из некоторой окрестности точки a и если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$, то $b\leqslant c$.

в) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) < c$, то $f(x) < c$ для всех $x \neq a$ из некоторой окрестности точки a.

г) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ и если $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \neq a$ из некоторой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

Пример Доказать непрерывность функций $y = \sin t$ и $y = \cos t$ в любой точке $a \in \boldsymbol{R}$.

Решение. На числовой окружности рассмотрим две разные точки $A(\cos a;\ \sin a)$ и $B(\cos t;\ \sin t)$. Длина меньшей дуги между ними равна $|t - a|$. Эта длина больше расстояния AB между точками, а

$$AB = \sqrt{\left(\cos t - \cos a\right)^2 + \left(\sin t - \sin a\right)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \max\left\{\left|\cos t - \cos a\right|,\ \left|\sin t - \sin a\right|\right\}.$$

Значит, $|\cos t - \cos a| < |t - a|$, $|\sin t - \sin a| < |t - a|$. Если учесть и случай $t = a$, то

$$|\cos t - \cos a| \leqslant |t - a|,$$

$$|\sin t - \sin a| \leqslant |t - a|.$$

Запишем двойные неравенства

$$-|t - a| \leqslant \cos t - \cos a \leqslant |t - a|,$$

$$-|t - a| \leqslant \sin t - \sin a \leqslant |t - a|.$$

При $t \to a$ пределы их левых и правых частей равны 0. По пункту «г» теоремы 2 получаем

$$\lim_{t\to a}\left(\cos t - \cos a\right) = 0,$$

$$\lim_{t\to a}\left(\sin t - \sin a\right) = 0$$

и, значит,

$$\lim_{t\to a}\cos t = \cos a,\ \lim_{t\to a}\sin t = \sin a.$$

Упражнения

4.1. Распределите функции, графики которых изображены на рисунке 21, *а*—*е*, на две группы: те, которые имеют предел при $x \to -2$, и те, которые не имеют предела при $x \to -2$. Укажите, чему равен предел функции при $x \to -2$, в тех случаях, когда этот предел существует.

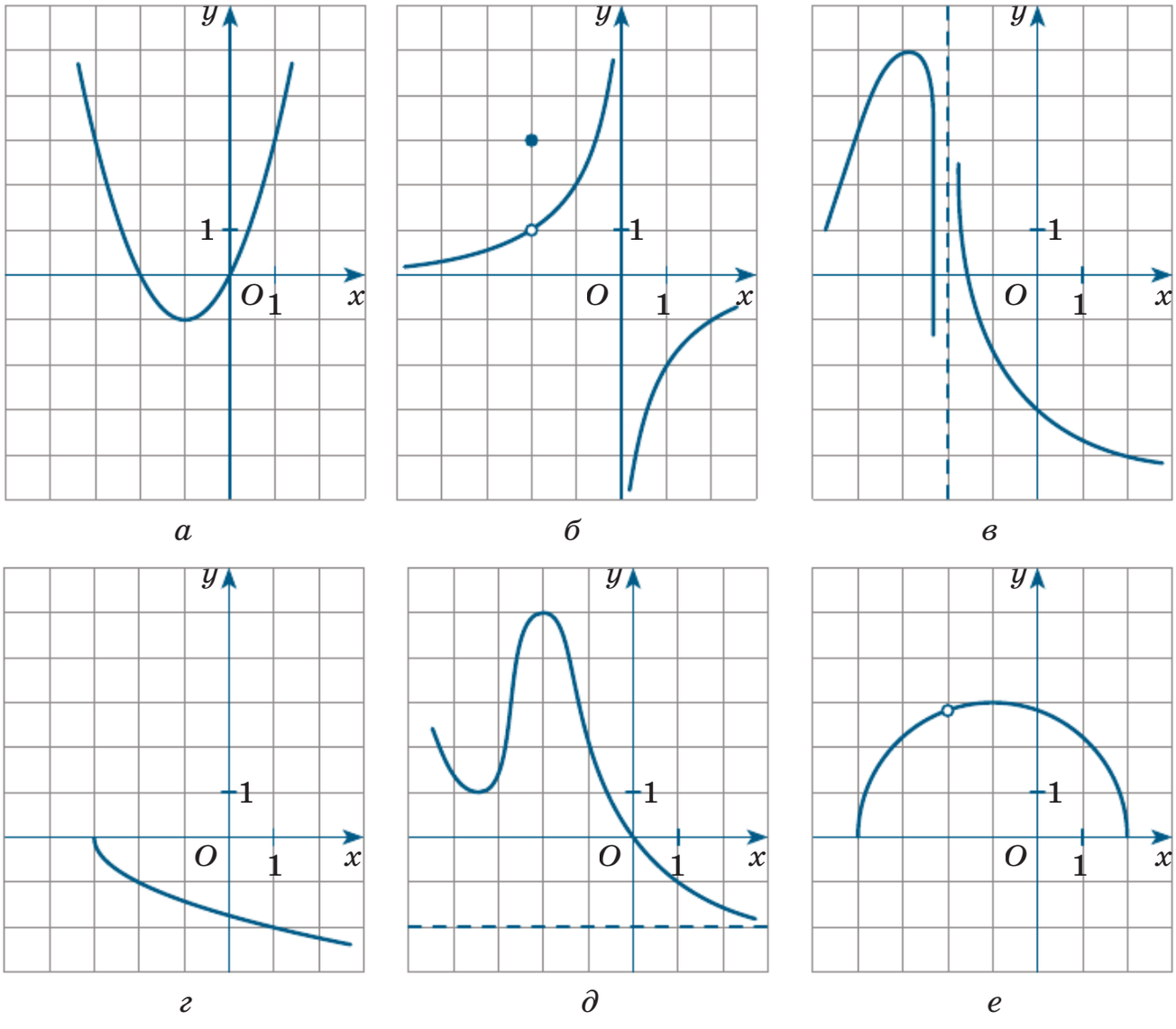


Рис. 21

Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей указанными свойствами.

4.2. а) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 1$;
б) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -4$;
в) $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = -4{,}5$;
г) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -7$;
д) $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 2$;
е) $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = 2{,}5$.

4.3. а) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ и $f(1) = 2$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ и $f(1)$ не существует.

4.4. а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$ и $f(x) > 0$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3$ и $f(x) < 0$ на $(-\infty; +\infty)$.

4.5. а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$ и $f(0) > -2$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$ и $f(0) < 0$.

4.6. а) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 5$ и $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$;

б) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 5$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

4.7. а) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 5$ и $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -2$;

б) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 5$ и $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -3$.

4.8. а) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $y = f(x)$ — непрерывная функция, $f(0) = -1$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$;

б) $D(f) = [0; +\infty)$, $y = f(x)$ — непрерывная функция, $f(0) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

4.9. а) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, функция непрерывна на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$, $f(0) = 2$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 6$.

б) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, функция непрерывна на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$, $f(0) = 2$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$, $f(-1) = -2$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

4.10. На рисунке 22 изображён график функции $y = f(x)$. Найдите:

а) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$;

в) $f(-2)$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$;

д) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;

е) $f(2)$.

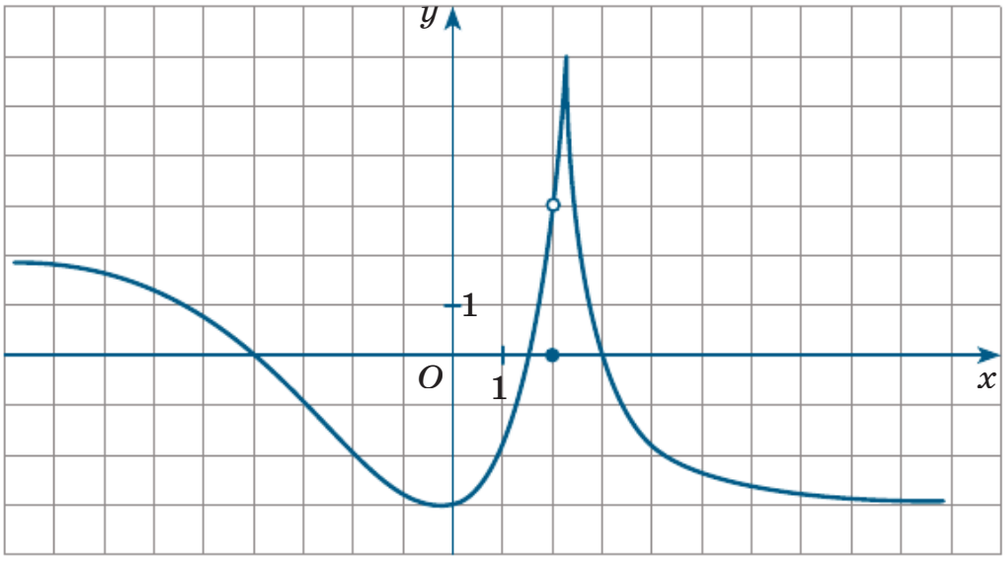


Рис. 22

Вычислите.

4.11. а) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x-4)$;

б) $\lim\limits_{x\to -1} x(x^2+x-6)$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-7)$;

д) $\lim\limits_{x\to -2} x(x^2-x+9)$;

е) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x+5}$.

4.12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+7}{3-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{4x+3}{x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-1}{x-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{9x+1}{3x-5}$;

е) $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}}\dfrac{3x^2+1}{x^2-1}$.

4.13. а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3^x-2\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\log_3(5x+7)$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\lg(4-3x)+\ln(2x+9)}{2^x-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2^x+5\sin\dfrac{\pi x}{18}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\log_4 2x}{x-\log_{\sqrt{3}}(x-5)}$;

е) $\lim\limits_{x\to -3}(\lg(6x+118)+\ln(2x+7))$.

4.14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x-x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4x}{x^2-8x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$;

е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^3+1}$.

4.15. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{2x^2+3x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+5x-2}{3x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-4x-12}{x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x-1}{2x^2-7x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{x-3}$;

е) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x+5}{x^2+3x-10}$.

4.16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-3x)^3-1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8-(2-x)^3}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^4-1}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)^5-1}{10x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+4x)^5-(1+5x)^4}{x^2-x^3}$.

4.17. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x-8}$;

б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{x^2-64}$;

в) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-5}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{\sqrt[3]{x-5}+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$.

4.18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\sin 4x}$.

4.19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg}\, x}$.

4.20. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{2x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(3x-\pi)}{6\pi-18x}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$; г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{4x-\pi}$.

4.21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\sin 2x\cdot\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\sin 5x}{6x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\sin 5x\cdot\sin 6x}{2x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2\cdot\cos 2x}{\sin 3x\cdot\sin 4x}$.

4.22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{\sin 10x-\sin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\operatorname{tg}7x-\operatorname{tg}5x)}{\cos x-\cos 3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{1-\cos 4x}$.

4.23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 4x+\sin x}{\sin 2x+\cos x-\cos 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\cos x+\cos 11x}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}$.

Упражнения для повторения

4.24. Решите уравнение:

а) $32^{x-7}=0{,}25$; г) $0{,}4^{20+x}=2{,}5^{-x^2}$;

б) $125^{x+3}=0{,}04$; д) $5^{x+4}=6{,}25\cdot 2^{x+4}$;

в) $8^{12-x}=0{,}125^{-x^2}$; е) $4^{x-5}=0{,}064\cdot 10^{x-5}$.

4.25. Период полураспада изотопа полония составляет 3,05 мин. В начальный момент времени масса изотопа была 80 мг. В процессе радиоактивного распада масса изотопа уменьшается по закону $m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. Через сколько минут масса изотопа полония будет составлять 10 мг?

4.26. а) Решите уравнение $5^{x^2+2x+1}+5^{x^2+2x}=30$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;\,1]$.

б) Решите уравнение $3^{x^2+4x+1}+3^{x^2+4x}=36$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-4;\,1]$.

4.27. Решите неравенство:

а) $2^{2x}+9\cdot 2^x\leqslant 22$;

б) $5^{2x+1}-126\cdot 5^x+25\geqslant 0$;

в) $7^{x+2}+7^{-x}<50$;

г) $3^{2x}-5\cdot 3^x>36$;

д) $4^{2x+1}-257\cdot 5^x+64\leqslant 0$;

е) $11^{x+1}+7^{-x}\geqslant 12$.

4.28. Клиент взял в банке кредит в размере 300 000 р. сроком на 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма долга увеличивается на $r\,\%$, после чего клиент выплачивает некоторую сумму так, чтобы его основной долг уменьшался на одну и ту же величину (равномерные выплаты). Найдите месячную процентную ставку по кредиту, если общая сумма выплат с процентами составила 321 000 р.

§ 5. Приращение аргумента. Приращение функции

В название нашего учебного предмета входит словосочетание «начала математического анализа». Что же анализируют? Анализируют, в частности, поведение функции $y=f(x)$ около конкретной точки x_0, анализируют, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Определение 1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность x_1-x_0 называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к точке x_1), а разность $f(x_1)-f(x_0)$ — **приращением функции**.

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: *дельта икс*, Δ — прописная буква греческого алфавита «дельта»), приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$.
$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$ (или Δf), значит,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Термин «приращение» не следует истолковывать буквально, как «прирост»: и Δx, и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Пример 1 Найти приращение аргумента и приращение функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$, при переходе от точки $x_0 = 2$ к точке:
а) $x_1 = 2{,}2$; б) $x_2 = 1{,}99$.
Решение. а)

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 2{,}2 - 2 = 0{,}2;$$
$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = 2{,}2^2 - 2^2 = 4{,}84 - 4 = 0{,}84.$$

б)

$$\Delta x = x_2 - x_0 = 1{,}99 - 2 = -0{,}01;$$
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_0) = 1{,}99^2 - 2^2 = 3{,}9601 - 4 = -0{,}0399.$$

Ответ: а) $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}84$; б) $\Delta x = -0{,}01$, $\Delta y = -0{,}0399$.

Используя понятия приращений аргумента и функции, можно дать другой вариант определения непрерывности функции в точке, который оказывается полезным для многих приложений. Смотрите: функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; другими словами, $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$, т. е. $f(x) - f(a) \to 0$ при $x - a \to 0$. Но $x - a = \Delta x$ и $f(x) - f(a) = \Delta y$. Значит, *функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ в том, и только в том случае, когда в этой точке $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.*

Как видите, теперь у нас есть два варианта определения непрерывности в точке.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если

1) предел функции в точке равен значению функции в этой точке:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

2) при стремлении приращения аргумента функции к нулю приращение функции также стремится к нулю: $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Первый вариант чаще используют в теории, второй — в приложениях.

Определение 2. Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной на промежутке X**, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

Уточним, что означает непрерывность функции в концевой точке промежутка. Например, как понимать непрерывность функции в точках a и b отрезка $[a; b]$? Для точки a определение непрерывности будет выглядеть так:

$$\text{если } \Delta x > 0,\ \Delta x \to 0, \text{ то } \Delta y \to 0.$$

Для точки b определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так:

$$\text{если } \Delta x < 0,\ \Delta x \to 0, \text{ то } \Delta y \to 0.$$

Например, справедливы следующие утверждения: функция $y = x^3$ непрерывна на всей числовой прямой; функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0; +\infty)$; функция $y = \log_a x$ непрерывна на открытом луче $(0; +\infty)$.

Используя понятия приращений аргумента и функции, можно дать другой способ определения монотонности функции на промежутке.

Теорема 1*. Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X тогда и только тогда, когда в каждой точке промежутка приращение аргумента Δx и соответствующее ему приращение функции Δf имеют одинаковый (разный) знак.

Доказательство. Рассмотрим случай функции, убывающей на промежутке X. По определению это означает, что из неравенства $x_0 < x_1$ для чисел из X следует неравенство $f(x_0) > f(x_1)$. Тогда для приращений в точке x_0 имеем: $\Delta x = x_1 - x_0 > 0$ и $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) < 0$. Соответственно для $x_1 < x_0$ получаем $f(x_0) < f(x_1)$ и $\Delta x = x_1 - x_0 < 0$ и $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) > 0$. Значит, Δx и Δf всегда имеют разный знак для убывающей функции.

Следствие*. Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X тогда и только тогда, когда отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ положительно (отрицательно) в каждой точке промежутка.

Пример 2* Доказать, что функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 9$, возрастает на всей числовой прямой.

Решение.

$$f(x + \Delta x) - f(x) =$$
$$= ((x + \Delta x)^3 + 3(x + \Delta x)^2 + 7(x + \Delta x) + 9) - (x^3 + 3x^2 + 7x + 9) =$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 7\Delta x =$$
$$= \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 6x + 3\Delta x + 7).$$

Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 6x + 3\Delta x + 7 =$$
$$= 3\left(x + \frac{\Delta x}{2} + 1\right)^2 + \frac{(\Delta x)^2}{4} + 4 \geqslant 4 > 0.$$

В процессе вычислений мы воспользовались формулой

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Значит (см. следствие из теоремы 1), функция $y = f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

Упражнения

5.1. Найдите точку x_1, в которую переходит указанная точка x_0 при указанном приращении Δx аргумента:
а) $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}01$;
б) $x_0 = 2$, $\Delta x = -0{,}02$;
в) $x_0 = -1{,}21$, $\Delta x = 0{,}01$;
г) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$;
д) $x_0 = 3$, $\Delta x = -0{,}01$;
е) $x_0 = -2{,}23$, $\Delta x = -0{,}02$.

5.2. Найдите точку x_0, которая переходит в указанную точку x_1 при указанном приращении Δx аргумента:
а) $x_1 = 3{,}001$, $\Delta x = 0{,}001$;
б) $x_1 = 4{,}998$, $\Delta x = -0{,}002$;
в) $x_1 = -3$, $\Delta x = 0{,}05x_0$;
г) $x_1 = 4{,}003$, $\Delta x = 0{,}003$;
д) $x_1 = 1{,}999$, $\Delta x = -0{,}001$;
е) $x_1 = -2$, $\Delta x = -0{,}05x_0$.

5.3. Найдите приращение функции $y = 3x + 1$ при переходе от точки $x_0 = 2$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = 2{,}1$;
б) $x_1 = 2{,}2$;
в) $x_1 = 2{,}02$;
г) $x_1 = 2{,}01$;
д) $x_1 = 1{,}8$;
е) $x_1 = 1{,}9$.

5.4. Найдите приращение функции $y = x^2 - 3x$ при переходе от точки $x_0 = -1$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = -1{,}2$;
б) $x_1 = -1{,}1$;
в) $x_1 = -1{,}5$;
г) $x_1 = -0{,}9$;
д) $x_1 = -0{,}8$;
е) $x_1 = -0{,}5$.

5.5. Найдите приращение функции $y = \sqrt{x} + 2$ при переходе от точки $x_0 = 2$ к точке $x_1 = x_0 + \Delta x$, если:

а) $\Delta x = 0{,}25$;
б) $\Delta x = 0{,}56$;
в) $\Delta x = -0{,}31$;
г) $\Delta x = -0{,}04$;
д) $\Delta x = 0{,}89$;
е) $\Delta x = -0{,}79$.

5.6. Найдите приращение функции $y = \sin x$ при переходе от точки $x_0 = \pi$ к точке $x_1 = x_0 + \Delta x$, если:

а) $\Delta x = \frac{\pi}{2}$;
б) $\Delta x = \frac{\pi}{6}$;
в) $\Delta x = -\frac{\pi}{4}$;
г) $\Delta x = -\frac{\pi}{2}$;
д) $\Delta x = -\frac{5\pi}{6}$;
е) $\Delta x = -\frac{\pi}{3}$.

5.7. Найдите приращение функции $y = \log_2 x$ при переходе от точки $x_0 = 1$ к точке $x_1 = x_0 + \Delta x$, если:

а) $\Delta x = 1$;
б) $\Delta x = 3$;
в) $\Delta x = -0{,}75$;
г) $\Delta x = -0{,}5$;
д) $\Delta x = 7$;
е) $\Delta x = -0{,}875$.

5.8. Найдите приращение Δx аргумента при указанных изменениях начальной точки x_0 и точку $x_1 = x_0 + \Delta x$, если:

а) $x_0 = 2$ увеличивается на 5 %;
б) $x_0 = 1{,}1$ уменьшается в 1,5 раза;
в) $x_0 = 5$ уменьшается в 2 раза;
г) $x_0 = 3$ уменьшается на 2 %;
д) $x_0 = 2{,}1$ увеличивается в 1,5 раза;
е) $x_0 = 3$ увеличивается в 3 раза.

Выразите приращение Δy данной функции $y = f(x)$ через приращение Δx аргумента при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$.

5.9. а) $f(x) = 4x + 5$;
б) $f(x) = 3 - x^2$;
в) $f(x) = \frac{3}{x}$;
г) $f(x) = 3 - 2x$;
д) $f(x) = 2x^2 + 1$;
е) $f(x) = -\frac{2}{x}$.

5.10. а) $f(x) = 2^{x+1}$;
б) $f(x) = \lg x$;
в) $f(x) = \cos x$;
г) $f(x) = 3^x$;
д) $f(x) = \ln x$;
е) $f(x) = \sin x$.

5.11. а) $f(x) = kx + b$;
б) $f(x) = ax^2 + bx + c$;
в) $f(x) = \log_a x$;
г) $f(x) = kx$;
д) $f(x) = ax^2$;
е) $f(x) = \frac{a}{x}$.

Упражнения для повторения

5.12. Найдите значение выражения:
а) $\log_7 3 - \log_7 21$;
б) $\log_{2,5} 12{,}5 + \log_{2,5} 0{,}5$;
в) $36^{\log_6 3} + \log_4 8$;
г) $\sqrt{5}^{\log_5 4} + \log_{0,25} 2$;
д) $\log_2 25 \cdot \log_5 8$;
е) $\log_3 64 \cdot \log_2 81$.

5.13. Решите графически уравнение:
а) $\log_2(x - 2) = 3 - 0{,}5x$;
б) $\log_{0,5}(x+1) = -\frac{6}{x}$;
в) $\log_{0,5}(x + 1) = 2x - 3$;
г) $\log_2(x - 1) = \frac{3}{x}$.

5.14. Решите уравнение:

а) $\log_3(9 - x) = \log_3(5 - 2x) + 1$;

б) $\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(x + 12)$;

в) $\log_{0,4}(6 - x) = 2\log_{0,4} x$;

г) $\log_2(8 - 3x) = \log_2(2 - x) + 3$;

д) $\log_{0,5}(x^2 + 3x) = \log_{0,5}(x + 15)$;

е) $\log_4(6 - 5x) = 2\log_4 x$.

5.15. Решите неравенство:

а) $\log^2_{\frac{1}{3}} x - 5\log_{\frac{1}{3}} x + 6 \leqslant 0$;

б) $\log^2_5 x > \log_5 x^3 - 2$;

в) $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 5\log_{\frac{1}{2}} x - 6 < 0$;

г) $\lg^2 x \geqslant \lg x^2 + 3$.

5.16. 29 февраля 2020 года клиент взял в банке кредит в размере 2 109 000 р. под 12 % годовых. Условия возврата кредита таковы: 28 февраля каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем клиент выплачивает банку некоторую сумму так, чтобы погасить кредит тремя равными платежами (*аннуитетные платежи*). Какую сумму должен ежегодно выплачивать клиент?

Итак, в главе 1

Познакомились с новыми свойствами числовых последовательностей:

— ограниченность снизу;
— ограниченность сверху;
— сходимость;
— расходимость.

Выяснили, что такое:

— окрестность точки;
— предел числовой последовательности;
— предел функции на бесконечности;
— предел функции в точке;
— приращение аргумента;
— приращение функции.

Изучили арифметические операции над пределами числовых последовательностей и над пределами функций.

Узнали, какие два соотношения специально выделяют в курсе высшей математики:

— $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ — первый замечательный предел;

— $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^x$ — второй замечательный предел.

Узнали два варианта определения непрерывности функции в точке:

— «на языке пределов»: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$;

— «на языке приращений»: $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Вопросы

1. Что такое числовая последовательность?
2. Какую последовательность называют возрастающей; убывающей?
3. Сформулируйте определение ограниченности последовательности сверху (снизу).
4. Приведите примеры последовательностей, которые ограничены только сверху (только снизу).

5. Может ли возрастающая последовательность быть не ограниченной сверху, а убывающая — не ограниченной снизу? Если да, то приведите примеры.
6. Какой числовой промежуток называют окрестностью точки a радиусом r?
7. Дайте определение предела последовательности; сходящейся последовательности.
8. При каких значениях знаменателя q сходится бесконечная геометрическая прогрессия?
9. Верно ли, что из сходимости последовательности следует её ограниченность? Верно ли обратное, т. е. что из ограниченности последовательности следует её сходимость?
10. Какая связь имеется между пределом функции на бесконечности и наличием у неё горизонтальной асимптоты?
11. Сформулируйте теоремы об арифметических операциях над пределами последовательностей, функций.
12. Что называют приращением аргумента x при переходе от x_0 к x_1?
13. Что называют приращением функции $y = f(x)$ при переходе аргумента от x_0 к x_1?
14. Сформулируйте определение функции, непрерывной в точке $x = a$:
— «на языке пределов»;
— «на языке приращений».

Тест

1. Укажите формулу, которая задаёт последовательность

$$5, 9, 13, 17, \ldots .$$

а) $y_n = 4n + 1$ в) $y_n = 3n + 2$
б) $y_n = 6n - 1$ г) $y_n = n + 4$

2. Укажите последовательность, которая не является монотонной.
а) $x_n = (3 - n)^2$ в) $x_n = -0{,}1^{n-2}$
б) $x_n = n^3 + 1$ г) $x_n = (-1)^{n+1}$

3. Укажите свойство, которое всегда следует из сходимости последовательности.
а) последовательность убывает
б) последовательность ограничена сверху и не ограничена снизу
в) последовательность монотонна
г) последовательность ограничена

4. Дана последовательность $y_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Укажите верные утверждения.

а) последовательность сходится
б) последовательность является убывающей
в) последовательность ограничена снизу
г) предел последовательности больше нуля

5. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n-4)(2-5n)}{n^2}$.

6. Найдите $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{5x+6}\cdot\frac{x^2-2x-3}{x+1}\right)$.

7. Найдите приращение функции $y = x^2 + 2x - 3$ при переходе от точки $x = 0$ к точке $x + \Delta x = 0{,}1$.

8. Установите соответствие между пределом и его значением.

А. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{-x}$ Б. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{2x}$ В. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{-2x}$

1) $-0{,}5$ 2) $-1{,}5$ 3) -1

9. Укажите прямую, которая является горизонтальной асимптотой к графику функции $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

а) $y = 2$ в) $y = 1$
б) $y = -2$ г) $y = -0{,}5$

10. Укажите функцию, которая является непрерывной в точке $x = 2$.

а) $y = \begin{cases} x^3, \text{ если } x \leqslant 2, \\ 14 - 2x, \text{ если } x > 2 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 3x, \text{ если } x \leqslant 2, \\ 2x + 3, \text{ если } x > 2 \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} \cos \pi x, \text{ если } x < 2, \\ \sqrt{x-1}, \text{ если } x \geqslant 2 \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 2^{x-2}, \text{ если } x \leqslant 2, \\ \log_2 x, \text{ если } x > 2 \end{cases}$

Из истории математики

Приближение сложных объектов и ситуаций простыми является одной из фундаментальных математических конструкций. Иррациональные числа приближают рациональными, бесконечные десятичные дроби — конечными, площади криволинейных фигур и объёмы пространственных тел приближают площадями многоугольников и объёмами многогранников, непрерывные процессы — дискретными, вместо перемещения точек и тел с переменной скоростью в первом приближении рассматривают равномерные движения и т. п.

Обычно процесс приближения, или *аппроксимации*[1], организуют так, чтобы он сходился, т. е. чтобы при уменьшении погрешности приближения результат всё ближе и ближе подходил к некоторому окончательному ответу, к своему *пределу*.

Теория пределов последовательностей и функций составляет основу современного математического анализа. Первые строгие, формально-логические определения и доказательства теории пределов появились в первой трети XIX в. Основы этой теории были предложены в работах великого французского математика Огюстена Луи Коши (1789—1857). Именно он стал трактовать (около 1820 г.) бесконечно малые величины как переменные, стремящиеся к нулю, и предложил использовать для этого технику, основанную на понятии окрестностей точек. Немецкий математик Генрих Гейне[2] (1821—1881) предложил некоторый альтернативный подход, основывая теорию пределов функций через пределы последовательностей. Термины «предел по Коши» и «предел по Гейне» и в XXI в. присутствуют в любом курсе математического анализа.

Однако эти теории XIX в. стали не столько началом, сколько итогом долгого исторического процесса развития естествознания. До этого, в конце XVII в. и в XVIII в. в основном исследовали анализ бесконечно малых, или просто бесконечных (см., например, двухтомный трактат «Введение в анализ бесконечных» (1748 г.) Леонарда Эйлера), активно изучали вопросы о разложении в бесконечные ряды и произведения. Скажем, шотландец Джеймс Грегори (1638—1675) систематически работал с бесконечными последовательностями, суммами и произведениями, писал в 1667 г. об операции пре-

[1] От англ. *approximation* — приближение.

[2] Не путать с поэтом Генрихом Гейне.

дельного перехода и о *«...сходящейся последовательности многоугольников, окончание которой есть круг...»*.

До этого базовой техникой исследования сложных фигур и тел был *метод неделимых*, связанный в основном с именами Бонавентуры Кавальери (1598—1647) и Иоганна Кеплера (1571—1630), который в своей «Новой астрономии» использовал понятие неделимых при формулировке своих трёх законов движения планет. Принцип Кавальери и его метод неделимых оказали самое серьёзное влияние на математиков XVII в. вплоть до Лейбница и Ньютона, иногда метод называли «царской дорогой» в геометрии. Один из предшественников математического анализа Джон Валлис (1616—1703) разработал алгебраический вариант метода неделимых, который изложил в своей «Арифметике бесконечного» (1656 г.).

Методу неделимых предшествовал *метод исчерпывания*. Сам термин появился в средневековой Европе, но, по существу, оказался переформулировкой и систематическим использованием результатов античных математиков Евдокса (408—355 до н. э.) и Архимеда (287—212 до н. э.), которые никакого специального названия методу не давали, но широко его применяли, неявно основываясь именно на понятии предельного перехода.

Метод Евдокса изложен в X книге «Начал» Евклида и звучит примерно так: «...если от большей из двух величин отнять больше половины, а от того, что останется, — ещё больше половины, то когда-то получится величина меньше меньшей из заданных величин». В современных терминах это можно записать так: если $0 < y_{n+1} < 0{,}5y_n$, то, начиная с некоторого номера, все y_n будут меньше наперёд заданного положительного числа; кратко, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. В «Началах» Евклида последовательные приближения многоугольниками по методу Евдокса успешно применялись для теорем о площади круга, объёмах конуса и цилиндра. Развивая метод Евдокса, Архимед получил ряд замечательных фактов: площадь сферы в 4 раза больше площади её большого круга, объём цилиндра, описанного вокруг шара, в 1,5 раза больше объёма шара и т. п.

В свою очередь, в античной философии, предшествующей Евдоксу и Архимеду, уже широко обсуждались рассуждения, основанные на предельном переходе, типичным примером которых является парадокс Зенона (V в. до н. э.) об Ахиллесе, который «никогда» не догонит черепаху.



Новосибирский государственный университет (новое здание). Новосибирск

§ 6. Определение производной
§ 7. Алгоритм нахождения производной
§ 8. Дифференцируемые функции
§ 9. Уравнение касательной к графику функции
§ 10. Арифметические операции над производными
§ 11. Дифференцирование тригонометрических функций
§ 12. Дифференцирование обратной функции
§ 13. Дифференцирование сложной функции
§ 14. Дифференцирование степенных функций
§ 15. Дифференцирование показательных и логарифмических функций

Глава 2

Производная

§ 6. Определение производной

Начнём с рассмотрения двух задач, совершенно различных по сюжету: первая задача — физическая, вторая — геометрическая. Как вы увидите, они в процессе решения приведут к одной и той же (новой для вас) математической модели.

Задача 1 (*о скорости движения*) По прямой, на которой заданы начало отсчёта, единица измерения (см) и направление, движется материальная точка. Закон движения задан формулой $s = s(t)$ (t — время (с), $s(t)$ — координата точки на прямой в момент времени t). Найти скорость движения тела в момент времени t.

Решение. В момент времени t материальная точка занимает положение M (рис. 23): $OM = s(t)$.

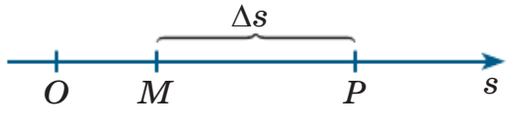


Рис. 23

Дадим аргументу t приращение Δt. Материальная точка в момент времени $t + \Delta t$ займёт положение P: $OP = s(t + \Delta t)$. Значит, за Δt секунд движущаяся точка переместилась из точки M в точку P. Имеем: $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t)$. Итак, $MP = \Delta s$ (см).

Найдём среднюю скорость $v_{ср}$ движения материальной точки за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$: $v_{ср} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Предел средней скорости движения за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается всё меньше и меньше, точнее, при условии, что $\Delta t \to 0$, на-

зывают *мгновенной скоростью движения в момент времени* t и обозначают $v(t)$. Таким образом,

$$v(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Задача 2 (о касательной к графику функции) Дан график функции $y = f(x)$. На нём выбрана точка $M(a; f(a))$, в которой к графику функции можно провести касательную, не параллельную оси ординат (рис. 24). Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловой коэффициент секущей MP, т. е. тангенс угла между прямой MP и осью Ox, можно найти из прямоугольного треугольника MPL: $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если мы теперь устремим Δx к нулю, то точка P начнёт приближаться по кривой к точке M. В учебнике для

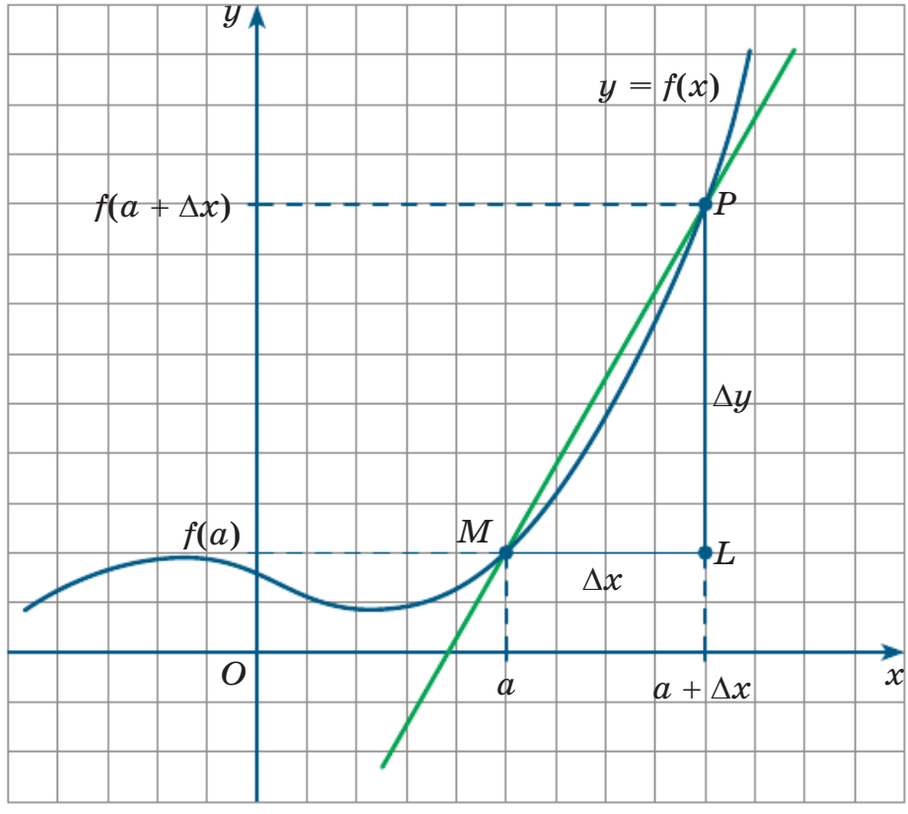


Рис. 24

10-го класса мы говорили о том, что *касательная — это предельное положение секущей MP при приближении точки P по графику к точке M*. Значит, угловой коэффициент k касательной вычисляется по формуле $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$, а $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Таким образом, для углового коэффициента касательной мы получаем следующую формулу:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Эту формулу мы вывели при условии, что касательная не параллельна оси ординат. Если же касательная к графику функции в точке a параллельна оси ординат (рис. 25), то уравнение такой касательной имеет вид $x = a$, об угловом коэффициенте говорить в этом случае некорректно.

Подведём итоги. Две различные задачи привели к одной и той же математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Многие задачи из различных областей знания приводят в процессе решения к такой же математической модели. Значит, эту математическую модель надо специально изучить: ввести для этой модели название, дать определение и научиться работать с этой математической моделью.

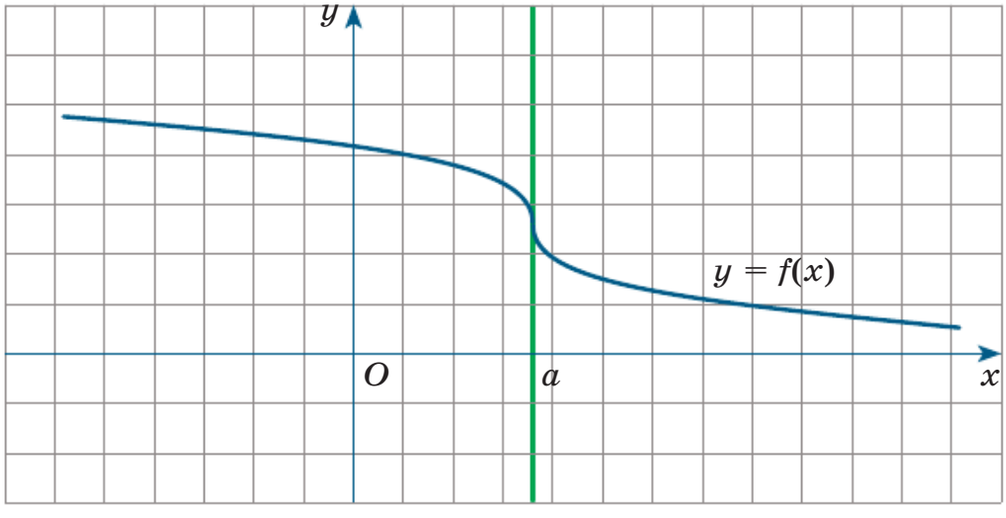


Рис. 25

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале. Возьмём точку x_0 из этого интервала и дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдём приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0**; обозначают $f'(x_0)$ или, кратко, y'.

Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Рассмотренные выше задачи 1 и 2 позволяют истолковать производную с физической и геометрической точек зрения.

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени t:

$$v(t) = s'(t).$$

Вообще, если некоторый реальный процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t. С математической точки зрения производная $f'(x)$ выражает *скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x*.

Рассмотрим, в частности, постоянную функцию $y = C$. Скорость её изменения равна нулю (ведь значения функции не меняются от точки к точке). Это значит, что

$$(C)' = 0.$$

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, не параллельную оси ординат, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной:

$$k = f'(a).$$

Угловой коэффициент прямой — это тангенс угла между осью абсцисс и прямой. Значит,

$$f'(a) = \operatorname{tg}\alpha \text{ (рис. 26)}.$$

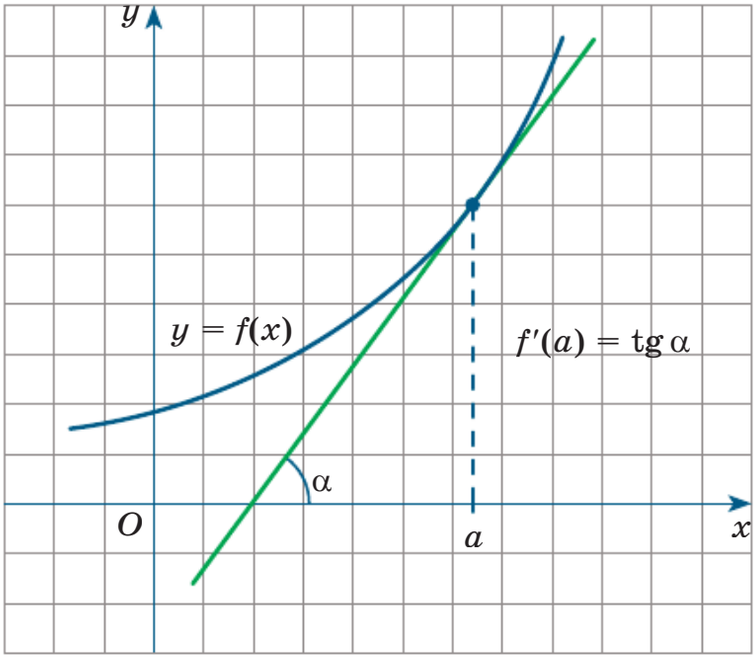


Рис. 26

Рассмотрим линейную функцию $y = kx + m$. Фактически любая прямая является касательной к самой себе, значит, производная этой функции равна k:

$$(kx + m)' = k.$$

В частности,

$$(x)' = 1.$$

Упражнения

6.1. Движение точки по координатной прямой задаётся уравнением $s = s(t)$, где t — время (в секундах), а $s(t)$ — отклонение точки от начального положения в момент времени t (в метрах). Найдите среднюю скорость $v_{ср}$ движения точки, если:
а) $s(t) = 4t + 3$, $t_1 = 2$ с, $t_2 = 4$ с;
б) $s(t) = t^2 + 2$, $t_1 = 0$ с, $t_2 = 1$ с;
в) $s(t) = t^2 + 4t$, $t_1 = 3$ с, $t_2 = 3{,}5$ с;
г) $s(t) = 5t + 1$, $t_1 = 5$ с, $t_2 = 6$ с;
д) $s(t) = t^2 + 6$, $t_1 = 2$ с, $t_2 = 5$ с;
е) $s(t) = t^2 + 3t$, $t_1 = 1$ с, $t_2 = 1{,}2$ с.

6.2. Известны закон движения точки по координатной прямой $s(t) = 3t + 1$ и время движения от $t_0 = 0$ до $t = t_0 + \Delta t$. Найдите:

а) $s(t_0)$ и $s(t_0 + \Delta t)$;

б) Δs;

в) $v_{ср} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$;

г) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

6.3. Известны закон движения точки по координатной прямой $s(t) = 2t + 3$ и время движения от $t = 1$ до $1 + \Delta t$. Найдите:

а) $s(1)$ и $s(1 + \Delta t)$;

б) Δs;

в) среднюю скорость $v_{ср}$;

г) мгновенную скорость движения в момент времени $t = 1$.

6.4. Известны закон движения точки по координатной прямой $s(t) = kt + m$ и время движения от t_0 до $t_0 + \Delta t$, где t_0 — фиксировано. Найдите:

а) $s(t_0 + \Delta t)$;

б) Δs;

в) среднюю скорость $v_{ср}$;

г) мгновенную скорость движения в момент времени t_0.

6.5. Известны закон движения точки по координатной прямой $s(t) = t^2 + 1$ и время движения от $t = 3$ до $3 + \Delta t$. Найдите:

а) $s(3)$ и $s(3 + \Delta t)$;

б) Δs;

в) $v_{ср} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$;

г) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

6.6. Известны закон движения точки по координатной прямой $s(t) = t^2 + 2t$ и время движения от $t = 2$ до $2 + \Delta t$. Найдите:

а) $s(2)$ и $s(2 + \Delta t)$;

б) Δs;

в) среднюю скорость $v_{ср}$;

г) мгновенную скорость движения в момент времени $t = 2$.

6.7. Известны закон движения точки по координатной прямой $s(t) = t^2$ и время движения от t_0 до $t_0 + \Delta t$, где t_0 — фиксировано. Найдите:

а) $s(t_0)$ и $s(t_0 + \Delta t)$;

б) Δs;

в) среднюю скорость $v_{ср}$;

г) мгновенную скорость движения в момент времени t_0.

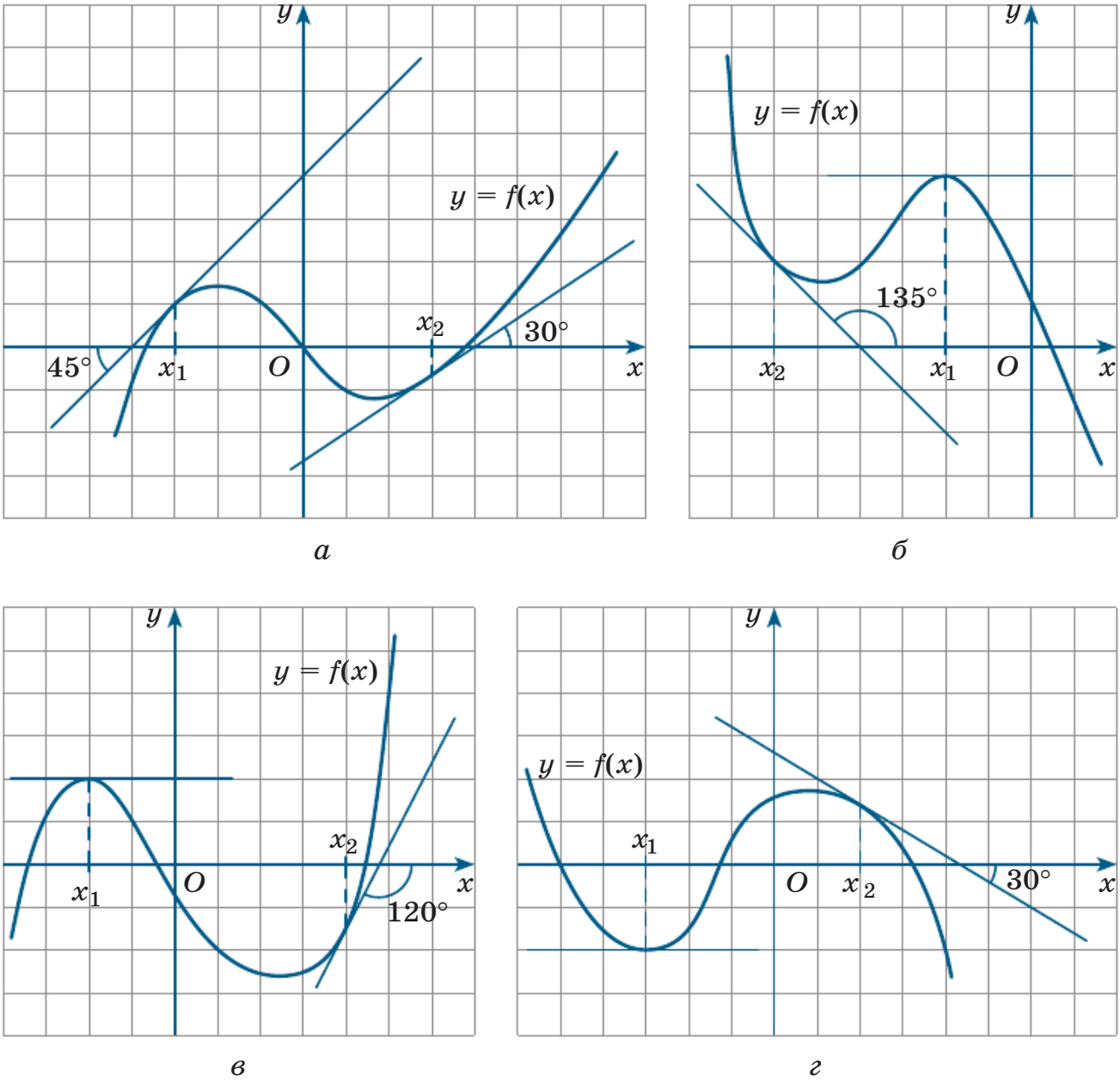
6.8. Известен закон движения точки по прямой $s = s(t)$. Найдите мгновенную скорость движения точки в момент времени t, если:

а) $s(t) = t$; в) $s(t) = 3t + 4$; д) $s(t) = 1$;

б) $s(t) = 2{,}5t$; г) $s(t) = 4t - 7$; е) $s(t) = t + 10$.

6.9. На рисунке 27, *а*—*г* изображён график функции $y = f(x)$ и касательные к нему, проведённые в точках с абсциссами x_1 и x_2. Найдите угловые коэффициенты этих касательных.

6.10. Используя рисунок 27, *а*—*г*, найдите значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.



а *б* *в* *г*

Рис. 27

6.11. Найдите скорость изменения функции в произвольной точке x:

а) $y = x - 4$;

б) $y = 6 - x$;

в) $y = -6{,}8x$;

г) $y = 100$;

д) $y = \dfrac{2x - 3}{5}$;

е) $y = 9{,}1x + 1{,}9$.

6.12. Найдите скорость изменения функции $y = x^2$ в точке x_0, если:

а) $x_0 = 1$;

б) $x_0 = -1$;

в) $x_0 = 3$;

г) $x_0 = -4$;

д) $x_0 = 0{,}5$;

е) $x_0 = 0$.

6.13. На рисунке 28 изображён график функции $y = g(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, …, x_8. Верно ли утверждение:

а) угловой коэффициент касательной положителен в четырёх точках;

б) угловой коэффициент касательной положителен в трёх точках;

в) угловой коэффициент касательной отрицателен в трёх точках;

г) угловой коэффициент касательной отрицателен в двух точках;

д) угловой коэффициент касательной равен нулю в трёх точках;

е) угловой коэффициент касательной равен нулю в двух точках?

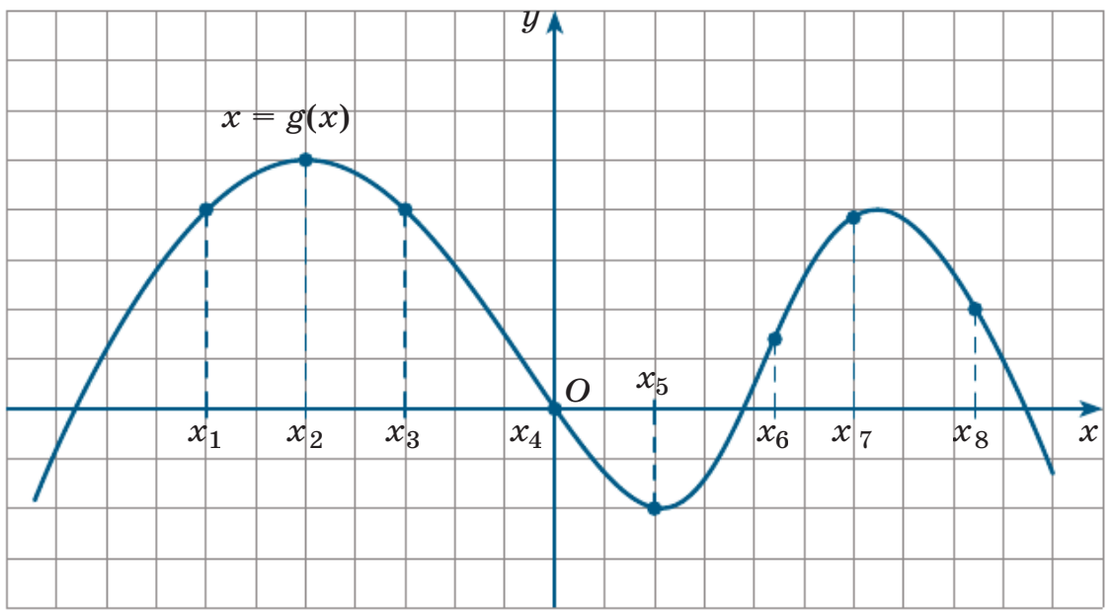


Рис. 28

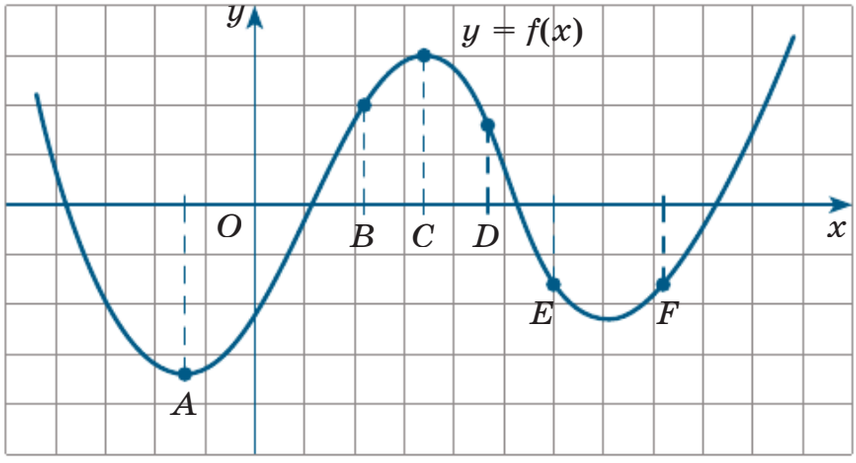


Рис. 29

6.14. На графике функции $y = f(x)$ (рис. 29) отмечены точки A, B, C, D, E, F. Установите соответствие между каждой точкой и утверждением, верным для этой точки:
а) ордината и угловой коэффициент касательной положительны;
б) ордината и угловой коэффициент касательной отрицательны;
в) ордината положительна, а угловой коэффициент касательной равен нулю;
г) ордината положительна, а угловой коэффициент касательной отрицателен;
д) ордината отрицательна, а угловой коэффициент касательной равен нулю;
е) ордината отрицательна, а угловой коэффициент касательной положителен.

