ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10 КЛАСС

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

Учебное пособие

В двух частях
Часть 2

2-е издание, стереотипное

МОСКВА
«Просвещение»
2026

УДК 373.167.1:51+51(075.3) 12+
ББК 22.1я721
М34

Серия «Лаборатория А. Г. Мордковича» основана в 2020 году

Авторы:

заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования, доктор педагогических наук, профессор Московского городского педагогического университета *А. Г. Мордкович*;

почётный работник высшего профессионального образования РФ, доктор физико-математических наук, профессор отдела математического образования НИУ ВШЭ *П. В. Семенов*;

отличник народного просвещения, учитель математики высшей категории *Л. А. Александрова*;

кандидат педагогических наук, доцент *Е. Л. Мардахаева*.

Математика. Алгебра и начала математического анализа :
М34 10-й класс : базовый и углублённый уровни : учебное пособие : в 2 частях / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева. — 2-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2026. — (Лаборатория А. Г. Мордковича).

ISBN 978-5-09-129505-4.
Ч. 2. — 302, [2] с. : ил.
ISBN 978-5-09-129507-8.

Учебное пособие входит в завершённую предметную линию по алгебре и началам математического анализа базового и углублённого уровней для 10–11 классов. Учебное пособие разработано в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования.

Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением большого числа примеров, практические задания представлены на трёх уровнях сложности. В конце каждой главы приведены основные факты, а также вопросы и тест для самопроверки, дополнительные задачи и исторические сведения.

Учебное пособие содержит избранные темы курса «Вероятность и статистика».

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-129507-8 (ч. 2)
ISBN 978-5-09-129505-4

© АО «Издательство «Просвещение», 2025
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2025
Все права защищены

Условные обозначения

24.13. Задачи базового уровня сложности

24.14. Задачи повышенного уровня сложности

24.15. Задачи высокого уровня сложности

ИКТ Материал может быть рассмотрен с помощью ИКТ-средств

Упражнения с общим заданием

10.11

10.12

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения примера

* Материал, предназначенный для изучения на углублённом уровне.



Южный федеральный университет.
Ростов-на-Дону

§ 32. Натуральные и целые числа
§ 33. Рациональные, иррациональные числа. Множество действительных чисел
§ 34. Комплексные числа
§ 35. Комплексная плоскость
§ 36. Применения комплексных чисел

Глава 4*

Числа

§ 32. Натуральные и целые числа

Вам известно, что числа, используемые для счёта предметов, т. е. числа 1, 2, 3, ..., называют натуральными числами, а множество всех натуральных чисел обозначают буквой N. Если к множеству N добавить ещё один элемент — число 0, а также числа –1, –2, –3, ..., противоположные натуральным, то получим множество Z всех целых чисел.

Напомним, что для целого числа a и натурального числа b слова «a кратно b», «a нацело делится на b», «a делится на b без остатка», «b — делитель a», «b делит a» означают одно и то же: наличие целого числа q, для которого $a = qb$; обозначение — $a \vdots b$.

Натуральные числа бывают простыми и составными. Если натуральное число имеет только два делителя — само число и 1, то его называют **простым числом**; если оно имеет более двух делителей, то его называют **составным числом**. Число 1 не относят ни к простым, ни к составным. Вот первые 10 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Они составляют треть общего количества натуральных чисел от 1 до 30.

Теорема 1. Любое натуральное число $n > 1$ имеет хотя бы один простой делитель.

Доказательство. Если n — простое число, то оно имеет простой делитель — само число n. Если n — составное число, то n равно произведению двух натуральных чисел, каждое из которых меньше n. Если хотя бы одно из этих чисел — простое, то теорема уже доказана.

В противном случае произвольно выберем число $n_1 < n$, которое является составным делителем числа n. Повторим то же рассуждение применительно к n_1. Тогда либо найдём простой делитель числа n_1, а значит, и числа n, либо найдём составное число $n_2 < n_1 < n$, которое является делителем числа n_1, а значит, и числа n, и т. д.

Процесс построения убывающей последовательности $\ldots n_3 < n_2 < n_1 < n$ натуральных чисел не может быть бесконечным, в нём не более n шагов. Наименьшее число p в последовательности $p = n_k < \ldots < n_3 < n_2 < n_1 < n$ — простое. По построению p есть делитель предыдущего числа n_{k-1}, которое есть делитель числа n_{k-2}, и т. д. Значит, в итоге p — простой делитель числа n.

Следствие. Любое натуральное число $n > 1$ либо является простым, либо его можно представить в виде произведения простых множителей.

Обычно вместо фразы «представить в виде произведения простых множителей» говорят «разложить на простые множители».

Пример 1 Разложить на простые множители число 7920.

Решение. Применим запись столбиком, при которой делитель записывают справа от вертикальной черты, а частное — слева под делимым.