6.15. На рисунке 30 (с. 76) изображён график функции $y = f(x)$. Приведите примеры таких целых значений аргумента x_1 и x_2, при которых выполняются условия:
а) $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) > 0$;
б) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) > 0$;
в) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$;
г) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) = 0$;
д) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) < 0$;
е) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$.

6.16. На рисунке 31 (с. 76) изображён график функции $y = f(x)$ и касательные к нему, проведённые в некоторых точках. Пользуясь рисунком, сравните с нулём:
а) $f'(-4)$; в) $f'(-6)$; д) $f'(2)$;
б) $f'(0)$; г) $f'(7)$; е) $f'(-12)$.

6.17. На рисунке 31 (с. 76) изображён график функции $y = f(x)$. Сравните:
а) $f'(-8)$ и $f'(-1)$; в) $f'(-3)$ и $f'(0)$; д) $f'(-2)$ и $f'(2)$;
б) $f'(1)$ и $f'(5)$; г) $f'(3)$ и $f'(-3)$; е) $f'(-9)$ и $f'(2)$.

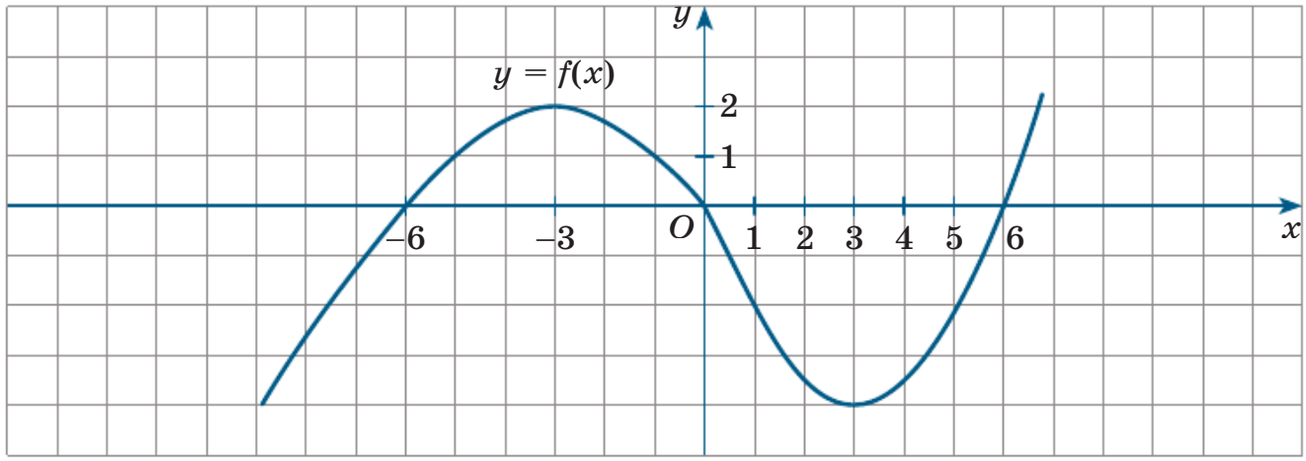


Рис. 30

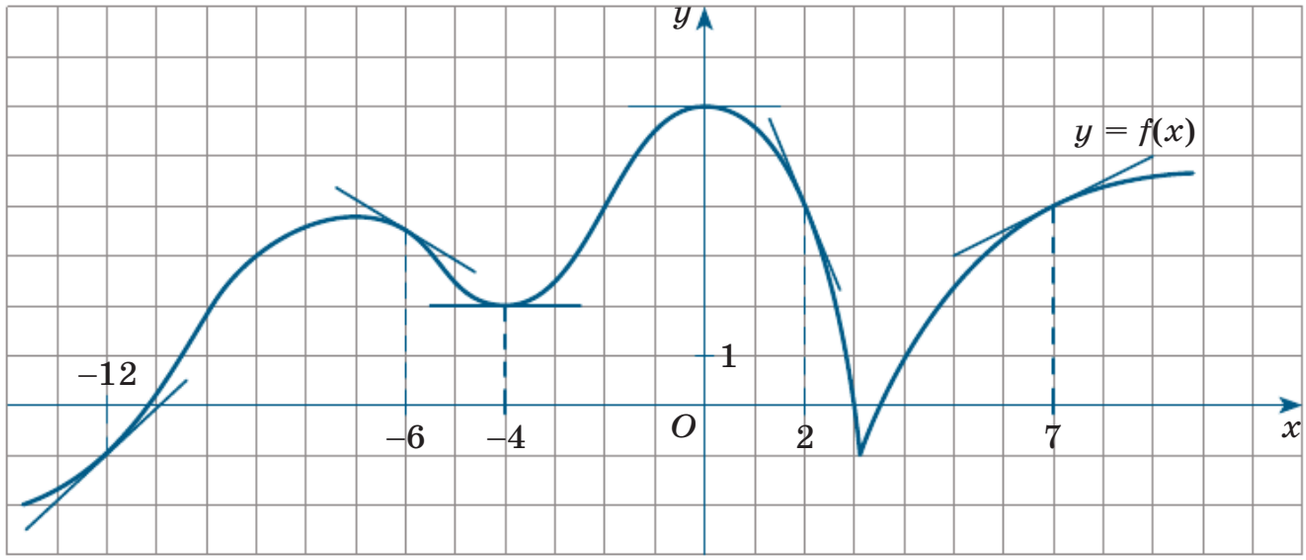


Рис. 31

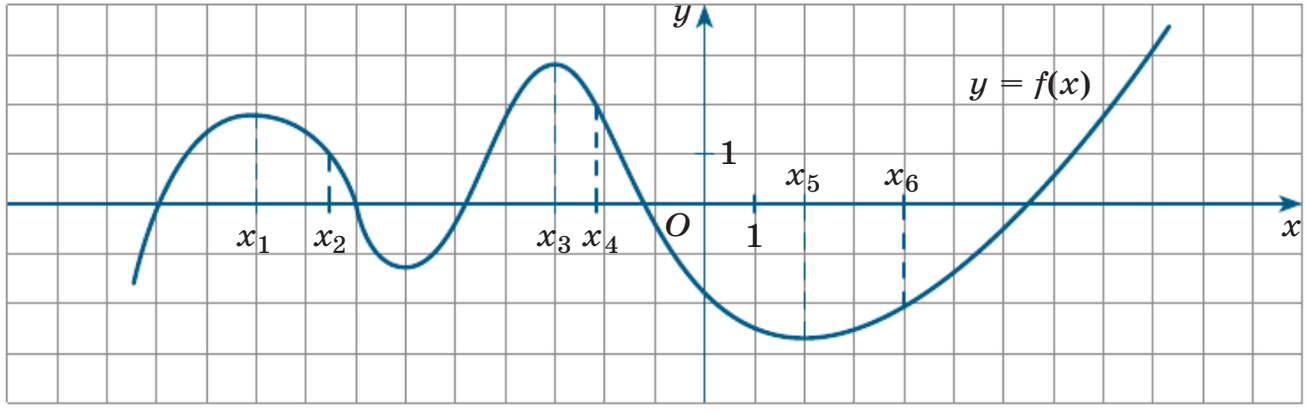


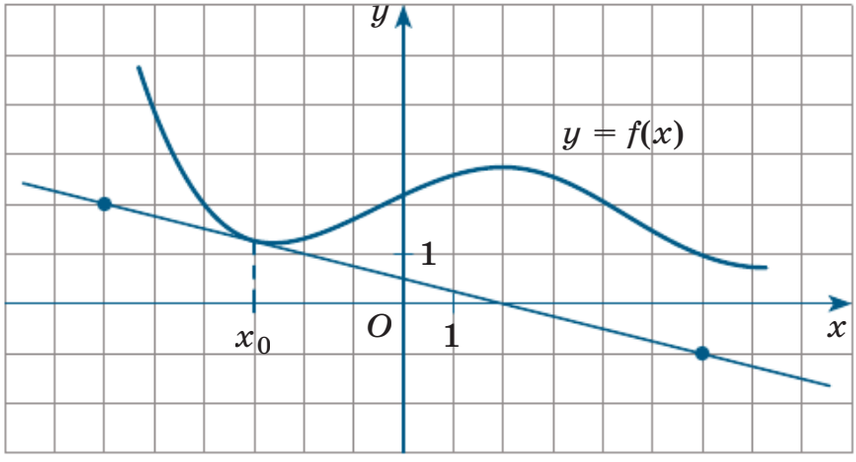
Рис. 32

6.18. На рисунке 32 изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, укажите верные и неверные утверждения, ответ объясните:

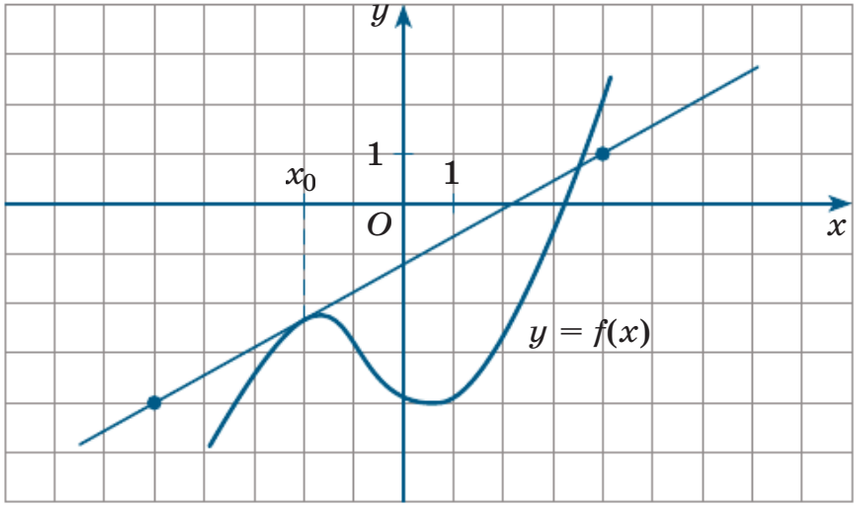
а) $f'(x_1) = 0$; в) $f'(x_4) < 0$; д) $f'(x_3) = f'(x_5)$;
б) $f'(x_2) = 0$; г) $f'(x_6) > 0$; е) $f'(x_6) < f'(x_2)$.

6.19. На рисунке 33, *а*, *б* изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите тангенс угла наклона касательной.

6.20. На рисунке 34, *а*, *б* изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите угловой коэффициент касательной.

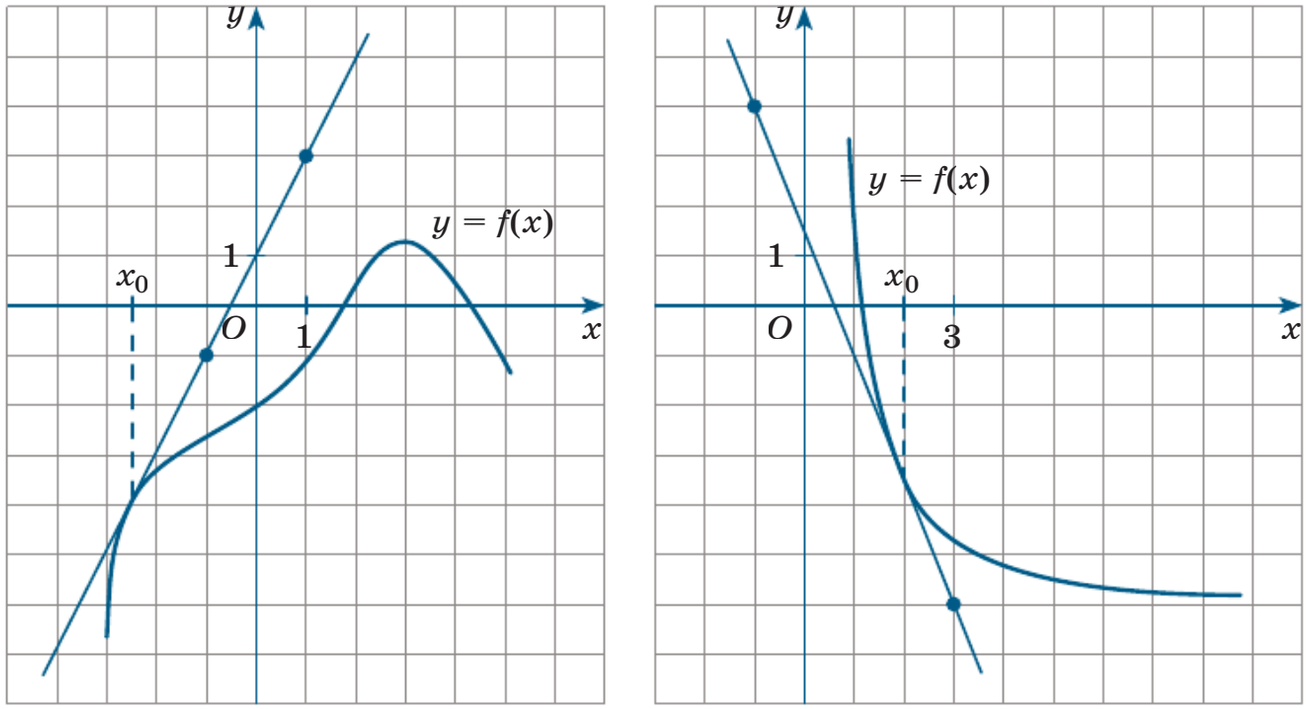


а



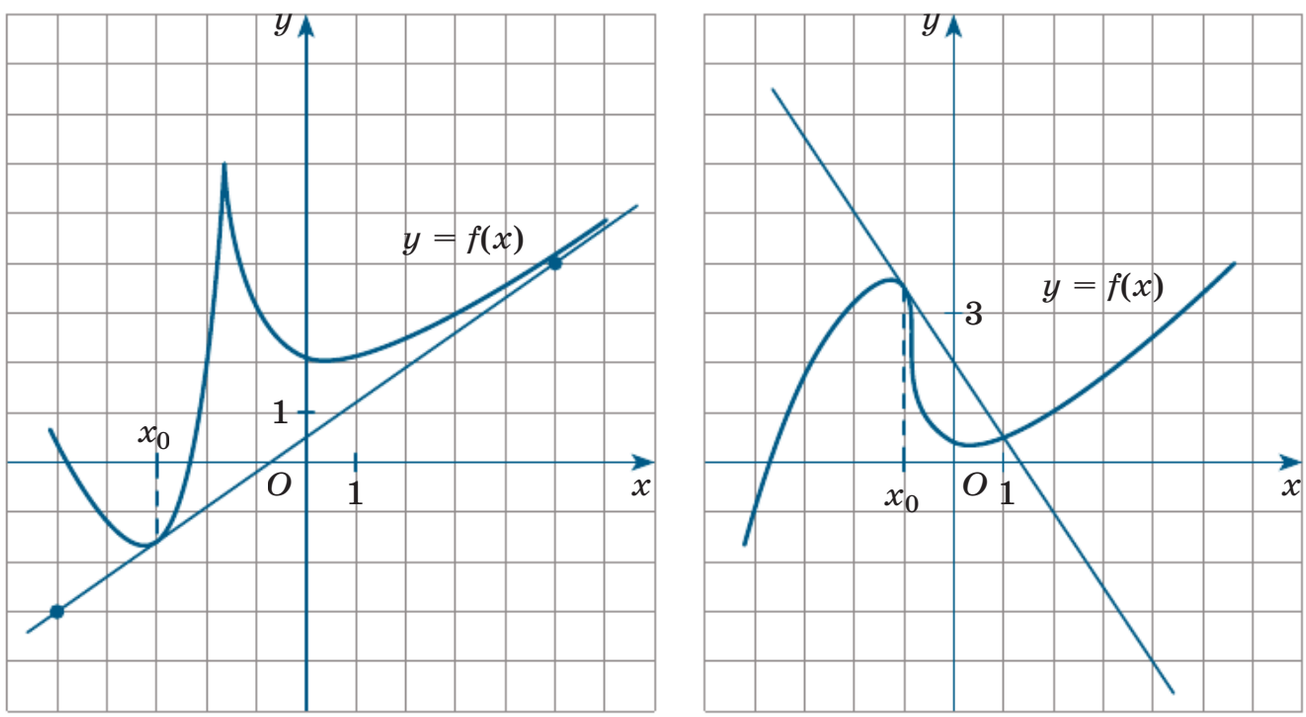
б

Рис. 33



а *б*

Рис. 34



а *б*

Рис. 35

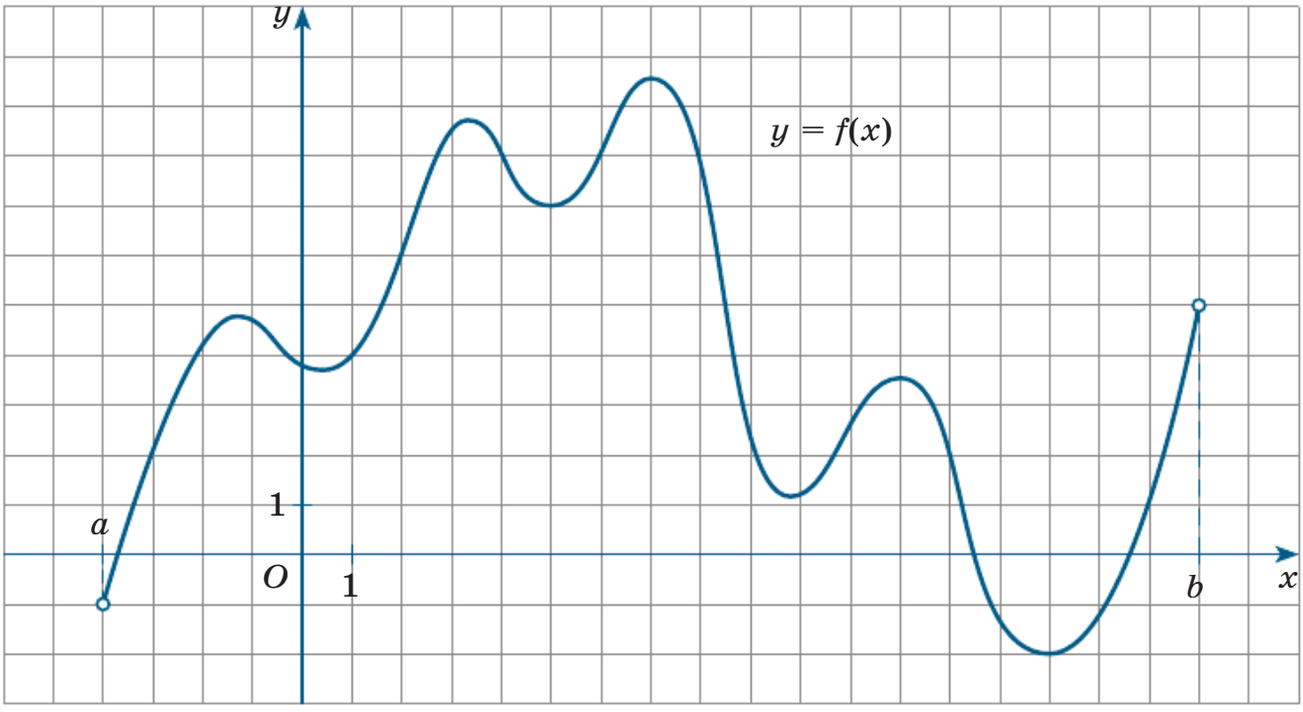


Рис. 36

6.21. На рисунке 35, *а*, *б* изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение производной в точке касания.

6.22. На рисунке 36 изображён график функции $y = f(x)$, заданной на интервале $(a; b)$. Установите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -10$.

Упражнения для повторения

Вычислите предел.

6.23. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 6x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$.

6.24. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \cos x}{x}$.

6.25. Онлайн-магазин в первый месяц работы принёс хозяину прибыль 10 000 р. А в каждый из следующих месяцев прибыль возрастала на 50 % по сравнению с предыдущим. Какую прибыль (приближённо) получил хозяин онлайн-магазина за год?

6.26. Коммерческий банк выдаёт льготный кредит на развитие бизнеса под 10 % годовых сроком на 5 лет. Проценты начисляются в конце каждого года, после чего первые два года заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, а в каждый из оставшихся трёх лет погашает долг тремя равными платежами по 3 993 000 р. Найдите размер кредита и общую сумму выплат заёмщика банку.

6.27. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x+2}, \text{ если } x \leqslant -3, \\ -x^2 + 5, \text{ если } -3 < x \leqslant 2, \\ \log_2 x, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-4)$; $f(-3)$; $f(-2)$; $f(2)$; $f(8)$;
б) постройте график функции;
в) прочитайте график функции;
г) найдите значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет единственный корень.

§ 7. Алгоритм нахождения производной

Определение производной, сформулированное в предыдущем параграфе, удобно переформулировать в виде некоторого пошагового алгоритма действий по нахождению производной.

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Приведём несколько примеров использования алгоритма нахождения производной.

Функция $y = x^2$

1) Зафиксируем x. Найдём $f(x) = x^2$.
2) Дадим аргументу x приращение Δx, перейдём к $x + \Delta x$. Тогда

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2.$$

3) Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

4) Найдём отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

5) Вычислим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как x — фиксированное число, а $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак,

$$(x^2)' = 2x.$$

Если $f(x) = x^2$, то, в частности,

$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0; \quad f'(1) = 2 \cdot 1 = 2;$$
$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}; \quad f'\left(\sqrt{5}\right) = 2\sqrt{5}.$$

Функция $y = x^3$

1) Зафиксируем x. Найдём $f(x) = x^3$.
2) Дадим аргументу x приращение Δx, перейдём к $x + \Delta x$. Тогда

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3.$$

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3$. Используем формулу $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ разности кубов для $a = x + \Delta x$, $b = x$. Тогда

$$a - b = \Delta x$$

и

$$\Delta y = \Delta x((x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)x + x^2) = \Delta x(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2).$$

4) Найдём отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2.$$

5) Вычислим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как x — фиксированное число, а $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2 = 3x^2.$$

Итак,

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Если $f(x) = x^3$, то, в частности,

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3; \quad f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}; \quad f'\left(\sqrt{5}\right) = 3 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 = 15.$$

Функция $y = \frac{1}{x}$

1) Зафиксируем x (для определённости полагаем, что $x > 0$); $f(x) = \frac{1}{x}$.

2) Дадим аргументу x приращение Δx, перейдём к $x + \Delta x$ ($x + \Delta x > 0$). Тогда

$$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}.$$

3) Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

4) Найдём отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

5) Вычислим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как x — фиксированное число, а $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Итак,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Если $f(x) = \dfrac{1}{x}$, то, в частности,

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1; \quad f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -9; \quad f'\left(\sqrt{5}\right) = -\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = -\frac{1}{5}.$$

Функция $y = \sqrt{x}$

1) Зафиксируем $x > 0$; $f(x) = \sqrt{x}$.

2) Дадим аргументу x приращение Δx, перейдём к $x + \Delta x$ ($x + \Delta x > 0$). Тогда

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}.$$

3) Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

4) Найдём отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

5) Вычислим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Как и в предыдущих случаях, учитываем, что x — фиксированное число, а $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Для вычисления этого предела домножим и числитель, и знаменатель дроби $\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$ на выражение, сопряжённое числителю, т. е. на $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$ (мы уже применяли этот приём ранее — см. пример 3б из § 4). Получим:

$$\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

Значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Итак,

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Если $f(x)=\sqrt{x}$, то, в частности,

$$f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2};\quad f'\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{9}}}=\frac{3}{2};\quad f'\left(\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{5}}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{5}}.$$

Упражнения

Найдите производную функции.

7.1. а) $y=0{,}2x+8$; б) $y=-2{,}7x-5$; в) $y=-4(3x+1)$; г) $y=7(2x+3)$; д) $y=\frac{6x-5}{4}$; е) $y=\frac{9-2x}{3}$.

7.2. а) $y = 3(2x - 5) + 4x$;

б) $y = \frac{1}{2}(x + 4) - (1 - 0{,}5x)$;

в) $y = 2(x - 3) + 3(x - 2)$;

г) $y = -\frac{1}{3}(3x + 2) - x$;

д) $y = 4(x - 3) - (2x + 1)$;

е) $y = -5(x + 1) + 6(1 - x)$.

7.3. Используя алгоритм вычисления производной, найдите производную функции:

а) $y = 2x^2$;

б) $y = x^2 - x$;

в) $y = -\frac{2}{3}x^2$;

г) $y = x^2 + 3x$.

Найдите значение производной данной функции в точке x_0.

7.4. а) $y = 7$, $x_0 = 2$;

б) $y = -5x + 2$, $x_0 = 3$;

в) $y = \frac{2x - 5}{4}$, $x_0 = -6$;

г) $y = x$, $x_0 = -1$;

д) $y = 4x - 1$, $x_0 = 0$;

е) $y = \frac{6 - x}{3}$, $x_0 = 0{,}3$.

7.5. а) $y = x^2$, $x_0 = -5$;

б) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;

в) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$;

г) $y = x^3$, $x_0 = 4$;

д) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -3$;

е) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 25$.

7.6. Найдите скорость изменения данной функции в точке x_0:

а) $y = x^3$, $x_0 = -2$;

б) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 64$;

в) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{7}$;

г) $y = x^2$, $x_0 = 0{,}5$;

д) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 225$;

е) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1{,}2$.

7.7. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2{,}5$;

б) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1{,}44$;

в) $y = x^3$, $x_0 = -\frac{2}{3}$;

г) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -0{,}3$;

д) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{4}{9}$;

е) $y = x^2$, $x_0 = 0{,}02$.

7.8. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

б) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2\frac{1}{4}$;

в) $y = x^2$, $x_0 = 0{,}5$;

г) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

д) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0{,}12$;

е) $y = x^3$, $x_0 = -1$.

7.9. Найдите угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $y = x^3$, $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{12}$;

в) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = \sqrt{2}$;

г) $y = x^2$, $x_0 = -0{,}5$;

д) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 0{,}75$;

е) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -\sqrt{3}$.

7.10. Решите уравнение $f'(x) = a$, если:

а) $f(x) = x^2$, $a = -15$;

б) $f(x) = x^3$, $a = 12$;

в) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1{,}5$;

г) $f(x) = x^2$, $a = \frac{1}{3}$;

д) $f(x) = x^3$, $a = 4{,}5$;

е) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 2$.

7.11. Решите неравенство $f'(x) > a$, если:

а) $f(x) = x^2$, $a = 0{,}1$;

б) $f(x) = x^3$, $a = 6$;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -1{,}96$;

г) $f(x) = x^2$, $a = -\frac{2}{7}$;

д) $f(x) = x^3$, $a = \frac{3}{16}$;

е) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -3$.

7.12. Решите неравенство $f'(x) \leqslant a$, если:

а) $f(x) = x^2$, $a = -1$;

б) $f(x) = x^3$, $a = 27$;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -2{,}25$;

г) $f(x) = x^2$, $a = 0$;

д) $f(x) = x^3$, $a = 108$;

е) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -0{,}04$.

7.13. При каких значениях аргумента угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = g(x)$, если:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$;

б) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$?

7.14. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = f(x)$ равна скорости изменения функции $y = g(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^3$?

7.15. Используя алгоритм нахождения производной, докажите, что:

а) $(ax^2)' = 2ax$; в) $(ax^2 + c)' = 2ax$;

б) $(ax^2 + bx)' = 2ax + b$; г) $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$.

Упражнения для повторения

7.16. Докажите, что число T является периодом функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \sin\frac{x}{3}$, $T = 6\pi$; г) $f(x) = \cos\frac{x}{4}$, $T = 8\pi$;

б) $f(x) = \cos\frac{2x}{3}$, $T = -6\pi$; д) $f(x) = \sin\frac{3x}{4}$, $T = -12\pi$;

в) $f(x) = 2\operatorname{tg} 2x$, $T = \frac{3\pi}{2}$; е) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 3x$, $T = \frac{4\pi}{3}$.

7.17. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = 0{,}5x - 3 + \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x$; в) $y = \frac{1}{3}x + 3 - 2\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x$;

б) $y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x}$; г) $y = \frac{\sqrt{x+4}}{\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x}$.

7.18. Решите неравенство:

а) $(x^2 - 2x - 4)(x - 2)^2 \geqslant 0$; в) $(x^2 + 4x - 3)(x - 5)^2 \leqslant 0$;

б) $\frac{x^2 - 8x + 11}{(x-5)^2} \leqslant 0$; г) $\frac{(x-4)^2}{x^2 - 6x + 7} \geqslant 0$.

7.19. а) Дано: $\cos t = -\frac{12}{13}$, $\frac{13\pi}{2} < t < 7\pi$. Вычислите $\cos(-t) - \sin(-t)$.

б) Дано: $\sin t = \frac{7}{25}$, $16\pi < t < \frac{33\pi}{2}$. Вычислите $\cos(-t) + \sin(-t)$.

7.20. Вычислите:

а) $\cos\frac{21\pi}{4} - \sin\frac{15\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{33\pi}{4}$;

б) $\cos\frac{31\pi}{3} - 2\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3} + \sin\left(-\frac{26\pi}{3}\right)$;

в) $\cos\frac{11\pi}{6} + \operatorname{ctg}\left(-\frac{31\pi}{6}\right) - 2\sin\left(-\frac{29\pi}{6}\right)$;

г) $\sin\frac{31\pi}{4} - \cos\frac{25\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{17\pi}{4}$;

д) $\sin\frac{37\pi}{3} - 2\operatorname{ctg}\left(-\frac{29\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$;

е) $\cos\frac{23\pi}{6} - 3\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + \sin\frac{35\pi}{6}$.

§ 8. Дифференцируемые функции

Алгоритм нахождения производной начинается с вычисления разностей $\Delta x = (x + \Delta x) - x$ и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Слово «разность» на английском языке звучит как *difference*, на итальянском как *differenza*, а на испанском — *diferencia*. Видимо, по этой причине для процедуры нахождения производной функции в истории науки был выбран специальный термин — *дифференцирование функции*. Соответственно, для тех функций, для которых эта процедура даёт конечный ответ, также есть похожий термин.

Определение. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то функцию $y = f(x)$ называют **дифференцируемой в точке x_0**.

Для дифференцируемой функции есть формула приближённого вычисления её значений.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Смотрите, по определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. От этого точного равенства перейдём к приближённому равенству:

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Обозначим $x_0 + \Delta x$ буквой x. Тогда $\Delta x = x - x_0$ и поэтому

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

Пример Найти приближённое значение для $\sqrt{4{,}5}$.

Решение. Речь идёт о вычислении приближённого значения функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4{,}5$.

Производная функции $y = \sqrt{x}$ равна $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Воспользуемся формулой (1):

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0);$$

$$\sqrt{4{,}5} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4{,}5 - 4);$$

$$\sqrt{4{,}5} \approx 2 + \frac{0{,}5}{4} = 2{,}125.$$

Ответ: $\sqrt{4{,}5} \approx 2{,}125$.

Вычисление на калькуляторе показывает, что $\sqrt{4{,}5} = 2{,}12132\ldots$ Отсюда следует, что формула (1) даёт вполне пригодное для практики приближение.

Работа современных калькуляторов основана именно на подобных (1) приближённых формулах. Исторически сначала математики создали такие приближённые формулы, затем по ним были составлены таблицы вычислений, а потом эти таблицы были записа-

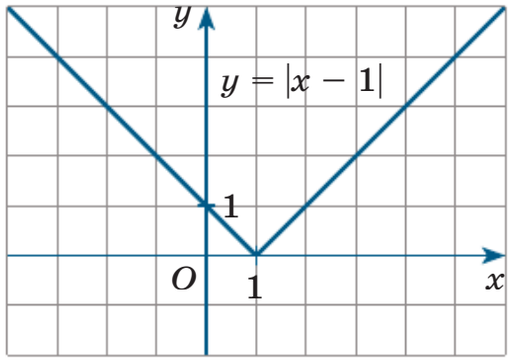


Рис. 37

ны в память калькуляторов и более сложных вычислительных машин.

Выясним, какая взаимосвязь существует между понятиями непрерывности и дифференцируемости функции в точке. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то выполняется приближённое равенство $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, которое становится всё точнее по мере приближения x к x_0. Значит,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = f(x_0).$$

Полученное равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Итак, *если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке, то она и непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение неверно. Например, функция $y = |x - 1|$ непрерывна везде, в частности в точке $x = 1$ (рис. 37), но касательная к графику функции в «точке стыка» (1; 0) не существует. Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке не существует производная, т. е. функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 1$.

Ещё один пример. На рисунке 38 изображён график функции $y = \sqrt[3]{x}$. Эта функция непрерывна на всей числовой прямой, в том числе в точке $x = 0$. И касательная к графику функции суще-

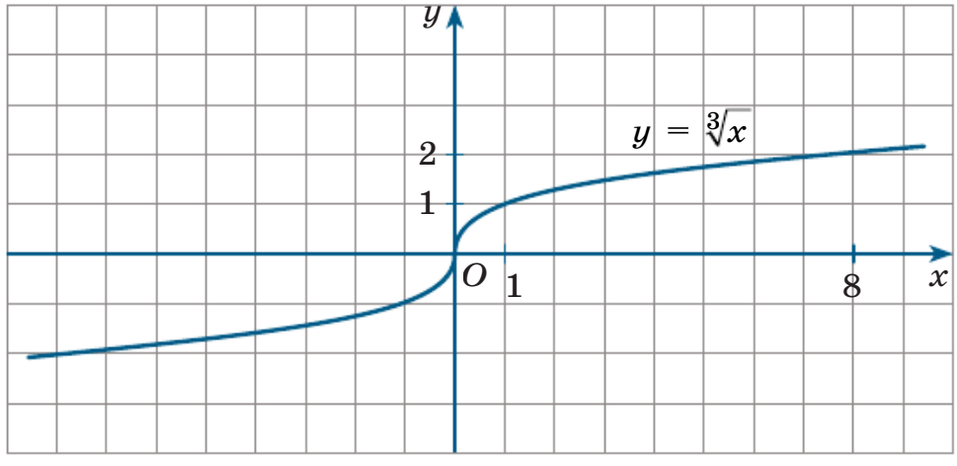


Рис. 38

ствует в любой точке, в том числе в точке $x = 0$. Но в этой точке касательная совпадает с осью Oy, т. е. перпендикулярна оси абсцисс, уравнение касательной имеет вид $x = 0$. Углового коэффициента у такой прямой нет, значит, не существует и производная в точке $x = 0$, т. е. функция $y = \sqrt[3]{x}$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

График функции помогает сделать вывод о её дифференцируемости. Если в точке $x = a$ можно провести касательную к графику, не параллельную оси ординат, то в этой точке функция дифференцируема. Если в точке $x = b$ касательная к графику функции не существует или она параллельна оси ординат, то в этой точке функция не дифференцируема.

В математике принята такая терминология: если из условия A следует условие B, то B называют *необходимым условием для* A; если из условия B следует условие A, то B называют *достаточным условием для* A. Проведённые выше рассуждения о связи дифференцируемости и непрерывности мы можем теперь завершить следующим выводом:

непрерывность функции в точке является необходимым, но не достаточным условием для дифференцируемости функции в этой точке.

Рассмотрим рисунок 39, на нём изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

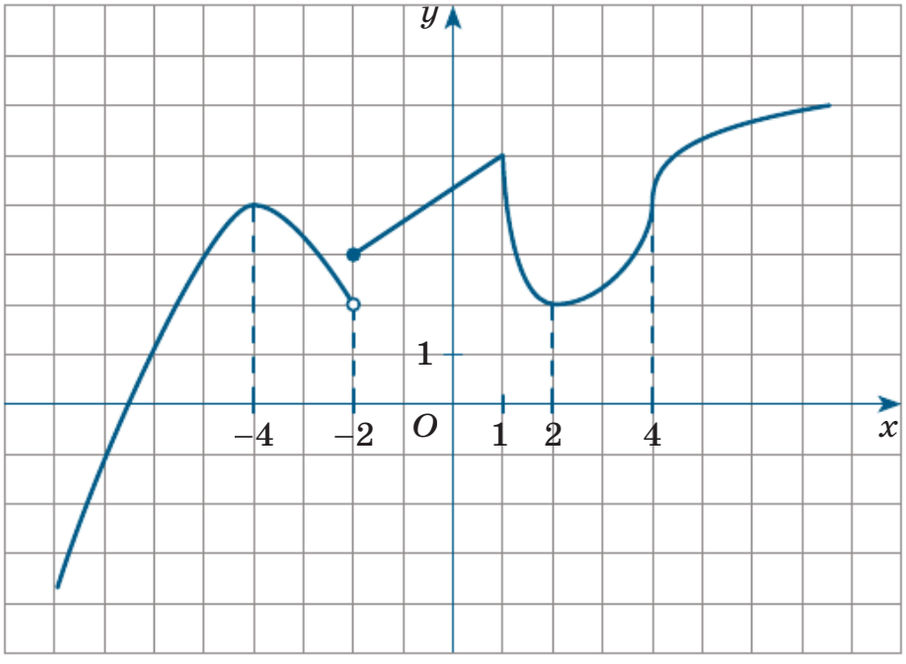


Рис. 39

Функция претерпевает разрыв в точке $x = -2$, в остальных точках она непрерывна. Функция не дифференцируема в точках $x = -2$ (точка разрыва), $x = 1$ (точка излома графика функции, в которой касательная к графику не существует), $x = 4$ (в этой точке касательная к графику существует, но она перпендикулярна оси абсцисс). Точки, в которых функция непрерывна, но не дифференцируема, будем называть *критическими точками*. Иными словами, критическая точка функции $y = f(x)$ — это такая точка x, в которой функция непрерывна, но $f'(x)$ не существует. На рисунке 39 две критические точки: $x = 1$ и $x = 4$.

Обратите внимание ещё на две точки графика, представленного на рисунке 39. В точках $x = -4$, $x = 2$ касательная к графику функции параллельна оси абсцисс. Такие точки будем называть *стационарными точками*. Иными словами, стационарная точка функции $y = f(x)$ — это такая точка x, в которой $f'(x) = 0$.

Упражнения

8.1. Найдите приращение функции Δy и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если:

а) $y = 0{,}4x$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}25$;
б) $y = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$;
в) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}41$;
г) $y = -5x + 6$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}15$;
д) $y = x^3$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
е) $y = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}2$.

8.2. Используя формулу $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, найдите приближённое значение функции:

а) $y = x^3$ при $x = 1{,}001$;
б) $y = \dfrac{1}{x}$ при $x = 9{,}95$;
в) $y = \sqrt{x}$ при $x = 0{,}96$;
г) $y = x^2$ при $x = 0{,}998$;
д) $y = \dfrac{1}{x}$ при $x = 1{,}009$;
е) $y = \sqrt{x}$ при $x = 9{,}3$.

8.3. Используя формулу $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, вычислите приближённое значение:

а) $\dfrac{1}{0{,}98}$;
б) $\dfrac{1}{2{,}008}$;
в) $1{,}02^3$;
г) $4{,}92^2$;
д) $\sqrt{2{,}04}$;
е) $\sqrt{6{,}5}$.

8.4. Куб с ребром 10 см равномерно отшлифовали со всех сторон, в результате чего каждое ребро уменьшилось на 0,05 см. Вычислите приближённо объём куба после шлифовки.

8.5. На рисунке 40 изображён график функции $y = f(x)$. Укажите точки, в которых функция не дифференцируема.

8.6. На рисунке 41, *а—г* изображены графики некоторых функций. Для каждой функции укажите точки, в которых производная равна нулю (стационарные точки), и точки, в которых производная не существует (точки разрыва и критические точки).

8.7. На рисунке 42, *а—г* изображены графики некоторых функций. Используя рисунок, укажите стационарные и критические точки.

8.8. Изобразите схематично график функции, обладающей следующими свойствами:
а) функция непрерывна и дифференцируема на промежутке $[-7; 5]$ и имеет две стационарные точки при $x = -3$, $x = 2$;
б) функция непрерывна на отрезке $[-4; 6]$, но не дифференцируема в точке $x = 1$, стационарных и критических точек не имеет;
в) функция определена на промежутке $(-5; 5)$, имеет разрыв при $x = 0$, имеет критическую точку при $x = -2$ и стационарную точку при $x = 3$;
г) функция непрерывна на промежутке $(-6; 3)$, не дифференцируема при $x = -1$, имеет одну критическую точку.

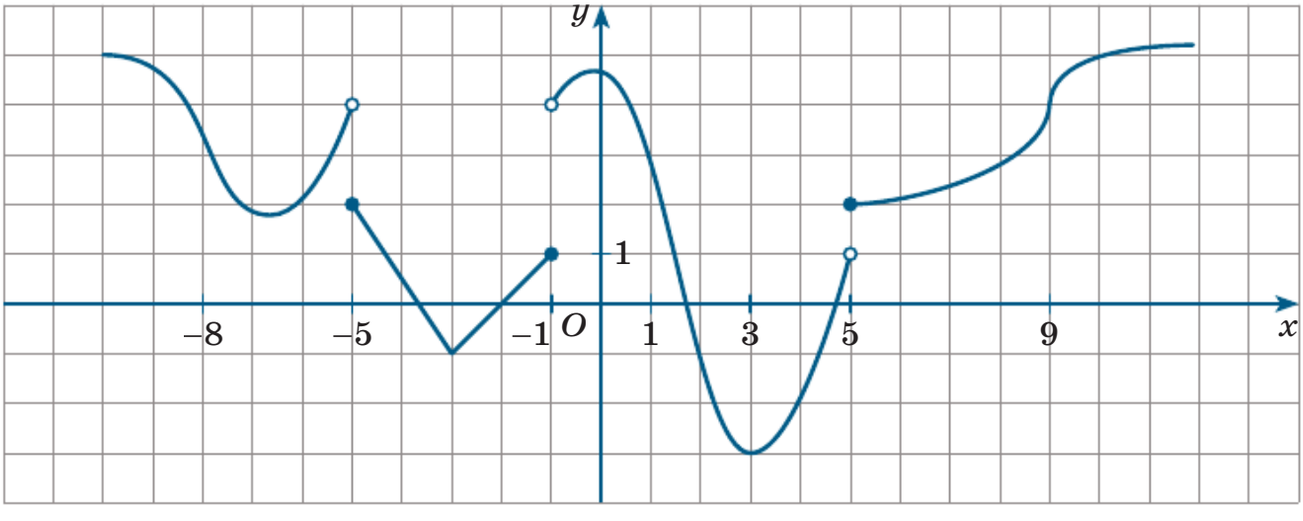


Рис. 40

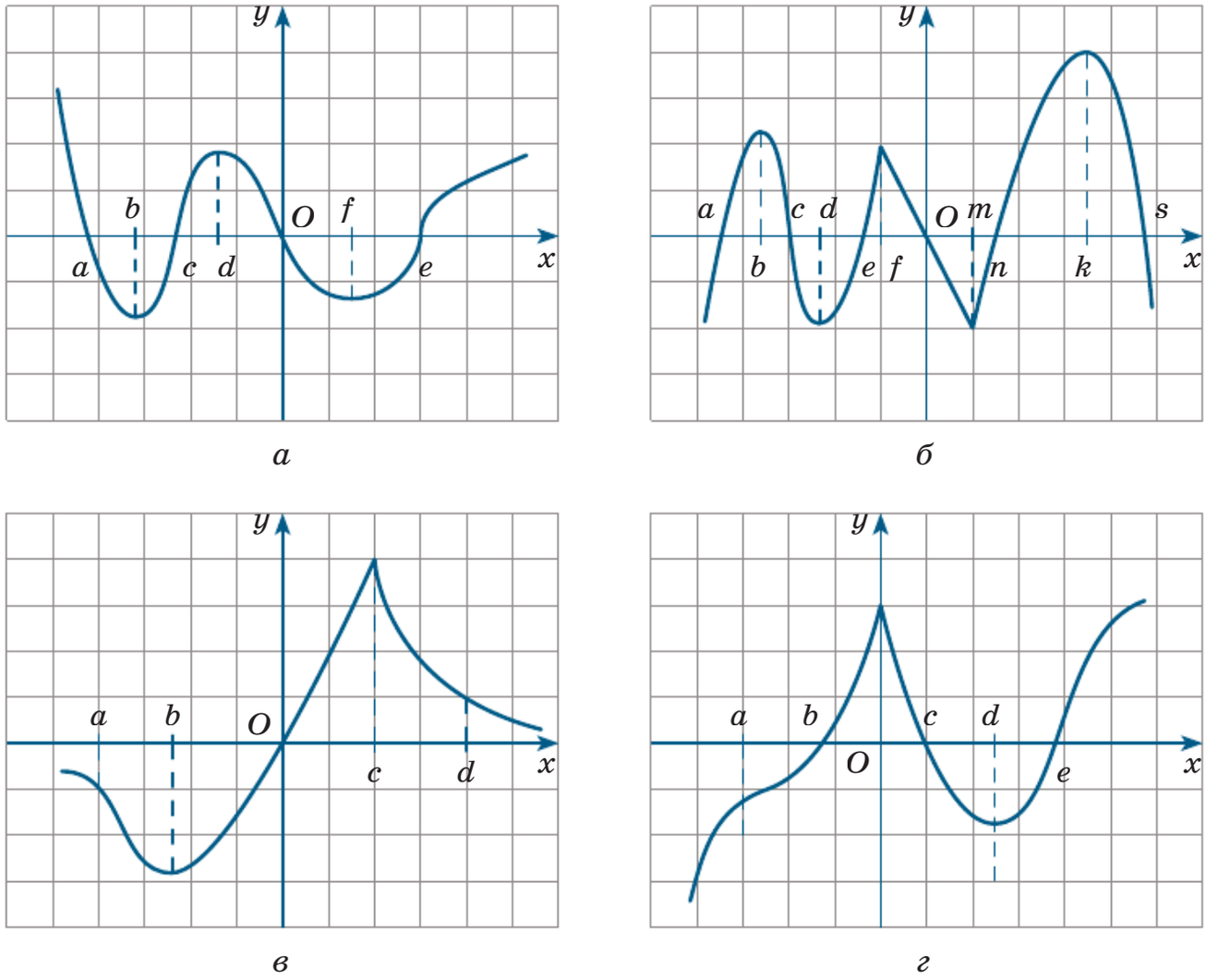


Рис. 41

8.9. а) Используя алгоритм нахождения производной, докажите, что $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

б) Найдите производную функций $y = \frac{1}{x^2}$; $y = \frac{1}{x^3}$; $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Упражнения для повторения

8.10. Дано: $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Вычислите:

а) $\sin(\alpha - \beta)$;
б) $\cos(\alpha + \beta)$;
в) $\cos(\alpha - \beta)$;
г) $\sin(\alpha + \beta)$;
д) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;
е) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

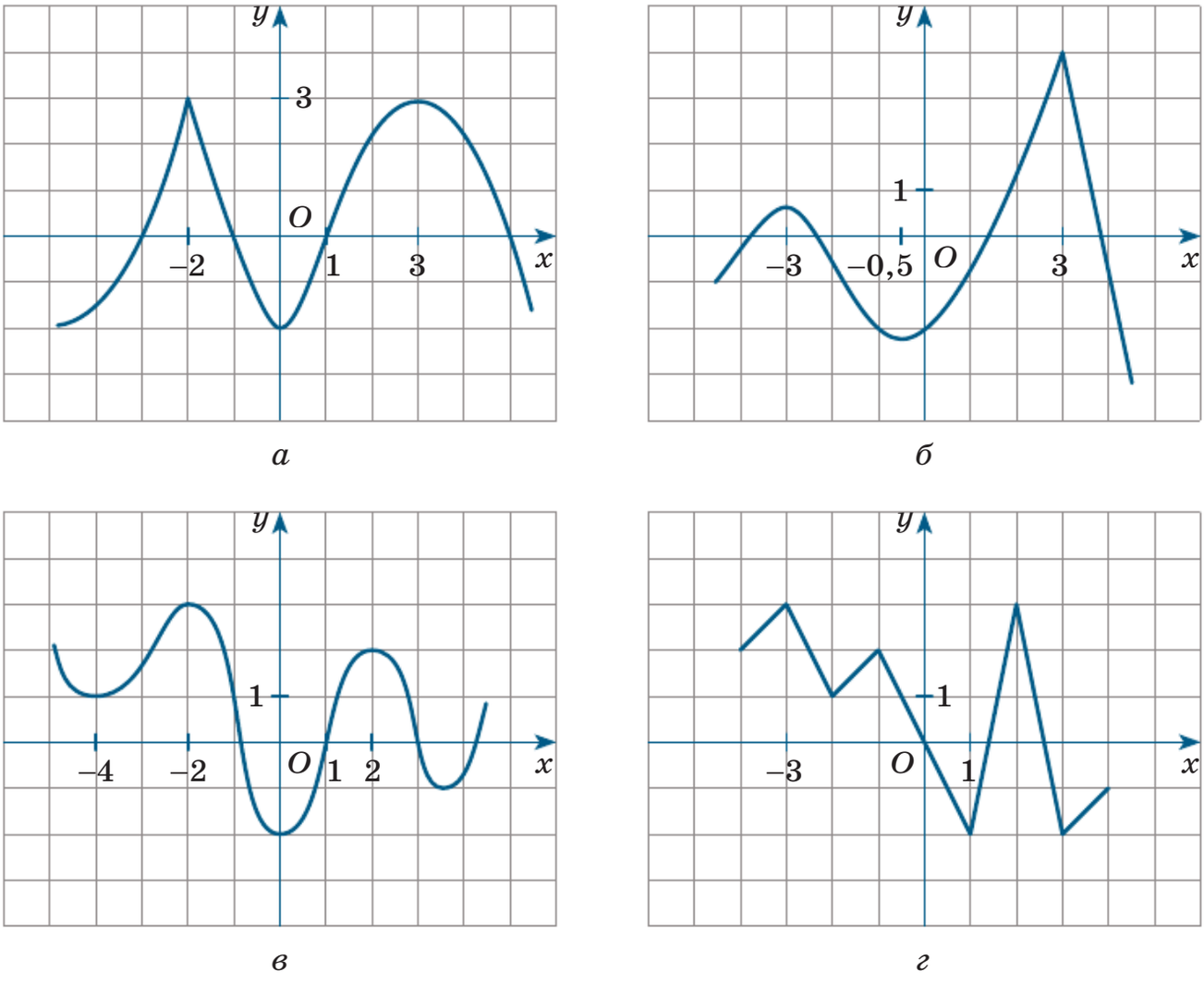


Рис. 42

8.11. Постройте график функции:

а) $y = \sin^2 x + 2\cos 2x$; б) $y = 2\cos^2 \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{2}$.

8.12. Решите уравнение:

а) $2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x = 5$; б) $\sqrt{1 - \sin 4x} = \sqrt{6}\cos 2x$.

ИКТ **8.13.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x + \pi, \text{ если } x < -\pi, \\ \sin x, \text{ если } -\pi \leqslant x < \pi, \\ \sqrt{x - \pi}, \text{ если } x \geqslant \pi. \end{cases}$

а) Постройте график функции $y = f(x)$.

б) Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

в) Найдите, при каких значениях параметра p уравнение $f(x) = p$ имеет более двух корней.

ИКТ **8.14.** а) При каких значениях параметра p уравнение $\frac{\sin 2x}{1-\cos x} = 0$ на отрезке $[0; p]$ имеет три корня?

б) При каких значениях параметра p уравнение $\frac{\cos 2x}{1+\sin x} = 0$ на отрезке $[0; p]$ имеет четыре корня?

§ 9. Уравнение касательной к графику функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$. Это значит, что в точке $M(a; f(a))$ можно провести касательную к графику этой функции. Составим уравнение касательной. Это уравнение, как уравнение любой прямой, не параллельной оси Oy, имеет вид $y = kx + m$, поэтому задача состоит в нахождении значений коэффициентов k и m.

Если $y = kx + m$ — уравнение касательной, то $k = f'(a)$, так что один коэффициент мы уже знаем. Далее, касательная проходит через точку $M(a; f(a))$, а это значит, что, подставив координаты точки M в уравнение $y = kx + m$, мы получим верное равенство $f(a) = ka + m$, откуда следует, что $m = f(a) - ka$. Остаётся лишь подставить найденные значения коэффициентов k и m в уравнение $y = kx + m$:

$$y = kx + m;$$
$$y = kx + (f(a) - ka);$$
$$y = f(a) + k(x - a);$$

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).} \qquad (1)$$

Итак, мы вывели *уравнение касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $x = a$.

Для процедуры нахождения касательной удобно использовать пошаговый алгоритм.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой a.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в формулу (1).

Пример 1 Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $x = -1$.

Решение. $f(x) = x^3$. Воспользуемся алгоритмом.

1) Обозначим абсциссу точки касания буквой a. По условию $a = -1$.

2) Вычислим $f(a)$, т. е. $f(-1)$: $f(-1) = (-1)^3 = -1$.

3) $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$; $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$.

4) Подставим найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в формулу (1):

$$y = -1 + 3(x + 1);$$
$$y = 3x + 2.$$

Ответ: $y = 3x + 2$.

Пример 2 К графику функции $y = \sqrt{x}$ провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = \frac{x}{4} - 1$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере $f(x) = \sqrt{x}$. Но обратите внимание: здесь, в отличие от предыдущего примера, не указана абсцисса a точки касания.

Начнём рассуждать так. Искомая касательная должна быть параллельна прямой $y = \frac{x}{4} - 1$. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты. Значит, угловой коэффициент искомой касательной должен быть равен угловому коэффициенту заданной прямой: $k_{\text{кас}} = \frac{1}{4}$. Однако $k_{\text{кас}} = f'(a)$. Таким образом, значение a мы можем найти из уравнения $f'(a) = \frac{1}{4}$.

Имеем: $f(x) = \sqrt{x}$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Интересующее нас уравнение $f'(a) = \frac{1}{4}$ теперь можно записать так: $\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{4}$. Решим это уравнение:

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{4}; \quad 2\sqrt{a} = 4; \quad \sqrt{a} = 2, \quad a = 4.$$

Теперь для составления уравнения искомой касательной можно действовать по алгоритму.

1) $a = 4$.

2) $f(a) = \sqrt{4} = 2$.

3) $f'(a) = \frac{1}{4}$.

4) Подставив значения $a = 4$, $f(a) = 2$, $f'(a) = \frac{1}{4}$ в формулу (1), получим:

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4); \quad y = \frac{1}{4}x + 1.$$

На рисунке 43 изображён график функции $y = \sqrt{x}$, проведена прямая $y = \frac{1}{4}x + 1$ — касательная к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке (4; 2) и прямая $y = \frac{x}{4} - 1$ (пунктиром), которой параллельна касательная.

Ответ: $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Пример 3* Из точки (0; –4) проведены две касательные к параболе $y = x^2$ (рис. 44). Найти угол между этими касательными.

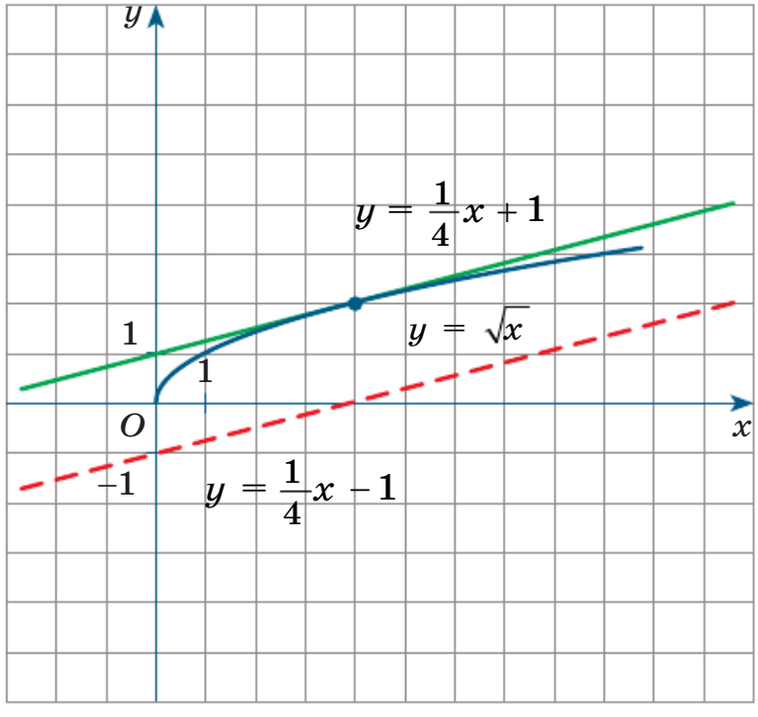


Рис. 43

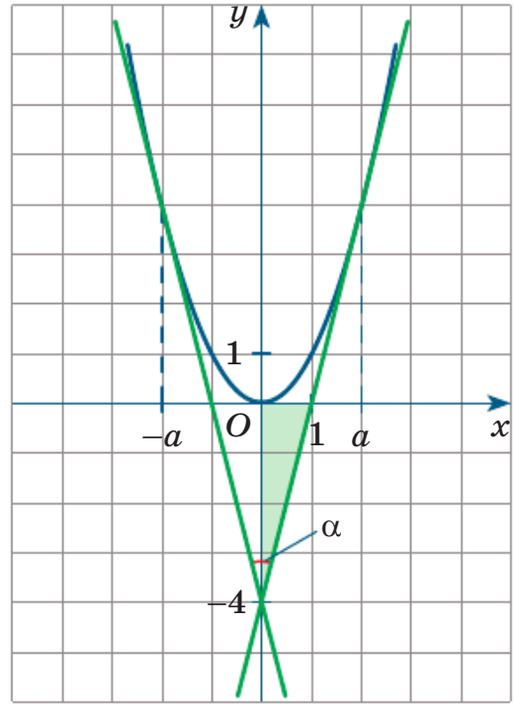


Рис. 44

Решение. Заметим, что и здесь, как в примере 2, не указаны абсциссы точек касания. Тем не менее будем придерживаться алгоритма составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере $f(x) = x^2$.

1) Пусть $x = a$ — абсцисса точки касания.

2) $f(a) = a^2$.

3) $f'(x) = 2x$, $f'(a) = 2a$.

4) Подставив значения a, $f(a) = a^2$, $f'(a) = 2a$ в формулу (1), получим:

$$y = a^2 + 2a(x - a);$$
$$y = 2ax - a^2.$$

По условию касательные проходят через точку $(0; -4)$. Подставив в уравнение $y = 2ax - a^2$ значения $x = 0$, $y = -4$, получим: $-4 = 2a \cdot 0 - a^2$; $a^2 = 4$; $a = \pm 2$. Подставив значения $a = 2$, $a = -2$ в уравнение $y = 2ax - a^2$, получим, соответственно, $y = 4x - 4$, $y = -4x - 4$. Уравнения касательных составлены.

Осталось ответить на вопрос задачи: чему равен угол α между касательными? Обратите внимание на прямоугольный треугольник, образованный правой касательной и осями координат, с острым углом $\frac{\alpha}{2}$ между касательной и осью ординат. Катеты этого треугольника равны 4 и 1, а $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$. Значит,

$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{4}, \quad \alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}.$$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

Пример 4* а) Доказать, что касательную к параболе $y = x^2$ в точке $M(a; a^2)$, где $a > 0$, можно построить так: взять середину P отрезка $[0; a]$ оси Ox и провести прямую MP.

б) Доказать, что касательную к кубической параболе $y = x^3$ в точке $M(a; a^3)$, где $a > 0$, можно построить так: разделить отрезок $[0; a]$ оси Ox на три равные части, взять точку $P\left(\frac{2a}{3}; 0\right)$ и провести прямую MP.

Решение. а) Запишем уравнение касательной в общем виде: $y = a^2 + 2a(x - a)$, $y = 2ax - a^2$. Найдём точку пересечения этой пря-

мой с осью абсцисс: $2ax - a^2 = 0$, $x = \frac{a}{2}$. Значит, касательная проходит через точки $M(a;\ a^2)$ и $P\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$.

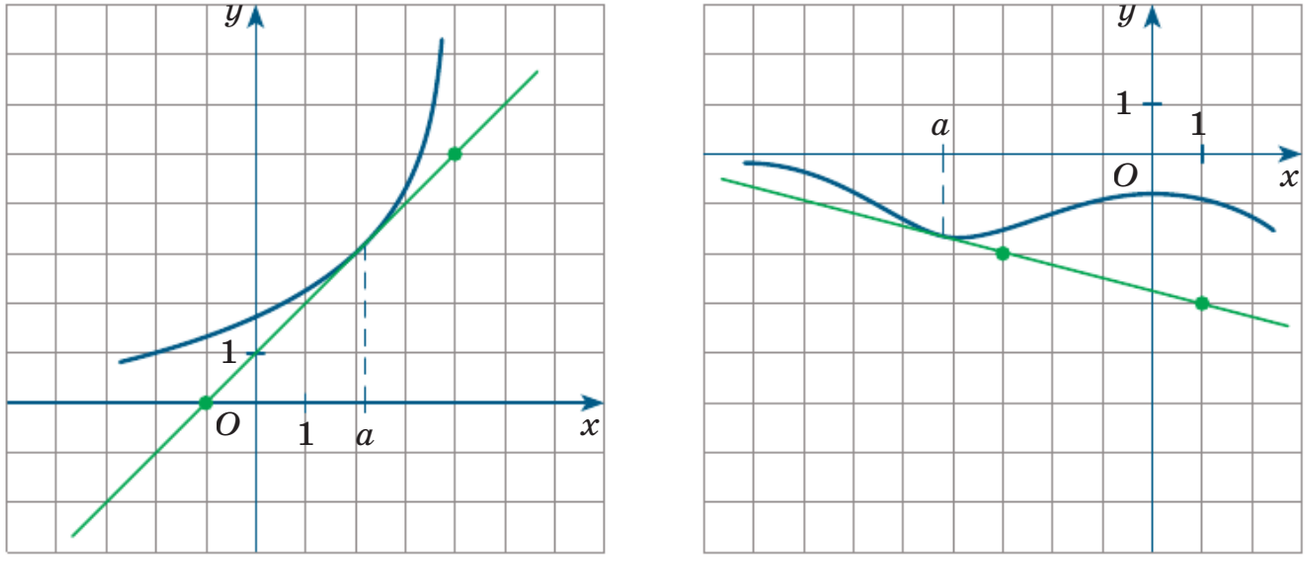
б) Запишем уравнение касательной в общем виде: $y = a^3 + 3a^2(x - a)$, $y = 3a^2x - 2a^3$. Найдём точку пересечения этой прямой с осью абсцисс: $3a^2x - 2a^3 = 0$, $x = \frac{2a}{3}$. Значит, касательная проходит через точки $M(a;\ a^3)$ и $P\left(\frac{2a}{3};\ 0\right)$.

Упражнения

9.1. а) На рисунке 45, *а*, *б* изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему, проведённая в точке $x = a$. Найдите тангенс угла между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

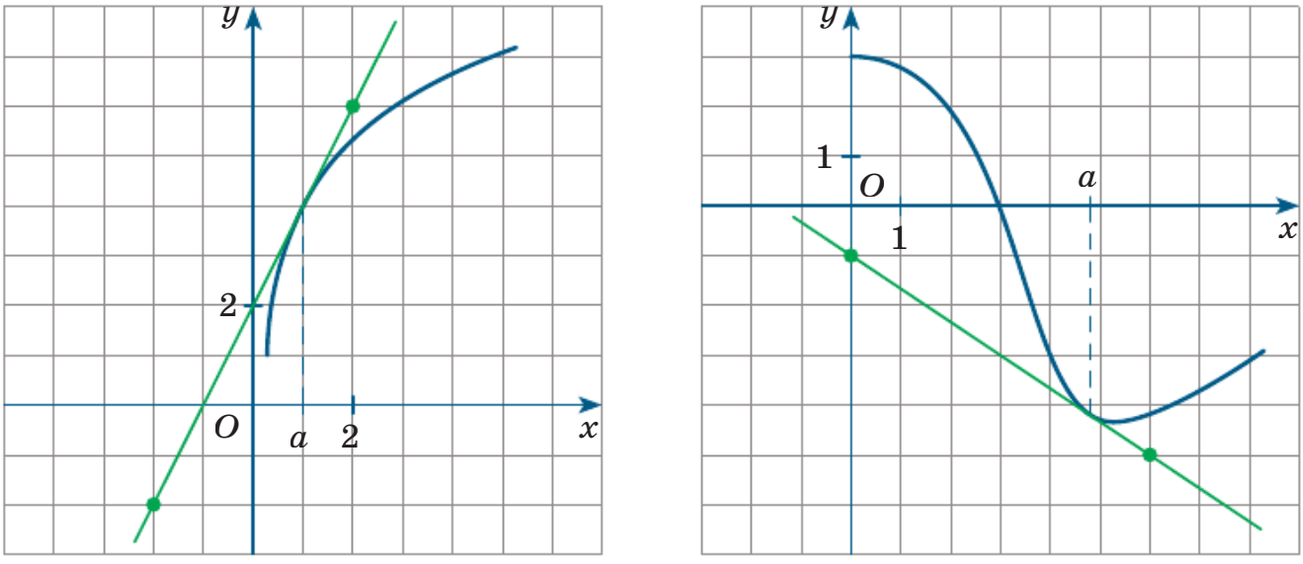
б) На рисунке 46, *а*, *б* изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему, проведённая в точке $x = a$. Найдите угловой коэффициент касательной.

9.2. а) На рисунке 47, *а* изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(a;\ b)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$.



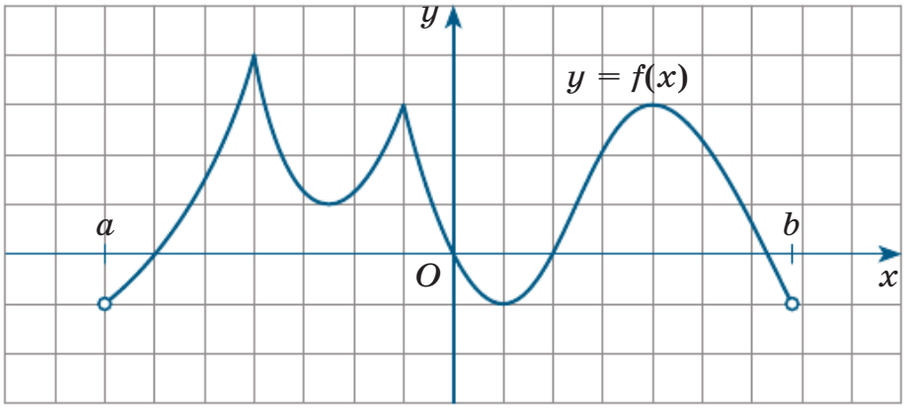
а *б*

Рис. 45

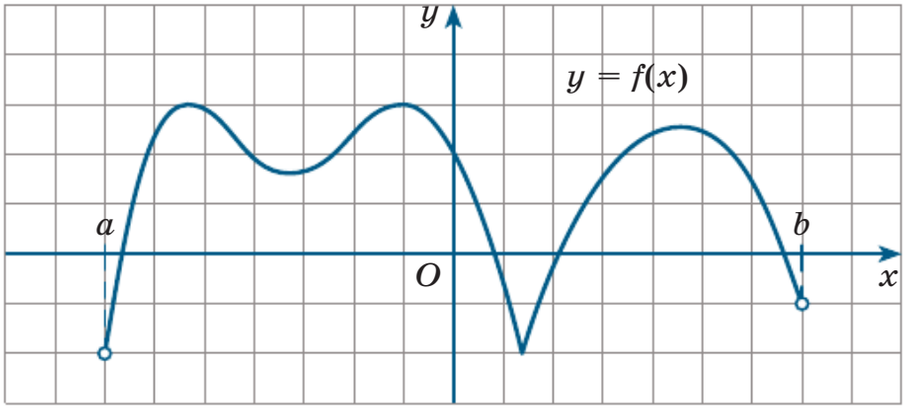


а *б*

Рис. 46



а



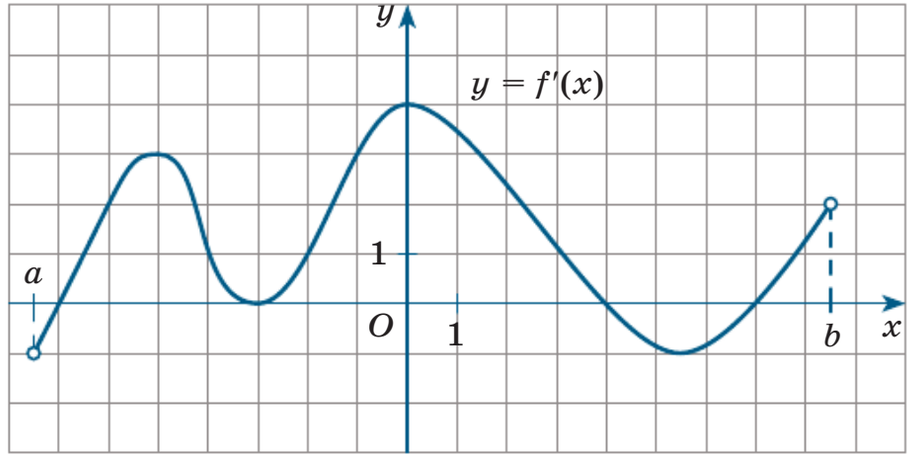
б

Рис. 47

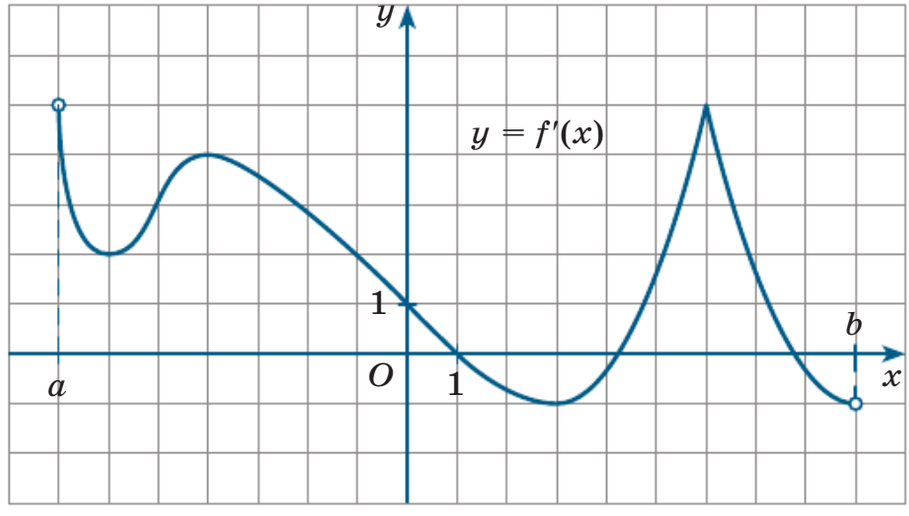
б) На рисунке 47, *б* изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -4$.

9.3. а) На рисунке 48, *а* изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(a; b)$. Найдите точки, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox.

б) На рисунке 48, *б* изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(a; b)$. Найдите точки, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 100$.



а



б

Рис. 48

9.4. а) На рисунке 49, *а* изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(a; b)$. Найдите точки, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 6$.

б) На рисунке 49, *б* изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(a; b)$. Найдите точки, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 5$.

9.5. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:

а) $f(x) = x^2$, $a = 4{,}5$;

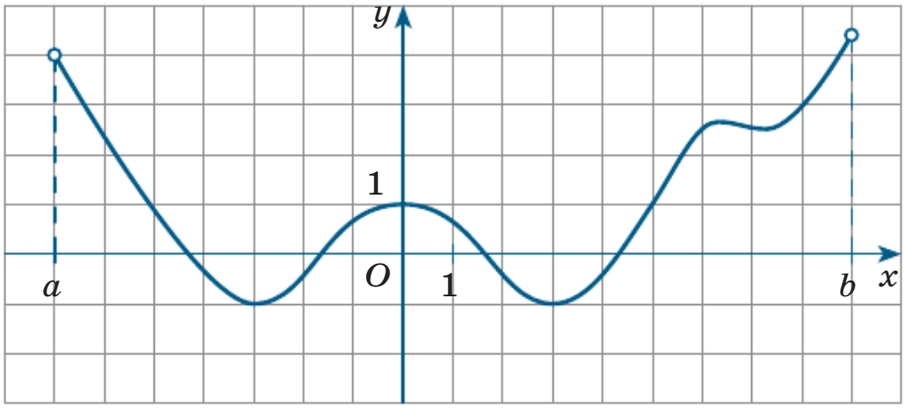
б) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 6{,}25$;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = \frac{2}{7}$;

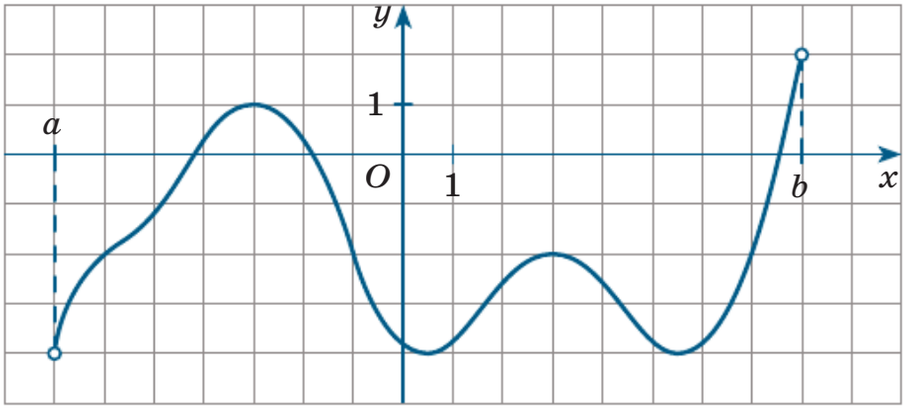
г) $f(x) = x^3$, $a = 1{,}2$;

д) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0{,}25$;

е) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0{,}9$.



а



б

Рис. 49

9.6. Найдите угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox:

а) проведённой к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке $a = 1$;

б) проведённой к ветви параболы $y = \sqrt{x}$ в точке $a = 0{,}75$.

9.7. Найдите абсциссу a точки касания прямой и графика данной функции, если известно значение производной в точке касания:

а) $y = x^3$, $y'(a) = 12$;

б) $y = \frac{1}{x}$, $y'(a) = -16$;

в) $y = \sqrt{x}$, $y'(a) = 3$;

г) $y = x^2$, $y'(a) = -6$;

д) $y = \frac{1}{x}$, $y'(a) = -0{,}09$;

е) $y = \sqrt{x}$, $y'(a) = 0{,}1$.

9.8. Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:

а) $f(x) = x^2$, $a = -3$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -1$;

г) $f(x) = x^3$, $a = -2$;

д) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$;

е) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$.

9.9. Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ на указанном рисунке:

а) рис. 50; б) рис. 51; в) рис. 52; г) рис. 53.

9.10. Найдите абсциссу точки касания, если известно, что касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна указанной прямой:

а) $f(x) = x^3$, $y = -2$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $y = 5 - x$;

в) $f(x) = \sqrt{x}$, $y = 0{,}5x + 1$;

г) $f(x) = x^2$, $y = 1$;

д) $f(x) = \frac{1}{x}$, $y = 3 - 4x$;

е) $f(x) = \sqrt{x}$, $y = x - 3$.

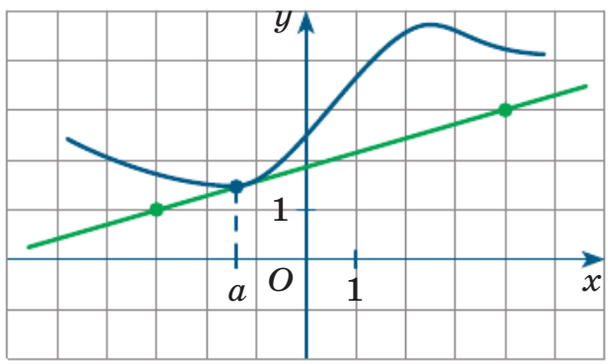


Рис. 50

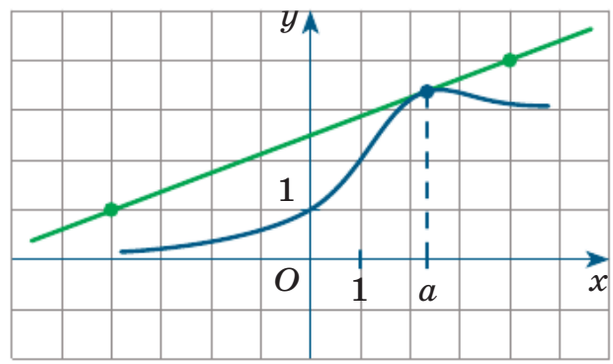


Рис. 51

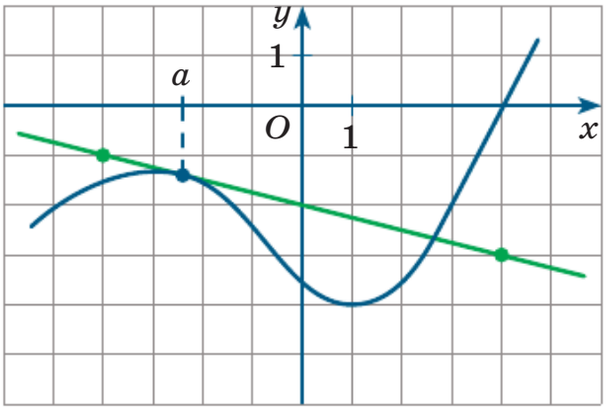


Рис. 52

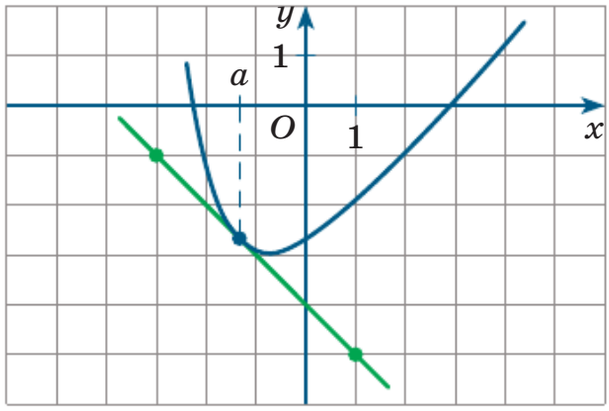


Рис. 53

9.11. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, параллельной заданной прямой:

а) $f(x) = x^3$, $y = 3x - 5$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $y = 1 - 4x$;

в) $f(x) = \sqrt{x}$, $y = x + 1$;

г) $f(x) = x^2$, $y = -2x + 1$;

д) $f(x) = \frac{1}{x}$, $y = -x + 6$;

е) $f(x) = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{4}x - 3$.

9.12. а) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^2$, проходящей через точку $M(0; -9)$.

б) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$, проходящей через точку $P(0; 2)$.

9.13. Из точки A проведены две касательные к графику функции $y = x^2$. Найдите угол между касательными, если:

а) $A\left(0; -\frac{1}{4}\right)$;

б) $A(0; -9)$;

в) $A\left(0; -\frac{1}{12}\right)$;

г) $A(0; -16)$.

9.14. а) Найдите значение параметра p, при котором прямая $y = x + p$ касается параболы $y = x^2$.

б) Найдите значение параметра p, при котором прямая $y = 0{,}5x + p$ касается графика функции $y = \sqrt{x}$.

9.15. а) Найдите значения параметра p, при каждом из которых прямая $y = p - 0{,}04x$ касается гиперболы $y = \frac{1}{x}$.

б) Найдите значения параметра p, при каждом из которых прямая $y = 3x + p$ касается кубической параболы $y = x^3$.

9.16. Пусть $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ при $x = a$ и пусть $(b; 0)$ — точка пересечения касательной с осью Ox. Отрезок оси Ox между точками $(b; 0)$ и $(a; 0)$ называют *подкасательной* при $x = a$ (рис. 54).
Докажите, что для функции $y = f(x)$, производная которой нигде не обращается в нуль, длина подкасательной при $x = a$ равна $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|$.

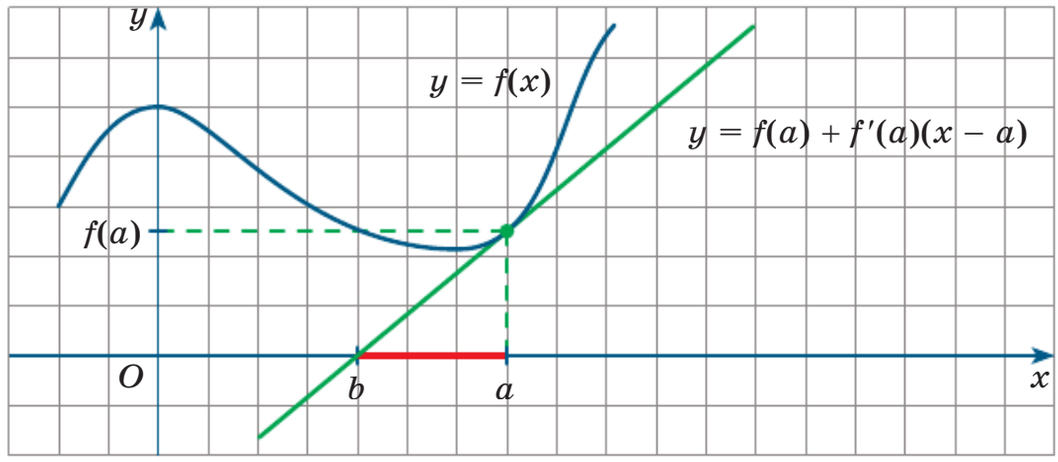


Рис. 54

9.17. Дана функция $y = \sqrt{x}$.
а) Составьте уравнение касательной к графику функции в точке $x = a$, $a > 0$.
б) Найдите точку пересечения касательной с осью абсцисс.
в) Докажите, что длина подкасательной в 2 раза больше абсциссы точки касания.
г) Объясните, как с помощью циркуля и линейки построить касательную к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = a$, $a > 0$.

9.18. Докажите, что касательную к гиперболе $y = \dfrac{1}{x}$ в точке $M\left(a; \dfrac{1}{a}\right)$ можно построить таким способом: 1) провести окружность с центром в точке M радиусом OM, которая пересечёт оси абсцисс и ординат соответственно в точках A и B; 2) провести прямую AB, которая и будет искомой касательной.

9.19. Составьте уравнения тех касательных к графику функции $y = x^3$, которые отсекают от осей координат треугольник площадью $\dfrac{2}{3}$.

9.20. Найдите множество точек координатной плоскости xOy, из которых парабола $y = x^2$ видна под прямым углом.

Упражнения для повторения

9.21. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(3\pi+\alpha)}$;

б) $\dfrac{\cos(4\pi-\beta)}{\operatorname{tg}(\pi+\beta)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}$.

Решите уравнение.

9.22. а) $\sin 2x + \sin x = \sin 3x$;

б) $\sin x + \sin 5x = 1 - 2\sin^2 x$;

в) $\cos 3x = \cos 5x + \sin 4x$;

г) $2\cos^2 x - \sin 3x = 1 + \sin 7x$.

9.23. а) $\sin x \cdot \sqrt{4 - x^2} = 0$;

б) $\cos x \cdot \sqrt{4x - 3 - x^2} = 0$;

в) $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0$;

г) $\cos x \cdot \sqrt{9 - x^2} = 0$;

д) $\sin x \cdot \sqrt{5x - 2 - 2x^2} = 0$;

е) $\operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0$.

9.24. На лабораторной работе по физике учащиеся находили кинетическую энергию колеблющегося на пружине груза. Известно, что кинетическая энергия E (Дж) вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m (кг) — масса груза, v (м/с) — скорость колебания груза. Кроме того, скорость колебания v изменяется по закону $v = v_0 \cos\dfrac{2\pi t}{T}$, где v_0 (м/с) — начальная скорость, t (с) — время с момента начала колебаний, T (с) — период колебаний. Найдите кинетическую энергию груза, если $m = 0{,}15$ кг, $v_0 = 0{,}6$ м/с, $T = 3$ с, $t = 6$ с.

9.25. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$;

б) $y = \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$;

в) $y = \dfrac{\sin 2x}{4\sin x}$;

г) $y = \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} 2x}$.

§ 10. Арифметические операции над производными

В этом параграфе речь пойдёт о правилах нахождения производной суммы, произведения и частного функций.

Теорема 1. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы в точке x, то и их сумма дифференцируема в точке x, причём производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Доказательство. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Введём обозначение: $f(x) + g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем:

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

2) В точке $x + \Delta x$ имеем:

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x).$$

3)
$$\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) =$$
$$= (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x)) =$$
$$= (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f + \Delta g.$$

Итак, $\Delta y = \Delta f + \Delta g$.

4)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

5)
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x).$$

Итак,

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Обычно эту теорему формулируют в виде следующего правила:

производная суммы равна сумме производных.

При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций.

Пример 1 Найти скорость изменения функции $y = x^2 + \sqrt{x} - 2x + 5$ в точке $x = 16$.

Решение. Скорость изменения функции в точке $x = 16$ — это, напомним, значение производной в указанной точке. Имеем:

$$y' = \left(x^2 + \sqrt{x} - 2x + 5\right)' = (x^2)' + \left(\sqrt{x}\right)' + (-2x + 5)' = \\ = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2;$$

$$y'(16) = 2 \cdot 16 + \frac{1}{2\sqrt{16}} - 2 = 30\frac{1}{8}.$$

Теорема 2. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы в точке x, то и их произведение дифференцируемо в точке x, причём производная произведения вычисляется по следующему правилу[1]:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Доказательство. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной и тем, что равенство $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$ можно записать в виде $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$.

1) Введём обозначение: $f(x)g(x) = h(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем:

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) = (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) = \\ = f(x)g(x) + \Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g.$$

3) $$\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x) = \\ = (f(x)g(x) + \Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g) - f(x)g(x) = \\ = \Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g.$$

4) $$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

5) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) =$$

$$= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) + f'(x)g'(x) \cdot 0 = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

[1] Это правило иногда называют правилом Лейбница.

Поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta h}{\Delta x} = h'(x)$, а $h(x) = f(x)g(x)$, то получаем, что

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Обычно эту теорему формулируют в виде следующего правила:

производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых: первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

Пример 2 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3\sqrt{x}$ в точке $x = 1$.

Решение. Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $x = 1$ — это, напомним, значение производной в указанной точке. Имеем:

$$y' = \left(x^3\sqrt{x}\right)' = (x^3)'\sqrt{x} + x^3\left(\sqrt{x}\right)' = 3x^2\sqrt{x} + x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y'(1) = 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{1} + 1^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = 3{,}5.$$

Отметим два полезных следствия из доказанных теорем.

Следствие 1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то и функция $y = kf(x)$ дифференцируема в точке x, причём $(kf(x))' = kf'(x)$.

Доказательство. Для функции $y = kf(x)$ воспользуемся правилом дифференцирования произведения и учтём, что производная постоянной функции $y = k$ равна нулю:

$$(kf(x))' = k'f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x).$$

Обычно доказанное следствие формулируют в виде следующего правила:

постоянный множитель можно вынести за знак производной.

Следствие 2. Если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ дифференцируемы в точке x, то и любая их линейная комбинация, т. е. функция $y = k_1 f(x) + k_2 g(x) + k_3 h(x)$, дифференцируема в точке x, причём

$$(k_1 f(x) + k_2 g(x) + k_3 h(x))' = k_1 f'(x) + k_2 g'(x) + k_3 h'(x).$$

Например,

$$\left(3x^3 - \frac{2x^2}{3} + \frac{7}{x} - 4\right)' = 3(x^3)' - \frac{2}{3}(x^2)' + 7\left(\frac{1}{x}\right)' - 4' =$$

$$= 3 \cdot 3x^2 - \frac{2}{3} \cdot 2x + 7 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 =$$

$$= 9x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{7}{x^2}.$$

Теорема 3. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то и их частное дифференцируемо в точке x, причём производная частного вычисляется по следующему правилу:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Идея доказательства этой теоремы та же, что была использована при доказательстве теорем 1 и 2, но технически доказательство довольно громоздко, поэтому мы его не приводим.

Пример 3 Найти производную функции $y = \dfrac{x^3}{2x - 5}$ в точке $x \neq 2{,}5$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{x^3}{2x - 5}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot (2x - 5) - x^3(2x - 5)'}{(2x - 5)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (2x - 5) - x^3 \cdot 2}{(2x - 5)^2} = \frac{4x^3 - 15x^2}{(2x - 5)^2}.$$

Упражнения

Используя правила дифференцирования, найдите производную функции.

10.1. а) $y = x^2 + 4$;
б) $y = -x^2 - 5x$;
в) $y = 6x^2 + 2x - 3$;
г) $y = 2x^2 - 9$;
д) $y = x^2 + 8x$;
е) $y = -4x^2 - 6x + 1$.

10.2. а) $y = x^3 - 2x^2 + x$;
б) $y = -2x^3 + 15x^2$;
в) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 4$;
г) $y = -x^3 + 4x^2 - 3$;
д) $y = 10x^3 - 18x$;
е) $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$.

10.3. а) $y = \sqrt{x} + 3x^2$;
б) $y = 1\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + 4$;
в) $y = -2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$;
г) $y = -5x^3 - \sqrt{x}$;
д) $y = 0{,}05x^2 + \frac{1}{x} - x$;
е) $y = \frac{4}{x} - \frac{x}{6} + 10\sqrt{x}$.

10.4. а) $y = x^3\left(1 + \sqrt{x}\right)$;
б) $y = -2x^2(x^3 - 4)$;
в) $y = 4\sqrt{x} \cdot (1 - 5x^2)$;
г) $y = x^2\left(\sqrt{x} - 2\right)$;
д) $y = 3x^3(x^2 + 5)$;
е) $y = \left(2 + \frac{1}{6}x^3\right) \cdot 2\sqrt{x}$.

10.5. а) $y = (x^2 + 2x)(x^2 - 4)$;
б) $y = (x^3 + 2)(x^2 - x)$;
в) $y = (2x^2 + 3x - 1)(x^3 - 1)$;
г) $y = (2x^2 - 1)(x^2 + 3x)$;
д) $y = (x^2 - 3)(x^3 + x)$;
е) $y = (-5x^2 - x + 4)(x^3 + 2x^2)$.

10.6. а) $y = \left(\frac{3}{x} + 2x\right) \cdot \sqrt{x}$;
б) $y = \left(7 - \frac{4}{x}\right)(2x - 5)$;
в) $y = (x^3 - 2x)\left(\frac{8}{x} + x^2\right)$;
г) $y = \left(-\frac{5}{x} + x^2\right) \cdot \sqrt{x}$;
д) $y = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{3}\right)(5x - 3)$;
е) $y = (4x - 5x^2)\left(3x - \frac{6}{x}\right)$.

10.7. а) $y = \frac{1}{3x+1}$; в) $y = -\frac{1}{x^3+1}$; д) $y = \frac{1}{2x^2+x}$;

б) $y = -\frac{1}{4x-1}$; г) $y = \frac{1}{x^2-5}$; е) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

10.8. а) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; в) $y = -\frac{x^2}{3x-4}$; д) $y = \frac{4-x^3}{2x-1}$;

б) $y = \frac{6-5x}{x+2}$; г) $y = -\frac{4x+3}{x^3}$; е) $y = \frac{x^2-7}{5-4x}$.

10.9. а) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$; в) $y = \frac{x^2+2x}{-4\sqrt{x}}$; д) $y = \frac{2\sqrt{x}-x}{x^2}$;

б) $y = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$; г) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-x}$; е) $y = \frac{4x^2+x}{\sqrt{x}+1}$.

10.10. а) $y = \frac{x^2+2x-5}{3x-4}$; г) $y = \frac{2x^3-x^2+x-3}{3x-1}$;

б) $y = \frac{1+3x-x^2}{0,5x+1}$; д) $y = \frac{x^2-7x+5}{2x^2-1}$;

в) $y = \frac{x^3+2x^2-3x+4}{2x+1}$; е) $y = \frac{x^3+2x^2-3x}{x^2+x}$.

10.11. Найдите значение производной заданной функции в точке x_0, если:

а) $y = x^3 - 3x + 5$, $x_0 = -1$; г) $y = x^3 - 6x^2 + 7$, $x_0 = 2$;

б) $y = (x^2 - 2)(2x^3 + 1)$, $x_0 = 2$; д) $y = (4x^2 + 3)(x^3 - 1)$, $x_0 = 1$;

в) $y = \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$; е) $y = \frac{2\sqrt{x}}{0,5x^2-2}$, $x_0 = 1$.

10.12. Найдите скорость изменения заданной функции в указанной точке:

а) $y = \frac{2}{2x-4}$, $x_0 = 3$; г) $y = -\frac{3}{5x+1}$, $x_0 = 1$;

б) $y = x^3 - \frac{4}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 9$; д) $y = \frac{8}{\sqrt{x}} + 3x^2$, $x_0 = 16$;

в) $y = \frac{1}{x^2+1} + \frac{3}{x}$, $x_0 = -2$; е) $y = \frac{1}{x^3-1} - \frac{2}{x}$, $x_0 = -1$.

10.13. Материальная точка движется по прямой по закону $s = s(t)$. Найдите скорость её движения в момент времени t_0 (в секундах), если:

а) $s(t) = t^2 - 20$, $t = 0{,}5$ с;
б) $s(t) = t^2 + 4t$, $t = 2$ с;
в) $s(t) = t^2 - 2t + 3$, $t = 3$ с;
г) $s(t) = t^2 + 12$, $t = 1{,}5$ с;
д) $s(t) = t^2 - 5t$, $t = 1$ с;
е) $s(t) = t^2 + 3t + 2$, $t = 2{,}5$ с.

10.14. Найдите угловой коэффициент касательной к графику данной функции в точке с абсциссой a:

а) $y = x^2 + 3x - 2$, $a = 0$;
б) $y = -x^3 + 2x^2 - 4$, $a = -1$;
в) $y = \frac{1}{3}x^3 - 0{,}5x^2 + 3x - 1$, $a = 2$;
г) $y = -x^2 + 4x + 3$, $a = 1$;
д) $y = x^3 - x^2 + 2$, $a = -2$;
е) $y = -2x^3 + x^2 - x + 1$, $a = 1$.

10.15. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику данной функции в точке a:

а) $y = \sqrt{x}(x + 1)$, $a = 3$;
б) $y = \frac{4x + 1}{2x - 3}$, $a = -2$;
в) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$, $a = -1$;
г) $y = 2\sqrt{x}(x - 2)$, $a = 4$;
д) $y = \frac{6x - 5}{3x + 2}$, $a = \frac{1}{3}$;
е) $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, $a = 1$.

10.16. Найдите угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = f(x)$, проведённой в точке с абсциссой $x = a$:

а) $y = x^3 - 5x^2 + 6x - 4$, $a = 1$;
б) $y = -5x^3 + 4x^2 + x - 10$, $a = 0$.

10.17. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$;
б) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$;
в) $y = \frac{x^2 + 3x}{2x - 3}$;
г) $f(x) = x^3 - 12x + 9$;
д) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 3$;
е) $y = \frac{0{,}5x^2 - 4x}{x + 4}$.

10.18. Найдите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику данной функции равен k:

а) $y = x^2 - 3x + 9$, $k = 1$;

б) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $k = 0$;

в) $y = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x} - 3$, $k = -1$;

г) $y = x^2 + 4x - 7$, $k = 2$;

д) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$, $k = 3$;

е) $y = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, $k = 0$.

10.19. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку с абсциссой a:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2$, $a = 2$;

б) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, $a = 1$;

в) $f(x) = \frac{12}{\sqrt{x}} - x$, $a = 9$;

г) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 2$, $a = 2$;

д) $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x}$, $a = 1$;

е) $f(x) = \frac{1}{x^3} + 6\sqrt{x}$, $a = 1$.

10.20. Составьте уравнение той касательной к графику функции $y = g(x)$, которая параллельна указанной прямой:

а) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2$, $y = 9x - 1$;

б) $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 6x$, $y = 2 - x$;

в) $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$, $y = 2x + 1$;

г) $g(x) = -x^3 + 4$, $y = 5 - 12x$;

д) $g(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x - 2$, $y = x$;

е) $g(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1}$, $y = 7x + 3$.

10.21. а) Составьте уравнения касательных к параболе $y = x^2 - 3x + 1$ в точках с ординатой, равной 5.

б) Составьте уравнение каждой из тех касательных к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, для которых угол между касательной и осью Ox равен 45°.

10.22. а) Найдите точки пересечения с осью ординат тех касательных к графику функции $y = \frac{3x-1}{x+8}$, которые образуют с осью абсцисс угол 45°.

б) Найдите точки пересечения с осью абсцисс тех касательных к графику функции $y = \frac{2x-2}{x+1}$, у которых угловой коэффициент равен 4.

10.23. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если:

а) $f(x) = x^2 - x^3$;

б) $f(x) = \frac{x^2+5}{3x-2}$;

в) $f(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 8x)$;

г) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2$;

д) $f(x) = \frac{x^2+12}{2x+1}$;

е) $f(x) = \sqrt{x}\,(6x - x^2)$.

10.24. Решите неравенство $f'(x) < 0$, если:

а) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 6x$;

б) $f(x) = (x^2 - 5)(x - 1)$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3x+1}$;

г) $f(x) = 20x - 0{,}5x^2 - \frac{1}{3}x^3$;

д) $f(x) = (x^2 - 7)(x - 2)$;

е) $f(x) = \frac{2x-1}{2x^3}$.

10.25. а) Найдите значение параметра p, при котором прямая $y = p - x$ касается параболы $y = x^2 - 2x + 4$.

б) Найдите значение параметра p, при котором прямая $y = 2x - p$ касается гиперболы $y = -\frac{2}{x-1}$.

10.26. Составьте уравнение той касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in (-\infty; 0)$, которая отсекает от осей координат треугольник площадью $\frac{9}{8}$.

10.27. а) Составьте уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 - x^2)$, которые пересекаются под углом 120° в точке, лежащей на оси ординат.

б) Найдите угол между касательными, проведёнными к графику функции $y = x^3 - 7x^2 + 14x - 7$ в точках $x = 1$, $x = 2$.

10.28. При каких значениях параметра p касательные к графику функции $y = 4x^2 - |p|x$, проведённые в точках его пересечения с осью абсцисс, образуют между собой угол 60°?

10.29. Прямая $y = 7x - 10$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке с абсциссой 2 и пересекает ось абсцисс в точке $x = 1$. Найдите значения коэффициентов a, b, c.

10.30. а) Строится мост параболической формы, соединяющий пункты A и B, расстояние между которыми 200 м. Въезд на мост и съезд с моста должны быть прямолинейными участками, касательными к параболе и направленными к горизонту под углом 15°. Составьте уравнение профиля моста в системе координат xOy, где ось абсцисс проходит через точки A и B, а ось ординат проходит через середину отрезка AB.
б) Профиль моста имеет форму параболы с осью, проходящей вертикально через середину моста, длина основания которого равна 120 м, а высота центральной части — 10 м. Каким должен быть наклон насыпи на обоих концах моста?

Упражнения для повторения

10.31. Известно, что $\log_5 2 = a$ и $\log_5 3 = b$. Выразите через a и b:
а) $\log_5 24$;
б) $\log_5 36$;
в) $\log_5 54$;
г) $\log_5 72$;
д) $\log_5 6{,}75$;
е) $\log_5 \frac{2}{9}$.

ИКТ **10.32.** Постройте и прочитайте график функции:
а) $y = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x < 3, \\ 8(x-2)^{-1}, & \text{если } x \geqslant 3; \end{cases}$
б) $y = \begin{cases} x^{-2}, & \text{если } x < 0, \\ \ln x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

10.33. Решите уравнение:
а) $\log_3 x - 2\log_x 3 = -1$;
б) $\log_5 x + 2\log_x 5 = 3$;
в) $\log_7 x - 6\log_x 7 = 1$;
г) $\log_2 x + 9\log_x 2 = 10$.

10.34. Решите неравенство:
а) $\frac{x^2 + 4x + 4}{3^x - 27} \geqslant 0$;
б) $\frac{0{,}2^x - 0{,}008}{x^2 - 10x + 25} < 0$;
в) $\frac{25 - 0{,}2^x}{4x^2 + 4x + 1} \geqslant 0$;
г) $\frac{x^2 + 6x + 9}{2^x - 4} > 0$.

10.35. При каких значениях параметра b уравнение

$$9^x + 2b \cdot 3^{x+1} + 9 = 0$$

не имеет корней?

§ 11. Дифференцирование тригонометрических функций

При дифференцировании функций следует различать *правила* и *формулы*. О правилах дифференцирования (производная суммы, произведения, частного, производная линейной комбинации функций) мы говорили в предыдущем параграфе. Знаем мы и формулы дифференцирования конкретных функций — их пока совсем немного: нам известны производные функций $y = C$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$. На протяжении всей главы 2 запас формул дифференцирования будет постоянно пополняться. В этом параграфе речь пойдёт об отыскании производных тригонометрических функций.

Выведем формулу дифференцирования функции $y = \sin x$. В процессе рассуждений нам понадобится первый замечательный предел $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ — с этим соотношением мы познакомили вас в § 4. И, как обычно, будем действовать по алгоритму из § 7.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = \sin x$.

2) $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. Преобразуем полученное выражение, воспользовавшись формулой «разность синусов» $\left(\sin s - \sin t = 2 \sin \frac{s - t}{2} \cos \frac{s + t}{2} \right)$:

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{(x + \Delta x) - x}{2} \cos \frac{(x + \Delta x) + x}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}$. В правой части полученного равенства содержится выражение $\frac{\Delta x}{2}$, которое удоб-

но обозначить новой буквой, например t. Тогда получим: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin t \cos(x + t)}{t}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin t \cos(x + t)}{t}$.

Далее рассуждаем так: $\Delta x \to 0$, а $t = \frac{\Delta x}{2}$, значит, $t \to 0$, и под знаком предела вместо условия $\Delta x \to 0$ можно записать $t \to 0$.

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin t \cos(x + t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \to 0} \cos(x + t).$$

Получили произведение пределов, первый из которых равен 1, второй в силу непрерывности функции $y = \cos(x + t)$ равен $\cos x$, и произведение пределов равно $\cos x$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$ — такова производная рассматриваемой функции $y = \sin x$.

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

В частности, для функции $y = \sin x$ значение производной в точке $x = 0$ равно $\cos 0$, т. е. 1. Это значит, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$ равен 1, т. е. касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45° (рис. 55). А теперь вспомните: когда в 10-м классе мы строили график функции $y = \sin x$, мы обратили внимание на то обстоятельство, что синусоида выходит из начала координат как бы под

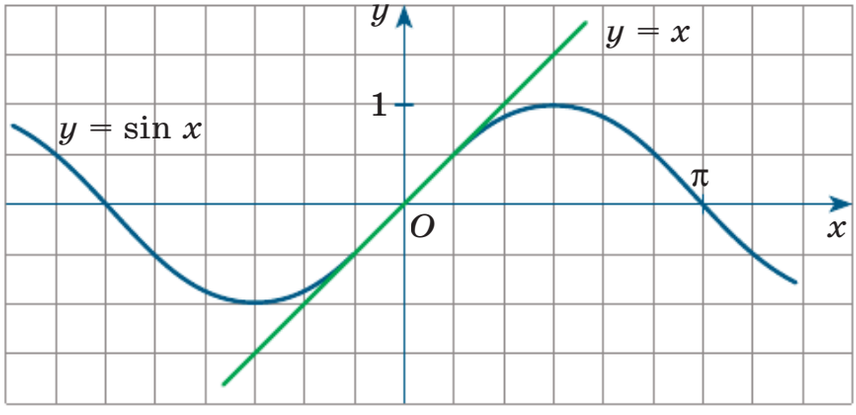


Рис. 55

углом 45°. В то время мы не смогли дать объяснение этому факту, зато теперь дали.

Используя рассуждения, аналогичные тем, что мы провели при выводе формулы дифференцирования функции $y = \sin x$, можно получить формулу дифференцирования функции $y = \cos x$:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Пример 1 Доказать, что функция $y = 2\sin x - 3\cos x$ удовлетворяет уравнению[1] $2y' - 3y = 13\cos x$.

Решение. Имеем:

$$y' = (2\sin x - 3\cos x)' = 2(\sin x)' - 3(\cos x)' = 2\cos x + 3\sin x.$$

Значит, $2y' - 3y = 2(2\cos x + 3\sin x) - 3(2\sin x - 3\cos x) = 13\cos x$. Таким образом, мы доказали, что функция $y = 2\sin x - 3\cos x$ удовлетворяет уравнению $2y' - 3y = 13\cos x$.

Пример 2 Найти производную функции $y = \sin 2x$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, и правилом дифференцирования произведения:

$$(\sin 2x)' = (2\sin x \cos x)' = 2((\sin x)' \cos x + \sin x(\cos x)') =$$
$$= 2(\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x.$$

Выведем формулу дифференцирования функции $y = \operatorname{tg} x$. Воспользуемся тем, что $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, и применим правило дифференцирования частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

[1] Уравнения, в состав которых входит аргумент, функция и производная функции, называют *дифференциальными уравнениями*.

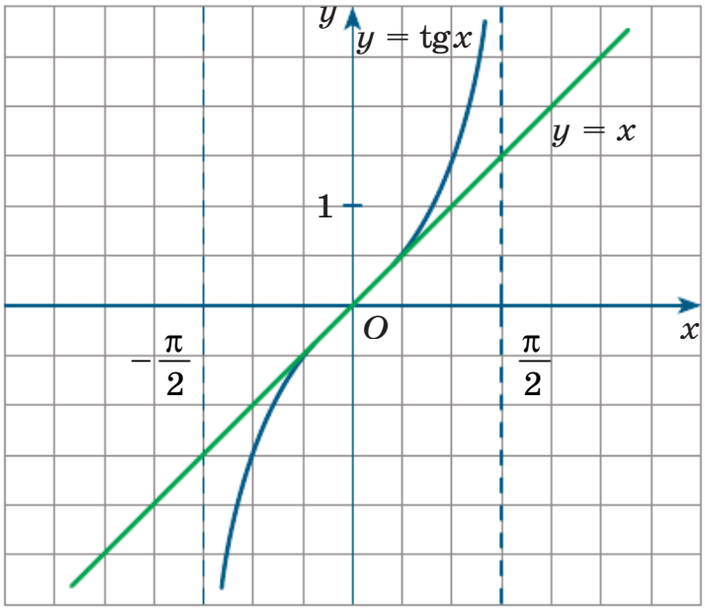


Рис. 56

Аналогично выводится формула дифференцирования функции $y = \operatorname{ctg} x$:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Если $f(x) = \operatorname{tg} x$, то $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, в частности $f'(0) = \cos 0 = 1$. Это значит, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x = 0$ равен 1, а потому эта касательная образует с положительным направлением оси Ox угол 45°. Это обстоятельство следует учитывать при построении графика функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 56).