7920	2
3960	2
1980	2
990	2
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

Итак, $7920 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ — представление данного числа в виде произведения простых множителей. Практически всегда простые множители в таком представлении располагают слева направо в порядке возрастания и, разумеется, записывают не $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ и $3 \cdot 3$, а 2^4 и 3^2.

Ответ: $7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

В следствии теоремы 1 утверждается, что существует хотя бы одно разложение числа $n > 1$ на простые множители. В следующей теореме утверждается, что оно единственно.

Теорема 2. Любые два разложения натурального числа $n > 1$ на простые множители отличаются друг от друга лишь порядком множителей.

Если в теореме 2 простые множители разложения упорядочить по возрастанию, то получим $n = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, $a_i \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, — *каноническое разложение* числа $n > 1$ на простые множители.

Следствие теоремы 1 вместе с теоремой 2 составляют так называемую *основную теорему арифметики.*

Основная теорема арифметики. Существует единственное каноническое разложение натурального числа $n > 1$ на простые множители.

Пример 2 Доказать, что:

а) в каноническом разложении квадрата натурального числа показатель степени каждого простого множителя является чётным;

б) уравнение $m^2 = 10n^2$ не имеет натуральных решений $(m; n)$;

в) уравнение $m^2 = a \cdot n^2$ имеет натуральные решения только в том случае, когда a является квадратом некоторого натурального числа b: $a = b^2$.

Решение. а) Пусть $n = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, $a_i \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, — каноническое разложение натурального числа n на простые множители. Тогда $n^2 = (2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k})^2 = 2^{2a_1} \cdot 3^{2a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2a_k}$ — каноническое разложение числа n^2. Как видите, все показатели — чётные числа.

б) Применим метод доказательства от противного. Предположим, что имеет место равенство $m^2 = 10n^2$, где m, n — натуральные числа. И в левой, и в правой частях равенства стоят чётные числа. Посмотрим на показатель степени, с которым в канонические разложения этих частей входит простое число 2. Для правой части этот показатель — нечётное число, а для левой части он отличен от нуля и является чётным. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно, т. е. уравнение $m^2 = 10n^2$ не имеет натуральных решений $(m; n)$.

в) Аналогично пункту «б»: если число a не является квадратом натурального числа, то в каноническом разложении числа a один из

простых множителей, скажем p, имеет нечётный показатель степени. Тогда в равенстве $m^2 = a \cdot n^2$ показатель степени у множителя p в левой части — чётное число, а в правой — нечётное.

В пункте «б» мы доказали, что уравнение $m^2 = 10n^2$ не имеет натуральных корней; иными словами, число $\sqrt{10}$ нельзя представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, т. е. $\sqrt{10}$ — иррациональное число. Соответственно, утверждение из пункта «в» означает, что $\sqrt{a}$ — либо натуральное число, либо иррациональное число.

Попытки описания того, как именно множество P простых чисел расположено во множестве всех натуральных чисел, — одна из магистральных линий в теории чисел и математике на протяжении всей истории их развития. Здесь имеются и удивительные открытия, и вопросы, на которые до сих пор нет ответов.

Вот примеры нерешённых проблем.

Гипотеза о парах простых чисел-близнецов. Верно ли, что существует бесконечно много пар простых чисел, отличающихся друг от друга на 2?

Гипотеза Гольдбаха. Верно ли, что всякое чётное натуральное число, начиная с 4, представимо в виде суммы двух простых чисел?

Евклиду принадлежит, пожалуй, первый общий результат о простых числах. Его рассуждение — яркий пример применения метода доказательства от противного.

Теорема 3. Для каждого натурального числа n найдётся простое число p, которое больше n.

Доказательство. Предположим противное: есть натуральное число n, такое, что *все* простые числа не больше n. Рассмотрим число $A = n! + 1$ (напомним, что $n!$ — «эн факториал» — это произведение всех натуральных чисел от 1 до n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n$). По теореме 1 оно делится на некоторое простое число $p \in P$. По предположению $p \leqslant n$. Так как $A = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p - 1) \cdot p \cdot (p + 1) \cdot \ldots \cdot n + 1$, то получаем, что число A при делении на p даёт остаток 1. Значит, число A одновременно и делится, и не делится на p. Противоречие.

Теорема 3 означает, что *множество P простых чисел бесконечно*.

Пример 3 Доказать, что:

а) существует бесконечно много простых чисел вида $4m + 3$, $m \in \boldsymbol{N}$;

б) для любого натурального числа n найдутся два простых числа, между которыми нет простых чисел, а расстояние между которыми не меньше n.

Решение. а) Начнём с того, что каждое простое число при делении на 4 даёт в остатке или 1, или 3. Далее, от противного, предположим, что $q_1 < q_2 < \ldots < q_k$ — *все* простые числа, дающие при делении на 4 остаток 3. Тогда число $B = 4q_1q_2\ldots q_k + 3$ не делится ни на одно из чисел $q_1, \ldots, q_k$. Значит, в каноническом разложении числа B все простые множители дают при делении на 4 остаток 1. Но тогда и число B даёт остаток 1, а по определению этот остаток равен 3. Противоречие.