Пример 3 Составить уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Решение. Здесь $f(x) = \operatorname{tg} x$. Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции (см. § 9).

1) Обозначим абсциссу точки касания буквой a. По условию $a = \dfrac{3\pi}{4}$.

2) Вычислим $f(a)$, т. е. $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$.

3) $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$.

4) Подставим найденные числа $a = \frac{3\pi}{4}$, $f(a) = -1$, $f'(a) = 2$ в уравнение касательной $y = f(a) + f'(a)(x - a)$:

$$y = -1 + 2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$y = 2x - 1 - \frac{3\pi}{2}.$$

Упражнения

Найдите производную функции.

11.1. а) $y = \sin x - 2$; в) $y = -\sin x + 4x$; д) $y = 3x - \cos x$;
б) $y = \cos x + 7$; г) $y = \operatorname{tg} x + x$; е) $y = \operatorname{ctg} x - 9$.

11.2. а) $y = -\sin x + \frac{1}{x}$; в) $y = \sin x + x^3$; д) $y = x^2 + \cos x$;
б) $y = \sqrt{x} - \cos x$; г) $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{x}$; е) $y = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}$.

11.3. а) $y = 2\cos x$; г) $y = -3\sin x$;
б) $y = 0{,}5\sin x - x$; д) $y = 1{,}2\cos x + 2x$;
в) $y = -4\operatorname{tg} x + 1$; е) $y = 1{,}5\operatorname{ctg} x + 3$.

11.4. а) $y = \sin x + \cos x$; г) $y = 2\operatorname{tg} x + \cos x$;
б) $y = 4\operatorname{ctg} x - \cos x$; д) $y = \sin x - 2\cos x$;
в) $y = 3\sin x - \operatorname{tg} x$; е) $y = \sin x - \operatorname{ctg} x$.

11.5. а) $y = 2x\cos x$; в) $y = x^3 \operatorname{ctg} x$; д) $y = (\operatorname{tg} x + 1)\sin x$;
б) $y = -x^2 \sin x$; г) $y = \sqrt{x}\ \operatorname{tg} x$; е) $y = (\sin x - 2)\cos x$.

11.6. а) $y = \frac{3}{\cos x}$; г) $y = \frac{2}{\sin x}$;

б) $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$; д) $y = \frac{1}{\cos x - \operatorname{ctg} x}$;

в) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x - \sin x}$; е) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$.

11.7. а) $y = \sin x \cos x$; в) $y = \frac{1}{\sin x \cos x}$; д) $y = \frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$;

б) $y = \cos x \operatorname{ctg} x$; г) $y = \sin x \operatorname{tg} x$; е) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}$.

11.8. Найдите значение производной данной функции в точке x_0:

а) $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$; г) $y = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$;

б) $y = 2\cos x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$; д) $y = -2\sin x$, $x_0 = \frac{3\pi}{4}$;

в) $y = 3\operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$; е) $y = -\operatorname{ctg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

11.9. Найдите угловой коэффициент касательной к графику данной функции в точке x_0:

а) $y = \sin x - \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$; г) $y = \sin x + \cos x$, $x_0 = 0$;

б) $y = 2\sin x - \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$; д) $y = 3\operatorname{tg} x - \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{6}$;

в) $y = \frac{1}{4}\operatorname{ctg} x + \cos x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$; е) $y = \sin x + \operatorname{ctg} x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

11.10. Найдите скорость изменения функции в точке x_0:

а) $y = 3\sin x - x$, $x_0 = 0$; г) $y = 2x - 3\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

б) $y = 2x + \frac{\operatorname{tg} x}{4}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; д) $y = 3\operatorname{ctg} x - 2x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$;

в) $y = \frac{x}{\pi}\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; е) $y = \frac{2x}{\pi}\sin x$, $x_0 = \pi$.

11.11. Найдите тангенс угла между осью Ox и касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:

а) $f(x) = \frac{x^2}{\pi}\sin x$, $a = \frac{\pi}{2}$;

б) $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \frac{x^2}{\pi}$, $a = \frac{\pi}{3}$;

в) $f(x) = 4\operatorname{ctg} x + 3x$, $a = \frac{11\pi}{6}$;

г) $f(x) = x\cos x$, $a = 3\pi$;

д) $f(x) = \sqrt{2}\sin x - \frac{x^3}{\pi^2}$, $a = \frac{\pi}{4}$;

е) $f(x) = -3\operatorname{tg} x + 2x$, $a = \frac{7\pi}{6}$.

11.12. Найдите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ равен k:

а) $g(x) = 3\sin x - \cos x$, $k = 0$;

б) $g(x) = -2\cos x + x$, $k = 2$;

в) $g(x) = 3{,}5x + 3\operatorname{ctg} x$, $k = -\frac{1}{2}$;

г) $g(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $k = 0$;

д) $g(x) = \operatorname{tg} x - 3x$, $k = 1$;

е) $g(x) = \cos x \sin x - 3$, $k = \frac{1}{2}$.

11.13. Найдите точки, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна данной прямой:

а) $f(x) = \sin x$, $y = -x + 4$;

б) $f(x) = -3\operatorname{ctg} x$, $y = 4x - 2$;

в) $f(x) = \sqrt{3}x - 2\cos x$, $y = 8$;

г) $f(x) = \cos x$, $y = \frac{1}{2}x - 3$;

д) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $y = x - 2$;

е) $f(x) = x - \sqrt{2}\sin x$, $y = 1 + 2x$.

11.14. Найдите угол между осью Ox и касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:

а) $y = 2\sin x,\ a = \frac{\pi}{6}$;

б) $y = \sin x \cos x,\ a = \frac{\pi}{2}$;

в) $y = \frac{1}{\cos x},\ a = \frac{3\pi}{4}$;

г) $y = \frac{2}{3}\cos x,\ a = \frac{\pi}{3}$;

д) $y = \operatorname{tg} x - \sqrt{2}\sin x,\ a = \frac{\pi}{4}$;

е) $y = \frac{3}{\sin x},\ a = \frac{2\pi}{3}$.

11.15. Решите уравнение $f'(x) = g'(x)$, если:
а) $f(x) = x\sin x,\ g(x) = -\cos x$;
б) $f(x) = \sin x \cos x,\ g(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$.

11.16. а) Докажите, что функция $y = 4\cos x - 3\sin x$ удовлетворяет уравнению $4y - 3y' = 25\cos x$.

б) Докажите, что функция $y = \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x$ удовлетворяет уравнению $y = y'\sin x$.

11.17. а) Докажите, что $(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = \frac{4}{\sin^2 2x}$.

б) Докажите, что $\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{1}{1 + \sin x}$.

11.18. а) Составьте уравнение той касательной к графику функции $y = \sin x,\ x \in [0; 4]$, которая параллельна прямой $y = -\frac{x}{2} + 1$.

б) Составьте уравнение той касательной к графику функции $y = \cos x,\ x \in [2; 5]$, которая параллельна прямой $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 4$.

Упражнения для повторения

ИКТ **11.19.** Постройте график функции:

а) $y = 3^{|x|}$;

б) $y = 0{,}5^{|x+1|}$;

в) $y = 2^{|x|-2}$;

г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} - 1$.

11.20. Решите уравнение:

а) $2^{x^2+2x-5} - 2^{8-2x-x^2} = 7$;

б) $8 + 3^{2-x-x^2} = 3^{x^2+x}$.

11.21. Вычислите:

а) $\log_3 81 \cdot (\log_6 4 + \log_6 9)$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} 125 \cdot (\lg 300 - \lg 3)$;

в) $\dfrac{\log_{\frac{2}{7}} 8 - \log_{\frac{2}{7}} 343}{\log_{2\sqrt{3}} 12}$;

г) $\log_2 16 \cdot (\lg 5 + \lg 20)$;

д) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{81} \cdot (\log_{12} 432 - \log_{12} 3)$;

е) $\dfrac{\log_{\sqrt{2}} 5\sqrt{2} - \log_{\sqrt{2}} 10}{\log_{3\sqrt{5}} 45}$.

11.22. Решите уравнение:

а) $\log_2 \sqrt{3x+13} + \log_4 (5x-1) = \log_{\sqrt[3]{3}} 3$;

б) $\ln^2 x + \ln(ex) = \ln e^3$.

11.23. Решите неравенство:

$$\log_5(x^2+5x) + 2 \geqslant \log_5(x^2+4x-5) - \log_{0,2} \frac{x}{25}.$$

§ 12. Дифференцирование обратной функции

Для начала напомним некоторые сведения об обратных функциях, о которых шла речь в учебнике для 10-го класса. Пусть функция $y = f(x)$, $x \in X$, обратима (например, монотонна на X) и Y — область её значений. Тогда у неё существует обратная функция $x = g(y)$, $y \in Y$. Соответствия $y = f(x)$, $x \in X$, и $x = g(y)$, $y \in Y$, выражают одну и ту же взаимосвязь между переменными x и y (например, $y = x^3$ и $x = \sqrt[3]{y}$). Поэтому графики функций $y = f(x)$, $x \in X$, и $x = g(y)$, $y \in Y$, представляют собой одно и то же множество точек координатной плоскости xOy.

На рисунке 57 изображён график функции $y = f(x)$, который можно рассматривать и как график обратной функции $x = g(y)$, проведена касательная к графику в некоторой точке $(x; y)$. Эта касательная образует с осью абсцисс угол α, а с осью ординат — угол β.

Что представляет собой производная прямой функции $y = f(x)$ с геометрической точки зрения? Ответ: $y' = \operatorname{tg}\alpha$. Чтобы подчеркнуть, что в записи прямой функции аргументом является переменная x, запишем так: $y'_x = \operatorname{tg}\alpha$. Что представляет собой производная обратной функции $x = g(y)$, где аргументом является y, с геометрической точки зрения? Ответ: $x'_y = \operatorname{tg}\beta$. Но обратите внимание на рисунок: $\alpha + \beta = 90°$, значит,

$$x'_y = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{y'_x}.$$

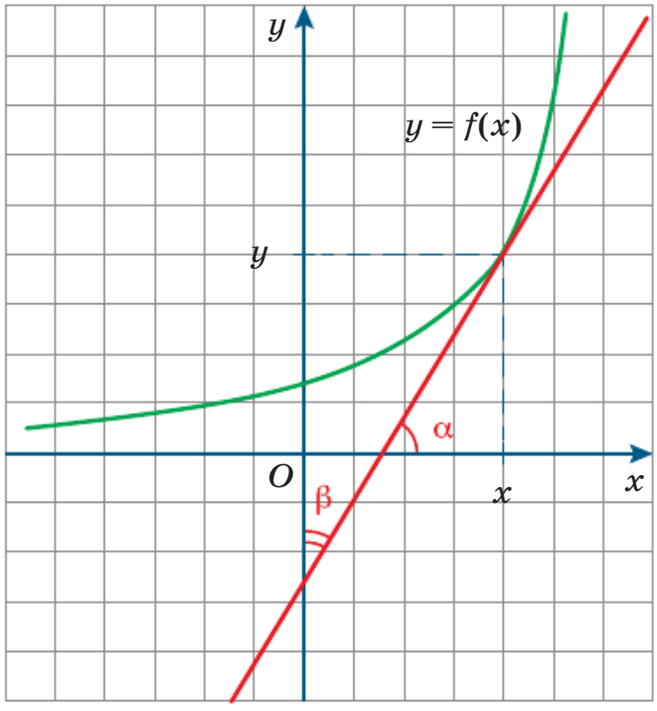


Рис. 57

Итак, *производная обратной функции вычисляется по формуле*

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

В курсе высшей математики даётся строгое доказательство правила дифференцирования обратной функции, мы же ограничимся приведённым выше геометрическим подходом.

Приведём пример использования полученной формулы. Для функции $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$, обратной является функция $x = \sqrt{y}$. Имеем: $y'_x = 2x$, значит, $x'_y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Итак, для функции $x = \sqrt{y}$ получили, что $x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. А если, как мы это обычно делали, поменять в записи обратной функции x и y местами, т. е. записать обратную функцию в виде $y = \sqrt{x}$, то и в записи производной, поменяв x и y местами, получим $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, т. е. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, а это та же формула, которую мы получили в § 7.

Применим правило дифференцирования обратной функции для вывода формул дифференцирования обратных тригонометрических функций.

1. Функция $y = \arcsin x$ является обратной по отношению к функции $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит,

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. Функция $y = \arccos x$ является обратной по отношению к функции $x = \cos y$, $y \in [0; \pi]$. Значит,

$$(\arccos x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Итак,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной по отношению к функции $x = \operatorname{tg} y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит,

$$(\operatorname{arctg} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является обратной по отношению к функции $x = \operatorname{ctg} y$, $y \in (0; \pi)$. Значит,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Пример 1 Вычислить значение производной функции:

а) $y = \arcsin x$ в точке $x = \frac{1}{2}$; б) $y = \arccos x$ в точке $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) $y' = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

б) $y' = (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$y'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = -\sqrt{2}.$$

Пример 2 Составить уравнение касательной к графику функции: а) $y = \operatorname{arctg} x$ в точке $x = \sqrt{3}$; б) $y = \operatorname{arcctg} x$ в точке $x = -1$.

Решение. Запишем уравнение касательной в общем виде: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

а) Здесь $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = \sqrt{3}$, $f(a) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f'(a) = f'\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{1}{4}$. Значит, уравнение касательной таково:

$$y = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\left(x - \sqrt{3}\right),$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}.$$

б) Здесь $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $a = -1$,

$$f(a) = \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2},\ f'(a) = f'(-1) = -\frac{1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Значит, уравнение касательной таково:

$$y = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}(x+1),$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3\pi - 2}{4}.$$

Пример 3 Доказать, что для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо тождество

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Найдём производную функции $y = \arcsin x + \arccos x$:

$$y' = (\arcsin x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Значит, в любой точке интервала $(-1; 1)$, где существует производная, выполняется равенство $y' = 0$, а это значит, что $y = C$, где C — некоторое число. Чтобы найти значение C, достаточно взять любую точку из интервала $(-1; 1)$, например $x = 0$. Имеем:

$$\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, на интервале $(-1; 1)$ выполняется равенство $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Выполняется оно и в точках $x = \pm 1$, смотрите:

$$\arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Требуемое тождество доказано.

Упражнения

12.1. Вычислите производную заданной функции в указанной точке:

а) $y = \arcsin x$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $y = \operatorname{arctg} x$, $x = 5$;

в) $y = \arccos x$, $x = -\frac{1}{3}$;

г) $y = \operatorname{arcctg} x$, $x = -7$.

12.2. Составьте уравнение касательной к графику заданной функции в указанной точке:

а) $y = \arcsin x$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $y = \arccos x$, $x = \frac{1}{2}$;

г) $y = \operatorname{arcctg} x$, $x = -\sqrt{3}$.

12.3. Найдите производную функции:

а) $y = x^2 \arccos x + \dfrac{x^3}{\arcsin x}$;

б) $y = \sqrt{x}\,\operatorname{arctg} x$;

в) $y = 3\arcsin x - 2\arccos x$;

г) $y = \dfrac{\operatorname{arcctg} x}{x}$.

12.4. Докажите тождество: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

12.5. Решите неравенство:

а) $(\arcsin x)' \leqslant 5$; б) $(\arccos x)' \leqslant -3$.

12.6. Докажите, что функция $y = (x^3 + x)\operatorname{arctg} x$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{y' - x}{y} = \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}.$$

Упражнения для повторения

12.7. Вычислите:

а) $\dfrac{\log_5 0{,}5}{\log_5 32 - \log_5 4}$; в) $\dfrac{\log_2 1{,}5}{\log_8 7{,}5 + \log_8 0{,}3}$;

б) $\dfrac{\log_4 75 - \log_2 5}{\log_4 18 + \log_4 0{,}5}$; г) $\dfrac{\log_4 27 - 2\log_4 3}{\log_4 30 + \log_4 0{,}3}$.

12.8. Решите уравнение:

а) $\left(\sqrt{50}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2}\right)^x = 0{,}1$;

б) $3 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x+7} - 10 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x+8} = 25$;

в) $\left(\sqrt{3}\right)^{2x} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^{2x} = 36$;

г) $5 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^{5x+3} + 12 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^{5x+4} = 42$.

12.9. Решите уравнение:

а) $\log_3(2 + \log_2(x + 2)) = 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}(1 + \log_2(2^x - 7)) = -1$;

в) $\log_5(3 + \lg(x + 1)) = 0$;

г) $\log_{\frac{1}{4}}(1 + \log_3(3^x - 8)) = -1$.

12.10. Решите неравенство:

а) $6^x + 6^{x+2} \leqslant 222$;

б) $3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x} - 10 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x} + 3 < 0$;

в) $5^{2x} < 3^x$;

г) $7^{x+1} - 7^x \geqslant 294$;

д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - 26 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{x} + 5 > 0$;

е) $4^x > \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$.

12.11. При каких значениях параметра a не имеет корней уравнение:

а) $\frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2}{x^2 - 3x} + ax^2 - 4ax = 0$;

б) $\frac{(2x - 4)(2x + 2)}{x^4 - x^3 - 2x^2} + 2ax = a(x^2 + 1)$?

§ 13. Дифференцирование сложной функции

Определение. Пусть функция $u = g(x)$ определена на множестве X и U — область её значений, а функция $y = f(u)$ определена на множестве U. Поставим в соответствие каждому x из X число $f(g(x))$. Тем самым на множестве X будет задана функция $y = f(g(x))$. Её называют **композицией функций** или **сложной функцией**. Переменную u называют *промежуточным аргументом*, а переменную x, как всегда, — *независимой переменной*.

Если множества X и U явно не указаны, то, как обычно, подразумевается, что речь идёт о естественных областях определения обеих функций.

Приведём примеры сложных функций.

1) $y = \sin^2 x$. Здесь $u = \sin x$, а $y = f(u) = u^2 = (\sin x)^2 = \sin^2 x$;

2) $y = \sqrt{5x-3}$. Здесь $u = 5x - 3$, а $y = f(u) = \sqrt{u} = \sqrt{5x-3}$. Область определения сложной функции — луч $\left[\frac{3}{5}; +\infty\right)$;

3) $y = \ln(\cos x)$. Здесь $u = \cos x$, а $y = f(u) = \ln u = \ln(\cos x)$. Область определения сложной функции задаётся неравенством $\cos x > 0$.

Поговорим о том, как искать производную сложной функции. Начнём со случая, когда $u = kx + m$, $k \neq 0$.

Теорема 1. Производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по формуле

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m).$$

Доказательство. Пусть $t = t(x) = kx + m$. Тогда

$$t(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + m = (kx + m) + k\Delta x = t(x) + k\Delta x,$$
$$\Delta t = t(x + \Delta x) - t(x) = (t(x) + k\Delta x) = k\Delta x.$$

Вычислим y', воспользовавшись тем, что по определению $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Имеем:

$$y' = (f(kx + m))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(k(x + \Delta x) + m) - f(kx + m)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = k \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Так как $\Delta t = k\Delta x$ и $k \neq 0$, то $\Delta x \to 0$ в том и только том случае, когда $\Delta t \to 0$. Значит,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) = f'(kx + m),$$

и в итоге $(f(kx + m))' = kf'(kx + m)$.

Если, в частности, $k = 1$, то $(f(x + m))' = f'(x + m)$. Отсюда следует, что

$$((x + 3)^2)' = 2(x + 3),$$

$$\left(\frac{1}{x - 2{,}5}\right)' = -\frac{1}{(x - 2{,}5)^2},$$

$$\left(\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = -\frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \text{ и т. п.}$$

Пример 1 Найти значение производной функции $y = f(x)$ в указанной точке:

а) $f(x) = \sqrt{11 - 2x}$, $x = 1$; б) $f(x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $x = 0$.

Решение. а) Известно, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Возьмём эту формулу за основу, но при этом учтём два обстоятельства:

1) под знаком квадратного корня напишем не x, а $11 - 2x$;

2) укажем «поправочный» множитель, равный (-2), — это коэффициент при x. Таким образом,

$$\left(\sqrt{11 - 2x}\right)' = (-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{11 - 2x}} = -\frac{1}{\sqrt{11 - 2x}}.$$

Осталось вычислить $f'(1)$. Имеем:

$$f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{11 - 2 \cdot 1}} = -\frac{1}{3}.$$

б) Известно, что $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Возьмём эту формулу за основу, но при этом учтём два обстоятельства:

1) под знаками тригонометрических функций напишем не x, а $-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$;

2) укажем «поправочный» множитель, равный $\left(-\frac{1}{2}\right)$, — это коэффициент при x. Таким образом,

$$\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2\cos^2\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Осталось вычислить $f'(0)$. Имеем:

$$f'(0)=-\frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=-1.$$

Ответ: а) $-\frac{1}{3}$; б) -1.

Пример 2* При каком значении параметра k прямая $y=kx+1$ является касательной к графику функции $y=\sqrt{4x+1}$?

Решение. Абсцисса точки касания нам здесь пока неизвестна, обозначим её традиционной буквой a. Составим уравнение касательной в общем виде: $y=f(a)+f'(a)(x-a)$. Здесь $f(x)=\sqrt{4x+1}$, $f(a)=\sqrt{4a+1}$, $f'(x)=4\cdot\frac{1}{2\sqrt{4x+1}}$, $f'(a)=\frac{2}{\sqrt{4a+1}}$. Значит, уравнение касательной выглядит так:

$$y=\sqrt{4a+1}+\frac{2}{\sqrt{4a+1}}(x-a),\quad y=\frac{2}{\sqrt{4a+1}}x+\left(\sqrt{4a+1}-\frac{2a}{\sqrt{4a+1}}\right).$$

В условии сказано, что уравнение интересующей нас касательной имеет вид $y=kx+1$. Значит, $\frac{2}{\sqrt{4a+1}}=k$, $\sqrt{4a+1}-\frac{2a}{\sqrt{4a+1}}=1$. Решив уравнение $\sqrt{4a+1}-\frac{2a}{\sqrt{4a+1}}=1$, получим $a=0$. Подставив это значение в соотношение $\frac{2}{\sqrt{4a+1}}=k$, получим $k=2$. Уравнение искомой касательной таково: $y=2x+1$.

Ответ: $k=2$.

В общем случае для нахождения производной композиции двух функций используется следующая теорема.

Теорема 2*. Производная композиции двух дифференцируемых функций $y = f(u)$, $u = g(x)$ равна произведению производной y'_u функции $y = f(u)$ по промежуточному аргументу и производной u'_x промежуточного аргумента по независимой переменной:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Приведём примеры использования указанной формулы.

1) $y = \sin^2 x$. Здесь $u = \sin x$, $u'_x = \cos x$; $y = u^2$, $y'_u = 2u$. Значит,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2u \cdot \cos x = 2\sin x \cos x.$$

Производную функции $y = \sin^2 x$ можно было найти по-другому, воспользовавшись правилом дифференцирования произведения двух функций:

$$y' = (\sin^2 x)' = (\sin x \cdot \sin x)' = (\sin x)' \sin x + \sin x (\sin x)' = \\ = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2\sin x \cos x.$$

Как видите, получился тот же результат.

2) $y = \sqrt{5x - 3}$. Здесь $u = 5x - 3$, $u'_x = 5$; $y = \sqrt{u}$, $y'_u = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$. Значит,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{5}{2\sqrt{5x - 3}}.$$

Сформулированную теорему доказывают в курсе высшей математики, мы же ограничимся следующим правдоподобным рассуждением.

Вы знаете, что производная выражает скорость изменения функции в рассматриваемой точке. Значит, u'_x показывает скорость изменения u относительно x, а y'_u показывает скорость изменения y относительно u. Поэтому, чтобы найти y'_x, т. е. скорость изменения y относительно x, надо перемножить y'_u и u'_x.

Если $y = f(u)$, $u = g(x)$, т. е. $y = f(g(x))$, то во многих случаях удобнее пользоваться аналогом формулы дифференцирования сложной функции:

$$y' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Пример 3* Найти производную функции:

а) $y = (x^3 + x^2 + 3x - 4)^3$; б) $y = \sqrt{\cos x}$; в) $y = \operatorname{ctg}^2 5x$.

Решение.

а) $y' = ((x^3 + x^2 + 3x - 4)^3)' = 3(x^3 + x^2 + 3x - 4)^2 \cdot (x^3 + x^2 + 3x - 4)' = \\ = 3(x^3 + x^2 + 3x - 4)^2(3x^2 + 2x + 3);$

б) $y' = \left(\sqrt{\cos x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$;

в) $y' = (\operatorname{ctg}^2 5x)' = 2\operatorname{ctg} 5x \cdot (\operatorname{ctg} 5x)' = 2\operatorname{ctg} 5x \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 5x}\right) =$

$= -\frac{10\cos 5x}{\sin^3 5x}$.

Ответ: а) $3(x^3 + x^2 + 3x - 4)^2(3x^2 + 2x + 3)$; б) $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$;

в) $-\frac{10\cos 5x}{\sin^3 5x}$.

Упражнения

Найдите производную функции.

13.1. а) $y = (4x - 1)^2$;

б) $y = (5 - 3x)^2$;

в) $y = (7 - 0{,}2x)^3$;

г) $y = (1{,}5x + 2)^3$;

д) $y = \left(-\frac{3}{8}x + 9\right)^2$;

е) $y = \left(\frac{4}{9}x - \frac{2}{3}\right)^3$.

13.2. а) $y = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2$;

б) $y = \left(\frac{4-x}{3}\right)^2$;

в) $y = \left(\frac{-x-1}{3}\right)^3$;

г) $y = \left(\frac{x+3}{6}\right)^3$;

д) $y = \left(\frac{2x+1}{15}\right)^3$;

е) $y = \left(\frac{2-5x}{4}\right)^2$.

13.3. а) $y = \sqrt{6x+1}$;

б) $y = \sqrt{6-5x}$;

в) $y = \sqrt{\frac{11-4x}{3}}$;

г) $y = \sqrt{\frac{9+8x}{15}}$.

13.4. а) $y = \cos 3x$;

б) $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$;

в) $y = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{x}{3}\right)$;

г) $y = \sin 4x$;

д) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 1{,}5x\right)$;

е) $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.

13.5. а) $y = \operatorname{tg} 6x$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(-\frac{x}{4}\right)$;

в) $y = \operatorname{ctg} 2x$;

г) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$;

д) $y = \operatorname{tg}\frac{-x + 2\pi}{3}$;

е) $y = \operatorname{ctg}\frac{2x + \pi}{12}$.

13.6. а) $y = \arcsin 3x$;

б) $y = \operatorname{arcctg}\left(0{,}5x - \frac{2}{3}\right)$;

в) $y = \arccos(3 - 5x)$;

г) $y = \operatorname{arctg}(3{,}3x + 1)$.

13.7. Используя формулы тригонометрии, преобразуйте данную функцию и найдите её производную:

а) $y = 2\sin 2x \cos 2x$;

б) $y = \sin^2 3x$;

в) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

г) $y = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$;

д) $y = 2\cos^2 \frac{x}{4}$;

е) $y = \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$.

13.8. Найдите значение производной в точке x_0:

а) $y = \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

б) $y = (3 - 10x)^2$, $x_0 = 0{,}1$;

в) $y = \sqrt{2x+1}$, $x_0 = 4$;

г) $y = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$;

д) $y = (0{,}5x + 3)^3$, $x_0 = -2$;

е) $y = \sqrt{3 - 4x}$, $x_0 = -5{,}5$.

13.9. Найдите угловой коэффициент касательной к графику данной функции в точке с абсциссой a:

а) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$, $a = \frac{\pi}{12}$;

б) $y = \frac{2}{3}\sqrt{4 - 3x}$, $a = \frac{1}{3}$;

в) $y = \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$, $a = \frac{\pi}{2}$;

г) $y = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^3 + (3 - 0{,}5x)^2$, $a = -6$.

13.10. Составьте уравнение касательной, проведённой к графику данной функции в точке с абсциссой a:

а) $y = 2\sqrt{3x-5}$, $a = 2$;

б) $y = \sqrt{3}\cos\frac{x}{3}$, $a = \pi$;

в) $y = \sqrt{7-2x}$, $a = 3$;

г) $y = \sqrt{2}\sin 2x$, $a = \frac{\pi}{8}$.

13.11. Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = g(x)$ параллельно указанной прямой:

а) $g(x) = (6x - 17)^2$, $y = 12x + 7$;

б) $g(x) = x + \sqrt{2x-1}$, $y = 2x + 5$;

в) $g(x) = (11 - 5x)^3$, $y = 4 - 15x$;

г) $g(x) = 2x + \sqrt{5-4x}$, $y = x$.

13.12. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 4x + \sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x$;

б) $f(x) = (2x - 5)^3 + (2x - 5)^2 + x$;

в) $f(x) = x^2\sqrt{3-2x}$;

г) $f(x) = 0{,}2\cos 5x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{4}\sin 4x$;

д) $f(x) = (1 - 3x)^3 - (1 - 3x)^2 + 3x$;

е) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4x-1}}$.

13.13. Найдите абсциссы всех точек, в которых касательная, проведённая к графику функции $y = f(x)$, параллельна касательной, проведённой к тому же графику в точке с абсциссой a, если:

а) $f(x) = \cos 7x + 7\cos x$, $a = \frac{\pi}{6}$;

б) $f(x) = \sin 8x + 4\sin 2x$, $a = \frac{\pi}{10}$.

13.14. Найдите все значения x, при каждом из которых касательные к графикам функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ параллельны, если:

а) $f(x) = 3\cos 5x$, $g(x) = 5\cos 3x + 2$;

б) $f(x) = 2 - 14\sin 3x$, $g(x) = 6\sin 7x$.

Найдите производную данной функции.

13.15. а) $y = \dfrac{1}{\sin x}$; г) $y = \dfrac{1}{\cos 3x}$;

б) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; д) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$;

в) $y = \sin^3 2x + \cos^2 3x$; е) $y = 2\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} - 4\operatorname{ctg}^2 \dfrac{x}{4}$.

13.16. а) $y = \sin\sqrt{3x - 1}$; в) $y = \cos\sqrt{1 - 4x}$;

б) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x + \cos^3 x}$; г) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 1}}$.

13.17. а) $y = 2\arcsin 5x - 3\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{3}$; г) $y = 4\arccos\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{3}\operatorname{arcctg} 3x$;

б) $y = \arcsin^2 x$; д) $y = \dfrac{1}{\arccos x}$;

в) $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} 5x}$; е) $y = (\arcsin 2x - \operatorname{arcctg} 3x)^2$.

13.18. Составьте уравнение касательной к графику данной функции, проходящей через точку B:

а) $y = \sqrt{x + 4}$, $B(0; 2{,}5)$; б) $y = (2x - 1)^2$, $B(0; -3)$.

13.19. Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие промежутку $[1; 5]$, если функция $y = f(x)$ задана формулой:

а) $f(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x - 2x$; б) $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x + 2$.

13.20. Найдите площадь треугольника, образованного касательной к графику функции $y = \sqrt{2x^2 + 7}$ в точке $x = 1$ и биссектрисами координатных углов.

13.21. Плот подтягивается к берегу при помощи каната, который наматывается на ворот со скоростью 3 м/мин. Определите скорость движения плота в тот момент, когда его расстояние от берега равно 25 м, если известно, что ворот расположен выше поверхности воды на 4 м.

Упражнения для повторения

13.22. Упростите выражение:

а) $a^{-2,4} \cdot a^{3,7} \cdot (a^{0,6})^5$; г) $a^{4,1} \cdot a^{-2,6} \cdot (a^{1,5})^4$;

б) $b^{-1,9} \cdot b^{-3,2} \cdot (b^{4,2})^3$; д) $b^{3,1} \cdot b^{-1,3} \cdot (b^{-2,4})^3$;

в) $c^{7,3} \cdot (c^{1,2})^{-5} \cdot (c^{-2,6})^2$; е) $c^{9,3} \cdot (c^{-1,4})^3 \cdot (c^{1,6})^{-5}$.

13.23. Решите неравенство:

а) $\log_{0,5}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\leqslant -1$;

б) $\log_{\frac{2}{2}}(x-1)^2+5\log_{0,5}(x-1)>-1$.

13.24. Исследуйте функцию $y=f(x)$ на чётность, если:

а) $f(x)=x^5-4x\cdot\cos x$;

б) $f(x)=2^{x^2}\cdot\sin 3x$;

в) $f(x)=\dfrac{2^{\cos x}}{x-x^3}$;

г) $f(x)=6x^4-x^2\cdot\cos x$;

д) $f(x)=-\log_2|x|\cdot\operatorname{tg}x$;

е) $f(x)=\dfrac{x^5-4}{\cos 3x}$.

13.25. а) Даны выражения $f(x)=x^{-2}$ и $g(x)=x^{0,25}$. Докажите, что $2(f(x))^{-1}=g(16x^8)$.

б) Даны выражения $f(x)=x^{-3}$ и $g(x)=x^{\frac{2}{3}}$. Докажите, что $9(f(x))^{-2}=g(27x^9)$.

13.26. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x}-1=\dfrac{1}{x-1}$;

б) $2x+3+\sqrt[3]{x}=0$;

в) $\dfrac{2}{x-1}+2=\sqrt{3x}$;

г) $\sqrt[4]{x}+2x^3=3$.

§ 14. Дифференцирование степенных функций

Продолжим изучение формул дифференцирования. В этом параграфе мы поговорим о том, как находить производные степенных функций $y=x^r$. Начнём со случая, когда показатель степени — натуральное число. Кое-что о дифференцировании функций $y=x^n$, $n\in N$, мы уже знаем: $x'=1$, $(x^2)'=2x$, $(x^3)'=3x^2$. Пользуясь правилом дифференцирования произведения, найдём производные ещё двух функций: $y=x^4$, $y=x^5$.

Имеем:

$$(x^4)'=(x^3\cdot x)'=(x^3)'\cdot x+x^3\cdot x'=3x^2\cdot x+x^3\cdot 1=4x^3;$$

итак, $(x^4)'=4x^3$;

$$(x^5)'=(x^4\cdot x)'=(x^4)'\cdot x+x^4\cdot x'=4x^3\cdot x+x^4\cdot 1=5x^4;$$

итак, $(x^5)'=5x^4$.

Рассмотрим пять формул: три формулы, которые мы знали раньше, и две, которые только что получили:

$$x' = 1;$$
$$(x^2)' = 2x; \qquad (x^4)' = 4x^3;$$
$$(x^3)' = 3x^2; \qquad (x^5)' = 5x^4.$$

Естественно предположить, что для любого натурального показателя n справедлива формула дифференцирования:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

Для доказательства формулы (1) воспользуемся известным вам из курса алгебры 9-го класса *методом математической индукции.*

Мы знаем, что $x' = 1$. Эту формулу можно переписать так:

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1}.$$

Значит, формула (1) верна для $n = 1$.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство $(x^k)' = kx^{k-1}$. Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т. е. докажем, что $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$.

В самом деле,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)x^k.$$

А далее рассуждаем так. Во-первых, мы убедились в том, что формула (1) верна при $n = 1$. Во-вторых, мы доказали, что из того, что формула (1) выполняется для $n = k$, следует, что она справедлива и для $n = k + 1$. Что это значит? Это значит, что, поскольку формула (1) выполняется при $n = 1$, она верна и при $n = 2$; если формула (1) выполняется при $n = 2$, то она верна и при $n = 3$ и т. д. Вывод: формула (1) верна для любого натурального числа n. ■

Опираясь на формулу (1), можно найти производную функции $y = x^{-n}$, $n \in N$. Для этого надо переписать выражение x^{-n} в виде $\frac{1}{x^n}$ и воспользоваться правилом дифференцирования частного:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Итак, для любого $x \neq 0$ справедлива формула

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$(x^m)' = mx^{m-1},\ m \in \boldsymbol{Z}. \qquad (3)$$

Далее, мы знаем, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Эту формулу можно записать следующим образом:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Обе формулы (и (3), и (4)) являются частными случаями следующего утверждения.

Теорема. Если $x > 0$ и $r \neq 0$ — любое действительное число, то производная степенной функции $y = x^r$ вычисляется по формуле

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

В некоторых случаях эта теорема справедлива не только при $x > 0$. Если, например, показатель степени — натуральное число, то формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ справедлива для любого x; если показатель степени — целое отрицательное число, то формула $(x^m)' = mx^{m-1}$ справедлива для любого $x \neq 0$.

Пример 1 Найти производную функции:

а) $y = 2x^7 - \frac{3}{x^5}$; б) $y = \sqrt[7]{(3x-1)^2}$.

Решение. а) $y' = \left(2x^7 - \frac{3}{x^5}\right)' = 2(x^7)' - 3(x^{-5})' =$

$$= 2 \cdot 7x^6 - 3 \cdot (-5x^{-5-1}) = 14x^6 + \frac{15}{x^6};$$

б) $y' = \left(\sqrt[7]{(3x-1)^2}\right)' = \left((3x-1)^{\frac{2}{7}}\right)' = 3 \cdot \frac{2}{7}(3x-1)^{\frac{2}{7}-1} =$

$$= \frac{6}{7}(3x-1)^{-\frac{5}{7}} = \frac{6}{7\sqrt[7]{(3x-1)^5}}.$$

Пример 2 Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt[4]{x}\sin\pi x$ в точке $x = 1$.

Решение. Здесь $f(x) = \sqrt[4]{x}\sin\pi x$. Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции (см. § 9).

1) Обозначим абсциссу точки касания буквой a. По условию $a = 1$.

2) Вычислим $f(a)$, т. е. $f(1)$; $f(1) = \sqrt[4]{1}\sin\pi = 1 \cdot 0 = 0$.

3) Найдём $f'(x)$ и $f'(a)$:

$$f'(x) = \left(\sqrt[4]{x}\sin\pi x\right)' = \left(x^{\frac{1}{4}} \cdot \sin\pi x\right)' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)'\sin\pi x + x^{\frac{1}{4}}(\sin\pi x)' =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}\right)\sin\pi x + x^{\frac{1}{4}}(\pi\cos\pi x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\sin\pi x + \pi x^{\frac{1}{4}}\cos\pi x;$$

$$f'(1) = \frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}\cdot\sin\pi + \pi\cdot 1^{\frac{1}{4}}\cdot\cos\pi = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 0 + \pi\cdot 1\cdot(-1) = -\pi.$$

4) Подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 0$, $f'(a) = -\pi$ в уравнение касательной $y = f(a) + f'(a)(x - a)$: $y = 0 - \pi(x - 1)$. В итоге получаем: $y = -\pi x + \pi$.

Упражнения

Найдите производную данной функции.

14.1. а) $y = x^7$; г) $y = 4x^6$;

б) $y = -x^{18}$; д) $y = \frac{x^{12}}{6}$;

в) $y = -5x^{10}$; е) $y = -\frac{3x^8}{12}$.

14.2. а) $y = x^4 - 2x^2 + x$; г) $y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$;

б) $y = -3x^5 + x^3 - 6x$; д) $y = -\frac{x^6}{6} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x}{2}$;

в) $y = \frac{2}{3}x^3 - 0{,}5x^2 - 4$; е) $y = \frac{x^{12}}{12} - \frac{7x^8}{4} + \frac{x^5}{10} - x^3$.

14.3. а) $y = x^{-2}$; г) $y = 3x^{-0,6}$;

б) $y = -x^{-4}$; д) $y = \frac{x^{-5}}{10}$;

в) $y = -5x^{-4}$; е) $y = -\frac{x^{-3}}{6}$.

14.4. а) $y = x^{\frac{1}{3}}$; г) $y = x^{-\frac{2}{3}}$;

б) $y = x^{1,4}$; д) $y = \sqrt[4]{x}$;

в) $y = x^{-2,5}$; е) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

14.5. а) $y = x^{\sqrt{2}}$; г) $y = x^{-\sqrt{6}}$;

б) $y = x^{\sqrt{3}}$; д) $y = (3x)^{\sqrt{3}}$;

в) $y = x^{-\sqrt{5}}$; е) $y = (2x)^{\sqrt{2}}$.

14.6. а) $y = \frac{1}{x^{2,7}}$; г) $y = \frac{2}{x^{\frac{5}{6}}}$;

б) $y = -\frac{1}{x^{3,2}}$; д) $y = \frac{\sqrt{5}}{x^{\sqrt{5}}}$;

в) $y = -\frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}$; е) $y = \frac{\sqrt{3}+1}{x^{\sqrt{3}-1}}$.

14.7. а) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; г) $y = \frac{3}{\sqrt[6]{x}}$;

б) $y = -\frac{2}{\sqrt{x}}$; д) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$;

в) $y = -\frac{4}{\sqrt[4]{x}}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

14.8. а) $y = (x^2 + x)(x^3 - 2)$; г) $y = (x^3 + 3x^2)(2x^2 - 1)$;

б) $y = (x^5 + x^3)\sqrt{x - 1}$; д) $y = \sqrt{x+2}\,(x^4 - 2x^2)$;

в) $y = \frac{x^4 - 2x^2}{4x - 5}$; е) $y = \frac{x^2 - 3x}{2x^3 + 1}$.

14.9. а) $y = (4x + 7)^5$;

б) $y = \left(\frac{x}{7} + 9\right)^7$;

в) $y = \frac{1}{(1 - 4x)^4}$;

г) $y = (3 - 5x)^{10}$;

д) $y = \left(2 - \frac{x}{3}\right)^{15}$;

е) $y = \frac{4}{(2x - 5)^6}$.

14.10. а) $y = x^3 + x^{-3} - 3\sqrt[3]{x}$;

б) $y = x^4 - x^{-4} + 2\sqrt[4]{x}$;

в) $y = 0,5x^4 - x\sqrt{x} - \sqrt{2}$;

г) $y = \frac{1}{6x^6} + 2\sqrt[3]{x^{-1}} - \sqrt[3]{3}$;

д) $y = x^5 - \frac{9}{\sqrt[3]{x}} + x^{-2}$;

е) $y = x^8 - 6x\sqrt[5]{x} - x^{0,7}$.

14.11. а) $y = x^2\sqrt[3]{x}$;

б) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$;

в) $y = x^3\sqrt[4]{x}$;

г) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$;

д) $y = \sqrt{x}\left(x + \sqrt[3]{x}\right)$;

е) $y = x^2\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)$.

14.12. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = x^5 - 4x^2 + 3x$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = x^4 - 2\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;

в) $f(x) = 0,5(2 - 5x)^{-5}$, $x_0 = 0,2$;

г) $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 5$, $x_0 = -1$;

д) $f(x) = \sqrt[3]{6x + 7}$, $x_0 = \frac{1}{6}$;

е) $f(x) = x^{-0,5} + x^{-1,5} + 3x$, $x_0 = 4$.

14.13. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

а) $g(x) = x^6 - 3x^2 + 4$, $a = -1$;

б) $g(x) = x^{-4} - 6\sqrt{x}$, $a = 1$;

в) $g(x) = 12(2 - x)^{-0,5}$, $a = -2$;

г) $g(x) = x^5 - x^3 - 3x$, $a = 1$;

д) $g(x) = \sqrt[3]{(2x)^2} - 2$, $a = 4$;

е) $g(x) = -32(17 - x)^{-0,75} + 9x$, $a = 16$.

14.14. Найдите угол, который образует с осью x касательная к графику функции $y = h(x)$, проведённая в точке с абсциссой $x = a$:

а) $h(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$, $a = -1$;

б) $h(x) = \sqrt[3]{(3x+2)^2}$, $a = 2$;

в) $h(x) = (3x-1)^{\frac{1}{3}} + 2$, $a = \frac{2}{3}$;

г) $h(x) = -x^5 + 7x^3 - x + 2$, $a = 0$;

д) $h(x) = -3\left(x - \sqrt{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $a = \sqrt{2} + 1$;

е) $h(x) = 5\sqrt[5]{(3x-1)^2} - 5x$, $a = \frac{2}{3}$.

14.15. Составьте уравнение касательной к графику данной функции в точке $x = a$:

а) $y = x^4 - 3x^3 + 2$, $a = 2$;

б) $y = 2x^{\frac{2}{3}} - 3$, $a = 8$;

в) $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $a = 4$;

г) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$, $a = 2$;

д) $y = 3 + x^{-\frac{3}{4}}$, $a = 1$;

е) $y = \sqrt[5]{5x+2}$, $a = 6$.

14.16. Составьте уравнение той касательной к графику функции $y = f(x)$, которая параллельна указанной прямой:

а) $f(x) = 8\sqrt[4]{x-4}$, $y = 2x + 3$;

б) $f(x) = (x+2)^{-3}$, $y = 2 - 3x$.

14.17. Решите уравнение $f'(x) = b$, если:

а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 5$, $b = 0$;

б) $f(x) = \frac{2}{3}(4-3x)^{\frac{1}{2}}$, $b = -1$;

в) $f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - 2x$, $b = 3$;

г) $f(x) = 1\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 8$, $b = 0$;

д) $f(x) = (2x+5)^{-\frac{1}{2}}$, $b = -8$;

е) $f(x) = 1{,}5\sqrt[3]{x^2} - x$, $b = 1$.

14.18. Решите неравенство:

а) $y' < 0$, если $y = -x^4 + x^3 - 4$;

б) $y' > 0$, если $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + 7$;

в) $y' \leqslant 0$, если $y = 0{,}6x^{1\frac{2}{3}} + 1{,}5x^{1\frac{1}{3}} - 1$;

г) $y' > 0$, если $y = x^4 + x^3 + 6$;

д) $y' < 0$, если $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - 1$;

е) $y' \geqslant 0$, если $y = \frac{2}{5}x^{1{,}25} - 1\frac{2}{3}x^{0{,}75}$.

14.19. а) Докажите, что касательную к графику функции $y = x^4$ в точке $a > 0$ можно построить так: разделить отрезок $[0; a]$ на 4 равные части и провести прямую через точки $\left(\frac{3}{4}a; 0\right)$ и $(a; a^4)$.

б) Докажите, что касательную к графику функции $y = x^5$ в точке $a > 0$ можно построить так: разделить отрезок $[0; a]$ на 5 равных частей и провести прямую через точки $\left(\frac{4}{5}a; 0\right)$ и $(a; a^5)$.

в) Ссылаясь на пример 4 из § 9 (см. с. 99) и результаты пунктов а) и б), сформулируйте гипотезу о геометрическом способе построения касательной к графику функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$, в точке $a > 0$ и докажите свою гипотезу.

14.20. Найдите производную функции:

а) $y = \sqrt[3]{\sin 6x + 3x}$;

б) $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg}^3 x}$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(2x^5 - 3x^4 + \dfrac{5}{x}\right)$;

г) $y = \left(\cos\dfrac{x}{2} + 3\right)^{0{,}8}$;

д) $y = \arcsin^8 \dfrac{x}{4}$;

е) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{3x-1}{2x+5}$.

14.21. Найдите значение производной заданной функции в указанной точке:

а) $y = \sin^5 x$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$;

б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\arccos x}}$, $x = 0$;

в) $y = (2\sin 3x + 3\cos 2x)^5$, $x = 0$;

г) $y = \dfrac{1}{\cos^7 x}$, $x = \dfrac{7\pi}{6}$;

д) $y = \sqrt[3]{\operatorname{arcctg} x}$, $x = -1$;

е) $y = (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 4x)^6$, $x = \dfrac{\pi}{8}$.

14.22. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведённой из точки $N(0; 0)$:

а) $f(x) = -x\sqrt{x} - 4$;

б) $y = \sqrt[3]{x^2} - 3$.

14.23. Составьте уравнение той касательной к графику заданной функции, которая отсекает от осей координат треугольник указанной площади S:

а) $y = x\sqrt[3]{x} + 1$, $S = \frac{1}{6}$; б) $y = x^{-\frac{2}{3}}$, $S = \frac{25}{12}$.

Упражнения для повторения

14.24. Вычислите:

а) $2 + \log_{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\log_3\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) - \log_3\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}\right)$;

г) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)$;

д) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) - 1$;

е) $1 + \log_2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right) - \log_2\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}\right)$.

14.25. Решите уравнение:

а) $\log_4(2^x + 2x - 10) = x - x\log_4 2$;

б) $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20$;

в) $\log_3(5x + 3x - 6) = x\log_3 10 - \log_9 4x$;

г) $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 10$.

14.26. Решите неравенство:

а) $\frac{2^x - 8}{x^2 - 10x + 25} \geqslant 0$; в) $\frac{25 - 0{,}2^x}{x^2 + 6x + 9} \leqslant 0$;

б) $\frac{6}{7^x + 48} > \frac{6}{7^{x+2}}$; г) $\frac{8^x + 44}{8^x} < 23$.

14.27. а) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 8x + 20}$.

б) Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{16 + 6x - x^2}$.

14.28. Постройте график функции:

а) $y = 3\sin 2x$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$;

в) $y = \left|\cos x - \frac{1}{2}\right|$;

г) $y = -2\cos\frac{x}{2}$;

д) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 2$;

е) $y = \left|\sin x + \frac{1}{2}\right|$.

§ 15. Дифференцирование показательных и логарифмических функций

Среди показательных функций наиболее важной для приложений является функция $y = f(x)$, где $f(x) = e^x$. В учебнике для 10-го класса мы отметили, что график этой функции обладает следующей особенностью: касательная к графику функции $y = e^x$ в точке (0; 1) образует с осью Ox угол 45° (рис. 58), угловой коэффициент этой касательной равен 1. Это значит, что для функции $y = e^x$ значение производной в точке $x = 0$ нам уже известно: $f'(0) = 1$.

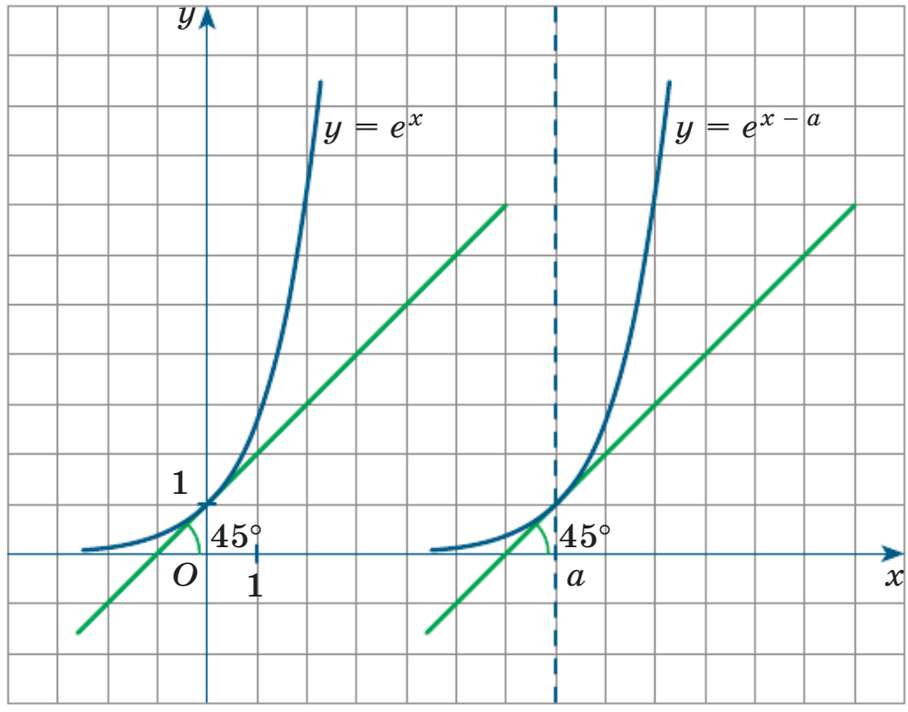


Рис. 58

Введём в рассмотрение функцию $y = g(x)$, где $g(x) = f(x - a)$, т. е. $g(x) = e^{x-a}$. На рисунке 58 изображён график функции $y = g(x)$: он получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом по оси Ox на $|a|$ единиц масштаба. Касательная к графику функции $y = g(x)$ в точке $x = a$ параллельна касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = 0$ (см. рис. 58), значит, она образует с осью Ox угол 45°. Используя геометрический смысл производной, можем записать, что $g'(a) = \operatorname{tg} 45° = 1$.

Вернёмся к функции $y = f(x)$, где $f(x) = e^x$. Имеем:

$$f(x) = e^x = e^a \cdot e^{x-a} = e^a \cdot g(x).$$

Значит, $f'(x) = e^a \cdot g'(x)$, в частности $f'(a) = e^a \cdot g'(a)$. Но $g'(a) = 1$, значит, $f'(a) = e^a$.

Мы установили, что для любого значения a справедливо соотношение $f'(a) = e^a$. Вместо буквы a можно, естественно, использовать и букву x; тогда получим, что $f'(x) = e^x$, т. е.

$$(e^x)' = e^x. \qquad (1)$$

Быть может, у вас возник вопрос, почему для вывода формулы дифференцирования функции $y = e^x$ мы не воспользовались, как в предыдущих параграфах, обычным «пятишаговым» алгоритмом из § 7. Дело в том, что мы не смогли бы вычислить предел на пятом шаге алгоритма (разумеется, в курсе высшей математики с вычислением этого предела проблем нет).

Опираясь на теорему 1 из § 13, получим более общую формулу:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}. \qquad (2)$$

Формула (2) означает, что функция $y = e^{kx}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = ky$. Это уравнение представляет собой математическую модель многих процессов реальной действительности (радиоактивный распад, динамика вклада в банке и т. д.).

Пример 1 Найти стационарные и критические точки функции $y = e^{2x}\sqrt[5]{x}$.

Решение. Напомним, что стационарная точка функции $y = f(x)$ — это такая точка x, в которой $f'(x) = 0$; критическая точка функции $y = f(x)$ — это такая точка x, в которой функция непрерывна, но $f'(x)$

не существует (понятия стационарной и критической точек мы ввели в § 8).

Воспользовавшись правилом дифференцирования произведения функций и формулой (2), найдём производную заданной функции:

$$y' = \left(e^{2x}\sqrt[5]{x}\right)' = (e^{2x})'\sqrt[5]{x} + e^{2x}\left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = 2e^{2x}\sqrt[5]{x} + e^{2x}\left(\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\right) =$$

$$= 2e^{2x}\sqrt[5]{x} + \frac{e^{2x}}{5x^{\frac{4}{5}}} = 2e^{2x}\sqrt[5]{x} + \frac{e^{2x}}{5\sqrt[5]{x^4}} = \frac{e^{2x}(10x+1)}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

Итак, $y' = \dfrac{e^{2x}(10x+1)}{5\sqrt[5]{x^4}}$. Заданная функция $y = e^{2x}\sqrt[5]{x}$ непрерывна в любой точке x и дифференцируема всюду, кроме точки $x = 0$; $x = 0$ — критическая точка заданной функции.

Стационарные точки найдём из уравнения $y' = 0$. Имеем:

$$\frac{e^{2x}(10x+1)}{5\sqrt[5]{x^4}} = 0; \quad 10x + 1 = 0; \quad x = -0{,}1.$$

Ответ: $x = 0$ — критическая точка, $x = -0{,}1$ — стационарная точка.

Выведем теперь формулу дифференцирования показательной функции с произвольным основанием $a > 1$, $a \neq 1$. Для этого нам понадобится так называемое основное логарифмическое тождество ($a^{\log_a b} = b$):

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}.$$

Для нахождения производной функции $y = e^{\ln a \cdot x}$ воспользуемся формулой (2):

$$(e^{\ln a \cdot x})' = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot (e^{\ln a})^x = \ln a \cdot a^x.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (3)$$

Пример 2 Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3^x$ в точке $x = -1$.

Решение. Здесь $f(x) = 3^x$. Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции (см. § 9).

1) Обозначим абсциссу точки касания буквой a. По условию $a = -1$.

2) Вычислим $f(a)$, т. е. $f(-1)$;

$$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

3) Найдём $f'(x)$ и $f'(a)$:

$$f'(x) = 3^x \ln 3;\ f'(-1) = \frac{1}{3}\ln 3.$$

4) Подставим найденные числа $a = -1$, $f(a) = \frac{1}{3}$, $f'(a) = \frac{1}{3}\ln 3$ в уравнение касательной $y = f(a) + f'(a)(x - a)$:

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\ln 3(x+1) = \frac{1}{3}\ln 3 \cdot x + \frac{1}{3}(1 + \ln 3) =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 3 \cdot x + \frac{1}{3}(\ln e + \ln 3) = \frac{1}{3}(x \ln 3 + \ln 3e).$$

Ответ: $y = \frac{1}{3}(x \ln 3 + \ln 3e)$.

Теперь поговорим о дифференцировании логарифмических функций. Самый простой вид имеет производная логарифмической функции по основанию e, т. е. функция $y = \ln x$ (натуральный логарифм):

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (4)$$

Докажем* эту формулу. Функция $y = \ln x$ является обратной по отношению к функции $x = e^y$. В § 12 мы установили, что производные двух взаимно обратных функций связаны соотношением $x'_y = \frac{1}{y'_x}$. У нас ситуация такая:

$$x = e^y,\ x'_y = (e^y)' = e^y = x, \text{ а } y'_x = (\ln x)'.$$

Значит, в рассматриваемом случае соотношение $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ принимает такой вид: $x = \frac{1}{(\ln x)'}$, откуда следует, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

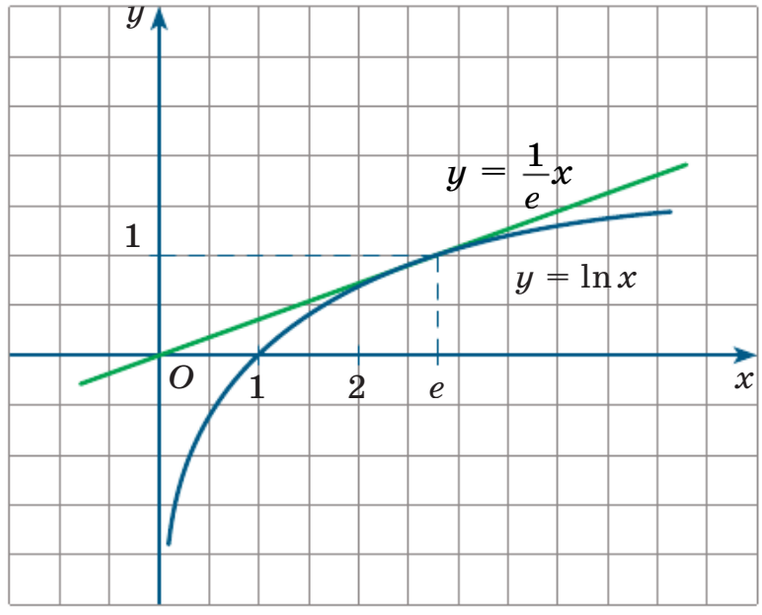


Рис. 59

Пример 3* Провести касательную к графику функции $y = \ln x$ из точки (0; 0).

Решение. Абсцисса $x = a$ точки касания пока неизвестна. Составим уравнение касательной в общем виде: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. У нас $f(x) = \ln x$, $f(a) = \ln a$, $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $f'(a) = \frac{1}{a}$. Значит, уравнение касательной принимает вид: $y = \ln a + \frac{1}{a}(x - a)$, $y = \frac{x}{a} + (\ln a - 1)$. Подставив в уравнение $y = \frac{x}{a} + (\ln a - 1)$ значения $x = 0$, $y = 0$, получим $\ln a - 1 = 0$, $a = e$. При $a = e$ записанное выше в общем виде уравнение касательной выглядит так: $y = \frac{1}{e}x$. На рисунке 59 представлена геометрическая иллюстрация полученного факта.

Завершая параграф, выведем формулу дифференцирования логарифмической функции по произвольному основанию $a > 0$, $a \neq 1$. Воспользовавшись известной из курса 10-го класса формулой перехода к новому основанию логарифма $\left(\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \right)$, получим $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Далее имеем:

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (5)$$

Упражнения

Найдите производную данной функции.

15.1. а) $y = e^x$; в) $y = e^{x-3}$; д) $y = -3e^x$;
б) $y = -e^x$; г) $y = e^{x+2}$; е) $y = 4e^x$.

15.2. а) $y = e^{2x}$; в) $y = e^{-x}$; д) $y = e^{1-3x}$;
б) $y = e^{5x}$; г) $y = e^{-0,5x}$; е) $y = e^{3-x}$.

15.3. а) $y = e^x - 7x$; в) $y = e^{-x} + x^3$; д) $y = e^{5x+4} - \sqrt{x}$;
б) $y = 6x - e^x$; г) $y = e^{8x} + x^2$; е) $y = e^{5-2x} + \sqrt[3]{x}$.

15.4. а) $y = (2x - 9)e^{-x}$; г) $y = (7 - 4x)e^x$;
б) $y = e^{x-1}(0,2x + 1)^5$; д) $y = (3x + 2)^4 e^{x+6}$;
в) $y = \dfrac{e^{2x-1}}{x^3}$; е) $y = \dfrac{e^{4-3x}}{x^4}$.

15.5. а) $y = e^x \cos 2x$; г) $y = e^{-x} \sin 3x$;
б) $y = e^{1-6x} \sin \dfrac{x}{2}$; д) $y = e^{5x+3} \cos \dfrac{x}{3}$;
в) $y = e^{2,5x} \operatorname{tg}(-0,4x)$; е) $y = e^{2x} \operatorname{ctg} \dfrac{x}{5}$.

15.6. а) $y = 4^x$; в) $y = 0,2^{x-4}$; д) $y = 2^x$;
б) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}$; г) $y = 1,5^{x+5}$; е) $y = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{-x}$.

15.7. а) $y = 3^{2x-1} + x^4$; г) $y = 0,5^{3x+2} - x^3$;
б) $y = -2x \cdot 10^{2x}$; д) $y = 3x \cdot 0,1^{-3x}$;
в) $y = \dfrac{0,8^x}{4x - 3}$; е) $y = \dfrac{3 - 5x}{1,2^x}$.

15.8. Найдите значение производной в точке x_0:

а) $y = e^x + x^3$, $x_0 = 0$;

б) $y = e^{2x+3} - 5$, $x_0 = -1$;

в) $y = e^x\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

г) $y = e^x - x^4$, $x_0 = 1$;

д) $y = e^{9-3x} + x$, $x_0 = 3$;

е) $y = e^x\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$.

15.9. Найдите производную функции:

а) $y = 2e^{3x-1} + 6e^{\frac{x}{2}-2}$;

б) $y = 2^{5-x} - \dfrac{x^3}{3^{1-2x}}$;

в) $y = \dfrac{e^{37x}}{\cos 14x}$;

г) $y = \dfrac{e^{5x+3}}{10} - \dfrac{2^{3x-6}}{6}$;

д) $y = \dfrac{3^{2x-4}}{x^2}$;

е) $y = e^{2x}\sin 3x$.

15.10. Найдите скорость изменения функции в точке x_0:

а) $y = e^x(x^2 - 1)$, $x_0 = -1$;

б) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{e^{4x}}$, $x_0 = 1$;

в) $y = 2^x \cdot \sin 2x$, $x_0 = 0$;

г) $y = e^{2x}(3 - 5x)$, $x_0 = 0$;

д) $y = \dfrac{e^{3x-1}}{\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = 1$;

е) $y = 3^{-x} \cdot \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$.

15.11. Найдите угловой коэффициент касательной к графику заданной функции в точке x_0:

а) $y = 0{,}4e^{0{,}5x} + 3$, $x_0 = -2$;

б) $y = 0{,}5^{2x+1}$, $x_0 = -0{,}5$;

в) $y = \dfrac{e^{2x}}{x-2}$, $x_0 = 0$;

г) $y = 20e^{0{,}1x} - x$, $x_0 = 10$;

д) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x}$, $x_0 = -\dfrac{1}{3}$;

е) $y = \dfrac{3x+4}{e^{\frac{x-1}{3}}}$, $x_0 = 1$.

15.12. Найдите тангенс угла между касательной к графику заданной функции в точке x_0 и осью абсцисс:

а) $y = 2e^{-x} + 1$, $x_0 = 0$;

б) $y = e^{5x-6} + x$, $x_0 = 1{,}2$;

в) $y = x \cdot 3^x$, $x_0 = 0$;

г) $y = e^x - x^3$, $x_0 = 1$;

д) $y = e^{5-x} + e$, $x_0 = 5$;

е) $y = \dfrac{x-1}{6^{2x}}$, $x_0 = 1$.

15.13. Найдите угол между осью Ox и касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:

а) $f(x) = \frac{1}{6}e^{6x+1}$, $a = -\frac{1}{6}$;

б) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{e^{x+\sqrt{3}}}$, $a = -\sqrt{3}$;

в) $f(x) = x + 0{,}5^{\frac{x}{\ln 2}}$, $a = 0$;

г) $f(x) = -\frac{1}{4}e^{4x-1}$, $a = 0{,}25$;

д) $f(x) = e^{x\sqrt{3}-3}$, $a = \sqrt{3}$;

е) $f(x) = x + 0{,}1^{\frac{x}{\ln 10}}$, $a = 0$.

15.14. Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:

а) $f(x) = e^x$, $a = -1$;

б) $f(x) = xe^{3x+1}$, $a = -\frac{1}{3}$;

в) $y = 2^{x+1}$, $a = -1$;

г) $f(x) = e^{-x}$, $a = 0$;

д) $f(x) = xe^{1-5x}$, $a = 0{,}2$;

е) $y = 5^{2x-1}$, $a = 0{,}5$.

15.15. Дана функция $y = e^x$.

а) Составьте уравнение касательной к графику функции в точке $x = a$ $(a > 0)$.

б) Найдите точку пересечения касательной с осью абсцисс.

в) Докажите, что длина подкасательной (см. № 9.16, с. 106) равна 1 для любого $a > 0$.

г) Докажите, что касательную к графику функции $y = e^x$ в точке с абсциссой a можно построить следующим образом: от точки $(a; 0)$ отложить влево по оси абсцисс отрезок длиной 1, а затем через полученную точку и точку графика провести прямую.

15.16. а) Распад радия совершается по закону $R = R_0e^{-kt}$, где R_0 — первоначальная масса радия, а R — масса нераспавшегося радия в момент времени t. Докажите, что скорость распада радия пропорциональна его количеству.

б) Барометрическое давление в зависимости от высоты h изменяется по закону $p(h) = p_0e^{ch}$, где p_0 — нормальное давление, а c — некоторая константа. На высоте 5540 м давление составило половину нормального. Какова скорость изменения давления?

15.17. а) Касательная к графику функции $y = 4^x - 4 \cdot 2^x - 14x\ln 2$ параллельна прямой $y = x\ln 4$. Найдите абсциссу точки касания.

б) Касательная к графику функции $y = 0{,}5 \cdot 25^x + 8 \cdot 5^x$ параллельна прямой $y = 9x\ln 5$. Составьте уравнение этой касательной.

15.18. а) Докажите, что функция $y = xe^{1-ax}$ для любого $a \in \boldsymbol{R}$ удовлетворяет соотношению $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$.

б) Докажите, что функция $y = ae^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$ для любого $a \in \boldsymbol{R}$ удовлетворяет соотношению $y' + y = \cos x$.

15.19. Найдите производную функции:

а) $y = e^{\sin x} + 2^{\cos x}$;

б) $y = e^{x^5 - \sqrt{x}}$;

в) $y = 3^{\operatorname{arctg} 2x}$;

г) $y = \operatorname{tg}(e^x) + \operatorname{ctg}(3^x)$;

д) $y = 2^{\arcsin x}$;

е) $y = \sqrt[3]{e^{2x} + 2^{2x}}$.

Найдите производную функции.

15.20. а) $y = \ln x$;

б) $y = 2\ln x$;

в) $y = \ln(x - 2)$;

г) $y = \ln(x + 3)$;

д) $y = \ln(2x + 1)$;

е) $y = \ln(1 - x)$.

15.21. а) $y = x + \ln x$;

б) $y = x^3 \ln x$;

в) $y = \frac{\ln x}{\cos x}$;

г) $y = x^2 - \ln x$;

д) $y = \sqrt{x}\ln x$;

е) $y = \frac{\sin x}{\ln x}$.

15.22. а) $y = \log_3 x$;

б) $y = \log_{0,5} x$;

в) $y = \frac{1}{\log_2 x}$;

г) $y = \frac{2}{\log_5 x}$;

д) $y = x^3 \lg x$;

е) $y = \frac{x}{\lg x}$.

15.23. а) $y = \log_2(4x + 1)$;

б) $y = \log_{0,2}(4 - 5x)$;

в) $y = \lg(-x)$;

г) $y = \log_5(3 - 2x)$;

д) $y = \log_{\frac{1}{3}}(3x - 2)$;

е) $y = \log_{0,1}(10x)$.

15.24. Найдите значение производной данной функции в точке x_0:

а) $y = x^3 + \ln x$, $x_0 = 1$;

б) $y = \log_3 x + 1$, $x_0 = 3$;

в) $y = x^4 - \ln x$, $x_0 = 1$;

г) $y = \log_{0,5} x + x$, $x_0 = 4$.

15.25. Найдите угловой коэффициент касательной к графику заданной функции в точке x_0:

а) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$, $x_0 = e$;

б) $y = x^3 \ln x$, $x_0 = 1$;

в) $y = (x^2 - 4)\lg(x + 2)$, $x_0 = -1$;

г) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$;

д) $y = x \lg x$, $x_0 = 1$;

е) $y = (x^2 - 1)\log_2(x - 1)$, $x_0 = 2$.

15.26. а) Найдите точку графика функции $y = 2e^{4-0,5x}$, в которой касательная образует с осью x угол $\alpha = 135°$.

б) Найдите точку графика функции $y = -\sqrt{3}\ln x$, в которой касательная образует с осью x угол $\alpha = 150°$.

15.27. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке $x = a$:

а) $g(x) = \log_3 x$, $a = 9$;

б) $g(x) = \sqrt[3]{x}\ln x$, $a = 1$;

в) $g(x) = (x - 2)\log_2 x$, $a = 2$;

г) $g(x) = \lg x$, $a = 1$;

д) $g(x) = x^{-2}\ln x$, $a = 1$;

е) $g(x) = (5x - 1)\log_5 x$, $a = \dfrac{1}{5}$.

15.28. Найдите производную функции:

а) $y = \sqrt[3]{\ln x}$;

б) $y = \ln(\sin 2x)$;

в) $y = \lg\left(2x^5 - \dfrac{3}{x^4}\right)$;

г) $y = \ln\dfrac{3x + 2}{2x - 1}$;

д) $y = \cos(\ln 3x)$;

е) $y = \operatorname{arctg}(\lg 10x)$.

15.29. а) Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ удовлетворяет соотношению $2y' \sin x = 1$.

б) Докажите, что функция $y = \sqrt{\ln x}$ удовлетворяет соотношению $2xyy' = 1$.

15.30. а) При каком значении a касательная к графику функции $y = x - \ln(1 + x)$ в точке $x = a$ параллельна прямой, проходящей через точки $(2; 3)$ и $(-1; 4)$?

б) При каком значении a касательная к графику функции $y = \ln(1 + x^2)$ в точке $x = a$ параллельна прямой, проходящей через точки $(5; 1)$ и $(-5; -7)$?

15.31. Составьте уравнение той касательной к графику функции $y = f(x)$, которая проходит через начало координат, если:
а) $f(x) = \ln x + 1$; б) $f(x) = \ln^2 x$.

15.32. а) При каком значении параметра p прямая $y = 2x - 1 + p$ является касательной к графику функции $y = \ln(2x - 1)$?
б) При каком значении параметра p прямая $y = 5x + p + 3$ является касательной к графику функции $y = \ln(5x + 4)$?

Упражнения для повторения

15.33. Лектор заключает с организацией договор на проведение семинара, согласно которому оплата его труда после вычета 13 % подоходного налога составит не менее 35 000 р. Какая сумма должна быть начислена лектору по этому условию? Результат округлите до целых.

15.34. Цена на смартфон за 2 года снижалась дважды на одно и то же число процентов. На сколько процентов снижалась ежегодно цена, если первоначальная стоимость смартфона была 30 000 р., а в результате он был продан за 19 200 р.?

15.35. Андрей сделал в банке вклад на сумму 250 000 р. при условии, что в конце года сумма вклада увеличивается на p % и никакие другие операции с вкладом не производятся. Через год в этом же банке и на таких же условиях сделал точно такой же вклад его приятель Алексей. Ровно через год после этого они оба закрыли свои вклады. При этом выяснилось, что Андрей получил на 33 600 р. больше, чем Алексей. Какой процент годовых начислял этот банк?

15.36. При каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \dfrac{2 - |x|}{x^2 - 2|x|}$?

15.37. При каких значениях параметра p имеет решения уравнение:
а) $\dfrac{1}{2}\sin x \cos x = \dfrac{3p - 2}{5}$; б) $\cos^2 \dfrac{x}{2} = p^2 - 8$?

Итак, в главе 2

Определили следующие понятия:
— производная;
— дифференцируемость функции в точке;
— стационарная точка функции;
— критическая точка функции.
Выяснили, в чём состоит:
— физический (механический) смысл производной;
— геометрический смысл производной.
Сформулировали алгоритмы:
— нахождения производной;
— составления уравнения касательной к графику функции.
Получили необходимые для вычисления производной:
— правила дифференцирования;
— формулы дифференцирования.

Вопросы

1. Что такое средняя скорость движения по прямой за данный промежуток времени?
2. Что называют мгновенной скоростью движения в фиксированный момент времени?
3. Сформулируйте определение производной функции в точке.
4. Сформулируйте алгоритм нахождения производной.
5. В чём состоит геометрический смысл производной?
6. В чём состоит физический (механический) смысл производной?
7. Как по графику функции определить наличие её производной в фиксированной точке?
8. Запишите формулы дифференцирования функций:

$$y = C, \quad y = kx + m, \quad y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \sqrt{x}.$$

9. Сформулируйте правило вычисления производной суммы функций.
10. Сформулируйте правило вычисления производной произведения двух функций.

11. Сформулируйте правило вычисления производной частного функций.

12. Сформулируйте правило вычисления производной линейной комбинации функций.

13. В чём состоит правило дифференцирования функции вида $y = f(kx + m)$?

14. Запишите формулы дифференцирования тригонометрических функций:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x.$$

15. Запишите формулу дифференцирования степенной функции $y = x^r$.

16. Запишите формулы дифференцирования функций $y = e^x$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = \log_a x$.

Тест

1. Движение точки по координатной прямой задаётся формулой $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$. Найдите скорость движения точки в момент времени $t = 2$.

2. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = -0{,}5$.

3. Укажите производную функции $y = \sqrt{2x}$.

а) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ б) $\frac{1}{2\sqrt{2x}}$ в) $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ г) $\frac{2}{\sqrt{x}}$

4. Укажите выражение, равное производной функции $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

а) $-\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ б) $-\cos x$ в) $\sin x$ г) $-\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

5. На рисунке 60 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На графике отмечены точки L, M, N, P. Укажите неверное утверждение относительно произведения угловых коэффициентов касательных в этих точках.

а) $k_M \cdot k_N > 0$
б) $k_N \cdot k_P > 0$
в) $k_M \cdot k_L < 0$
г) $k_L \cdot k_N \cdot k_P > 0$

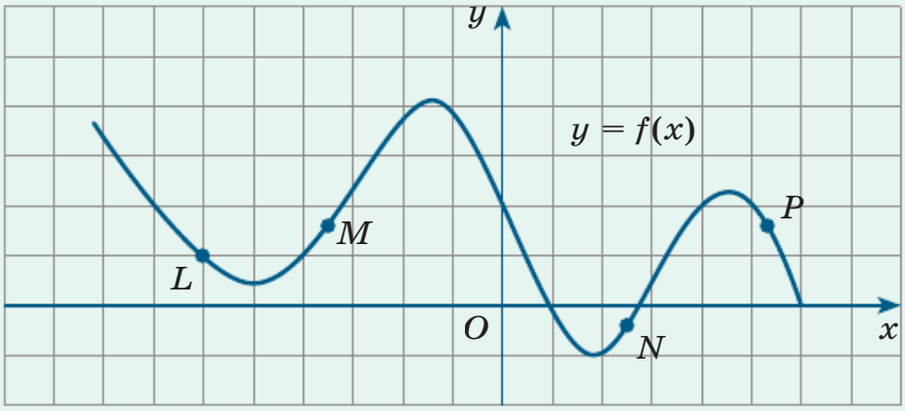


Рис. 60

6. На рисунке 61 изображён график производной функции $y = f(x)$. Укажите количество стационарных точек.

7. Найдите тангенс угла между касательной, проведённой к графику функции $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 1$, и положительным направлением оси абсцисс.

а) $2\frac{1}{3}$ б) $\frac{2}{3}$ в) 1 г) $1\frac{2}{3}$

8. Дана функция $y = 32^x$. Решите уравнение $y' = 320 \ln 2$.

9. Дана функция $y = \ln(4x - 1)$. Решите неравенство $y' < 12$.

а) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$ в) $x < \frac{1}{4}$, $x > \frac{1}{3}$

б) $x < \frac{1}{3}$, $x \neq \frac{1}{4}$ г) $x > \frac{1}{3}$

10. Составьте уравнение той касательной к графику функции $y = 4x^4 - \ln x$, которая параллельна прямой $y = -1$.

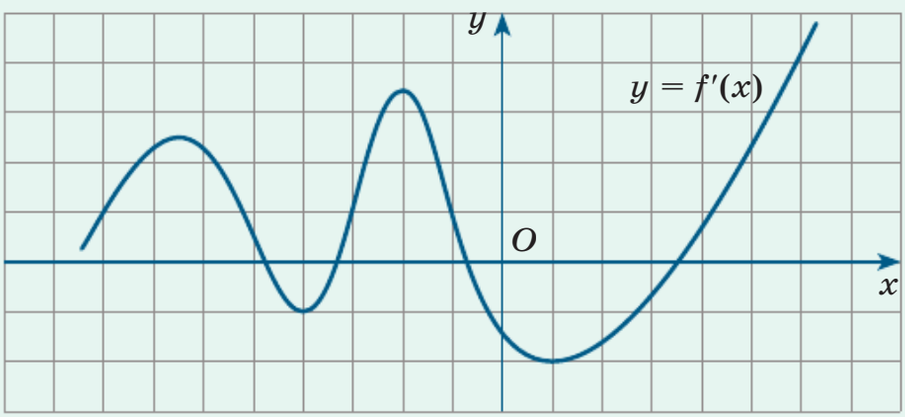


Рис. 61



Дальневосточный федеральный университет.
Владивосток

§16. Исследование функций на монотонность
§17. Исследование функций на экстремум
§18. О построении графиков функций
§19. Нахождение наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на промежутке
§20. Задачи на нахождение наименьших и наибольших значений величин

Глава 3

Исследование функций с помощью производной

§ 16. Исследование функций на монотонность

На рисунке 62 представлен график некоторой возрастающей дифференцируемой функции $y = f(x)$ и проведены касательные к графику в точках $x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d$. Первые две (смотрите!) составляют с осью Ox острый угол, т. е. у обеих прямых угловые коэффициенты положительны. Но мы же знаем, что угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. А в точках $x = c$, $x = d$ касательные параллельны оси Ox, значит, $f'(c) = 0$, $f'(d) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения возрастающей дифференцируемой функции выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$.

Дадим более строгое обоснование полученного выше неравенства $f'(x) \geqslant 0$. Для возрастающей функции $y = f(x)$ из неравенства $\Delta x > 0$ следует, что

$$x < x + \Delta x,\ f(x) < f(x + \Delta x),\ \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) > 0,\ \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0,$$

а из неравенства $\Delta x < 0$ следует, что

$$x + \Delta x < x,\ f(x + \Delta x) < f(x),\ \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) < 0,\ \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0.$$

Итак, в любом случае для возрастающей функции справедливо неравенство $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$. По теореме о переходе к пределу в неравенстве (см. теорему 2 в Приложении к § 4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$, т. е. $f'(x) \geqslant 0$.

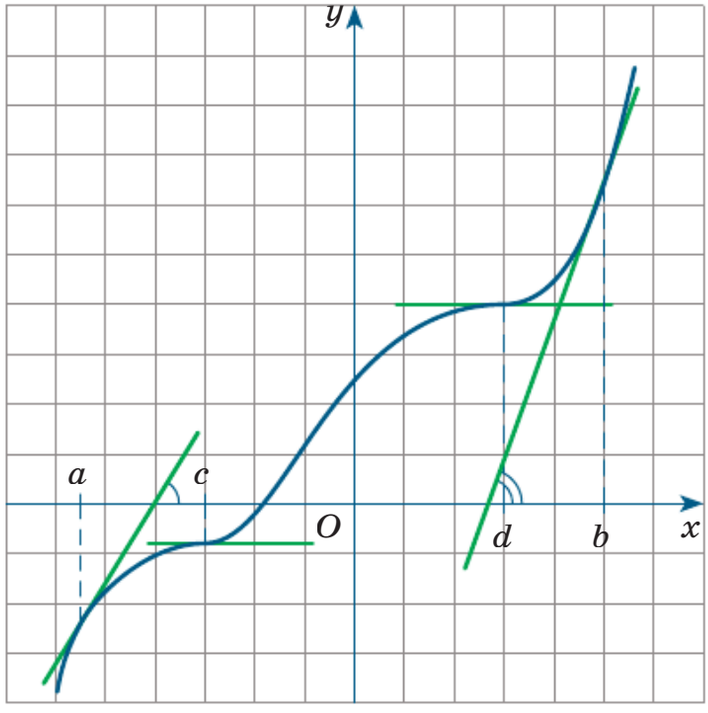


Рис. 62

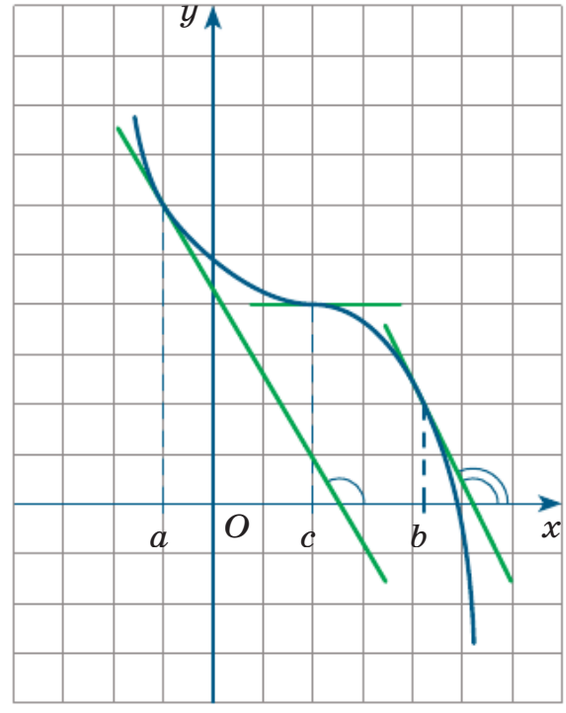


Рис. 63

На рисунке 63 представлен график некоторой убывающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведём касательные к графику в точках $x = a$, $x = b$. Обратите внимание: обе они составляют с осью Ox тупой угол, т. е. у обеих прямых угловые коэффициенты отрицательны, а потому $f'(a) < 0$, $f'(b) < 0$. А в точке $x = c$ касательная параллельна оси Ox, значит, $f'(c) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *убывающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$.

Как видите, между характером монотонности функции и знаком её производной есть определённая связь: *если дифференцируемая функция возрастает на промежутке, то её производная во всех точках промежутка неотрицательна*; *если дифференцируемая функция убывает на промежутке, то её производная во всех точках промежутка неположительна*. При этом во избежание недоразумений берут только открытые промежутки, т. е. интервалы или открытые лучи. Дело в том, что для функции, определённой на отрезке $[a; b]$, не очень корректно ставить вопрос о существовании производной в концевой точке (в точке $x = a$ или в точке $x = b$), поскольку в точке $x = a$ приращение аргумента может быть только положительным, а в точке $x = b$ — только отрицательным. Но в определении производной такие ограничения не предусмотрены.

Итак, по характеру монотонности функции можно судить о знаке её производной. Но гораздо важнее то, что верно и обратное: по знаку производной можно судить о характере монотонности функции.

Теорема 1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$ (причём равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$ (причём равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.

Эти теоремы доказывают в университетских курсах математического анализа (один из возможных вариантов доказательства мы приводим в Приложении к настоящему параграфу). Здесь же мы ограничимся их обоснованием с помощью физической модели «Производная — это скорость».

Предположим, что материальная точка движется по прямой, $s = s(t)$ — закон её движения. Если $s'(t) > 0$, т. е. скорость движения положительна, то точка удаляется от начала отсчёта. Значит, функция $s = s(t)$ возрастает. Если скорость $s'(t)$ отрицательна, то точка приближается к началу отсчёта, функция $s = s(t)$ убывает. Если скорость движения сначала была положительной, затем в какой-то момент времени обратилась в нуль, а потом снова стала положительной, то движущаяся точка в указанный момент времени как бы притормаживает (останавливается), а потом продолжает удаляться от начальной точки. Так что и в этом случае функция $s = s(t)$ возрастает.

Пример 1 Доказать, что функция:

а) $y = x^7 - 7x^4 + 28x - 5$ возрастает на всей числовой прямой;

б) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ убывает на луче $[3; +\infty)$.

Решение. а) $y' = (x^7 - 7x^4 + 28x - 5)' = 7x^6 - 28x^3 + 28 =$
$= 7(x^6 - 4x^3 + 4) = 7(x^3 - 2)^2$.

Производная $7(x^3 - 2)^2$ равна нулю только в точке $\sqrt[3]{2}$, а в остальных точках числовой прямой она положительна. Значит, производ-

ная функции удовлетворяет условиям теоремы 1, а потому сама функция возрастает на всей числовой прямой.

б)

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Если $x \in (3; +\infty)$, то $x > e$, $\ln x > \ln e$, т. е. $\ln x > 1$, $\frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$. Таким образом, производная y' на $(3; +\infty)$ отрицательна. По теореме 2 из этого следует, что сама функция убывает на открытом луче $(3; +\infty)$.

Для того чтобы доказать убывание функции на луче $[3; +\infty)$, рассуждают так. Функция $y = \frac{\ln x}{x}$ непрерывна на $(0; +\infty)$ как частное непрерывных функций. Значит, она непрерывна и на $[3; +\infty)$. После этого используют следующее правило:

> если функция возрастает (убывает) на открытом луче $(a; +\infty)$ и непрерывна на луче $[a; +\infty)$, то она также возрастает (убывает) на луче $[a; +\infty)$.

Такое же правило верно и для перехода от $(-\infty; b)$ к $(-\infty; b]$, от $(a; b)$ к $[a; b]$ и т. д. Кратко: *концевые точки включают в промежуток монотонности непрерывной функции.*

Пример 2 Исследовать на монотонность функцию $y = x^3 - 3x^2 + 4$ и построить её график.

Решение. Исследовать функцию на монотонность — это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких убывает. Согласно теоремам 1 и 2, это связано со знаком производной. Найдём производную данной функции:

$$y' = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Заметим, что $y' = 0$ при $x = 0$, $x = 2$. Область определения данной функции — вся числовая прямая. На рисунке 64 схематически указаны знаки производной на промежутках области определения: на открытом луче $(-\infty; 0)$ производная положительна, на интервале $(0; 2)$ — отрицательна, на открытом луче



Рис. 64

$(0; +\infty)$ — положительна. Значит, на луче $(-\infty; 0]$ функция возрастает, на отрезке $[0; 2]$ убывает, на луче $[2; +\infty)$ возрастает.

Чтобы построить график функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$, составим таблицу значений функции, куда обязательно следует включить значения функции в концевых точках промежутков монотонности ($x = 0$, $x = 2$) и ещё несколько значений:

x	-1	0	1	2	3
y	0	4	2	0	4

Отметим точки $(-1; 0)$, $(0; 4)$, $(1; 2)$, $(2; 0)$, $(3; 4)$ на координатной плоскости. Через отмеченные точки проводим линию, учитывая найденные промежутки возрастания и убывания функции и то, что в точках $x = 0$ и $x = 2$ производная обращается в нуль, касательная к графику функции в этих точках параллельна оси абсцисс (стационарные точки). График заданной функции изображён на рисунке 65.

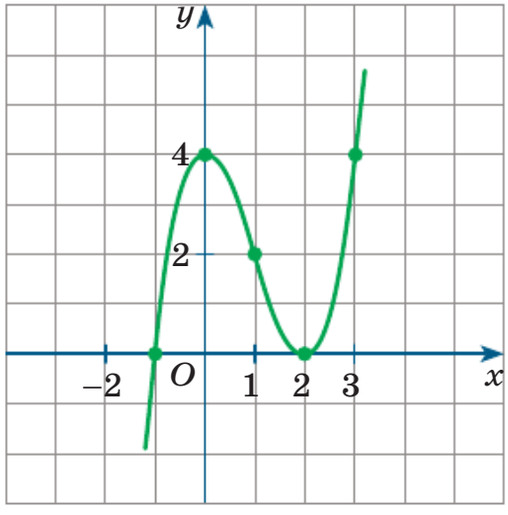


Рис. 65

А что будет, если на всём промежутке производная функции равна нулю? Здесь уже без всяких дополнительных предположений получается *необходимое и достаточное* условие, *критерий* постоянства функции.

Теорема 3. Пусть X — открытый промежуток. Тогда:
а) если функция $y = f(x)$ постоянна на X, то $f'(x) = 0$ для всех $x \in X$;
б) если $f'(x) = 0$ для всех $x \in X$, то функция $y = f(x)$ постоянна на X.

Утверждение «а» (*необходимое условие* постоянства функции) мы уже обсуждали и доказывали. Аккуратное доказательство утверждения «б» (*достаточное условие* постоянства функции), как и доказательства теорем 1 и 2, приводят в курсе высшей математики. Но физическая модель «Производная — это скорость» делает утверждение «б» практически несомненным. Смотрите: если скорость точки всё

время равна нулю, то нет и самого движения, т. е. положение точки неизменно.

Пример 3* Доказать, что $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ для всех $x \in (-1; +\infty)$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, она определена для всех $x \neq -1$, в частности определена на открытом луче $(-1; +\infty)$. Найдём производную этой функции:

$$y' = \left(\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{2+2x^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Получили, что $y' = 0$ на $(-1; +\infty)$, значит, по теореме 3 эта функция постоянна на указанном промежутке. Чтобы найти значение постоянной, достаточно вычислить значение функции в любой точке промежутка, например в точке 0:

$$y(0) = \operatorname{arctg}0 + \operatorname{arctg}1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Приложение к § 16

Теорема 4. Если производная функции положительна (отрицательна) во всех точках открытого промежутка X, то сама функция возрастает (убывает) на промежутке X.

Доказательство. Рассмотрим случай положительной производной. Предположим противное, что функция не возрастает, т. е. $c < d$, но $f(c) \geqslant f(d)$ для каких-то двух точек открытого промежутка. Применим аксиому о разделяющем элементе к двум подмножествам промежутка $(c; d]$:

$$A = \{a \mid f(c) < f(x) \text{ для всех } c < x \leqslant a\}$$
$$\text{и } B = \{b \mid f(c) \geqslant f(x) \text{ для какого-то } c < x \leqslant b\}.$$

Ясно, что множество A лежит левее множества B, а так как $f(c) \geqslant f(d)$, то $d \in B$, т. е. множество B непусто. Непусто и множество A. Действительно, так как $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$, то положительным будет и само отношение $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ в некоторой окрестности точки c. В частности, $f(c) < f(c + \Delta x)$ при всех достаточно малых положительных Δx.

Итак, пусть число s разделяет множества A и B, т. е. $A \leqslant s \leqslant B$. Если допустить, что $f(s) > f(c)$, то по непрерывности функции $y = f(x)$ верно неравенство $f(s') > f(c)$ для всех s' из некоторой окрестности $(s - r;\ s + r)$ точки s. Тогда $s < s + \dfrac{r}{2} \in A$, что противоречит $A \leqslant s$.

Симметрично, если допустить, что $f(s) < f(c)$, то $s - \dfrac{r}{2} \in B$, $s - \dfrac{r}{2} < s$ для некоторого $r > 0$. Противоречие с $s \leqslant B$.

Итак, $f(s) = f(c)$, а для всех $c < x < s$ выполняется $f(c) = f(s) < f(x)$. Тогда $f'(s) = \lim\limits_{x \to s,\, x < s} \dfrac{f(s) - f(x)}{s - x} \leqslant 0$, что противоречит условию $f'(s) > 0$. ■

А как быть с проверкой монотонности на любых неоткрытых промежутках? Объясним, например, правило для отрезка.

Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$ и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то функция возрастает (убывает) на отрезке.

Рассмотрим случай возрастания.

Докажем, что $f(a) < f(c)$ для каждого $a < c < b$. Фиксируем $a < d < c$. Тогда $f(d) < f(c)$ и $f(x) < f(d)$ для всех $a < x < d$. По непрерывности получаем $f(a) = \lim\limits_{x \to a,\, x < d} f(x) \leqslant f(d)$. В итоге $f(a) \leqslant f(d) < f(c)$.

Аналогично проверяется, что $f(c) < f(b)$. ■

Иногда теорему 4 и это правило объединяют в виде одного общего утверждения.

Теорема 5. Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, а её производная положительна (отрицательна) во всех точках интервала $(a; b)$, за исключением, быть может, только конечного множества точек, то функция возрастает (убывает) на отрезке.

Доказательство. Пусть $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$ и $f'(x) > 0$ во всех точках интервалов $(a; c_1)$, $(c_1; c_2)$, ... , $(c_n; b)$. По теореме 4 функция $y = f(x)$ возрастает на каждом из этих интервалов, а по правилу она возрастает на каждом из отрезков $[a; c_1]$, $[c_1; c_2]$, ... , $[c_n; b]$. Значит, она возрастает и на $[a; b]$.

Разумеется, тот же факт верен и для промежутков $(-\infty; b]$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$.

Упражнения

16.1. а) На рисунке 66 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. Среди отмеченных точек a, b, c, d, e и g укажите те, для которых справедливо неравенство $f'(x) < 0$.
б) На рисунке 67 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. Среди отмеченных точек a, b, c, d, e и g укажите те, для которых справедливо неравенство $f'(x) > 0$.

16.2. а) На рисунке 68 изображён график функции $y = f(x)$. Распределите неравенства $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$, $f'(c) < 0$, $f'(d) < 0$, $f'(e) < 0$, $f'(g) < 0$ в две группы: верные и неверные.
б) На рисунке 69 изображён график функции $y = f(x)$. Распределите неравенства $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$, $f'(c) < 0$, $f'(d) < 0$, $f'(e) < 0$, $f'(g) > 0$ в две группы: верные и неверные.

16.3. На рисунке 70 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. Сравните с нулём значение выражения:
а) $f'(a) + f'(b)$; в) $f'(b) \cdot f'(d)$; д) $e \cdot f'(e)$;
б) $f'(a) + f'(c)$; г) $f'(c) \cdot f'(g)$; е) $b \cdot f'(b)$.

16.4. На рисунке 71 изображён график производной функции $y = f(x)$. Определите, верным или неверным является высказывание:
а) функция $y = f(x)$ возрастает на $(-\infty; -4]$;
б) функция $y = f(x)$ возрастает на $[-1; +\infty)$;
в) функция $y = f(x)$ убывает на $[-3; 0]$;
г) функция $y = f(x)$ возрастает на $[1; +\infty)$;
д) функция $y = f(x)$ убывает на $(-\infty; -1]$;
е) функция $y = f(x)$ убывает на $[-1; 1]$.

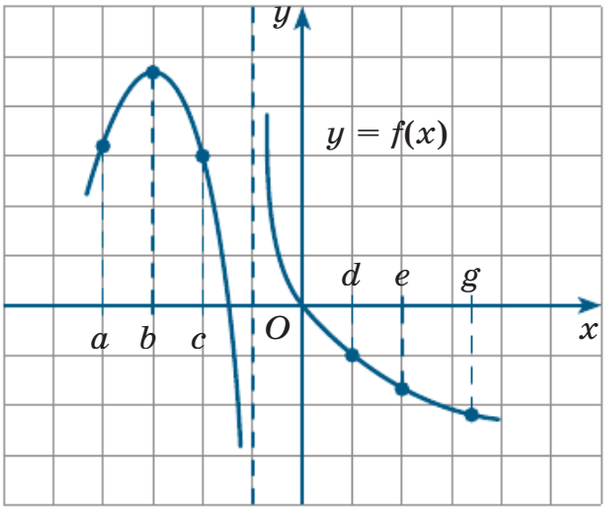


Рис. 66

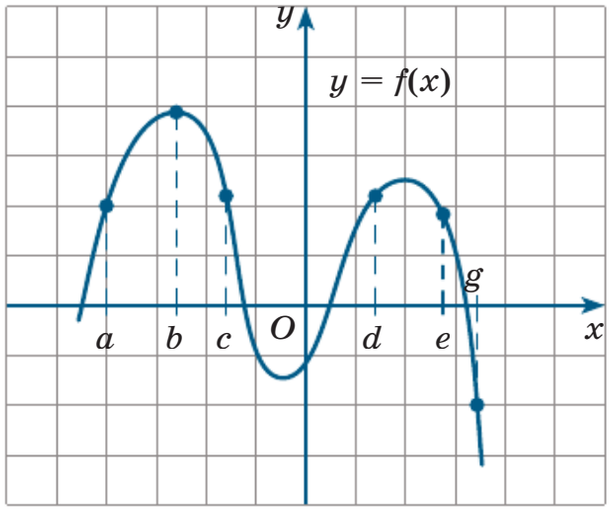


Рис. 67

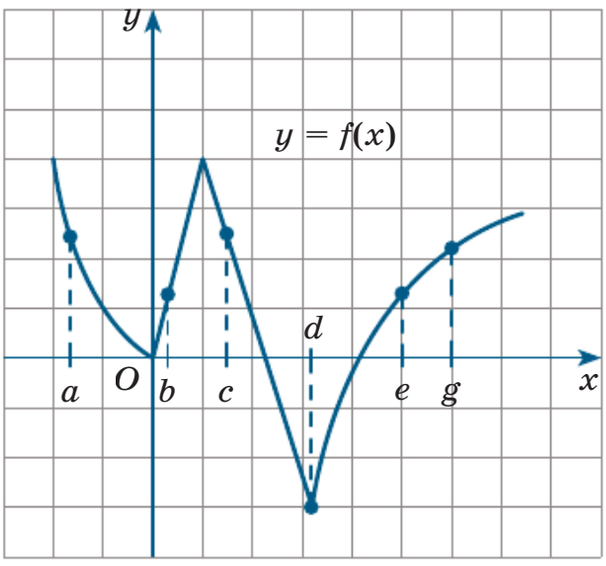


Рис. 68

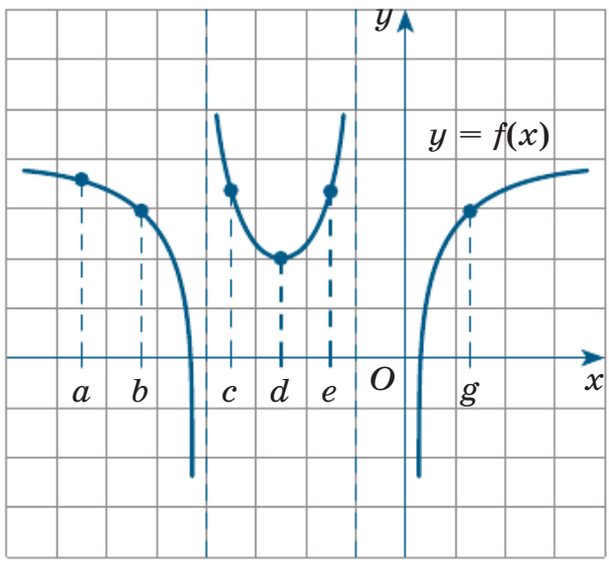


Рис. 69

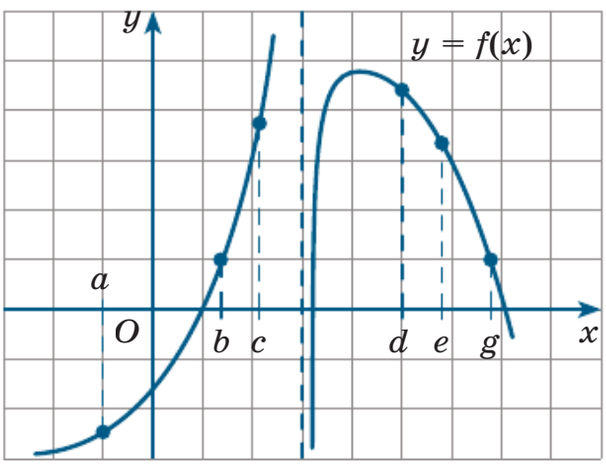


Рис. 70

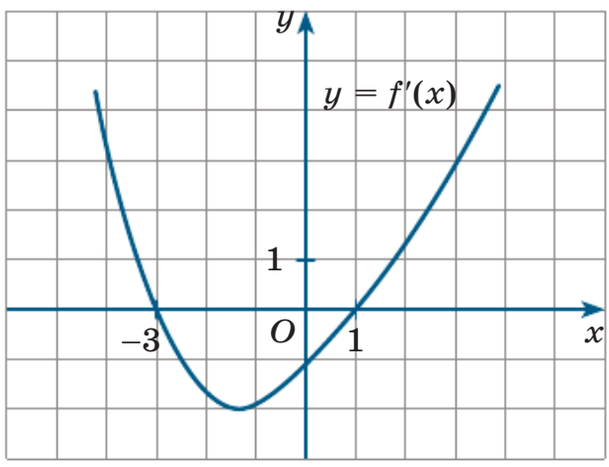


Рис. 71

16.5. На рисунке 72 изображён график производной функции $y = f(x)$. Определите, верным или неверным является высказывание:
а) функция $y = f(x)$ возрастает на $[-6; -3]$;
б) функция $y = f(x)$ убывает на $[7; +\infty)$;
в) функция $y = f(x)$ возрастает на $[-2; 5]$;
г) функция $y = f(x)$ убывает на $[-10; -3]$;
д) функция $y = f(x)$ возрастает на $(-\infty; -8]$;
е) функция $y = f(x)$ возрастает на $(0; 6)$.

16.6. На рисунке 73 изображён график производной функции $y = f(x)$. Укажите, на каком из данных промежутков функция $y = f(x)$ возрастает, а на каком убывает:
а) $[-10; -8]$ и $[-2; 2]$;
б) $[0; 3]$ и $[8; 9]$;
в) $[-7; -4]$ и $[5; 6]$;
г) $[-3; 0]$ и $[9; 11]$;
д) $[-16; -12]$ и $[4; 7]$;
е) $[12; 15]$ и $[-1; 3]$.

16.7. На рисунке 74 изображены графики производных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = h(x)$. Опишите характер монотонности

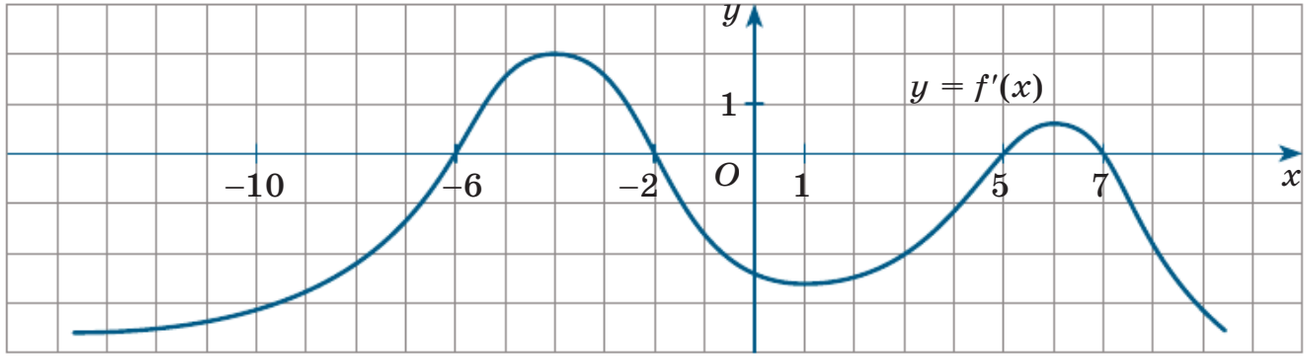


Рис. 72

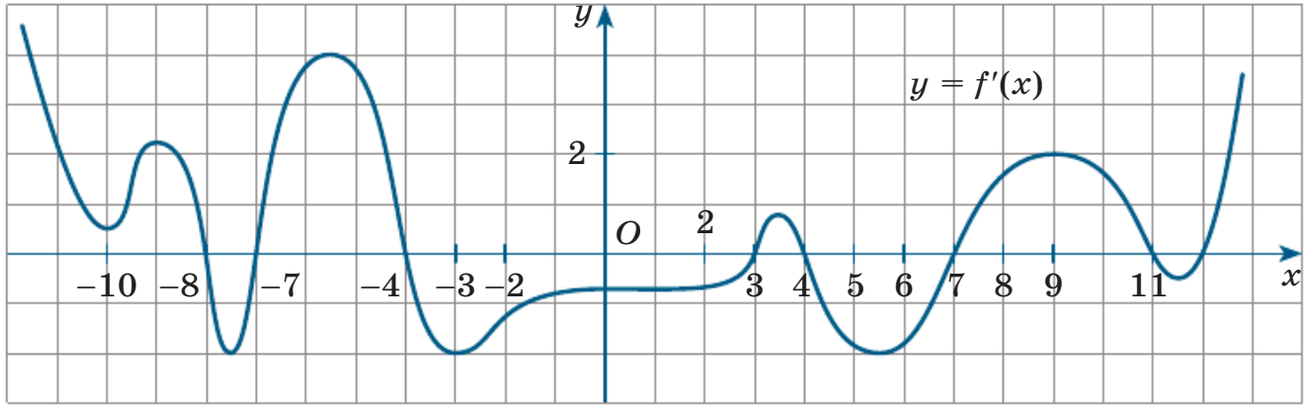


Рис. 73

(убывает или возрастает) каждой из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = h(x)$ на промежутке:

а) $[-3; -1]$; в) $[0; 2]$; д) $[3; 5]$;
б) $[1; 3]$; г) $[-2; 0]$; е) $[-6; -3]$.

16.8. а) Изобразите эскиз графика производной функции $y = f(x)$, если известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на луче $(-\infty; -1]$ и убывает на луче $[-1; +\infty)$.

б) Изобразите эскиз графика производной функции $y = f(x)$, если известно, что функция $y = f(x)$ возрастает на луче $[3; +\infty)$ и убывает на луче $(-\infty; 3]$.

16.9. Изобразите эскиз графика функции $y = f(x)$, если промежутки постоянства знака производной $f'(x)$ представлены на указанном рисунке:

а) рис. 75; в) рис. 77; д) рис. 79;
б) рис. 76; г) рис. 78; е) рис. 80.

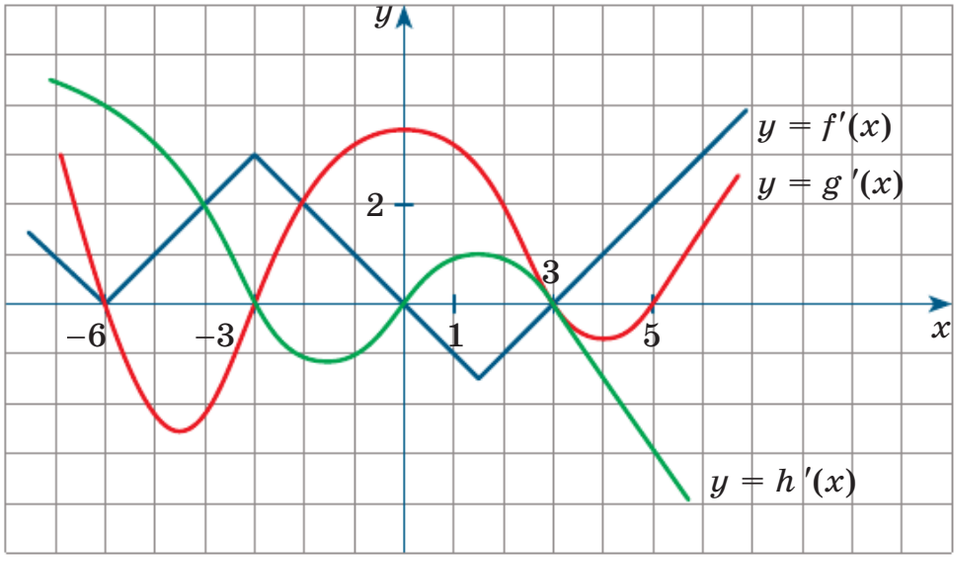


Рис. 74

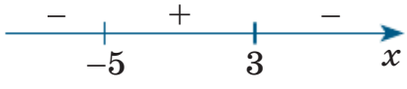


Рис. 75

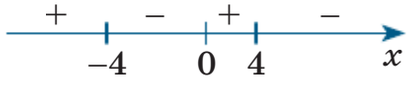


Рис. 76

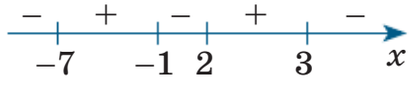


Рис. 77

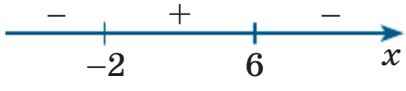


Рис. 78

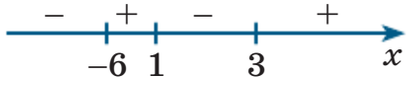


Рис. 79



Рис. 80

16.10. Докажите, что данная функция возрастает:

а) $y = \cos 2x + 4x$;

б) $y = 2^x + \sqrt[3]{x}$;

в) $y = \cos 3x + 5x$;

г) $y = 3^x + 2\sqrt[3]{x}$.

16.11. Докажите, что данная функция убывает:

а) $y = \cos x - 3x$;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{0,5} x$;

в) $y = \sin 2x - 4x$;

г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \log_{0,3} x$.

16.12. Докажите, что функция:

а) $y = -4x^3 - 2x + 7$ убывает на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = x^3 - x^2 + 5x - 1$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$;

в) $y = -x^5 - 2x^3 - 3x + 6$ убывает на $(-\infty; +\infty)$;

г) $y = 2x^3 - 7x + 11$ убывает на $(-\infty; +\infty)$;

д) $y = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 7$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$;

е) $y = 2x^5 - x^3 + 4x - 3$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

16.13. Докажите, что данная функция монотонна на всей числовой прямой, и укажите характер монотонности:

а) $y = 8 - 16x - 4x^3$;

б) $y = \cos 2x + 4x - 6$;

в) $y = \log_2 x + \sin x + 2x$;

г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - x^3 - 3x$.

16.14. Докажите, что функция:

а) $y = \frac{2x-1}{x-3}$ убывает на $(-\infty; 3)$;

б) $y = \frac{3x-5}{x-1}$ возрастает на $(1; +\infty)$;

в) $y = \frac{4x-13}{2x-5}$ возрастает на $(2{,}5; +\infty)$;

г) $y = \frac{4x-5}{x-2}$ убывает на $(2; +\infty)$;

д) $y = \frac{6x-5}{3x-1}$ возрастает на $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$;

е) $y = \frac{6x+13}{2x+3}$ убывает на $(-\infty; -1{,}5)$.

16.15. Исследуйте данную функцию на монотонность.

а) $y = 2x^2 - 8x + 13$;

б) $y = 3x^3 - x^2$;

в) $y = x^4 - 8x^2 + 19$;

г) $y = 3x^2 + 6x - 11$;

д) $y = x^3 - 6x^2$;

е) $y = x^4 - 2x^2 - 5$.

16.16. а) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x + 2$;

б) $y = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 14$;

в) $y = 5x^5 + 5\frac{1}{3}x^3 - 9x + 25$;

г) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 18$;

д) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 17$;

е) $y = \frac{1}{5}x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 9x - 21$.

16.17. а) $y = \frac{4}{(x-2)^2}$;

б) $y = \frac{2x}{x^2+1}$;

в) $y = \frac{x^3}{x-2}$;

г) $y = \frac{3}{(x+1)^2}$;

д) $y = \frac{3x}{x^2+2}$;

е) $y = \frac{2x^3}{3x+1}$.

16.18. а) $y = \sqrt{2x+1}$;

б) $y = \sqrt{2-x} + 2x$;

в) $y = \sqrt{3-2x}$;

г) $y = \sqrt{3-x} + 3x$.

16.19. а) $y = 2^x + \ln x$;

б) $y = 2x^2 - \ln x$;

в) $y = 3^x + x^{17}$;

г) $y = x - \ln(x+1)$.

16.20. а) $y = \frac{x}{\ln x}$;

б) $y = \frac{x^3}{e^x}$;

в) $y = \sqrt{x+6} + \ln(2-x)$;

г) $y = \frac{\ln x}{x}$;

д) $y = \frac{2^x}{x^2}$;

е) $y = \sqrt{x+3} + \ln(5-x)$.

16.21. а) $y = \sin x + \cos x + \sqrt{x} + 5x$;

б) $y = \sin 3x - \cos 2x - 2x^{\frac{2}{3}} - 6e^x$;

в) $y = 2\cos x - \sin x - x^{\frac{1}{5}} - 4x$;

г) $y = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sqrt[4]{x} + 2e^{2x}$.

16.22. а) $y = 2\ln x^3 - 5x + \frac{x^2}{2}$;

б) $y = e^{x^2-2x+1}$;

в) $y = \ln(x^2 - 2x - 3)$;

г) $y = \frac{\lg\frac{1}{x^3}}{\lg e} + x^2 + x + 3$;

д) $y = 2^{x^3 - x^2 - x + 1}$;

е) $y = \ln(3 + 2x - x^2)$.

16.23. Докажите, что $2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \arcsin\frac{4x}{4+x^2} = \pi$ для всех $x \in [2; +\infty)$.

ИКТ **16.24.** При каких значениях параметра p функция возрастает на всей числовой прямой:

а) $y = x^3 + px$;

б) $y = x^3 + x^2 + px - 8$;

в) $y = px^3 + x$;

г) $y = \frac{1}{3}x^3 - px^2 + 9x - 10$?

ИКТ **16.25.** При каких значениях параметра p функция убывает на всей числовой прямой:

а) $y = 2px - x^3$;

б) $y = -x^3 - px^2 - 4x + 8$;

в) $y = -px^3 - (p + 1)x$;

г) $y = -x^3 - 2x^2 - px + 8$?

16.26. При каких значениях параметра p функция $y = x^3 - 3x$ убывает на отрезке:

а) $[p + 1; p + 3]$;

б) $\left[p - 3; \frac{1}{6}p + \frac{2}{3}\right]$?

16.27. При каких значениях параметра p функция $y = x^3 - 3x$ возрастает на отрезке:

а) $[p - 2{,}5; p - 0{,}5]$;

б) $\left[p - \frac{1}{2}; 2p + 2\right]$?

Используя свойство монотонности функции, решите уравнение.

16.28. а) $x^3 + 7 = 17 - x$;

б) $x^5 + 4x^3 + 5x - 10 = 0$;

в) $18 - 2x^5 - 6x^3 - 10x = 0$;

г) $15 - 2x^3 = 4x - 9$;

д) $x^5 + 6x^3 + 5x - 12 = 0$;

е) $10 - x^5 - 2x^3 - 7x = 0$.

16.29. а) $x^5 + x^3 + 7x - 51 = \sqrt[3]{37 - 5x}$;

б) $102 - 2x^5 - 4x^3 - 2x = \sqrt[4]{6 + 5x}$.

16.30. а) $\sin 3x - 4\cos x - 11x = x^7 - 4$;

б) $6\sin\frac{x}{3} + 5\cos 2x + 12x = 5 - x^5$.

16.31. а) $6\sin\frac{\pi x}{2} + 4\cos\frac{\pi x}{2} + 17x = 32 - 7x^3 - 2x^5$;

б) $4\sin\frac{\pi x}{2} - 3\cos\pi x - 20x = x^5 + 5x^3 - 19$.

Упражнения для повторения

16.32. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x+\pi}, \text{ если } x \leqslant -\pi, \\ \sin x, \text{ если } -\pi < x < \pi, \\ \sqrt[3]{x-\pi}, \text{ если } x \geqslant \pi. \end{cases}$

а) Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$.
б) При каких значениях параметра p уравнение $f(x) = p$ имеет три корня?

16.33. Решите уравнение:

а) $\lg\left(x + \sqrt{5}\right) = -\lg\left(x - \sqrt{5}\right)$;

б) $\log_2(x-6) + 2\log_2\sqrt{x-7} = 1$;

в) $\log_5^2 x + 5 = 12\log_5\sqrt{x}$;

г) $\lg\left(x - \sqrt{7}\right) = -\lg\left(x + \sqrt{7}\right)$;

д) $\log_5(5-x) + 2\log_5\sqrt{9-x} = 1$;

е) $4\log_3\sqrt{x} = \log_3^2 x - 3$.

16.34. Решите неравенство:

а) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 4 \leqslant 0$;

б) $3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x \geqslant 0$;

в) $4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x} + 3 \geqslant 0$;

г) $4 \cdot 16^x - 11 \cdot 28^x + 7 \cdot 49^x \leqslant 0$.

16.35. а) Найдите наибольшее значение функции $y = \log_2(1 + 2x - x^2) - 3$.
б) Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(13 - 4x + x^2) + 1$.

16.36. а) Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_{2+x}(2x + a + 1) = 2$ имеет хотя бы один корень на промежутке $(-2; 1]$.
б) Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_{2-x}(a - 3x + 6) = 2$ имеет хотя бы один корень на промежутке $[-2; 2)$.

§ 17. Исследование функций на экстремум

Для наглядности дальнейших рассуждений начнём с построения графика кусочной функции $y = \begin{cases} -x, \text{ если } -4 \leqslant x < 0, \\ -(x-1)^2 + 1, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ x - 6, \text{ если } 3 < x \leqslant 8. \end{cases}$

График состоит из двух прямолинейных участков ($y = -x$, $-4 \leqslant x < 0$; $y = x - 6$, $3 < x \leqslant 8$) и части параболы ($y = -(x-1)^2 + 1$, $0 \leqslant x \leqslant 3$). Начнём с параболы. Её вершина находится в точке (1; 1), на концах отрезка [0; 3] функция $y = -(x-1)^2 + 1$ принимает значения 0 и -3 соответственно, а в точке $x = 2$ функция принимает значение 0. Через указанные четыре точки ((0; 0), (1; 1), (2; 0), (3; -3)) строим часть параболы (рис. 81). На том же чертеже строим участок прямой $y = -x$ на полуинтервале $[-4; 0)$ и участок прямой $y = x - 6$ на полуинтервале $(-3; 8]$. В итоге получаем график заданной кусочной функции (см. рис. 81).

В учебнике для 10-го класса мы выработали определённый порядок ходов (из восьми пунктов) для чтения графика. Прочитаем построенный график.

1) Область определения функции: $D(f) = [-4; 8]$.

2) Функция общего вида (ни чётная, ни нечётная).

3) Функция убывает на $[-4; 0]$, возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[1; 3]$, возрастает на $[3; 8]$.

4) Функция ограничена и снизу, и сверху.

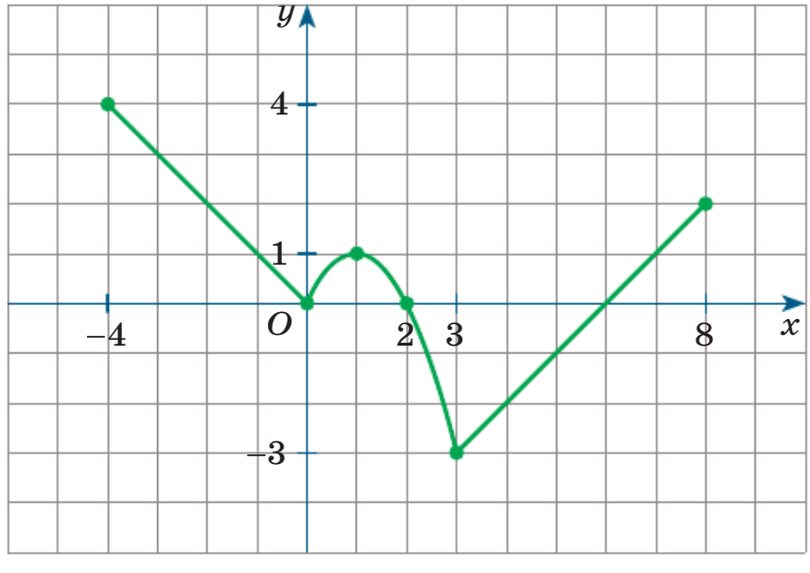


Рис. 81

5) $y_{\text{наим}} = -3$, $y_{\text{наиб}} = 4$.

6) Функция непрерывна в своей области определения.

7) Область значений функции: $E(f) = [-3; 4]$.

8) Функция выпукла вверх на отрезке $[0; 3]$.

Читать построенные графики мы с вами учились, начиная с 7-го класса, этот процесс постепенно (от класса к классу) «обрастал» всё новыми и новыми свойствами. Вот и теперь мы можем несколько обогатить этот процесс.

9) Функция дифференцируема во всех точках интервала $(-4; 8)$, за исключением точек $x = 0$, $x = 3$.

Понятие дифференцируемости функции мы обсуждали в §8. В том же параграфе мы договорились точку, в которой функция непрерывна, но не дифференцируема, называть *критической точкой*, а точку, в которой касательная к графику функции параллельна оси абсцисс (т. е. точку x, в которой выполняется равенство $f'(x) = 0$), называть *стационарной точкой*. Дополним процесс чтения графика рассматриваемой функции ещё одним пунктом.

10) $x = 0$, $x = 3$ — критические точки, $x = 1$ — стационарная точка.

Познакомимся с двумя новыми свойствами функций.

Определение 1. Точку $x = x_0$ называют **точкой минимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек $x \neq x_0$ которой выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$. Значение функции в точке минимума обозначают так: $y_{\min}$.

Определение 2. Точку $x = x_0$ называют **точкой максимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек $x \neq x_0$ которой выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Значение функции в точке максимума обозначают так: $y_{\max}$.

Вернёмся к графику функции, представленному на рисунке 81, и добавим в процесс чтения графика ещё один пункт.

11) У заданной функции:

$x = 0$ — точка минимума, причём $y_{\min} = 0$;

$x = 1$ — точка максимума, причём $y_{\max} = 1$;

$x = 3$ — точка минимума, причём $y_{\min} = -3$.

Точки минимума и максимума функции объединяют общим термином — *точки экстремума* (от лат. *extremum* — крайний). Если $x = x_0$ является точкой минимума (максимума) функции $y = f(x)$, то довольно часто и соответствующую точку $(x_0; f(x_0))$ графика функции также называют точкой минимума (максимума).

Обратите внимание на различия в обозначениях: $y_{\text{наиб}}$ — это наибольшее значение функции на всей её области определения или на рассматриваемом промежутке, а $y_{\max}$ — это значение функции в точке максимума. Для сравнения приведём пример, чемпион России — это «самый-самый» во всей стране, глобально, а чемпион школы — это «самый-самый» только локально, в пределах одной школы. Как говорят, $y_{\text{наиб}}$ — глобальное понятие, а $y_{\max}$ — локальное понятие, оно определяется поведением функции только в некоторой окрестности точки максимума. Например, для функции, график которой представлен на рисунке 81, $y_{\text{наиб}} = 4$, а $y_{\max} = 1$. Разумеется, аналогичны и различия между $y_{\text{наим}}$ и $y_{\min}$. Например, $y_{\text{наим}}$ — это всегда одно число, если оно вообще существует, а $y_{\min}$ может в каждой из точек минимума принимать своё отдельное значение.

Как искать точки экстремума функции? Ответ на этот вопрос дают две теоремы.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то в этой точке производная функции либо равна нулю (стационарная точка), либо не существует (критическая точка).

Посмотрите на рисунок 81. У функции, график которой представлен на этом рисунке, две точки минимума (критические точки $x = 0$, $x = 3$) и одна точка максимума (стационарная точка $x = 1$).

Нам довольно часто приходилось строить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Начинали мы обычно с отыскания координат вершины параболы, служащей графиком квадратичной функции. Абсциссу x_0 вершины мы находили по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$, которую приходилось специально запоминать. Но ведь вершина параболы — это точка экстремума, в ней производная квадратичной функции равна нулю. Так что абсциссу вершины параболы можно найти и из условия $y' = 0$.

Найдём для примера координаты вершины параболы

$$y = 2x^2 - 5x + 3.$$

Имеем:

$$y' = (2x^2 - 5x + 3)' = 4x - 5;\ 4x - 5 = 0;$$

$$x_0 = \frac{5}{4};\quad y_0 = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 3 = -\frac{1}{8}.$$

Итак, вершиной параболы $y = 2x^2 - 5x + 3$ является точка $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$.

А верна ли теорема, обратная теореме 1, т. е. верно ли, что если $x = x_0$ — стационарная или критическая точка, то в этой точке функция имеет экстремум? Ответ отрицательный. Смотрите: на рисунке 82 изображён график функции $y = -x^3$; в точке $x = 0$ производная $y' = -3x^2$ равна нулю. Точка $x = 0$ — это стационарная точка, но не точка экстремума. А на рисунке 83 изображён график функции $y = \sqrt[3]{x}$; в точке $x = 0$ производная функции не существует, это критическая точка, но не точка экстремума.

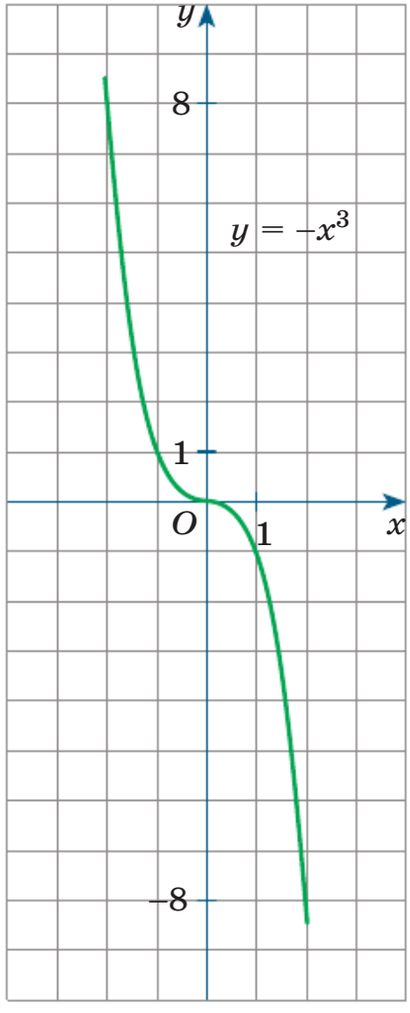


Рис. 82

Как же узнать, есть ли в стационарной или в критической точке экстремум? Для ответа на этот вопрос снова рассмотрим графики функций, представленные на рисунках 81—83.

На рисунке 81 три точки экстремума. Обратите внимание: при переходе через каждую из этих трёх точек изменяется характер монотонности функции. Смотрите:

— в некоторой окрестности точки минимума $x = 0$ слева от неё функция убывает, а справа возрастает;

— в некоторой окрестности точки максимума $x = 1$ слева от неё функция возрастает, справа убывает;

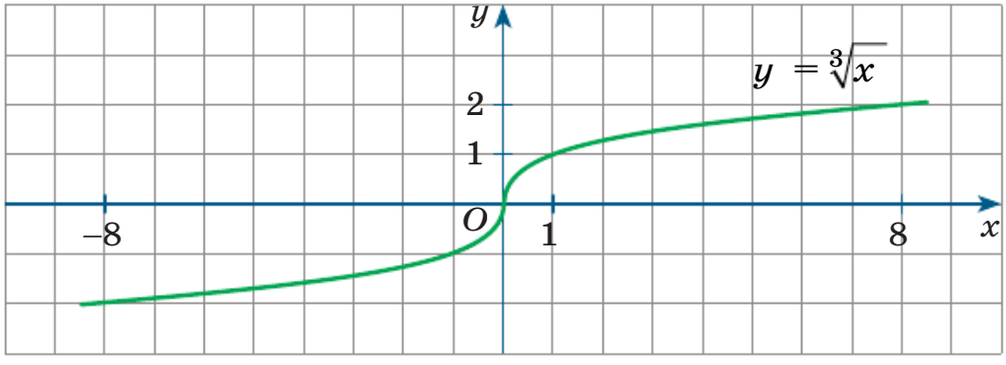


Рис. 83

— в некоторой окрестности точки минимума $x = 3$ слева от неё функция убывает, справа возрастает.

Если перейти к знакам производной, то:

— в некоторой окрестности точки минимума левее неё $y' < 0$, а правее неё $y' > 0$;

— в некоторой окрестности точки максимума левее неё $y' > 0$, а правее неё $y' < 0$.

Как в таких случаях говорят, *при переходе через точку минимума (максимума) производная меняет свой знак*.

Если же и слева, и справа от стационарной или критической точки производная имеет один и тот же знак, то в этой точке экстремума нет. Именно так обстоит дело с функцией $y = -x^3$, график которой изображён на рисунке 82: и слева, и справа от стационарной точки $x = 0$ функция убывает, производная отрицательна. А для функции $y = \sqrt[3]{x}$, график которой изображён на рисунке 83, дело обстоит так: и слева, и справа от критической точки $x = 0$ функция возрастает, производная положительна.

Наши рассуждения могут служить подтверждением (но, конечно, не доказательством) справедливости следующей теоремы.

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что и слева, и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

Этой длинной формулировкой на практике пользоваться неудобно, советуем применять условную схему, представленную на рисунке 84.

Для исследования функции на монотонность и экстремумы полезно использовать следующий алгоритм.

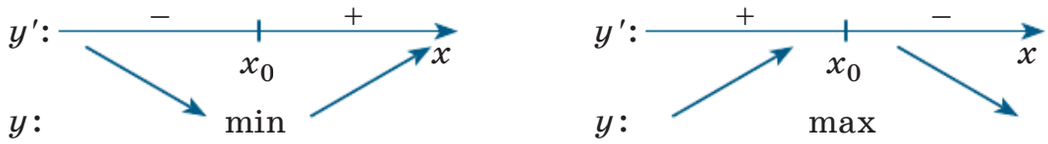


Рис. 84

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные ($f'(x) = 0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной внутри получившихся промежутков.
4. Сделать выводы о монотонности функции и о её точках экстремума.

Заметим, что если заданная функция имеет вид $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, то полезно сделать добавление к алгоритму: *полюсы функции*, т. е. точки, в которых знаменатель $q(x)$ обращается в нуль, тоже отмечают на числовой прямой, причём делают это до определения знаков производной. Разумеется, полюсы не могут быть точками экстремума.

Пример 1 Исследовать на монотонность и экстремумы функцию

$$y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 28.$$

Решение. Воспользуемся алгоритмом.

1. Найдём производную заданной функции:

$$y' = (x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 28)' = 4x^3 - 12x^2 - 16x = \\ = 4x(x^2 - 3x - 4) = 4x(x + 1)(x - 4).$$

2. Критических точек у функции нет (производная определена на всей числовой прямой); стационарные точки найдём из уравнения $4x(x + 1)(x - 4) = 0$. Получаем три стационарные точки: 0, −1, 4.

3. Отметим стационарные точки на числовой прямой; знаки производной внутри получившихся промежутков указаны на рисунке 85.



Рис. 85

4. Функция убывает на $(-\infty; -1]$, возрастает на $[-1; 0]$, убывает на $[0; 4]$, возрастает на $[4; +\infty)$.

$x = -1$ — точка минимума, $y_{\min} = 25$;

$x = 0$ — точка максимума, $y_{\max} = 28$;

$x = 4$ — точка минимума, $y_{\min} = -100$.

Пример 2 Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$.

Решение. 1. Найдём производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 3}{x - 1}\right)' = \frac{(x^2 + 3)'(x - 1) - (x^2 + 3)(x - 1)'}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 3) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

2. Производная не существует в точке $x = 1$, но эта точка не принадлежит области определения заданной функции, это точка разрыва, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдём из уравнения $\dfrac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2} = 0$. Получаем две стационарные точки: -1 и 3.

3. Отметим стационарные точки и точку разрыва (полюс функции) на числовой прямой; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 86.



Рис. 86

4. Функция возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[-1; 1)$, убывает на $(1; 3]$, возрастает на $[3; +\infty)$.

$x = -1$ — точка максимума, $y_{\max} = -2$; $x = 3$ — точка минимума, $y_{\min} = 6$.

Пример 3 Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $y = x^4 - 4\ln x$.

Решение.

1. Найдём производную заданной функции:

$$y' = (x^4 - 4\ln x)' = 4x^3 - 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4x^4 - 4}{x} = \frac{4(x^4 - 1)}{x} =$$

$$= \frac{4(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x} = \frac{4(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x}.$$

2. Область определения функции $y = x^4 - 4\ln x$ — открытый луч $(0; +\infty)$; в этой области производная всюду существует и обращается в нуль только в точке $x = 1$ — это единственная стационарная точка.

3. Отметим на открытом луче $(0; +\infty)$ стационарную точку $x = 1$; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 87.

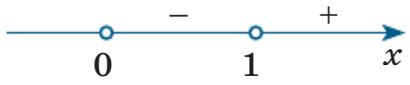


Рис. 87

4. Функция убывает на $(0; 1]$, возрастает на $[1; +\infty)$.

$x = 1$ — точка минимума, $y_{\min} = 1$.

Пример 4 Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $y = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}$.

Решение.

1. Найдём производную заданной функции:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3} = \frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

2. Функция $y = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$, а её производная не существует в точке $x = 0$ — это критическая точка. Стационарные точки найдём из уравнения $\frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$. Имеем: $1 - \sqrt[3]{x^2} = 0$, $\sqrt[3]{x^2} = 1$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$.

3. Отметим на числовой прямой точки 0, 1, –1; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 88.

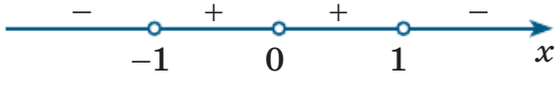


Рис. 88

4. Функция убывает на $(-\infty; -1]$, возрастает на $[-1; 0]$, возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$.

$x = -1$ — точка минимума, $y_{\min} = -\frac{2}{3}$;

$x = 1$ — точка максимума, $y_{\max} = \frac{2}{3}$.

Упражнения

17.1. На рисунке 89 изображён график функции $y = f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$. Среди отмеченных точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 и x_8 укажите те, для которых справедливо высказывание:
а) точка x_n является стационарной;
б) точка x_n является критической;
в) точка x_n является точкой максимума;
г) точка x_n является точкой минимума.

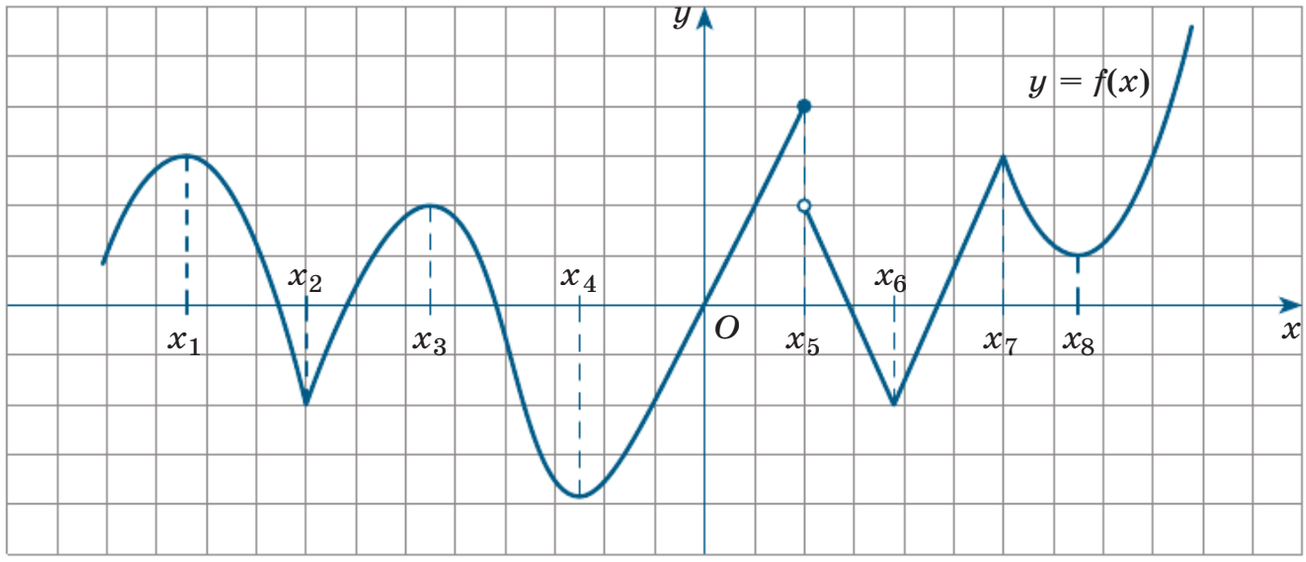


Рис. 89

17.2. Дана непрерывная функция $y = f(x)$. Используя данные о её производной $f'(x)$, приведённые в таблице, укажите:
а) промежутки возрастания функции $y = f(x)$;
б) точки максимума функции $y = f(x)$;
в) стационарные точки функции $y = f(x)$;
г) промежутки убывания функции $y = f(x)$;
д) точки минимума функции $y = f(x)$;
е) критические точки функции $y = f(x)$.

x	$(-\infty; -7)$	-7	$(-7; -2)$	-2	$(-2; 3)$	3	$(3; 5)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	не сущ.	$-$

17.3.

x	$(-\infty; -4)$	-4	$(-4; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 3)$
$f'(x)$	$-$	не сущ.	$+$	0	$+$	0	$-$

17.4. а) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале $(-7; 8)$, имеющей в точке $x = 1$ максимум, в точках $x = -4$ и $x = 6$ две точки минимума и не имеющей на этом интервале ни наибольшего, ни наименьшего значения.
б) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале $(-9; 7)$, имеющей в точках $x = -8$ и $x = 3$ две точки максимума, а в точках $x = -5$ и $x = 0$ две точки минимума, наибольшее значение на этом интервале, равное 7, но не имеющей на этом интервале наименьшего значения.

17.5. Найдите среди данных высказываний истинные:
1) чётная функция может иметь только одну точку экстремума;
2) если нечётная функция имеет точку максимума, то она имеет и точку минимума;
3) периодическая функция имеет не более трёх точек экстремума;
4) нечётная функция может иметь две точки экстремума;
5) если чётная функция имеет точку минимума, то она имеет и точку максимума;
6) монотонная функция может иметь единственную точку экстремума.

Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер.

17.6. а) $y = 3x^2 - 9x + 4$;
б) $y = x^3 + 4x^2 - 3x$;
в) $y = x^4 - 8x^2 + 9$;
г) $y = 7x - 3x^2 - 2$;
д) $y = x^3 + 3x^2 - 24x$;
е) $y = 2x^4 - 8x^2 - 11$.

17.7. а) $y = x - \frac{4}{x} + 3$;
б) $y = 2x + \frac{8}{x} - 14$;
в) $y = \frac{x^2 + 16}{x}$;
г) $y = x - \frac{1}{x} - 12$;
д) $y = \frac{7}{x} + \frac{x}{7} + 4$;
е) $y = \frac{x^2 + 36}{x}$.

17.8. а) $y = (x-4)^4 + 3$;
г) $y = (5-x)^4 - 1$;
б) $y = \sqrt{2x-3} + 2$;
д) $y = \sqrt{3x-1} - 2$;
в) $y = x - 2\sqrt{x-5}$;
е) $y = x - 4\sqrt{x-3}$.

17.9. а) $y = \frac{x^3}{3} - 8x^2 + 15x - 32$;
г) $y = \frac{2x^3}{3} - 5{,}5x^2 + 14x + 25$;
б) $y = 8x^4 + 4x - 19$;
д) $y = \frac{x^4}{4} - 27x + 11$;
в) $y = 5x^5 - 3x^3 + 7$;
е) $y = 3x^5 - 5x^3 - 6$.

17.10. а) $y = e^{2x} - 4e^x + 3x - 2$;
г) $y = e^{2x} - 7e^x + 5x + 1$;
б) $y = 4\ln x^3 - 7x + \frac{x^2}{2}$;
д) $y = 10\ln\sqrt{x} - 6x + \frac{x^2}{2}$;
в) $y = 5x - 6\ln\sqrt{x} + x^2$;
е) $y = x - 2\ln x^3 + x^2$.

17.11. а) $y = \frac{14}{x^4 - 5x^2 + 4}$;
в) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x}$;
б) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{5-x}$;
г) $y = x\sqrt[3]{x-1}$.

17.12. а) $y = x^3e^x$;
г) $y = x^2e^x$;
б) $y = xe^{2x-5}$;
д) $y = xe^{3x+4}$;
в) $y = \frac{e^{2x}}{x}$;
е) $y = \frac{e^x}{x^2}$.

17.13. а) $y = x^4 - x^2 - 2\ln x$;
б) $y = x^4 - 3x^2 + 2\ln x$.

17.14. а) $y = x\sqrt{\ln x}$;
в) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$;
б) $y = \frac{x^2}{2} - 5x + 4\ln\left(x\sqrt{x}\right)$;
г) $y = x^2 + x - \frac{1}{3}\ln x^9$.

17.15. Найдите точки экстремума заданной функции на отрезке $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ и определите их характер:

а) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;
в) $y = 0{,}5\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
б) $y = \cos\frac{2x}{3} + 0{,}5$;
г) $y = \sin 2x - 1{,}5$.

17.16. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы на указанном промежутке:

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

б) $y = \sqrt{2}\cos x - x$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы.

17.17. а) $y = e^{x^3 - 3x^2 - 24x + 5}$;

б) $y = \ln(\sin x + 5)$, $x \in (7; 9)$;

в) $y = \operatorname{arctg}^2(x - 1)$;

г) $y = 3^{\sqrt{x} - 0{,}5x}$;

д) $y = \log_3(2\cos x + 4)$, $x \in (8; 10)$;

е) $y = \operatorname{arcctg}\frac{x^3}{5x - 1}$.

17.18. а) $y = \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x, \text{ если } x \geqslant 1, \\ x - 12, \text{ если } x < 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x^4 - 2x^2 - 3, \text{ если } x \geqslant -2, \\ 2x + 9, \text{ если } x < -2. \end{cases}$

17.19. а) $y = |x - 2| - 1$;

б) $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$;

в) $y = |x + 1| - 3$;

г) $y = \left|2 - \frac{2}{x}\right|$.

17.20. а) $y = |(x - 4)(2 - x)|$;

б) $y = |x^3 - 9x|$;

в) $y = x^2 - 6|x - 1| + 1$;

г) $y = |(x - 1)(x + 3)|$;

д) $y = |3x - x^3|$;

е) $y = 4|x| - 6 - x^2$.

17.21. а) Найдите значения коэффициентов b и c, если известно, что $x = 1$ — точка экстремума функции $y = x^4 + bx^2 + c$, а её график проходит через точку $(1; -4)$.

б) При каких значениях коэффициентов a, b, c точки $x = 1$, $x = 3$ являются точками экстремума функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$?

17.22. При каких значениях параметра p функция $y = x^4e^{-x}$ на интервале $(p - 1; p + 5)$:
а) имеет одну точку экстремума;
б) не имеет точек экстремума;
в) убывает;
г) имеет две точки экстремума?

Упражнения для повторения

ИКТ **17.23.** Постройте график функции:
а) $y = \sin 2|x|$; в) $y = |3\sin x|$; д) $y = 3\sin|x|$;
б) $y = 2\cos|x|$; г) $y = \cos\frac{|x|}{2}$; е) $y = \frac{1}{2}|\cos x|$.

17.24. Вычислите значение выражения при заданном условии:
а) $\frac{2}{1+\sin 2t}$ при $\operatorname{ctg} t = 2$;
б) $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$ при $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t = 4$;
в) $\sin^3 t + \cos^3 t$ при $\sin t + \cos t = 0{,}9$;
г) $\frac{3}{3 + 2\cos 2t}$ при $\operatorname{tg} t = 0{,}5$;
д) $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$ при $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 5$;
е) $\sin^3 t - \cos^3 t$ при $\sin t - \cos t = -0{,}2$.

17.25. Найдите множество значений функции:
а) $y = 5\sin^2 x + \cos 2x$;
б) $y = 2\cos 2x - 3\cos x$;
в) $y = \sin x + \cos x$;
г) $y = 2\cos 2x - 7\sin^2 x$;
д) $y = 3\sin x + 4\cos^2 x$;
е) $y = \sin x - \cos x$.

17.26. Решите уравнение:
а) $x\sqrt[4]{x} = 2 - x\sqrt[6]{x}$;
б) $0{,}5\sqrt[3]{x} = (x - 7)^{-0{,}3}$;
в) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{7} + \frac{6}{7}$;
г) $4\sqrt[4]{x^5} = 5 - x\sqrt[3]{x}$;
д) $0{,}5\sqrt[5]{x} = (x - 31)^{-1{,}3}$;
е) $\sqrt[7]{x^5} = \frac{3}{5\sqrt[3]{x^2}} + 0{,}4$.

17.27. Найдите все значения параметра p, при которых данное уравнение имеет три различных корня:
а) $3|x - p| + 12x = x^2 + 36$;
б) $5|x + p| - 9 = x^2 + 6x$.

§ 18. О построении графиков функций

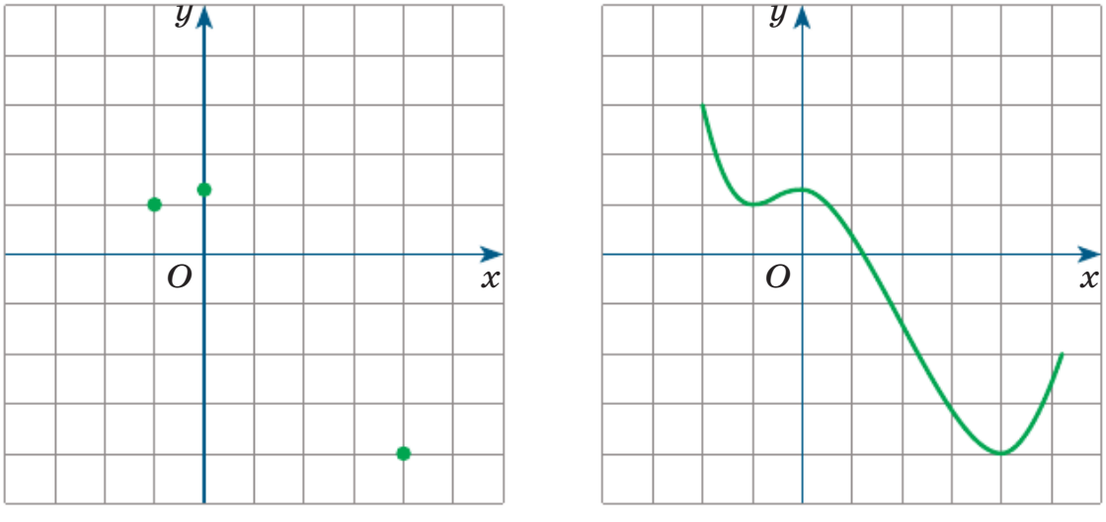
Вам знакомы графики основных элементарных функций:

$$y = kx + m, \quad y = ax^2 + bx + c, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{k}{x}, \quad y = |x|,$$
$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$
$$y = x^r \ (r \in \boldsymbol{Q}), \quad y = a^x, \quad y = \log_a x.$$

Говорили мы и о том, как строить графики, которые получаются из графиков перечисленных функций с помощью различных преобразований, например $y = (x - 1)^3 + 2$, $y = \sin 2x$, $y = -3e^x$ и т. п.

Во всех указанных случаях мы с самого начала имели представление о том, как будет выглядеть график предложенной функции. Например, $y = \sqrt{x}$ — ветвь параболы, $y = \sin x$ — синусоида, $y = (x - 1)^3 + 2$ — кубическая парабола, сдвинутая на одну единицу вправо по оси Ox и на две единицы вверх по оси Oy, $y = -3e^x$ — экспонента, растянутая от оси абсцисс с коэффициентом 3 и затем симметрично отражённая относительно оси абсцисс.

А как быть, если вид графика заранее неизвестен? Тогда приходится строить график по точкам. Но эти точки надо выбирать со смыслом, искать особо важные точки графика, которые определяют его вид. Таковыми являются, например, точки экстремума. Смотрите: в предыдущем параграфе мы для функции $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 28$ в примере 1 нашли три такие точки — точку минимума $(-1; 25)$, точку максимума $(0; 28)$ и точку минимума $(4; -100)$. Эти точки отмечены на рисунке 90, *а* (без соблюдения масштаба). А на рисунке 90, *б*



а *б*

Рис. 90

с помощью этих точек построен очень примерный эскиз, дающий представление о виде графика функции.

В тех случаях, когда речь идёт о построении графика незнакомой функции, когда предварительного представления об эскизе графика нет, полезно иметь некий план, некую схему исследования свойств функции, которая поможет составить представление о её графике. Когда представление о виде графика сложится, можно приступать к построению графика по точкам.

1) Начинать следует с нахождения области определения функции (если эта область не задана) и с указания её точек разрыва.

2) Далее, полезно исследовать функцию на чётность, поскольку график чётной или нечётной функции обладает симметрией (соответственно относительно оси Oy или относительно начала координат), и, следовательно, можно сначала построить только ветвь графика при $x \geqslant 0$, а затем дорисовать симметричную ветвь.

3) Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$. Об этом мы говорили в § 3.

4) Если $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ и при $x = a$ знаменатель $q(x)$ обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, то $x = a$ — *вертикальная асимптота* графика функции $y = f(x)$.

5) К особо важным точкам относятся:

— стационарные и критические точки;

— точки экстремума;

— точки пересечения графика с осями координат.

При необходимости следует выбрать ещё несколько контрольных точек.

Пример 1 Построить график функции:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$; б) $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$.

Решение. а) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, не является ни чётной, ни нечётной. Для построения её графика достаточно найти стационарные точки, критические точки, точки экстремума и ещё несколько контрольных точек.

Найдём производную заданной функции:

$$y' = (2x^3 + 3x^2 - 1)' = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1).$$

Критических точек у функции нет (производная определена на всей числовой прямой); стационарные точки найдём из уравнения $6x(x + 1) = 0$. Получаем две стационарные точки: 0 и -1.

Отметим стационарные точки на числовой прямой; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 91.



Рис. 91

Функция возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[-1; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$.

$x = -1$ — точка максимума, $y_{\max} = 0$;

$x = 0$ — точка минимума, $y_{\min} = -1$.

Итак, мы знаем две точки графика: $(-1; 0)$ и $(0; -1)$. Добавим ещё пару контрольных точек. Если $x = 1$, то $y = 4$; если $x = -2$, то $y = -5$.

На рисунке 92 отмечены точки $(-1; 0)$, $(0; -1)$, $(1; 4)$, $(-2; -5)$ и построен график функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

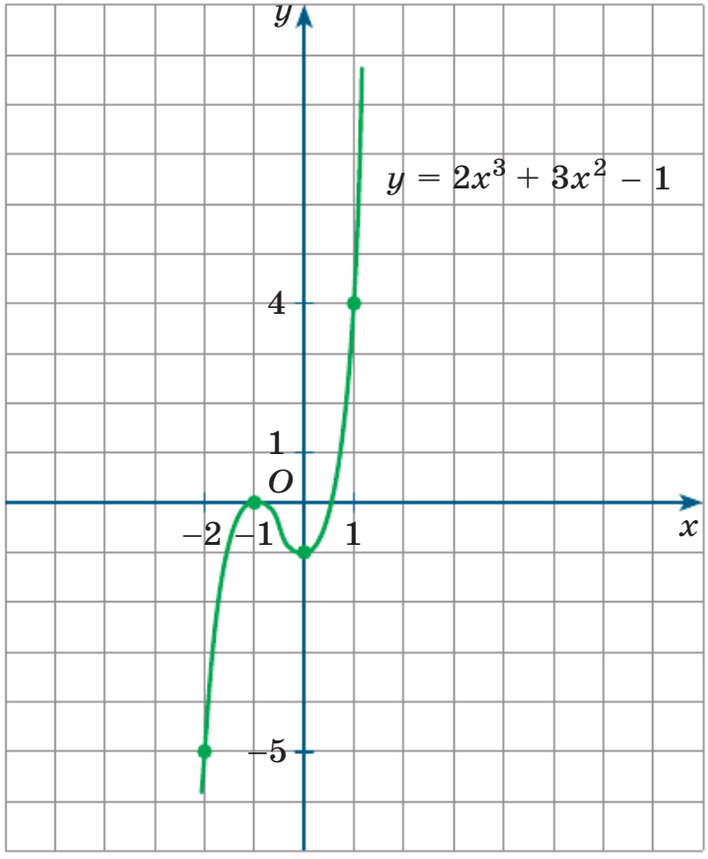


Рис. 92

б) Эта функция, как и функция из пункта «а», определена и непрерывна на всей числовой прямой, не является ни чётной, ни нечётной. Для построения её графика достаточно найти стационарные точки,

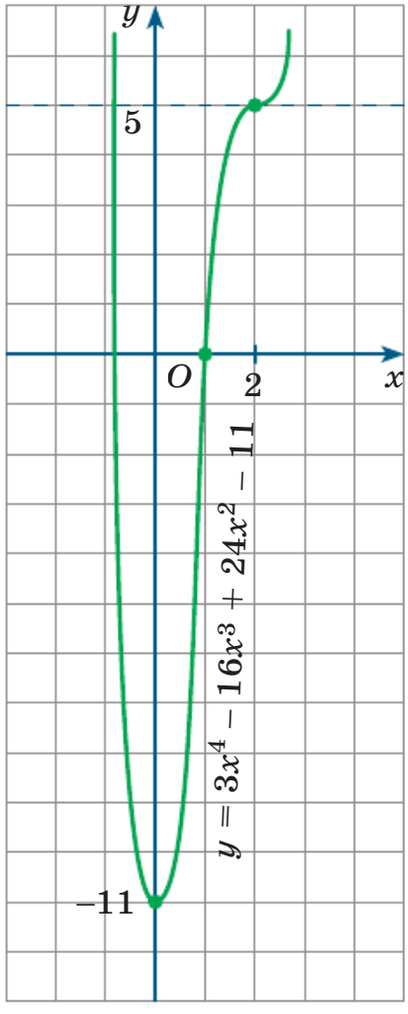


Рис. 94

критические точки, точки экстремума и ещё несколько контрольных точек.

Найдём производную заданной функции:

$$y' = (3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11)' = \\ = 12x^3 - 48x^2 + 48x = \\ = 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x - 2)^2.$$

Критических точек у функции нет (производная определена на всей числовой прямой); стационарные точки найдём из уравнения $12x(x - 2)^2 = 0$. Получаем две стационарные точки: 0 и 2.

Отметим стационарные точки на числовой прямой; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 93.

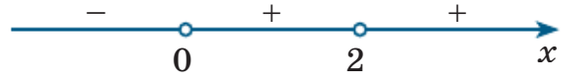


Рис. 93

$x = 0$ — точка минимума, $y_{\min} = -11$;

$x = 2$ — стационарная точка, не являющаяся точкой экстремума, $y = 5$.

Итак, мы знаем две точки графика функции $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$: (0; –11) и (2; 5). Добавим ещё одну точку: если $x = 1$, то $y = 0$.

На рисунке 94 отмечены точки (0; –11), (1; 0), (2; 5) и построен график функции $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$. Обратите внимание на поведение графика в точке (2; 5). Мы установили, что $x = 2$ — стационарная точка, не являющаяся точкой экстремума. В этой точке производная функции обращается в нуль, а это значит, что касательная к графику функции в этой точке параллельна оси абсцисс (касательная проведена на рисунке 94 пунктиром). Подобную точку называют *точкой перегиба*.

Пример 2 Построить график функции:

а) $y = \dfrac{2x+1}{x^2+2}$; б) $y = \dfrac{x^2+5}{x^2-1}$.

Решение. а) Функция $y = \dfrac{2x+1}{x^2+2}$ определена и непрерывна на всей числовой прямой, не является ни чётной, ни нечётной. Вертикаль-

ной асимптоты нет (знаменатель дроби $\frac{2x+1}{x^2+2}$ нигде не обращается в нуль), о горизонтальной асимптоте следует подумать. Чтобы найти горизонтальную асимптоту графика функции, надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+2}$. Пределы такого вида мы находили в § 3. Основной приём — деление и числителя, и знаменателя на переменную в старшей степени. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{0+0}{1+0}=0.$$

Это значит, что у графика функции $y=\frac{2x+1}{x^2+2}$ есть горизонтальная асимптота $y=0$ (ось абсцисс).

Найдём стационарные точки, критические точки, точки экстремума и добавим ещё несколько контрольных точек.

Найдём производную заданной функции:

$$y'=\left(\frac{2x+1}{x^2+2}\right)'=\frac{(2x+1)'(x^2+2)-(2x+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}=$$

$$=\frac{2(x^2+2)-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}=$$

$$=\frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}.$$

Критических точек у функции нет (производная определена на всей числовой прямой); стационарные точки найдём из уравнения $-2(x+2)(x-1)=0$. Получаем две стационарные точки: -2 и 1.

Отметим стационарные точки на числовой прямой; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 95.

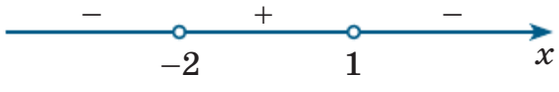


Рис. 95

$x=-2$ — точка минимума, $y_{\min}=-\frac{1}{2}$;

$x=1$ — точка максимума, $y_{\max}=1$.

Итак, мы знаем две точки графика: $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ и (1; 1). Добавим ещё несколько контрольных точек. Если $x = -\frac{1}{2}$, то $y = 0$; если $x = 0$, то $y = \frac{1}{2}$; если $x = 2$, то $y = \frac{5}{6}$.

На рисунке 96 отмечены точки $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, (1; 1), $\left(2; \frac{5}{6}\right)$ и построен график функции $y = \frac{2x+1}{x^2+2}$.

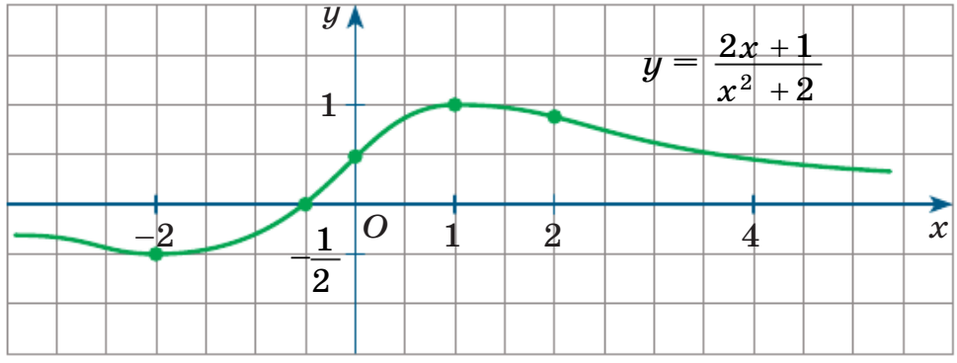


Рис. 96

б) Функция $y = \frac{x^2+5}{x^2-1}$ претерпевает разрыв в точках $x = -1$, $x = 1$ (нули знаменателя); значит, уравнениями $x = -1$, $x = 1$ задаются две вертикальные асимптоты графика функции. Заметим также, что функция $y = \frac{x^2+5}{x^2-1}$ — чётная, её график симметричен относительно оси ординат. Посмотрим, есть ли у графика горизонтальная асимптота:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Значит, $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции.

Найдём стационарные точки, критические точки, точки экстремума и добавим ещё несколько контрольных точек.

Найдём производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+5}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+5)'\cdot(x^2-1) - (x^2+5)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2-1) - (x^2+5)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-12x}{(x^2-1)^2}.$$

Производная не существует в точках $x = \pm 1$, но это не критические точки, это точки разрыва. Производная обращается в нуль в точке $x = 0$ — это единственная стационарная точка; слева от неё $y' > 0$, справа $y' < 0$. Значит, $x = 0$ — точка максимума, причём $y_{max} = -5$.

Итак, мы знаем, что график симметричен относительно оси ординат, у него есть две вертикальные асимптоты $x = -1$ и $x = 1$, горизонтальная асимптота $y = 1$ и есть точка максимума $(0; -5)$. Добавим ещё две точки: если $x = \pm 2$, то $y = 3$. График представлен на рисунке 97.

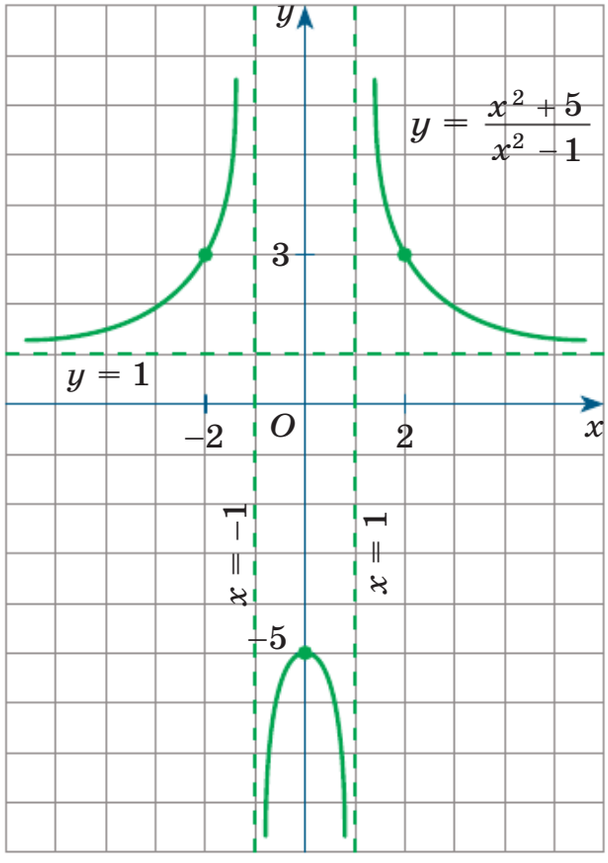


Рис. 97

Упражнения

Постройте эскиз графика какой-нибудь функции, обладающей указанными свойствами.

18.1. а) Функция определена на всей числовой прямой; имеет одну точку минимума и две точки максимума; принимает только неотрицательные значения; ограничена снизу и не ограничена сверху.

б) Функция определена на всей числовой прямой; возрастает на $(-\infty; -3]$ и на $[4; +\infty)$; убывает на $[-3; 4]$; точка $x = -3$ является стационарной; точка $x = 4$ является критической; не ограничена.

18.2. а) Функция имеет разрыв в точке $x = -3$; имеет минимум в точке $x = -5$ и минимум в точке $x = 0$; не ограничена.

б) Функция определена на промежутках $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$; имеет вертикальную асимптоту $x = 1$ и горизонтальную асимптоту $y = 2$ при $x \to \infty$; имеет одну точку максимума и одну точку минимума; ограничена сверху и не ограничена снизу.

18.3. а) Функция определена на всей числовой прямой; чётная; при $x > 0$ имеет одну точку максимума при $x = 2$ и одну точку минимума при $x = 4$; не ограничена.
б) Функция определена на всей числовой прямой; нечётная; при $x > 0$ имеет одну точку максимума при $x = 1$ и одну точку минимума при $x = 5$.

Исследуйте функцию и постройте её график.

18.4. а) $y = 5x^2 - 10x + 4$; в) $y = 3x^2 - 8x + 5$;
б) $y = 2x^3 - 3x^2$; г) $y = 2x^3 + 3x^2$.

18.5. а) $y = x^3 + 3x^2 - 4$; в) $y = x^3 - 3x^2 + 4$;
б) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$; г) $y = -x^3 - 3x^2 + 4$.

18.6. а) $y = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$; в) $y = x^3 - 3x^2 + 8x - 6$;
б) $y = x^2 + 1 - 0{,}5x^4$; г) $y = 5x^2 - 4 - 2{,}5x^4$.

ИКТ **18.7.** При каких значениях параметра p:
а) уравнение $3x^2 - x^3 = p - 2$ имеет единственный корень;
б) уравнение $x^4 - 2x^2 = p + 1$ не имеет корней?

18.8. Сколько корней имеет заданное уравнение при различных значениях параметра p:
а) $x^3 - x^2 - x = p$; в) $x^3 - 2x^2 + x = p$;
б) $3x^5 - 5x^3 = p$; г) $5x - x^5 = p$?

Исследуйте функцию и постройте её график.

ИКТ **18.9.** а) $y = x - \frac{1}{x}$; в) $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$;
б) $y = \frac{1 - x^2}{4 - x^2}$; г) $y = \frac{x}{1 - x^2}$.

ИКТ **18.10.** а) $y = \sqrt{x} - x$; в) $y = x - \sqrt{x + 1}$;
б) $y = x\sqrt{x + 2}$; г) $y = \frac{\sqrt{x - 1}}{x}$.

ИКТ **18.11.** а) $y = (x - 1)e^{-x}$; в) $y = xe^x$;
б) $y = x + e^{-x}$; г) $y = \frac{e^x}{x + 1}$.

ИКТ **18.12.** а) $y = x - \ln x$; в) $y = \frac{x}{\ln x}$;
б) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; г) $y = x(\ln x + 1)$.

ИКТ **18.13.** а) $y = x - \ln x$; б) $y = 2x + \ln x$.

18.14. Решите уравнение:

а) $2x^3 + x^2 - 2x - 1 = \sqrt{-x - 1}$; б) $2x^3 - 1{,}5x^4 = 3{,}5 - 3\cos 2\pi x$.

Упражнения для повторения

18.15. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_{x+4}(x^2 - x - 6)$;

б) $y = \dfrac{\log_{x^2}(25 - x^2)}{2^x - 16}$;

в) $y = \dfrac{1}{\log_{x-2,5}(-8 + 6x - x^2)}$;

г) $y = \log_{5-x}(x^2 + x - 12)$;

д) $y = \dfrac{\log_{(x-1)^2}(16 - x^2)}{3^x - 27}$;

е) $y = \dfrac{1}{\log_{x+2,5}(-x^2 - 4x - 3)}$.

18.16. Решите уравнение:

а) $\sin x \cdot \ln(9 - x^2) = 0$;

б) $\cos x \cdot \lg(5x - 6 - x^2) = 0$;

в) $\operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0$;

г) $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt[4]{9x - 8 - x^2} = 0$.

18.17. Найдите значение выражения:

а) $\log_{\frac{\sqrt{x}}{y}} y$, если $\log_y x = 5$;

б) $\log_{\frac{\sqrt{y}}{x}}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right) + \log_{\frac{\sqrt{y}}{x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$, если $\log_y x = 6$;

в) $\log_{\sqrt{xy}}\left(\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}}\right)$, если $\log_x y = 3$;

г) $4\log_{\sqrt{xy}}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\right) + 3\log_{\sqrt{xy}} y^2$, если $\log_x y = 2$.

18.18. Вычислите:

а) $\sin\dfrac{\pi}{4} - \sin^2\dfrac{\pi}{4} + \sin^3\dfrac{\pi}{4} - \ldots + (-1)^{n+1}\sin^n\dfrac{\pi}{4} + \ldots$;

б) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\dfrac{5\pi}{6} + \operatorname{tg}^3\dfrac{5\pi}{6} + \ldots + \operatorname{tg}^n\dfrac{5\pi}{6} + \ldots$;

в) $\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos^2\dfrac{\pi}{3} + \cos^3\dfrac{\pi}{3} + \ldots + \cos^n\dfrac{\pi}{3} + \ldots$;

г) $\operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{3} + \operatorname{ctg}^2\dfrac{2\pi}{3} + \operatorname{ctg}^3\dfrac{2\pi}{3} + \ldots + \operatorname{ctg}^n\dfrac{2\pi}{3} + \ldots$.

18.19. Решите уравнение:

а) $||x - 1| - 3| = 3 - |x - 1|$; б) $||2x - 3| - 5| = |2x - 3| - 5$.

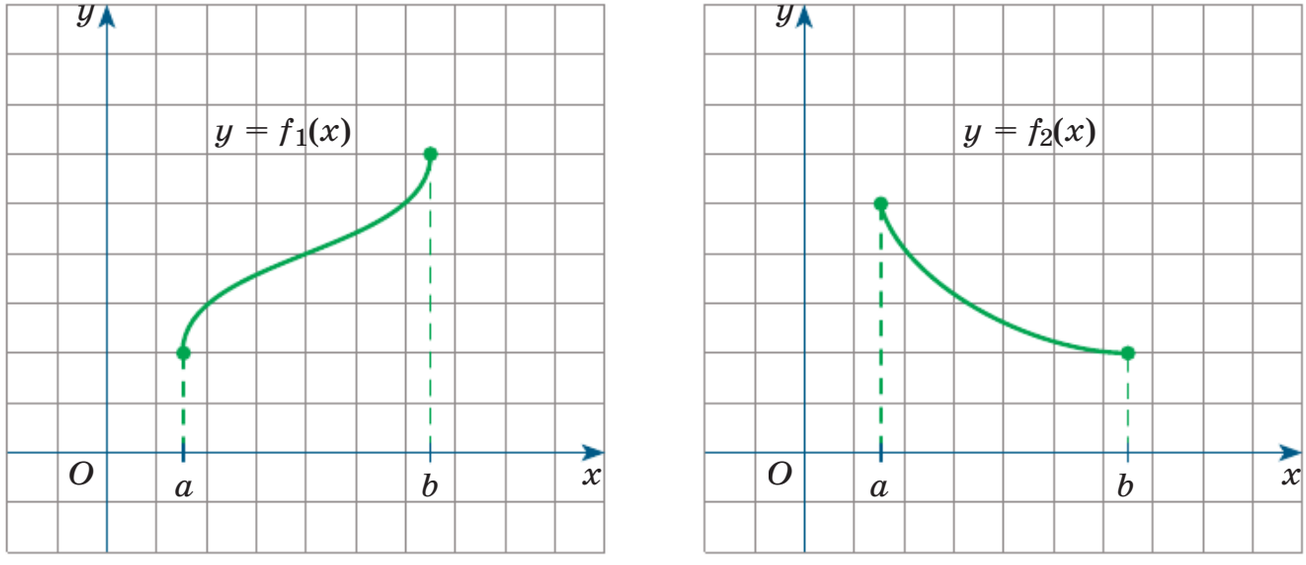
§ 19. Нахождение наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на промежутке

Часто бывает необходимо найти наименьшее или наибольшее значение функции на каком-либо промежутке. До сих пор мы, как правило, действовали так: строили график функции и по графику находили наименьшую и наибольшую ординаты точек графика на заданном промежутке. Но уже в предыдущем параграфе вы видели, что если мы о виде графика функции заранее не имеем представления, то построение такого графика — задача довольно трудная. А потому возникает естественный вопрос: можно ли найти наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке, не строя графика функции?

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим несколько конкретных ситуаций.

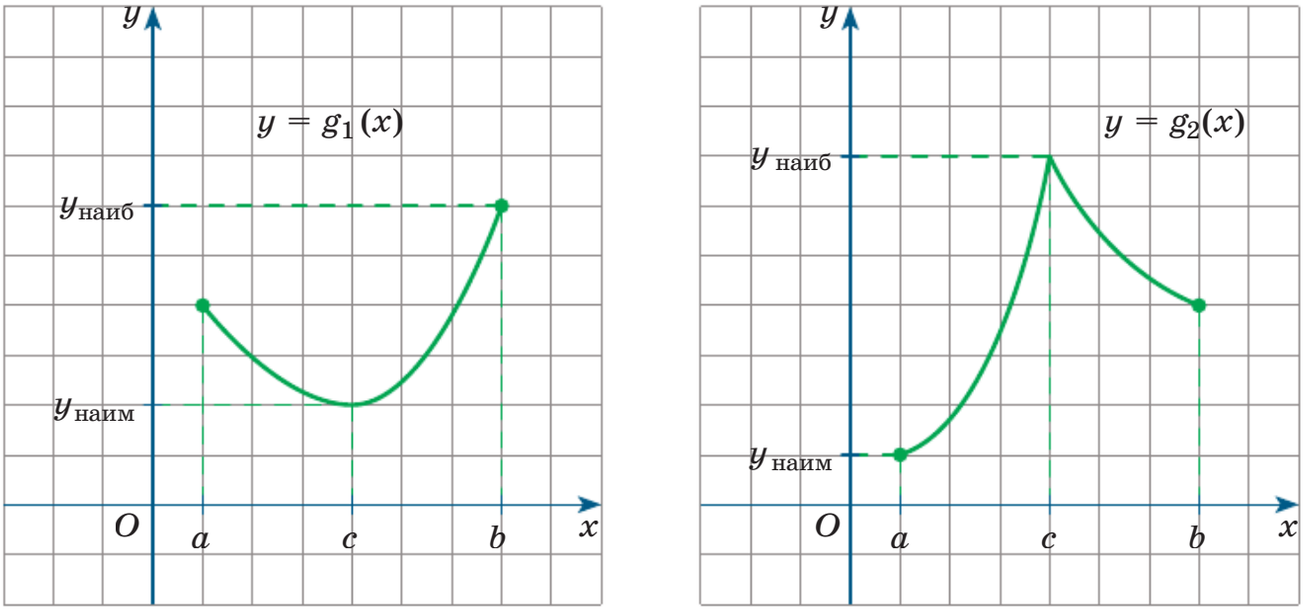
На рисунке 98, *а*, *б* построены графики функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$. Наименьшее и наибольшее значения функций достигаются в концевых точках отрезка. Для функции $y = f_1(x)$ имеем: $y_{\text{наим}} = f_1(a)$, $y_{\text{наиб}} = f_1(b)$; для функции $y = f_2(x)$ имеем: $y_{\text{наим}} = f_2(b)$, $y_{\text{наиб}} = f_2(a)$.

На рисунке 99, *а*, *б* построены графики функций $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$. Функция $y = g_1(x)$ своего



а *б*

Рис. 98



а *б*

Рис. 99

наибольшего значения достигает в концевой точке отрезка $[a; b]$, а наименьшего — во внутренней точке отрезка, причём это стационарная точка (точка минимума): $y_{наим} = g_1(c)$, $y_{наиб} = g_1(b)$. Функция $y = g_2(x)$ своего наименьшего значения достигает в концевой точке отрезка $[a; b]$, а наибольшего — во внутренней точке отрезка, причём это критическая точка (точка максимума): $y_{наиб} = g_2(c)$, $y_{наим} = g_2(a)$.

На рисунке 100 построен график функции $y = h(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$. Эта функция своих наименьшего и наибольшего значений достигает во внутренних точках отрезка, причём c_1 — кри-

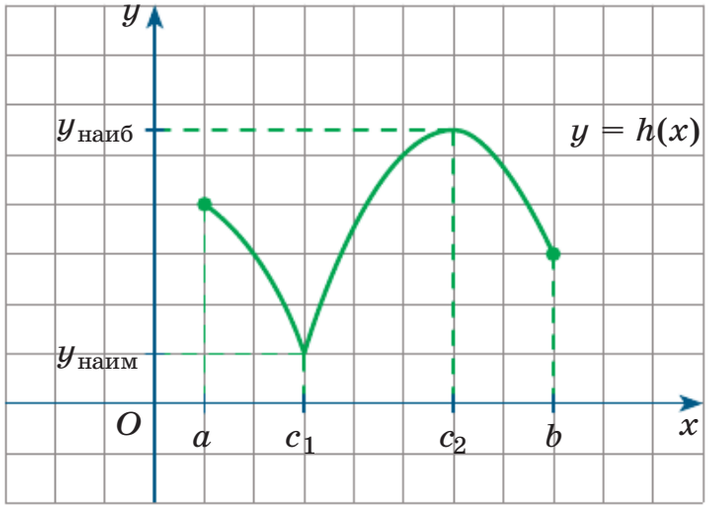


Рис. 100

тическая точка (точка минимума), а c_2 — стационарная точка (точка максимума): $y_{\text{наим}} = h(c_1)$, $y_{\text{наиб}} = h(c_2)$.

Вообще справедливы две теоремы.

Теорема 1. Непрерывная функция на отрезке достигает своих наименьшего и наибольшего значений.

Теорема 2. Своего наименьшего (наибольшего) значения функция, непрерывная на отрезке, достигает либо в концевой точке отрезка, либо в стационарной или критической внутренней точке отрезка.

Основываясь на этих теоремах, формулируем полезный алгоритм.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{\text{наим}}$) и наибольшее (это будет $y_{\text{наиб}}$).

Пример 1 Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 35$ на отрезке:

а) $[-2; 4]$; б) $[2; 4]$; в) $[-1; 2]$; г) $[-3; -2]$.

Решение. Заданная функция непрерывна на всей числовой прямой, в частности на каждом из заданных отрезков. Действуем в соответствии с алгоритмом. Найдём производную функции:

$$y' = (3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 35)' = 12x^3 - 24x^2 - 36x = \\ = 12x(x^2 - 2x - 3) = 12x(x + 1)(x - 3).$$

Критических точек нет, а стационарных точек три: 0, –1, 3.

а) Все три стационарные точки — внутренние точки отрезка $[-2; 4]$. Составляем таблицу, куда включаем три стационарные точки и две концевые точки отрезка:

x	-2	-1	0	3	4
y	75	28	35	-100	3

Видим, что $y_{\text{наим}} = -100$, $y_{\text{наиб}} = 75$.

б) Из трёх стационарных точек $(0, -1, 3)$ лишь одна ($x = 3$) — внутренняя точка отрезка $[-2; 4]$. Составляем таблицу, куда включаем стационарную точку $x = 3$ и две концевые точки отрезка:

x	2	3	4
y	-53	-100	3

Видим, что $y_{\text{наим}} = -100$, $y_{\text{наиб}} = 3$.

в) Лишь одна стационарная точка $x = 0$ — внутренняя точка отрезка $[-1; 2]$. Составляем таблицу, куда включаем стационарную точку $x = 0$ и две концевые точки отрезка:

x	-1	0	2
y	28	35	-53

Видим, что $y_{\text{наим}} = -53$, $y_{\text{наиб}} = 35$.

г) Ни одна стационарная точка не принадлежит отрезку $[-3; -2]$. Составляем таблицу, куда включаем только концевые точки отрезка:

x	-3	-2
y	332	75

Видим, что $y_{\text{наим}} = 75$, $y_{\text{наиб}} = 332$.

Пример 2 Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x$ на отрезке $[-8; 27]$.

Решение. Заданная функция непрерывна на всей числовой прямой, в частности на заданном отрезке. Действуем в соответствии с алгоритмом. Найдём производную функции:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3} = \frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Есть критическая точка: $x = 0$; есть две стационарные точки: $x = -1$, $x = 1$.

Эти три точки — внутренние точки отрезка $[-8; 27]$. Составляем таблицу, куда включаем критическую точку, две стационарные точки и две концевые точки отрезка:

x	-8	-1	0	1	27
y	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-6

Видим, что $y_{\text{наим}} = -6$, $y_{\text{наиб}} = \frac{2}{3}$.

До сих пор мы говорили о том, как искать наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции на отрезке. Если же речь идёт об отыскании наименьшего или наибольшего значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке (например, на интервале) или функции, имеющей на заданном промежутке точки разрыва, то, как правило, приходится строить график функции. Но, как говорится, нет правила без исключения. Посмотрите на рисунки 101 и 102. На обоих рисунках представлен график функции, непрерывной на интервале $(a; b)$. На рисунке 101 у функции критических точек нет, есть лишь одна стационарная точка, причём точка минимума, и именно в этой точке функция достигает наименьшего значения. На рисунке 102 у функции стационарных точек нет, есть лишь одна критическая точка, причём точка максимума, и именно в этой точке функция достигает наибольшего значения. Вообще справедлива следующая теорема.

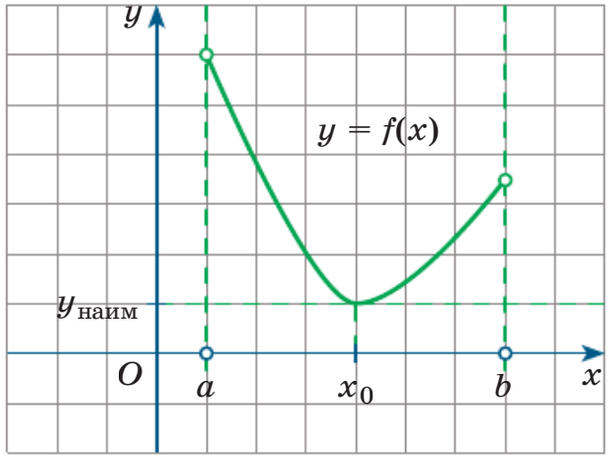


Рис. 101

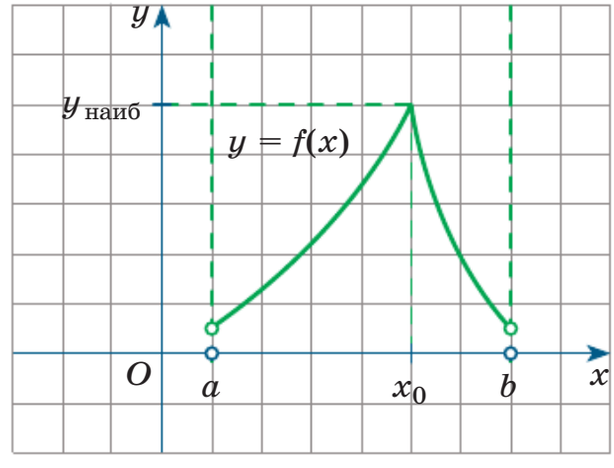


Рис. 102

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$, то:
— если x_0 — точка минимума, то $f(x_0)$ — наименьшее значение функции на этом промежутке (см. рис. 101);
— если x_0 — точка максимума, то $f(x_0)$ — наибольшее значение функции на этом промежутке (см. рис. 102).

Пример 3 Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x - \ln x$.

Решение. Поскольку промежуток, на котором следует найти соответствующие значения функции, не указан, речь идёт об отыскании этих значений на всей области определения функции; в данном случае это открытый луч $(0; +\infty)$. Имеем:

$$y' = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Производная не существует в точке $x = 0$, но эта точка нас не интересует, она не принадлежит области определения функции. Производная обращается в 0 в точке $x = 1$, причём слева от точки $x = 1$ производная отрицательна, а справа — положительна. Вывод: $x = 1$ — единственная стационарная точка, а именно точка минимума. Значит, согласно теореме 3 в этой точке функция $y = x - \ln x$ достигает наименьшего значения: $y_{наим} = 1 - \ln 1 = 1$. Наибольшего значения у функции нет. На рисунке 103 представлен график функции $y = x - \ln x$.

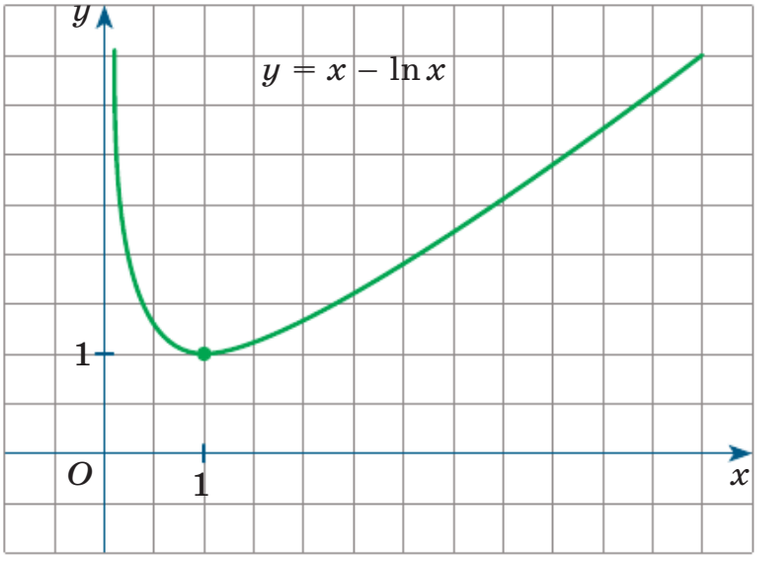


Рис. 103

Упражнения

Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на указанном отрезке.

19.1. а) $y = 8x^5$, $[-1; 3]$;
б) $y = \sqrt{x} + 1$, $[1; 4]$;
в) $y = -\frac{6}{x}$, $[-6; -1]$;
г) $y = 6x^4$, $[-3; 2]$;
д) $y = \sqrt{-x} + 2$, $[-8; -1]$;
е) $y = \frac{7}{x}$, $[1; 7]$.

19.2. а) $y = 2\cos x$, $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;
б) $y = 0{,}4\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$;
в) $y = 2\operatorname{tg} x$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$;
г) $y = 3\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;
д) $y = 0{,}8\cos x$, $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$;
е) $y = -3\operatorname{tg} x$, $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$.

19.3. а) $y = x^2 - 6x + 11$, $[0; 2]$;
б) $y = x^2 + 4x - 15$, $[-4; 1]$;
в) $y = -2x^2 + 8x + 5$, $[-1; 5]$;
г) $y = x^2 + 8x - 13$, $[-2; 2]$;
д) $y = -x^2 - 6x + 7$, $[-4; 0]$;
е) $y = 3x^2 - 12x - 7$, $[-1; 5]$.

19.4. а) $y = 0{,}5\ln x^5$, $[1; e]$;
б) $y = \lg x$, $[2; 10]$;
в) $y = 3\log_{0,2} x$, $[2; 1]$;
г) $y = \ln x$, $\left[\frac{1}{e}; e^2\right]$;
д) $y = 2\lg x$, $[1; 20]$;
е) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $[0{,}3; 3]$.

19.5. а) $y = \begin{cases} (x-1)^3 - 3, & x \geqslant 0, \\ -4\cos x, & x < 0, \end{cases}$ $x \in [-3; 4]$;

б) $y = \begin{cases} 3x + 8, & x \leqslant 1, \\ x^2 - 8x + 18, & 1 < x \leqslant 4, \\ \log_2 x, & x > 4, \end{cases}$ $x \in [-1; 16]$;

в) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 1, & x \geqslant 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 1, & x < 0, \end{cases}$ $x \in [-3; 8]$;

г) $y = \begin{cases} \sin\frac{\pi x}{2}, & x \geqslant 1, \\ 2x - 1, & -2 < x < 1, \\ (x+2)^6 - 5, & x \leqslant -2, \end{cases}$ $x \in [-4; 8]$.

19.6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на отрезке:

а) $[-1; 1]$; в) $[1; 4]$; д) $[-2; 0]$;
б) $[-1; 5]$; г) $[0; 3]$; е) $[1; 5]$.

19.7. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11$ на отрезке:

а) $[0; 1]$; в) $[-1; 7]$; д) $[1; 4]$;
б) $[-1; 3]$; г) $[-2; 0]$; е) $[0; 7]$.

19.8. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$ на отрезке:

а) $[2; 3]$; в) $[-1; 6]$; д) $[-2; 2]$;
б) $[-1; 2]$; г) $[1; 4]$; е) $[0; 6]$.

19.9. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x + \frac{9}{x-2}$ на отрезке:

а) $[-7; -1]$; в) $[-3; 1]$; д) $[3; 8]$;
б) $[3; 5]$; г) $[4; 11]$; е) $[-7; 0]$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на указанном отрезке.

19.10. а) $y = \frac{x+3}{x-4}$, $[-1; 3]$; г) $y = \frac{x-5}{x+2}$, $[-9; -5]$;

б) $y = \frac{3x-5}{x+4}$, $[-11; -7]$; д) $y = \frac{2x-3}{x-5}$, $[6; 10]$;

в) $y = \frac{2x^2-3}{x-1}$, $[2; 4]$; е) $y = \frac{2x^2-7}{x+1}$, $[-6; -2]$.

19.11. а) $y = \frac{x^2+4x-7}{x^2+4x-5}$, $[-4; -1]$; б) $y = \frac{x^2-8x-11}{x^2-8x}$, $[2; 7]$.

19.12. а) $y = x^2e^x$, $[-4; -1]$; г) $y = x^2e^x$, $[-1; 2]$;

б) $y = x - \ln x$, $\left[\frac{1}{e}; e\right]$; д) $y = x - 3\ln x$, $[e; e^2]$;

в) $y = x + \ln(-x)$, $[-4; -0{,}5]$; е) $y = x + e^{-x}$, $[-\ln 4; \ln 2]$.

19.13. а) $y = e^x + e^{-x}$, $[-\ln 4; \ln 2]$;
б) $y = x - 5\ln(x+1)$, $[0; 8]$;
в) $y = (3-x)e^{x-3} + 8$, $[2; 3]$;
г) $y = (3-x)\ln(x-3)$, $[3 + e^{-2}; 3 + e^3]$.

19.14. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = \sqrt{10 - 2x} + \sqrt{3x}$; в) $y = 3\sqrt{x + 1} + \sqrt{-x}$;

б) $y = \sqrt{5 - x^2} + \sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{5 - x^2} + \sqrt{-x}$.

19.15. Найдите область значений функции:

а) $y = \sin x + x,\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $y = 2\cos x - x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $y = \operatorname{tg} x - x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$;

г) $y = \sin x + x,\ x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$;

д) $y = x - \cos x,\ x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

е) $y = \operatorname{ctg} x + x,\ x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

19.16. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном отрезке:

а) $y = 8x + 4\cos 2x$, $[0; 2\pi]$;

б) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, $[0; 2\pi]$;

в) $y = 6x - 2\sin 3x$, $[0; \pi]$;

г) $y = \sin^5 x + \cos^5 x$, $[0; \pi]$.

19.17. На отрезке $[-3; 0]$ найдите наибольшее значение функции:

а) $y = 1 - x^2 - 4x$; г) $y = 3 - x^2 + 2x$;

б) $y = 3^{1 - x^2 - 4x}$; д) $y = 5^{3 - x^2 + 2x}$;

в) $y = \log_5(1 - x^2 - 4x)$; е) $y = \log_2(3 - x^2 + 2x)$.

ИКТ **19.18.** Найдите наименьшее значение функции на заданном промежутке:

а) $y = x^2 - 6x + 5 + |3 - 2x|$, $x \in [0; 4]$;

б) $y = |x^3 - 8| - 4x$, $x \in [-1; 2]$;

в) $y = x^2 + 6x - 5 + |5 - 3x|$, $x \in [-4; 1]$;

г) $y = |x^3 + 8| - 12x$, $x \in [-1; 4]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке.

19.19. а) $y = x^3 - 4x^2 + 3$, $[0{,}5; +\infty)$;

б) $y = \frac{1}{5}x^5 - 4x^2 + 5$, $(-\infty; 1]$;

в) $y = x - 4\sqrt{x}$, $[0; +\infty)$;

г) $y = x^3 - 3x^2 - 2$, $(-\infty; 0{,}5]$;

д) $y = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 3$, $[-1; +\infty)$;

е) $y = 3\sqrt{x} - x$, $[0; +\infty)$.

19.20. а) $y = 0{,}5x + \frac{2}{x}$, $(-\infty; 0)$;

б) $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$, $(0; +\infty)$;

в) $y = \frac{4x^2}{x^2 + 4}$, $(-\infty; 4]$;

г) $y = 2x + \frac{2}{x}$, $(0; +\infty)$;

д) $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$, $(-\infty; 0)$;

е) $y = \frac{4x^2}{x^2 + 4}$, $[-4; +\infty)$.

19.21. Найдите наибольшее значение функции на заданном промежутке:

а) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 11}$, $x \in [-5; -1)$;

б) $y = \left(\frac{2x}{x + 2}\right)^5$, $x \in (-\infty; -4]$.

Найдите область значений функции:

19.22. а) $y = \frac{x^4}{x^4 + 1}$;

б) $y = \sqrt{2x - 6} - x$;

в) $y = \frac{3x}{x^2 + 3}$;

г) $y = x - \sqrt{3x - 3}$.

19.23. а) $y = 2\cos x - \sin^2 x$;

б) $y = x\sqrt{x + 2}$;

в) $y = \cos^2 x - 2\sin^2 x$;

г) $y = x\sqrt{1 - 2x}$.

19.24. а) При каком значении параметра p наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x + p}$ равно $-6\sqrt{3}$?

б) При каком значении параметра p наибольшее значение функции $y = (p - x)\sqrt{x}$ равно $10\sqrt{5}$?

19.25. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$; б) $2^{1-|x-1|}=x^4-2x^2+3$.

19.26. Докажите, что при любых значениях x выполняется неравенство:

а) $x^5-(1-x)^5\geqslant\frac{1}{16}$; б) $x^7+(1-x)^7\geqslant\frac{1}{64}$.

Упражнения для повторения

19.27. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\log_3 3x+\log_3\frac{y}{3}=-1,\\ 3y+x-\frac{10}{3}=0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\log_2 2x+\log_2\frac{y}{2}=\log_4 36,\\ 2x-y+4=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\lg 5x+\lg y=\ln e,\\ 3x-y-5=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\lg x+\lg(y+3)=2,\\ x-2y+4=0.\end{cases}$

19.28. Решите неравенство:

а) $5^{2x}(5^{2x}+5^{4-2x}-130)\geqslant 0$;

б) $6^{4x}(6^{2x+1}+6^{1-2x}-37)\leqslant 0$;

в) $7^x(7^{3x+1}+7^{-3x}-8)\geqslant 0$;

г) $16^x(2^{3x+1}+2^{4-3x}-12)\leqslant 0$.

19.29. Является ли заданная функция периодической:

а) $y=x^2\operatorname{tg}x$; в) $y=\sqrt{\cos x}$;

б) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$; г) $y=\frac{\cos x}{\sin x-2}$?

19.30. Найдите наибольшее целое значение x, принадлежащее области определения функции:

а) $y=\lg(41-3x)$; в) $y=\frac{x}{\lg(37-4x)}$;

б) $y=\frac{\sqrt{3x+21}}{\log_7(5-x)}$; г) $y=\log_2(x+3)+\sqrt{10-2x}$.

19.31. Во время отопительного сезона горячая вода, проходя по трубе длиной l м, охлаждается от начальной температуры T_0 °C до температуры T °C. Длина l вычисляется по формуле

$l = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_0 - T_п}{T - T_п}$, где $\alpha = 0{,}6$ — постоянная, $\gamma = 24 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot °\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, $c = 4186 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °\text{C}}$ — удельная теплоёмкость воды, $T_п$ °C — температура отапливаемого помещения. Найдите, до какой температуры охладится вода, если $T_0 = 64$ °C, $T_п = 20$ °C, $l = 83{,}72$ м.

§ 20. Задачи на нахождение наименьших и наибольших значений величин

На практике часто приходится решать так называемые *задачи на оптимизацию* (от лат. *optimum* — лучший). Как правило, это текстовые задачи без какого-либо указания переменных, явных формул для зависимостей между ними и т. п. В сравнительно несложных задачах на оптимизацию речь, как правило, идёт о двух величинах, одна из которых каким-то образом зависит от другой, причём надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает своё наименьшее или наибольшее (наилучшее в данных условиях) значение.

Решение задач на оптимизацию, как и решение любой текстовой задачи, будем осуществлять в три этапа.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Второй этап. *Работа с составленной математической моделью.*

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

На первом этапе, проанализировав условия задачи, следует выделить *оптимизируемую величину* (О. В.), т. е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идёт речь, и обозначить её буквой y (или S, V, R, t — в зависимости от условия).

Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить О. В., принимаем за *независимую переменную* (Н. П.), обозначаем её буквой x (или какой-либо иной буквой); устанавливаем *реальные границы* изменения Н. П. (в соответствии с условиями задачи) — множество X и выражаем y через x.

Математическая модель задачи представляет собой функцию $y = f(x)$ *с областью определения* X, x — Н. П., y — О. В.

На втором этапе для функции $y = f(x)$, $x \in X$, находим $y_{\text{наим}}$ ($y_{\text{наиб}}$) в зависимости от того, что требуется в условии задачи. При этом используются сведения и факты, полученные в § 19.

На третьем этапе ответ, полученный на втором этапе — этапе работы с математической моделью, сверяется с условиями задачи; происходит корректировка результатов исследования модели и первоначального текста.

Пример 1 При компьютерной вёрстке книги печатный текст площадью 384 см^2 надо разместить на прямоугольном листе бумаги, соблюдая поля: слева и справа по 2 см, сверху и снизу — по 3 см (рис. 104). Размеры листа бумаги заранее не известны. При каких размерах листа бумаги его площадь окажется наименьшей?

Решение. ***Первый этап.*** *Составление математической модели.*

По условию площадь S прямоугольного листа должна быть наименьшей. Итак, оптимизируемая величина — это S.

Теперь подумаем, что принять за независимую переменную, через которую сравнительно несложно «добраться» до S. Обозначим буквой x (см) сторону KN внутреннего прямоугольника $KLMN$. Тогда сторона AD прямоугольника $ABCD$ будет равна $x + 4$ (см). Зная одну сторону прямоугольника $KLMN$ и его площадь, найдём вторую сторону: $KL = \frac{384}{x}$ (см). Но в таком случае $AB = \frac{384}{x} + 6$ (см).

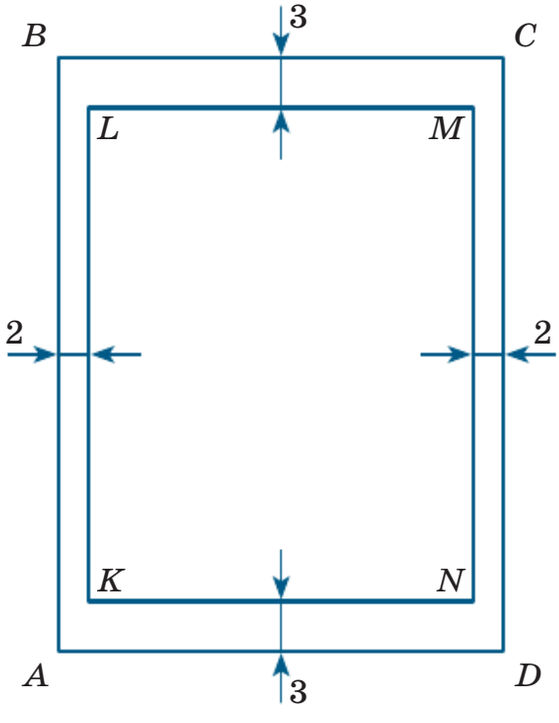


Рис. 104

Итак, мы знаем длины двух сторон прямоугольника $ABCD$: $AD = x + 4$, $KL = \frac{384}{x} + 6$. Площадь прямоугольника $ABCD$ выражается формулой

$$S = (x + 4)\left(\frac{384}{x} + 6\right).$$

Поскольку x — длина отрезка KN, то $x > 0$.

Подводим итоги. Математической моделью задачи является функция $S = (x + 4)\left(\frac{384}{x} + 6\right)$, $x \in (0; +\infty)$. Нас интересует наименьшее значение этой функции.

Второй этап. *Работа с составленной математической моделью.*

Найдём производную функции $S = (x + 4)\left(\frac{384}{x} + 6\right)$. Но сначала есть смысл выполнить некоторые преобразования:

$$S = (x + 4)\left(\frac{384}{x} + 6\right) = 384 + \frac{1536}{x} + 6x + 24 = 6x + \frac{1536}{x} + 408.$$

$$S' = \left(6x + \frac{1536}{x} + 408\right)' = 6 - \frac{1536}{x^2} = \frac{6x^2 - 1536}{x^2} =$$

$$= \frac{6(x^2 - 256)}{x^2} = \frac{6(x - 16)(x + 16)}{x^2}.$$

Производная не существует в точке $x = 0$ и обращается в нуль в точках $x = 16$, $x = -16$. Промежутку $(0; +\infty)$ из указанных трёх точек принадлежит только точка $x = 16$. При переходе через эту точку слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, а это означает, что $x = 16$ — точка минимума функции.

Вспомним теорему 3 из § 19: если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка единственную стационарную (или критическую) точку $x = x_0$ и если x_0 — точка минимума, то $y_{\text{наим}} = f(x_0)$. Значит, своего наименьшего значения интересующая нас функция $S = (x + 4)\left(\frac{384}{x} + 6\right)$, $x \in (0; +\infty)$, достигает в точке $x = 16$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Нам нужно было найти длины сторон прямоугольника $ABCD$. Имеем:

$$AD = x + 4 = 16 + 4 = 20;$$

$$AB = \frac{384}{x} + 6 = \frac{384}{16} + 6 = 24 + 6 = 30.$$

Ответ: прямоугольный лист бумаги наименьшей площади должен иметь размеры 20 см × 30 см.

Пример 2 Из квадратного листа картона 18 см × 18 см требуется сделать коробку наибольшей вместимости. Какого размера квадраты следует для этого вырезать по углам листа картона (рис. 105)?

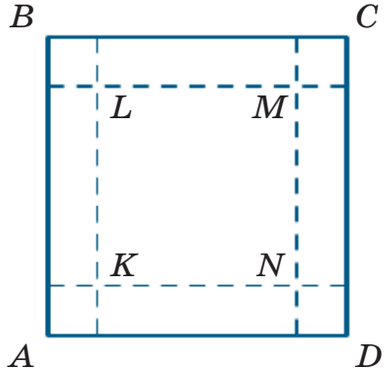


Рис. 105

Решение. ***Первый этап.*** *Составление математической модели.*

О наибольшем или наименьшем значении какой величины идёт речь, что является оптимизируемой величиной? Нас интересует наибольшая вместимость той коробки, которая получится после того, как у листа картона будут вырезаны четыре квадрата и выполнены соответствующие сгибы, т. е. речь идёт об объёме V прямоугольного параллелепипеда. Итак, оптимизируемая величина — V.

Обозначим буквой x (см) сторону каждого из четырёх вырезаемых квадратов. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат $KLMN$, высота параллелепипеда равна x (см). Нетрудно найти сторону квадрата $KLMN$: $KN = 18 - 2x$ (см). Таким образом,

$$V = (18 - 2x)^2 \cdot x = x(324 - 72x + 4x^2) = \\ = 4x^3 - 72x^2 + 324x.$$

Поскольку x — длина стороны вырезаемого квадрата, то $x > 0$. Далее, по смыслу задачи сторона вырезаемого квадрата должна быть меньше половины стороны картонного квадрата, т. е. $x < 9$.

Подводим итоги. Математической моделью задачи является функция $V = 4x^3 - 72x^2 + 324x$, $x \in (0; 9)$. Нас интересует наибольшее значение этой функции.

Второй этап. *Работа с составленной математической моделью.*

Найдём производную функции $V = 4x^3 - 72x^2 + 324x$:

$$V' = (4x^3 - 72x^2 + 324x)' = 12x^2 - 144x + 324 = \\ = 12(x^2 - 12x + 27) = 12(x - 3)(x - 9).$$

Производная обращается в нуль в точках $x = 3$, $x = 9$. Интервалу $(0; 9)$ принадлежит только точка $x = 3$. При переходе через эту точку слева направо производная меняет знак с плюса на минус, а это означает, что $x = 3$ — точка максимума функции.

И снова вспомним теорему 3 из § 19: если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка единственную стационарную (или критическую) точку $x = x_0$ и если x_0 — точка максимума, то $y_{\text{наиб}} = f(x_0)$. Значит, своего наибольшего значения интересующая нас функция $V = 4x^3 - 72x^2 + 324x$ достигает в точке $x = 3$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Нас спрашивают, какого размера квадраты следует вырезать по углам листа картона. Ответ уже получен: нужно вырезать четыре квадрата со стороной 3 см.

Ответ: 3 см × 3 см.

Пример 3* Статуя высотой 4 м стоит на колонне высотой 5,6 м. На каком расстоянии от колонны должен находиться человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом, если расстояние от земли до уровня его глаз равно 1,6 м?

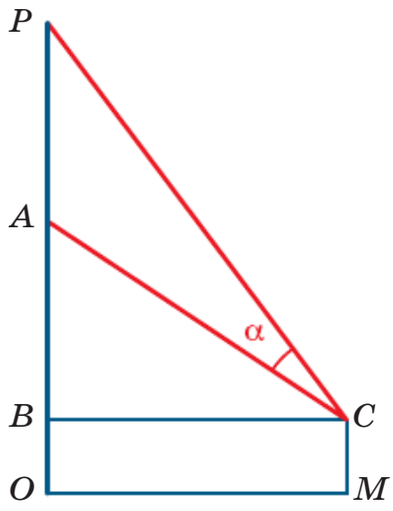


Рис. 106

Решение. ***Первый этап.*** *Составление математической модели.*

На рисунке 106 представлена модель изучаемой ситуации: $OA = 5{,}6$ — колонна, $AP = 4$ — статуя, $OM = x$ — место, где стоит человек, $MC = 1{,}6$ (C — точка, из которой человек смотрит на статую), $\angle ACP = \alpha$ — угол, под которым человек смотрит на статую. Проведём отрезок BC параллельно прямой OM, $OB = 1{,}6$, $BA = 4$.

Интересующий нас угол — это угол треугольника APC, в котором $AC = \sqrt{x^2 + 16}$ (из прямоугольного треугольника ABC), $AP = 4$, $PC = \sqrt{x^2 + 64}$ (из прямоугольного треугольника PBC). Применим к треугольнику APC теорему косинусов:

$$AP^2 = AC^2 + PC^2 - 2AC \cdot PC \cdot \cos\alpha;$$

$$16 = (x^2 + 16) + (x^2 + 64) - 2\sqrt{x^2 + 16} \cdot \sqrt{x^2 + 64} \cdot \cos\alpha. \qquad (1)$$

Для упрощения дальнейших рассуждений введём следующие обозначения: $x^2 + 16 = t$, $\cos\alpha = y$. Тогда равенство (1) примет следующий вид:

$$16 = t + (t + 48) - 2y\sqrt{t(t + 48)},$$

откуда следует, что $y = \dfrac{t + 16}{\sqrt{t^2 + 48t}}$.

Напомним, что $y = \cos\alpha$, и нас интересует наибольшее значение угла, т. е. наименьшее значение косинуса (ведь косинус острого угла — убывающая функция). Значит, y — оптимизируемая величина, t — независимая переменная, реальные границы изменения этой независимой переменной: $t \geqslant 16$.

Второй этап. *Работа с составленной математической моделью.*

Имеем: $y = (t+16)(t^2+48t)^{-\frac{1}{2}}$, $t \in [16;+\infty)$. Нас интересует наименьшее значение этой функции. Находим производную:

$$y' = (t+16)'(t^2+48t)^{-\frac{1}{2}} + (t+16)((t^2+48t)^{-\frac{1}{2}})' =$$

$$= (t^2+48t)^{-\frac{1}{2}} + (t+16)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(t^2+48t)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2t+48) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t^2+48t}} - \frac{(t+16)(t+24)}{\sqrt{(t^2+48t)^3}} = \frac{t^2+48t-(t^2+40t+384)}{\sqrt{(t^2+48t)^3}} = \frac{8t-384}{\sqrt{(t^2+48t)^3}}.$$

Критических точек нет, стационарную точку найдём из уравнения $8t - 384 = 0$; получаем $t = 48$ — точка минимума функции.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Нас не интересует наименьшее значение функции, нас интересует только, при каком значении x оно достигается. Имеем: $t = 48$ — точка минимума функции, $t = x^2 + 16$, $x^2 + 16 = 48$, $x = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$ м.

Упражнения

20.1. а) Найдите такое число, что разность между ним и его квадратом является наибольшей.
б) Найдите такое положительное число, что разность между ним и его утроенным кубом является наибольшей.

20.2. а) Число 60 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.
б) Число 16 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

20.3. а) Число 18 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма удвоенного одного слагаемого и квадрата другого слагаемого была наименьшей.
б) Число 6 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма частного от деления первого слагаемого на второе и частного от деления второго слагаемого на первое была наименьшей.

20.4. Найдите значение параметра p, при котором сумма квадратов корней данного уравнения принимает наименьшее значение:
а) $x^2 + (p - 2)x + p - 3 = 0$;
б) $x^2 - (p - 3)x + 2p - 10 = 0$.

20.5. а) При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 4a^2 = 2ax - 3a$ будет наибольшей?
б) При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2a = 1 - ax$ будет наименьшей?

20.6. а) Периметр прямоугольника равен 36 см. Какими должны быть его стороны, чтобы он имел наибольшую площадь?
б) Площадь прямоугольника равна 16 см^2. Какими должны быть его стороны, чтобы он имел наименьший периметр?

20.7. Каковы должны быть размеры прямоугольного участка, площадь которого равна 32 м^2, чтобы забор, огораживающий его с трёх сторон, имел наименьшую длину?

20.8. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 15 см. Каковы должны быть катеты, чтобы гипотенуза была наименьшей?

20.9. Прямоугольный участок земли должен иметь площадь 1200 м^2, а забор должен огораживать участок с трёх сторон и разделять его посередине, как показано на рисунке 107. Какова наименьшая возможная длина забора?



Рис. 107

20.10. Из прямоугольной трапеции надо вырезать прямоугольник наибольшей площади, у которого один из прямых углов совпадает с прямым углом трапеции. Чему равна эта площадь, если:
а) основания трапеции равны 8 см и 24 см, а высота равна 12 см;
б) основания трапеции равны 6 см и 8 см, а высота равна 10 см?

20.11. а) От прямоугольника отрезают угловой квадрат, сторона которого составляет четверть меньшей стороны прямоугольника. Площадь полученного шестиугольника должна быть равна 68. Найдите наименьший периметр такого шестиугольника.
б) От прямоугольника отрезают угловой квадрат, сторона которого на 10 меньше меньшей стороны прямоугольника. Площадь полученного шестиугольника должна быть равна 700. Найдите наименьший периметр такого шестиугольника.

20.12. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершённого сверху полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

20.13. Найдите стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса 10 см.

20.14. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15 см. При какой длине второго основания площадь трапеции будет наибольшей?

20.15. Сторона квадрата $ABCD$ равна 8 см. На сторонах AB и BC соответственно взяты точки P и E так, что $BP = BE = 3$ см. На сторонах CD и AD взяты точки M и K так, что получилась трапеция $PEMK$ наибольшей площади. Чему равна эта площадь?

Решите задачи **20.16—20.23** в координатной плоскости xOy.

20.16. а) На прямой $4x + 3y + 25 = 0$ найдите точку, ближайшую к началу координат.
б) На оси абсцисс найдите точку, сумма расстояний от которой до точек (0; 3) и (4; 5) наименьшая.

20.17. На графике заданной функции найдите точку, ближайшую к данной, если:
а) $y = \sqrt{x}$, $M(4{,}5;\ 0)$; б) $y = x^2$, $K(2;\ 0{,}5)$.

20.18. а) Через точку (1; 4) проведена прямая так, что сумма длин отрезков, отсекаемых ею на положительных полуосях координат, оказалась наименьшей из возможных. Составьте уравнение этой прямой.
б) Через точку (1; 4) проведена прямая так, что произведение длин отрезков, отсекаемых ею на положительных полуосях координат, оказалось наименьшим из возможных. Составьте уравнение этой прямой.

20.19. а) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (1; 2) и отсекающей от положительных полуосей координат треугольник наименьшей площади.
б) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (2; 0,25), для которой отрезок, заключённый между положительными полуосями координат, имеет наименьшую длину.

20.20. а) В фигуру, ограниченную параболой $y = a^2 - x^2$ и осью абсцисс, вписан равнобедренный треугольник так, что его основание параллельно оси абсцисс, а вершиной служит начало координат. Какова наибольшая площадь такого треугольника?

б) В фигуру, ограниченную параболами $y = a^2 - x^2$ и $y = x^2$ и осью абсцисс, вписан прямоугольник так, что его стороны параллельны осям координат. Какова наибольшая площадь такого прямоугольника?

20.21. Найдите наибольшее значение площади треугольника OBC, где O — начало координат, B — точка на графике функции $y = \frac{5}{x} + 64x^5 e^{6-4x}$, $0{,}7 \leqslant x \leqslant 2$, а C — точка на оси Ox, абсцисса которой равна абсциссе точки B.

20.22. Найдите наименьшее значение площади треугольника OAB, где O — начало координат, A — точка на графике функции $y = \sqrt{2x + \sin 2x - 7\sin x + 11}$, $\frac{\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{7}$, а B — точка на оси Ox, абсцисса которой равна удвоенной ординате точки A.

20.23. Найдите наименьшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю OM, где O — начало координат, а M — точка на графике функции $x = 3 - 4\ln(0{,}2x - 1)$, $6 \leqslant x \leqslant 9{,}5$.

20.24. При каких размерах прямоугольный параллелепипед объёмом 8 м^3 с квадратным основанием имеет наименьшую площадь поверхности?

20.25. В основании пирамиды $MABCD$, объём которой равен 9 см^3, лежит квадрат $ABCD$. Ребро MB перпендикулярно плоскости основания. Какое наименьшее значение при этих условиях может иметь длина ребра MD?

20.26. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна 8 см. При какой высоте пирамиды её объём будет наибольшим?

20.27. Периметр осевого сечения цилиндра 6 см. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы его объём был наибольшим?

20.28. Найдите высоту цилиндра наибольшего объёма, который можно вписать в шар радиусом 10 см.

20.29. Открытый металлический чан имеет форму цилиндра, объём которого равен 8π. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление потребовалось как можно меньше металла?

20.30. Требуется изготовить коническую воронку с образующей 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольшим?

20.31. а) Найдите высоту конуса наименьшего объёма, описанного около шара радиусом R.
б) Найдите высоту конуса наибольшего объёма, вписанного в шар радиусом R.

20.32. Металлическая заготовка длиной 1 м имеет форму усечённого конуса, диаметры оснований которого равны 10 см и 5 см. Из неё следует изготовить стержень наибольшего объёма в виде прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Найдите размеры такого стержня.

20.33. По двум прямолинейным тропинкам, пересекающимся в точке O под углом $60°$, одновременно выходят два пешехода по направлению к точке O. Первый находится от точки O на расстоянии 4,75 км и идёт со скоростью 3 км/ч, второй находится от точки O на расстоянии 4 км и идёт со скоростью 2 км/ч. Через какое время расстояние между пешеходами станет наименьшим?

20.34. С корабля, стоящего в 9 км от берега на якоре, нужно послать матроса в лагерь, расположенный на берегу в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Матрос сначала плывёт на лодке со скоростью 4 км/ч, потом идёт пешком со скоростью 5 км/ч. В какой точке он должен выйти на берег, чтобы прибыть в лагерь в кратчайший срок?

Упражнения для повторения

20.35. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ x - y - 3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^x \cdot 8^y = 72, \\ 3^x - 8^y - 1 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^y = 75, \\ 3x - 4y - 10 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 108, \\ 3^y \cdot 4^x = 192. \end{cases}$

20.36. Решите неравенство:

а) $\log_{\log_3 4}(x-2) \leqslant 0$;

б) $\dfrac{\log_7(2x-3{,}2)}{\log_7 \log_7 1{,}96} \leqslant 0$;

в) $\log_{\log_5 3}(3x-7) \leqslant 0$;

г) $\dfrac{\log_6(3x+1)}{\log_6 \log_6 7{,}2} \leqslant 0$.

20.37. Вычислите:

а) $\dfrac{3\cos 196^\circ - 12\sin 74^\circ}{\cos 16^\circ}$;

б) $\dfrac{2\sqrt{2}\cos 83^\circ + \sqrt{2}\sin 7^\circ}{\cos 52^\circ + \cos 38^\circ}$;

в) $\dfrac{5\sin 62^\circ - 9\cos 118^\circ}{\cos 28^\circ}$;

г) $\dfrac{2\sqrt{2}\sin 68^\circ + 5\sqrt{2}\cos 22^\circ}{\cos 23^\circ + \cos 67^\circ}$.

20.38. Решите уравнение:

а) $\sin x - 2\cos 2x + \sin 5x = 0$;

б) $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$;

в) $\sin x - \cos x = \sqrt{1{,}5}$;

г) $\cos 5x + \cos x + 2\cos 3x = 0$;

д) $\cos 9x + \cos 3x = \cos x + \cos 7x$;

е) $\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{2} = 0$.

Итак, в главе 3

Узнали, как для функции $y = f(x)$ по знаку её производной на интервале $(a; b)$ установить характер монотонности функции.

Сформулировали определения точки минимума и точки максимума (точки экстремума) функции.

Сформулировали алгоритм исследования непрерывной функции на монотонность и экстремумы.

Научились использовать производную для построения графика функции.

Сформулировали алгоритм отыскания наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на отрезке.

Обсудили вопрос о том, как искать наименьшее или наибольшее значение непрерывной функции на незамкнутом промежутке.

Выяснили, как решать практические задачи на оптимизацию.

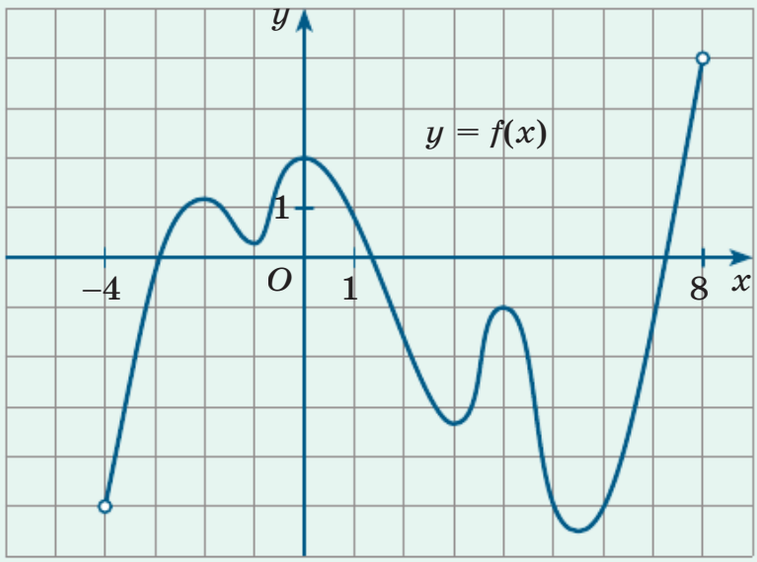
Вопросы

1. Дайте определение функции, возрастающей (убывающей) на промежутке.
2. Каким образом связаны знак производной функции и характер монотонности функции на открытом промежутке?
3. Сформулируйте определение точки максимума (минимума) функции $y = f(x)$.
4. Какую точку для функции $y = f(x)$ называют стационарной, а какую — критической?
5. Верно ли, что всякая точка экстремума функции является стационарной или критической точкой?
6. Верно ли, что всякая стационарная или критическая точка функции является точкой экстремума? Если нет, то приведите пример.
7. Сформулируйте достаточные условия точки максимума (минимума) функции.
8. Как узнать, есть ли у графика функции $y = f(x)$ горизонтальная асимптота; вертикальная асимптота?

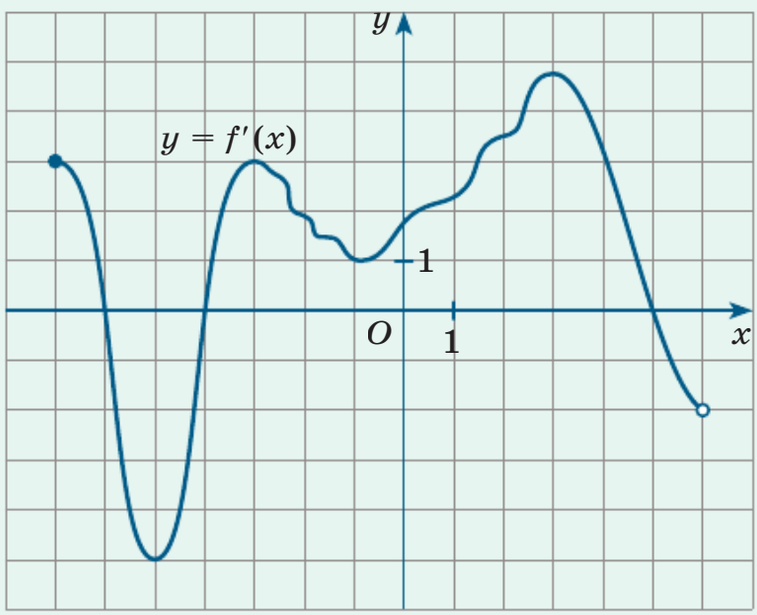
Тест

1. На рисунке 108, *а* задан график дифференцируемой функции $y = f(x)$. Найдите количество точек, в которых производная функции равна нулю.

2. На рисунке 108, *б* задан график производной функции $y = f(x)$. Укажите наибольшую из длин промежутков убывания функции.



а



б

Рис. 108

3. Выберите верные утверждения относительно функции $y = x + \sin x$.
а) Производная функции положительна при всех значениях x.
б) Производная функции неотрицательна при всех значениях x.
в) Функция возрастает на всей области определения.
г) Функция возрастает на промежутке $[0; \pi]$, убывает на промежутке $[\pi; 2\pi]$.

4. На рисунке 109 изображён график производной функции $y = f(x)$. Укажите количество точек максимума функции $y = f(x)$.

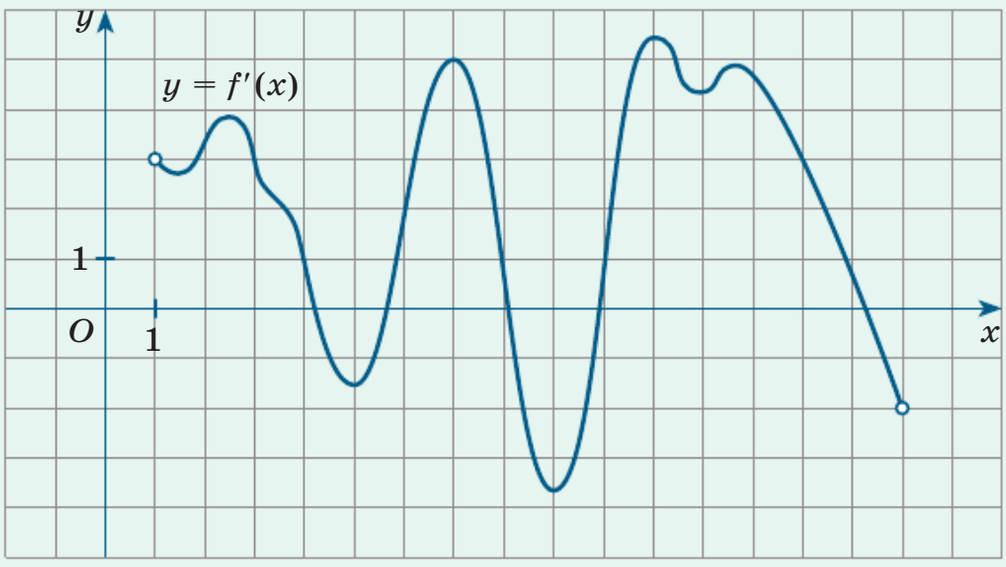


Рис. 109

5. Найдите точку минимума функции $y = x^2 - 8\ln(x + 3)$.

6. Учитель предложил учащимся оценить верность следующих трёх утверждений относительно функций, определённых на всей числовой прямой:
1) значение функции в точке максимума всегда больше её значения в точке минимума;
2) если $y = f'(x_0)$ существует и $f'(x_0) \neq 0$, то точка x_0 не является точкой максимума;
3) если x_0 — точка максимума функции $y = f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.
Аня считает, что среди этих утверждений 1 и 2 — верны, а 3 — неверно.
Даня считает, что верно только утверждение 2.
Саша думает, что верны все три утверждения.
Маша полагает, что 1 — неверно, а 2 и 3 — верны.
Кто из учащихся прав?
а) Аня б) Даня в) Саша г) Маша

7. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 1{,}5\sqrt[3]{x^2} - x$ на отрезке $[0; 8]$.

а) $y_{\text{наим}} = -2$, $y_{\text{наиб}} = 0$
в) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 0{,}5$
б) $y_{\text{наим}} = -2$, $y_{\text{наиб}} = 0{,}5$
г) $y_{\text{наим}} = 0{,}5$, $y_{\text{наиб}} = 1$

8. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{27} \cdot \operatorname{tg} 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$.

9. Укажите верное утверждение относительно функции $y = x^3 - 2x^2 + 3x$.

а) У данной функции две стационарные точки.
б) У данной функции одна точка минимума.
в) Данная функция возрастает на всей числовой прямой.
г) График данной функции расположен выше оси абсцисс.

10. Укажите неверное утверждение относительно функции $y = 2 - x^{-0{,}5}$.

а) Данная функция определена не на всей числовой прямой.
б) У данной функции нет стационарных точек.
в) График данной функции расположен правее оси ординат.
г) У данной функции одна точка максимума.

Из истории математики

На русском языке термин *производная* функции[1] появился на рубеже XVIII—XIX вв. в работах В. И. Висковатова (1780—1812). Сам термин является дословным переводом французского слова *dérivé* или английского *derivative*. Его предложил в конце XVIII в. крупнейший (наряду с Эйлером) математик XVIII в. Ж. Л. Лагранж (1736—1813) в своём программном трактате «Теория аналитических функций»[2] (1797 г.). Лагранж впервые стал систематически использовать для обозначения функции записи $y = f(x)$, $f(x)$, f, а для обозначения производных — $f'(x)$, f.

Программа Лагранжа состояла в максимальной алгебраизации того математического анализа, который сложился после появления работ И. Ньютона (1643—1727) и Г. К. Лейбница (1646—1716). Основное отличие коротко можно описать так. Для Ньютона первично понятие скорости изменения функции (изменяющейся величины, или *флюенты*) и вторично понятие производной (*флюксии*). Лагранж, напротив, полагал, что понятие производной, как более строгое и математически ясное, должно приводить к определению того, что такое скорость (см., например, «...мы отнюдь не обладаем достаточно точным понятием о том, что такое скорость точки в любое мгновение, в случае, когда скорость переменна...»).

В целом отчётливое представление о производных, операциях над ними и их применении при исследовании функций сложилось к концу XVII в. Традиционно этот момент в истории математики связывают с работами Ньютона и Лейбница. Юридически расставить приоритеты и назвать, кто из этих великих математиков первым «открыл» дифференциальное исчисление, — вряд ли разрешимая задача. Большинство работ Ньютона были опубликованы через много лет после их написания, и сведения из них передавались устно или в частной переписке.

Например, основные принципы метода *флюксий*, которому соответствуют шаги 4 и 5 алгоритма из § 7, Ньютон разработал к концу

---

[1] Если точнее, то *производная функция*, т. е. функция, которая каждому x ставит в соответствие $f'(x)$.

[2] Полное название: «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобождённые от какого-либо рассмотрения бесконечно малых или исчезающих пределов или флюксий и сведённые к алгебраическому анализу конечных величин».

1665 г. в рукописи «To resolve problems by motion these following propositions are sufficient»[1], а книгу «Метод флюксий» написал к 1671 г., которую напечатали только в 1736 г. Источником для исследований Лейбница в 1672—1675 гг. стали задачи, традиционные для того времени, о проведении касательных, применениях *метода неделимых* и результатов П. Ферма (1601—1665) об экстремумах многочленов, использовании *характеристического треугольника Паскаля* и в особенности работы 1673 г. Х. Гюйгенса (1629—1695) о маятниковых часах. В 1677 г. Лейбниц в письме к Ньютону изложил свои результаты. Ньютон по существу не ответил: результаты он получил уже сам, а новый подход и новые обозначения Лейбница его не заинтересовали.

В 1684 г. Лейбниц опубликовал мемуары «Новый метод максимумов и минимумов»[2], в которых довольно полно, но чрезвычайно лаконично изложил свои методы и, в частности, предложил сам термин *дифференциальное исчисление*. В последующие 20 лет в других работах Лейбница и работах его коллег метод получил самое широкое распространение в континентальной Европе. Примерно с 1699 г. началась долгая и жаркая полемика, доходившая даже до размеров международной распри, между сторонниками Ньютона и сторонниками Лейбница, а потом и между ними самими о приоритетах в создании математического анализа.

Если оставить в стороне эти споры, то содержательную значимость самого математического анализа не оспаривал никто. В начале XVIII в. это была, пожалуй, наиболее динамично развивавшаяся наука, открывшая массу новых связей и в самой математике, и в её приложениях. В 1696 г. сторонник Лейбница Гийом Лопиталь (1661—1704) на основе лекций и записок Иоганна Бернулли (1667—1748) издал первый учебник по математическому анализу «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий», который переиздавался вплоть до 1781 г. и явился основным текстом для изучения дифференциального исчисления. В нём, в частности, были сформулированы основные приёмы использования производной (тогда — дифференциалов) для исследования функций, похожие на те, которые изложены в §9 и §10. Примерно к 1730 г. начала математического анализа становятся уже, скорее, учебным материалом для университетов.

---

[1] «Следующие предложения достаточны для решения задач с помощью движения».

[2] Полное название: «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления».

Формулы для дифференцирования тригонометрических функций впервые опубликованы в 1722 г. в работах сторонника Ньютона Роджера Коутса[1] (1682—1716).

Заметной вехой в становлении математического анализа стала своеобразная трилогия Л. Эйлера «Введение в анализ бесконечных» (1748 г.), «Дифференциальное исчисление» (1755 г.), «Интегральное исчисление» (1770 г.). Интересно, что в описаниях и обоснованиях Эйлер чаще близок к точке зрения Ньютона, но в обозначениях и символике следует Лейбницу, основываясь на дифференциалах dx, dy, dz, ... и их отношениях. Вот, например, как описывает Эйлер само дифференциальное исчисление: «...метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых какими-либо функциями, когда переменному количеству, функциями которого они являются, даётся исчезающее приращение...» Это, по существу, то же определение, что и приведённое в § 7.

После книг Эйлера и Лагранжа стало ясно, что строгое изложение теории производных и методов дифференцирования должно базироваться на строгой математической теории пределов функций. Такая основа была разработана к середине XIX в. в основном в работах О. Коши (1789—1857) и Б. Больцано (1781—1848) и активно развивалась до начала XX в. К. Вейерштрассом (1815—1897) и др.

Изложение основ математического анализа в XX в. не претерпело принципиальных изменений. Пожалуй, новым стало осознание необходимости предварительного знакомства с началами математического анализа уже в старшей школе. Например, это активно обсуждалось на Всероссийских математических съездах. В нашей стране основы (или начала) математического анализа вошли в содержание действующих школьных учебников по математике старшей школы в 70-х гг. XX в.

[1] Иногда пишут *Котес*.

Ответы

Глава 1

§ 1 **1.3.** б) 1, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{17}$, $\frac{24}{31}$, $\frac{120}{49}$. **1.5.** г) 2; −8; −3; −5,5; −4,25; −4,875.
1.11. 1), 2), 3). **1.12.** 1), 3), 4). **1.13.** в) 5; г) 5. **1.17.** г) 5; 6; 7; ...; д) 4; 5; 6; е) 5.
1.18. г) 9, 10, 11; д) 69, 70, 71; е) 60, 61, 62. **1.19.** г) 1,01; д) 0,88; е) 1. **1.20.** г) 11; д) 110; е) 1100. **1.21.** г) 10; д) 2; е) 4. **1.22.** г) 15; д) 4; е) 4. **1.23.** в) $297^2 + 1$;
г) 90 001. **1.26.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$,
$-\frac{3\pi}{4}$; б) $2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; -2π, $-\frac{5\pi}{3}$. **1.27.** г) −15; д) $-\frac{1}{6}$; е) $-\frac{1}{8}$.
1.28. 45°.

§ 2 **2.2.** г) 2; д) 7; е) $\frac{4}{3}$. **2.3.** г) 1; д) −2; е) 4. **2.4.** г) 8; д) 0; е) −12.
2.5. г) 7; д) 0; е) −4. **2.8.** а) 1; б) $\frac{3}{8}$. **2.9.** г) $4 + 2\sqrt{2}$; д) 24; е) $\frac{1}{3}$.
2.10. а) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$;
б) $\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
2.11. г) $b_1 = -3{,}9$; д) $q = 2 - \sqrt{2}$; е) $q = 0{,}999$.
2.12. а) 1; б) 0; в) 0,1; г) 0,8; д) 0,2; е) 0,3. **2.13.** г) 0,8; д) 0,6; е) 0,7.
2.14. а) 11 000 км/ч^2; б) 0,72 км. **2.15.** г) −0,5; д) 1,5; е) −1,5.
2.16. г) $(-\infty; 0{,}5] \cup [1; 3)$; д) $(-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; 1) \cup (1; 3]$; е) $(-\infty; 0{,}5] \cup [1; 3) \cup (3; +\infty)$.
2.17. г) 0; 15; д) −3; 3; е) 1; 5.
2.18. $p = 0{,}5$; $p \leqslant \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

§ 3 **3.11.** г) 0; д) −5; е) 15. **3.12.** г) 1; д) 0; е) 3. **3.13.** г) 1; д) $\frac{4}{3}$; е) 28.
3.14. г) −1; д) −3; е) 10. **3.15.** г), д), е) 0. **3.16.** а) 2; б) 10; в) $\frac{2}{3}$; г) 8. **3.17.** 12 м.
3.18. 4; 11; 18. **3.19.** г) 49; д) 9; е) 0,25. **3.20.** б) $x < 3$; $x = 3{,}5$; $5 < x \leqslant 6$.
3.21. $0{,}75 < p < 1$.

§ 4 **4.14.** г) 0,5; д) −4; е) $\frac{1}{3}$. **4.15.** г) −0,4; д) 7; е) $-\frac{1}{7}$. **4.16.** г) 4; д) −0,5;
е) 10. **4.17.** г) 8; д) 144; е) $\frac{8}{3}$. **4.18.** г) 0,75; д) 2,5; е) 0,125. **4.19.** а) 1; б) 1.

4.20. в) −0,5; г) −0,5. **4.21.** г) $\frac{5}{6}$; д) $\frac{2}{7}$; е) $\frac{1}{4}$. **4.22.** в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{8}$. **4.23.** а) 2; б) $\frac{5}{6}$. **4.24.** г) −4; 5; д) −2; е) 8. **4.25.** 9,15 мин. **4.26.** а) $\sqrt{2}-1$; б) $\sqrt{6}-2$. **4.27.** г) $x > 2$; д) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; е) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 0$. **4.28.** 2 %.

§ 5 **5.8.** г) $\Delta x = -0{,}06$; $x_1 = 2{,}94$; д) $\Delta x = 1{,}05$; $x_1 = 3{,}15$; е) $\Delta x = 24$; $x_1 = 27$. **5.9.** г) $-2\Delta x$; д) $(2x + \Delta x)\Delta x$; е) $\frac{2\Delta x}{x(x+\Delta x)}$. **5.10.** г) $3^x(3^{\Delta x} - 1)$; д) $\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$; е) $2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$. **5.11.** г) $k\Delta x$; д) $a\Delta x(2x + \Delta x)$; е) $-\frac{a\Delta x}{x(x+\Delta x)}$. **5.12.** г) 1,5; д) 6; е) 12. **5.13.** в) 1; г) 3. **5.14.** г) 1,6; д) −5; 3; е) 1. **5.15.** в) $\frac{1}{64} \leqslant x \leqslant 2$; г) $0 < x \leqslant 0{,}1$, $x \geqslant 1000$. **5.16.** 878 080 р.

Тест **1.** а). **2.** а), г). **3.** г). **4.** а), б), в). **5.** −15. **6.** −4. **7.** 0,21. **8.** А — 3, Б — 1, В — 2. **9.** а). **10.** в).

Глава 2

§ 6 **6.6.** г) 6. **6.7.** г) $2t_0$. **6.12.** г) −8; д) 1; е) 0. **6.21.** а) 0,7; б) −1,5. **6.23.** а) −2; б) 4. **6.24.** а) 1; б) 0,5. **6.25.** ≈ 2 594 900 р. **6.26.** 9 930 000 р., 13 965 000 р. **6.27.** а) −4; 0; 5; г) 0; −4.

§ 7 **7.3.** в) $y' = -\frac{4}{3}x$; г) $y' = 2x + 3$. **7.9.** г) 135°; д) 30°; е) $\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **7.11.** г) $x > -\frac{1}{7}$; д) $x < -0{,}25$; $x > 0{,}25$; е) $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$. **7.12.** г) $x \leqslant 0$; д) $-6 \leqslant x \leqslant 6$; е) $-5 \leqslant x < 0$, $0 < x \leqslant 5$. **7.13.** а) $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$; б) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$. **7.14.** а) $-\sqrt[3]{0{,}5}$; б) таких значений нет. **7.18.** в) $x = 5$; $-2 - \sqrt{7} \leqslant x \leqslant -2 + \sqrt{7}$; г) $x = 4$; $x < 3 - \sqrt{2}$; $x > 3 + \sqrt{2}$. **7.19.** а) $-\frac{7}{13}$; б) $\frac{17}{25}$. **7.20.** г) $1 - \sqrt{2}$; д) $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$; е) $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

§ 8 **8.1.** г) −0,75; −5; д) 1,261; 12; е) $-\frac{1}{48}$; $-\frac{1}{9}$. **8.2.** г) 0,996; д) 0,991; е) 3,005. **8.3.** б) 0,498; г) 24,2; е) 2,55. **8.4.** 985 см^3. **8.10.** б) $-\frac{77}{85}$; г) $\frac{36}{85}$; е) $\frac{84}{13}$. **8.12.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{6}) + \pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.13.** в) $-1 < p < 1$. **8.14.** а) $\frac{3\pi}{2} \leqslant p < \frac{5\pi}{2}$; б) $\frac{7\pi}{4} \leqslant p < \frac{9\pi}{4}$.

§ 9 **9.8.** г) $y = 12x + 16$; д) $y = \frac{1}{6}x + 1{,}5$; е) $y = 1 - 0{,}25x$. **9.9.** в) $y = -0{,}25x - 2$; г) $y = 4 - x$. **9.10.** г) $x = 0$; д) $x = \pm 0{,}5$; е) $x = 0{,}25$.

9.11. г) $y = -2x - 1$; д) $y = -x$, $y = -x \pm 2$; е) $y = \frac{1}{4}x + 1$. **9.12.** а) $y = 6x - 9$, $y = -6x - 9$; б) $y = \frac{1}{8}x + 2$. **9.13.** в) 120°; г) $\pi - 2\operatorname{arctg} 8$. **9.14.** а) $p = -0{,}25$; б) $p = 0{,}5$. **9.15.** а) $p = \pm 0{,}4$; б) $p = \pm 2$. **9.19.** $y = 3x - 2$, $y = 3x + 2$. **9.20.** Множество точек прямой $y = -\frac{1}{4}$. **9.21.** а) $\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $-\sin\beta$. **9.22.** в) $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **9.23.** г) ± 3, $\pm\frac{\pi}{2}$; д) 0,5, 2; е) ± 4, $\pm\frac{\pi}{2}$. **9.24.** 0,054 Дж.

§ 10 **10.4.** г) $y' = 2{,}5x\sqrt{x} - 4x$; д) $y' = 15x^4 + 45x^2$; е) $y' = \frac{7x^3 + 12}{6\sqrt{x}}$. **10.5.** г) $y' = 8x^3 + 18x^2 - 2x - 3$; д) $y' = 5x^4 - 6x^2 - 3$; е) $y' = -25x^4 - 34x^3 + 8x^2 + 8$. **10.6.** г) $y' = \frac{5 + 5x^3}{2x\sqrt{x}}$; д) $y' = \frac{5x^2 + 18}{3x^2}$; е) $y' = -45x^2 + 24x + 30$. **10.7.** б) $y' = \frac{4}{(4x - 1)^2}$; г) $y' = -\frac{2x}{(x^2 - 5)^2}$; д) $y' = -\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^2}$. **10.8.** б) $y' = -\frac{16}{(x + 2)^2}$; г) $y' = \frac{8x + 9}{x^4}$; е) $y' = \frac{10x - 28 - 4x^2}{(5 - 4x)^2}$. **10.9.** б) $y' = -\frac{x + 1}{4x\sqrt{x}}$; г) $y' = \frac{1 - 3x}{2x\sqrt{x}(x - 1)^2}$; е) $y' = \frac{6x\sqrt{x} + 8x + 0{,}5\sqrt{x} + 1}{\left(\sqrt{x} + 1\right)^2}$. **10.10.** г) $y' = \frac{12x^3 - 9x^2 + 2x + 8}{(3x - 1)^2}$; д) $y' = \frac{14x^2 - 22x + 7}{(2x - 1)^2}$; е) $y' = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x + 1)^2}$, $x \neq 0$. **10.11.** г) -12; д) 21; е) $-1\frac{5}{9}$. **10.12.** г) $\frac{5}{12}$; д) $95\frac{15}{16}$; е) 1,25. **10.15.** г) 5; д) 3; е) 0. **10.16.** а) 135°; б) 45°. **10.17.** г) ± 2; д) $-\frac{2}{3}$; 2; е) $-4 \pm 4\sqrt{3}$. **10.18.** г) -1; д) $\frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$; е) -1; 3. **10.19.** г) $y = 16x - 30$; д) $y = 1{,}5x - 3{,}5$; е) $y = 7$. **10.20.** г) $y = 20 - 12x$, $y = -12x - 12$; д) $y = x + 7$; е) $y = 7x + 20$, $y = 7x - 4$. **10.21.** а) $y = 5x - 15$, $y = -5x$; б) $y = x + 1$, $y = x - 3$. **10.22.** б) (0; -2), (0; 14), (0,5; 0), ($-3{,}5$; 0). **10.23.** г) $x < -6$, $x > 0$; д) $x < -4$; $x > 3$; е) $0 < x < 3{,}6$. **10.24.** г) $x < -5$; $x > 4$; д) $-1 < x < \frac{7}{3}$; е) $x > \frac{3}{4}$. **10.25.** а) $p = 3{,}75$; б) $p = 6$, $p = -2$. **10.26.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. **10.27.** а) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$; б) 45°. **10.28.** $p = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. **10.29.** $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$. **10.30.** а) $y = \frac{\sqrt{3} - 2}{200}x^2 + 50\left(2 - \sqrt{3}\right)$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

10.31. г) $3a + 2b$; д) $3b - 2a$; е) $a - 2b$. **10.33.** в) $\frac{1}{49}$, 343; г) 2, 512.

10.34. в) $-2 \leqslant x < -0{,}5$, $x > -0{,}5$; г) $x > 2$. **10.35.** $b > -1$.

§ 11 **11.6.** г) $-\frac{2\cos x}{\sin^2 x}$; д) $\frac{\sin^3 x - 1}{\sin^2 x\,(\cos x - \operatorname{ctg} x)^2}$; е) $-\frac{1}{\cos^2 2x}$. **11.9.** г) 1; д) 3,5; е) -1. **11.10.** г) 5; д) -8; е) -2. **11.11.** г) -1; д) $\frac{13}{16}$; е) -2. **11.12.** г) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.14.** г) 150°; д) 45°; е) $\operatorname{arctg} 2$. **11.15.** а) $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

11.18. а) $y = -\frac{1}{2}x + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{5\pi}{4} + 1\right)$. **11.20.** а) 2, -4; б) 1; -2. **11.21.** г) 8; д) 8; е) $-0{,}5$. **11.22.** б) e, e^{-2}. **11.23.** $x > 1$.

§ 12 **12.2.** в) $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\pi + \sqrt{3}}{3}$; г) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5\pi}{6}$.

12.3. в) $y' = \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}}$; г) $y' = -\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{1 + x^2} + \frac{\operatorname{arcctg} x}{x}\right)$. **12.5.** б) $-\frac{2\sqrt{2}}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **12.7.** в) 1,5; г) 0,5. **12.8.** в) 1; г) $-0{,}8$. **12.9.** в) $-0{,}99$; г) $\log_3 35$. **12.10.** г) $x \geqslant 2$; д) $x < -2$; $x > 2$; е) $x > 0$. **12.11.** а) $a = -2$; б) $a = 1$.

§ 13 **13.8.** г) 4; д) 6; е) $-0{,}4$. **13.9.** в) -6; г) -5. **13.10.** в) $y = 4 - x$; г) $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{4}$. **13.11.** в) $y = 31 - 15x$, $y = 35 - 15x$; г) $y = x + 2$.

13.12. г) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) 0, $\frac{4}{9}$; е) $\frac{1}{3}$.

13.13. б) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **13.14.** б) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **13.15.** г) $y' = \frac{3\sin 3x}{\cos^2 3x}$; д) $y' = -\frac{1}{2\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$; е) $y' = 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{4}}{\sin^3\frac{x}{4}}\right)$. **13.16.** в) $y' = \frac{2\sin\sqrt{1 - 4x}}{\sqrt{1 - 4x}}$; г) $y' = -\frac{3}{2(3x - 1)\sqrt{3x - 1}}$.

13.17. г) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}} - \frac{1}{1 + 9x^2}$; д) $y' = \frac{1}{\arccos x^2\cdot\sqrt{1 - x^2}}$; е) $y' = 2(\arcsin 2x - \operatorname{arcctg} 3x)\left(\frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} + \frac{3}{1 + 9x^2}\right)$. **13.18.** а) $y = \frac{1}{8}x + 2{,}5$;

б) $y = 4x - 3$, $y = -12x - 3$. **13.19.** а) $\frac{3\pi}{4}$, π; б) $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. **13.20.** 9,8.

13.21. $\approx 3{,}03$ м/мин. **13.23.** а) $2 \leqslant x < 2{,}75$; $x \geqslant 4$; б) $1 < x < \sqrt[4]{2}$; $x > 3$.
13.26. в) 3; г) 1.

§ 14

14.8. г) $10x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 6x$; д) $\frac{x^4 + 16x^3 - 10x^2 - 8x}{2\sqrt{x+2}}$;

е) $\frac{-2x^4 + 12x^3 + 2x - 3}{(2x^3+1)^2}$. **14.9.** г) $-50(3-5x)^9$; д) $-5\left(2 - \frac{x}{3}\right)^{14}$; е) $-\frac{48}{(2x-5)^7}$.

14.13. г) -1; д) $\frac{2}{3}$; е) 33. **14.14.** г) 135°; д) 45°; е) 45°. **14.15.** г) $y = -12x$;

д) $y = -\frac{1}{4}(3x - 19)$; е) $y = \frac{1}{16}(x + 26)$. **14.16.** а) $y = 2x - 2$; б) $y = -3x - 2$.

14.17. г) 0; 0,6; д) $-\frac{19}{8}$; е) $\frac{1}{8}$. **14.18.** г) $-\frac{3}{4} < x < 0$; $x > 0$; д) нет решений;

е) $x \geqslant 6{,}25$. **14.20.** г) $y' = -0{,}4\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + 3\right)^{-0{,}2}$; д) $y' = \frac{8}{\sqrt{16 - x^2}}\arcsin^7\frac{x}{4}$;

е) $y' = -\frac{17}{(2x+5)^2\sin^2\frac{3x-1}{2x+5}}$. **14.21.** г) $-\frac{896}{81}$; д) $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{9\pi^2}}$; е) 0. **14.22.** а) $y = -3x$;

б) $y = \pm\frac{2}{9}x$. **14.23.** а) $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; б) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. **14.24.** г) 1; д) 2; е) 0.

14.25. в) 2; г) 5; 0,2. **14.26.** в) $x < -3$; $-3 < x \leqslant -2$; г) $x > \frac{1}{3}$. **14.27.** а) 2; б) 5.

§ 15

15.4. г) $e^x(3 - 4x)$; д) $e^{x-1}(0{,}2x + 1)^4(0{,}2x + 2)$; е) $-\frac{e^{4-3x}(3x+4)}{x^5}$.

15.5. г) $e^{-x}(3\cos 3x - \sin 3x)$; д) $e^{5x+3}\left(5\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)$;

е) $e^{2x}\left(2\operatorname{ctg}\frac{x}{5} - \frac{1}{5\sin^2\frac{x}{5}}\right)$. **15.7.** г) $-(0{,}5^{3x+2}\ln 8 + 3x^2)$; д) $3 \cdot 10^{3x}(1 + 3x\ln 10)$;

е) $-\left(\frac{5}{6}\right)^x(5 + (3 - 5x)\ln 1{,}2)$. **15.8.** г) e^{-4}; д) -2; е) $\frac{4}{3}e$.

15.9. г) $y' = \frac{e^{5x+3} - 2^{3x-6}\ln 2}{2}$; д) $y' = \frac{2 \cdot 3^{2x-4}(x\ln 3 - 1)}{x^3}$; е) $y' = e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$.

15.10. г) 1; д) $\frac{8}{3}e^2$; е) 1. **15.11.** г) $2e - 1$; д) $4{,}5\ln\frac{2}{3}$; е) $\frac{2}{3}$. **15.12.** г) $e - 13$; д) -1;

е) $e - 3$. **15.13.** г) 135°; д) 60°; е) 0°. **15.14.** г) $y = 1 - x$; д) $y = 0{,}2$;

е) $y = 2x\ln 5 + (1 - \ln 5)$. **15.16.** б) $\frac{1}{2}cp_0$. **15.17.** а) $x = 2$; б) $y = 9x\ln 5 + 8{,}5$.

15.19. г) $y' = \frac{e^x}{\cos^2(e^x)} - \frac{3^x\ln 3}{\sin^2(3^x)}$; д) $y' = \frac{2^{\arcsin x}\ln 2}{\sqrt{1 - x^2}}$; е) $y' = \frac{2e^{2x} + e\ln 2 \cdot 2^{ex}}{3\sqrt[3]{\left(e^{2x} + 2^{ex}\right)^2}}$.

15.22. г) $y' = -\frac{2\ln 5}{x\ln^2 x}$; д) $y' = x^2(3\lg x + \ln^{-1}10)$; е) $y' = \frac{\lg x - (\ln 10)^{-1}}{\lg^2 x}$.

15.23. в) $y' = \frac{2}{(2x-3)\ln 5}$; г) $y' = -\frac{3}{(3x-2)\ln 3}$. **15.25.** г) $\frac{1}{8}(1-\ln 2)$; д) $\frac{1}{\ln 10}$;

е) $\frac{3}{\ln 2}$. **15.26.** а) (8; 2); б) $(3; \sqrt{3}\ln 3)$. **15.27.** г) $y = \frac{x-1}{\ln 10}$; д) $y = x - 1$; е) $y = 1 - 5x$.

15.28. г) $y' = -\frac{7}{(3x+2)(2x-1)}$; д) $y' = -\frac{\sin(\ln 3x)}{x}$; е) $y' = \frac{1}{x\ln 10(\lg^2 x + 2\lg x + 2)}$.

15.30. а) $a = -0{,}25$; б) $a = 2$. **15.31.** а) $y = x$; б) $y = 0$, $y = \frac{4}{e^2}x$. **15.32.** а) $p = -1$;

б) $p = 0$. **15.33.** 40 230 р. **15.34.** На 20 %. **15.35.** 12 %. **15.36.** $k = 0$; $\pm\frac{1}{4}$.

15.37. а) $\frac{1}{4} \leqslant p \leqslant \frac{13}{12}$; б) $-3 \leqslant p \leqslant -2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2} \leqslant p \leqslant 3$.

Тест **1.** 5. **2.** 16. **3.** в). **4.** а), в). **5.** б). **6.** 4. **7.** а). **8.** 1,2. **9.** г). **10.** $y = 0{,}25 + \ln 2$.

Глава 3

§ 16 **16.15.** г) Убывает на $(-\infty; -1]$, возрастает на $[-1; +\infty)$; д) убывает на $[0; 4]$, возрастает на $(-\infty; 0]$, $(4; +\infty)$; е) убывает на $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$, возрастает на $[-1; 0]$, $[1; +\infty)$. **16.16.** г) Убывает на $\left[-2; \frac{2}{3}\right]$, возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

д) убывает на $(-\infty; -3]$, $[0; 2]$, возрастает на $[-3; 0]$, $[2; +\infty)$; е) убывает на $[-3; -1]$, $[1; 3]$, возрастает на $(-\infty; -3]$, $[-1; 1]$, $[3; +\infty)$. **16.17.** г) Возрастает на $(-\infty; -1)$, убывает на $(-1; +\infty)$; д) убывает на $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2}; +\infty\right)$, возрастает на

$\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$; е) убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, возрастает на $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right]$ и на $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

16.18. в) Убывает на $(-\infty; 1{,}5]$; г) убывает на $\left[2\frac{35}{36}; 3\right]$, возрастает на $\left(-\infty; 2\frac{35}{36}\right]$.

16.19. в) Возрастает на $(-\infty; +\infty)$; г) убывает на $(-1; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$.
16.20. г) Возрастает на $(0; e]$, убывает на $[e; +\infty)$; д) возрастает на $(-\infty; 0)$

и на $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, убывает на $\left(0; \frac{2}{\ln 2}\right]$; е) возрастает на $[-3; 1]$, убывает на $[1; 5)$.

16.21. а), г) Возрастает на $[0; +\infty)$; б), в) убывает на $[0; +\infty)$. **16.22.** г) Убывает на $(0; 1]$, возрастает на $[1; +\infty)$; д) убывает на $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$, возрастает на $[1; +\infty)$

и на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$; е) убывает на $(-1; 1]$, возрастает на $[1; 3)$. **16.24.** в) $p \geqslant 0$;

г) $-3 \leqslant p \leqslant 3$. **16.25.** в) $p \geqslant 0$; г) $p \leqslant 0$. **16.26.** а) -2; б) 2. **16.27.** а) $p \leqslant -0{,}5$, $p \geqslant 3{,}5$; б) $p \leqslant -1{,}5$, $p \geqslant 1{,}5$. **16.28.** а), г) 2; б), в), д), е) 1. **16.29.** а), б) 2. **16.30.** а), б) 0. **16.31.** а) 1; б) 1. **16.32.** б) 0; 1. **16.33.** г) $2\sqrt{2}$; д) 4; е) $\frac{1}{3}$, 27. **16.34.** в) $x \geqslant 1$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 0$. **16.35.** а) -2; б) 3. **16.36.** а) $2 < a \leqslant 6$; б) $-2{,}25 \leqslant a < -2$, $-2 < a \leqslant 4$.

§ 17 **17.6.** г) $x = \frac{7}{6}$ — точка максимума; д) $x = -4$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума; е) $x = 0$ — точка максимума, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ — точки минимума. **17.7.** г) Точек экстремума нет; д) $x = -7$ — точка максимума, $x = 7$ — точка минимума; е) $x = -6$ — точка максимума, $x = 6$ — точка минимума. **17.8.** г) $x = 5$ — точка минимума; д) точек экстремума нет; е) $x = 7$ — точка минимума. **17.9.** г) $x = 2$ — точка максимума, $x = 3{,}5$ — точка минимума; д) $x = 3$ — точка минимума; е) $x = -1$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума. **17.10.** г) $x = 0$ — точка максимума, $x = \ln 2{,}5$ — точка минимума; д) $x = 1$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума; е) $x = 1{,}5$ — точка минимума. **17.11.** в) $x = 2 - \sqrt{6}$ — точка максимума, $x = 2 + 2\sqrt{6}$ — точка минимума; г) $x = \frac{1}{2}$ — точка минимума. **17.12.** г) $x = -2$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума; д) $x = -\frac{1}{3}$ — точка минимума; е) $x = 2$ — точка минимума. **17.13.** а) $x = 1$ — точка минимума; б) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума. **17.14.** в) $x = 1$ — точка минимума, $x = e^2$ — точка максимума; г) $x = 1$ — точка минимума. **17.15.** в) $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{7\pi}{3}$ — точки максимума, $x = \frac{4\pi}{3}$ — точка минимума; г) $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{9\pi}{4}$ — точки максимума, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$ — точки минимума. **17.16.** а) $x = \frac{3\pi}{4}$ — точка максимума, $x = -\frac{\pi}{4}$ — точка минимума; функция возрастает на $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $x = -\frac{\pi}{4}$ — точка максимума, $x = -\frac{3\pi}{4}$ — точка минимума; функция возрастает на $\left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$, убывает на $\left[-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. **17.17.** г) $x = 4$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума; функция убывает на $[0; 1]$ и на $[4; +\infty)$, функция возрастает на $[1; 4]$; д) $x = 3\pi$ — точка минимума; функция убывает на $(8; 3\pi]$, функция возрастает на $[3\pi; 10)$; е) $x = 0{,}3$ — точка минимума; функция убывает на $(-\infty; 0{,}2)$ и на $(0{,}2; 0{,}3]$, функция возрастает на $[0{,}3; +\infty)$.

17.18. б) $x = -2$, $x = 0$ — точки максимума, $x = -1$, $x = 1$ — точки минимума; функция убывает на $[-2; -1]$ и на $[0; 1]$, функция возрастает на $(-\infty; -2)$, на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$. **17.19.** в) $x = -1$ — точка минимума, функция убывает на $(-\infty; -1]$, возрастает на $[-1; +\infty)$; г) $x = 1$ — точка минимума, функция убывает на $(0; 1]$, возрастает на $[1; +\infty)$ и на $(-\infty; 0)$. **17.20.** г) $x = -1$ — точка максимума, $x = -3$, $x = 1$ — точки минимума; функция убывает на $(-\infty; -3]$ и на $[-1; 1]$, функция возрастает на $[-3; -1]$ и на $[1; +\infty)$; д) $x = 1$, $x = -1$ — точки максимума, $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ — точки минимума; функция убывает на $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right]$, на $[-1; 0]$ и на $\left[1; \sqrt{3}\right]$, функция возрастает на $\left[-\sqrt{3}; -1\right]$, на $[0; 1]$ и на $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$; е) $x = -2$, $x = 2$ — точки максимума, $x = 0$ — точка минимума; функция убывает на $[-2; 0]$ и на $[2; +\infty)$,функция возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[0; 2]$. **17.21.** а) $b = -2$, $c = -3$; б) $a = -6$, $b = 9$, c — любое действительное число. **17.22.** а) $-5 < p < -1$; $1 < p < 5$; б) $p < -5$; $p > 5$; в) $p < -5$; $p > 5$; г) $-1 < p < 1$. **17.24.** д) 23; е) −0,296. **17.25.** г) $[-9; 2]$; д) $\left[-3; 4\frac{9}{16}\right]$. **17.26.** г) 1; д) 32; е) 1. **17.27.** а) 5,25; 6; 6,75; б) 1,25; 3; 4,25.

§ 18 **18.7.** а) $p < 2$, $p > 6$; б) $p < -1$. **18.8.** в) 1 корень, если $p < 0$, $p < \frac{4}{27}$; 2 корня, если $p = \pm 4$; 3 корня, если $0 < p > \frac{4}{27}$; г) 1 корень, если $p < -4$, $p > 4$; 2 корня, если $p = 0$, $p = \frac{4}{27}$; 3 корня, если $-4 < p < 4$. **18.14.** а) −1; б) 1. **18.15.** г) $(-\infty; -4) \cup (3; 4) \cup (4; 5)$; д) $(-4; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4)$; е) $(-2{,}5; -2) \cup (-2; -1{,}5) \cup (-1{,}5; -1)$. **18.16.** а) 0, $\pm 2\sqrt{2}$; б) нет корней; в) $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 4; г) 1, 8, π, 2π. **18.17.** а) $\frac{2}{3}$; б) $-\frac{2}{11}$; в) $\frac{5}{8}$; г) 4. **18.18.** в) 1; г) $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$. **18.19.** а) $-2 \leqslant x \leqslant 4$; б) $x \leqslant -1$; $x \geqslant 4$.

§ 19 **19.5.** в) 1 и 15; г) −5 и 1. **19.6.** г) −1 и 19; д) −93 и −1; е) 15 и 499. **19.7.** г) −139 и −11; д) 5 и 21; е) −11 и 21. **19.8.** г) −95 и 4; д) −7 и 121; е) −124 и 4. **19.9.** г) 8 и 12; д) 8 и 12; е) −8 и −4. **19.10.** г) 2 и $3\frac{1}{3}$; д) 3,4 и 9; е) −13 и −1. **19.11.** а) $1\frac{2}{9}$ и $1\frac{2}{5}$; б) $1\frac{11}{16}$ и $2\frac{4}{7}$. **19.12.** г) 0 и $4e^2$; д) $3 - 3\ln 3$ и $e^2 - 6$; е) 1 и $4 - \ln 4$. **19.13.** в) 8, $8 + e^{-1}$; г) $-3e^3$, e^{-1}. **19.14.** а) $\sqrt{10}$, 5; б) $\sqrt[4]{5}$, 3; в) 1, $\sqrt{10}$; г) $\sqrt[4]{5}$, 3. **19.15.** г) $\left[1 + \frac{\pi}{2}; 1 + \frac{5\pi}{2}\right]$; д) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; е) $\left[1 + \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$. **19.16.** а) 4π, $16\pi + 4$; б) −1, 1; в) 0, 6π; г) −1, 1. **19.17.** г) 4;

д) 625; е) 2. **19.18.** а) –2; б) –8; в) –2,25; г) –8. **19.19.** г) $y_{\text{наиб}} = -2$; д) $y_{\text{наим}} = -\frac{6\sqrt{3}}{5} + 3$; е) $y_{\text{наиб}} = 2{,}25$. **19.20.** г) $y_{\text{наим}} = 4$; д) $y_{\text{наим}} = -1$; е) $y_{\text{наим}} = 15$; $y_{\text{наиб}} = 19$. **19.21.** а) 4; б) 4. **19.22.** а) $[0; 1)$; б) $(-\infty; -2{,}5]$; в) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; г) $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **19.23.** а) $[-2; 2]$; б) $\left[-\frac{4\sqrt{6}}{9}; +\infty\right)$; в) $[-2; 2]$; г) $\left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$. **19.24.** а) $p = 9$; б) $p = 15$. **19.25.** а) 3; б) 1. **19.27.** в) (1; 6); г) (10; 7). **19.28.** в) $x \leqslant -\frac{1}{3}$; $x \geqslant 0$; г) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$. **19.29.** а) Нет; б) да; в) да; г) да. **19.30.** в) 8; г) 5. **19.31.** 31°.

§ 20 **20.1.** а) 0,5; б) $\frac{1}{3}$. **20.2.** а) $60 = 30 + 30$; б) $16 = 8 + 8$. **20.3.** а) $18 = 17 + 1$; б) $6 = 3 + 3$. **20.4.** а) $p = 3$; б) $p = 5$. **20.5.** а) $a = -\frac{4}{3}$; б) $a = 4 - 2\sqrt{3}$. **20.6.** а) Все стороны равны 9 см; б) все стороны равны 4 см. **20.7.** 8 м × 4 м. **20.8.** Равны 7,5 см. **20.9.** 120 м. **20.10.** а) 108 см^2; б) 60 см^2. **20.11.** а) 34; б) 120. **20.12.** $\frac{18}{\pi + 4}$ м. **20.13.** $8\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см. **20.14.** 30 см. **20.15.** 32 см^2. **20.16.** а) $(-4; -3)$; б) $(1{,}5; 0)$. **20.17.** а) $(4; 2)$; б) $(1; 1)$. **20.18.** а) $y = 6 - 2x$; б) $y = 8 - 4x$. **20.19.** а) $y = 4 - 2x$; б) $4y + 2x - 5 = 0$. **20.20.** а) $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$; б) $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$. **20.21.** 367. **20.22.** $\pi + 4$. **20.23.** $24 - 8\ln 0{,}8$. **20.24.** 2 м × 2 м × 2 м. **20.25.** $3\sqrt{3}$ см. **20.26.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. **20.27.** 1 см. **20.28.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ см. **20.29.** Радиус и высота равны 2. **20.30.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ см. **20.31.** а) $4R$; б) $\frac{4R}{3}$. **20.32.** Сторона основания $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ см, высота $66\frac{2}{3}$ см. **20.33.** Через 1,5 ч. **20.34.** В 3 км от лагеря. **20.35.** в) $(2; -1)$; г) $(3; 1)$. **20.36.** в) $x \geqslant 2\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{3} < x \leqslant 0$. **20.37.** в) 14; г) 7. **20.38.** г) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Тест **1.** 6. **2.** 2. **3.** б), в). **4.** 3. **5.** 1. **6.** б). **7.** б). **8.** 9. **9.** в). **10.** г).

Оглавление

Глава 1. **Элементы теории пределов** 5
§ 1. Предел числовой последовательности 5
§ 2. Арифметические операции над пределами числовых последовательностей 19
§ 3. Предел функции на бесконечности 29
§ 4. Предел функции в точке 40
§ 5. Приращение аргумента. Приращение функции 54
Итак, в главе 1 61
Вопросы 61
Тест 62
Из истории математики 64
Глава 2. **Производная** 67
§ 6. Определение производной 67
§ 7. Алгоритм нахождения производной 80
§ 8. Дифференцируемые функции 88
§ 9. Уравнение касательной к графику функции 96
§ 10. Арифметические операции над производными 108
§ 11. Дифференцирование тригонометрических функций 118
§ 12. Дифференцирование обратной функции 126
§ 13. Дифференцирование сложной функции 132
§ 14. Дифференцирование степенных функций 141
§ 15. Дифференцирование показательных и логарифмических функций 150
Итак, в главе 2 161
Вопросы 161
Тест 162
Глава 3. **Исследование функций с помощью производной** 165
§ 16. Исследование функций на монотонность 165
§ 17. Исследование функций на экстремум 180
§ 18. О построении графиков функций 193
§ 19. Нахождение наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на промежутке 202
§ 20. Задачи на нахождение наименьших и наибольших значений величин 213
Итак, в главе 3 224
Вопросы 224
Тест 225
Из истории математики 228
Ответы 231