б) Рассмотрим число $a = (n + 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n + 1)$. Из всех простых чисел $p \leqslant a + 1$ возьмём наибольшее, обозначим его p_1. Из всех простых чисел $p \geqslant a + n + 1$ возьмём наименьшее (множество таких простых чисел не пусто по теореме 3), обозначим его p_2. Тогда $p_2 - p_1 \geqslant n$ и на интервале $(p_1; p_2)$ все числа — составные. Смотрите: a кратно всем числам 2, 3, ..., n, $n + 1$ и поэтому число $a + 2$ чётно, число $a + 3$ кратно 3, ..., число $a + n$ кратно n, число $a + n + 1$ кратно $n + 1$, т. е. все числа $a + 2$, $a + 3$, ..., $a + n + 1$ — составные. Кроме того, по построению нет простых чисел p, для которых $p_1 < p \leqslant a + 1$ или $a + n + 1 < p < p_2$. ■

Обратите внимание: утверждение, доказанное в пункте «б», означает, что *соседние простые числа могут быть сколь угодно удалены друг от друга*.

В тех случаях, когда не существует целого числа q, такого, что $a = qb$, деление тоже возможно, но уже *с остатком*. Такое деление имеет простой наглядный смысл. Пусть $b < a$. Отложим на координатной прямой отрезок $[0; a]$ и с шагом b будем двигаться от 0 в положительном направлении, т. е. рассмотрим на координатной прямой точки $0, b, 2b, 3b, \ldots$. Часть из них будут лежать левее точки a, но после достаточно большого количества шагов эти точки окажутся правее a. Так вот (неполное) частное q — это номер того шага, при котором:

$$qb < a < (q + 1)b,$$

$$a = qb + (a - qb) = qb + r,$$

$0 < r < b$ (рис. 139).



Рис. 139

Число r в таком случае называют *остатком от деления a на b*. Кстати, в эту «шаговую» схему укладывается и случай $a \vdots b$, при котором $a = qb$, $r = a - qb = 0$. Подходит она и для случая $a < b$, при котором $q = 0$, $a = 0 \cdot q + r$, $r = a < b$.

Теорема 4. Для любого натурального числа b каждое целое число a единственным образом может быть записано в виде $a = qb + r$, где q, r — целые числа и $0 \leqslant r < b$.

Пример 4 Найти остаток от деления a на b, если:

а) $a = 17$, $b = 7$; б) $a = -17$, $b = 7$; в) $a = 7^{79}$, $b = 10$; г) $a = 1\,234\,567$, $b = 3$.

Решение. а) $17 = 14 + 3 = 2 \cdot 7 + 3$, $0 \leqslant 3 < 7$. Итак, получили остаток 3.

б) Внимание: ответ -3 неверен! Смотрите:

$$-17 = -21 + 4 = (-3) \cdot 7 + 4,$$
$$0 \leqslant 4 < 7.$$

Итак, получили остаток 4.

в) Остаток при делении на 10 — это последняя цифра натурального числа. Найдём последние цифры у нескольких подряд степеней числа 7:

$7^1 = \underline{7}$, $7^2 = 4\underline{9}$, $7^3 = \ldots\underline{3}$, $7^4 = \ldots\underline{1}$,
$7^5 = \ldots\underline{7}$, $7^6 = \ldots\underline{9}$, $7^7 = \ldots\underline{3}$, $7^8 = \ldots\underline{1}$.

Мы видим, что последние цифры повторяются с периодом 4. Так как $79 = 19 \cdot 4 + 3$, то последняя цифра у 7^{79} такая же, что и у 7^3. Итак, получили остаток 3.

г) Натуральное число и сумма его цифр в десятичной записи дают одинаковые остатки при делении на 3. Значит, остаток от деления 1 234 567 на 3 такой же, что и остаток от деления $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ на 3. Итак, получили остаток 1.

Ответ: а) 3; б) 4; в) 3; г) 1.

Пример 5 Найти все двузначные числа n, удовлетворяющие условию: числа n^2 и $(n + 12)^2$ дают при делении на 100 один и тот же остаток.

Решение. Запишем для числа n^2 формулу деления с остатком на 100: $n^2 = 100q_1 + r$. Запишем для числа $(n + 12)^2$ формулу деления с остатком на 100: $(n + 12)^2 = 100q_2 + r$. Положим $q_2 - q_1 = q$. Тогда

$$(n + 12)^2 - n^2 = 100(q_2 - q_1);$$
$$(n + 12 - n)(n + 12 + n) = 100q;$$
$$24(n + 6) = 100q;$$
$$6(n + 6) = 25q.$$

Из последнего равенства следует, что $(n+6)\vdots 25$. Значит, для искомого двузначного числа n есть четыре возможности: $n = 19, 44, 69, 94$.

Ответ: 19, 44, 69, 94.

Из курса математики 5—6 классов вам известны некоторые признаки делимости натуральных чисел. Все они имеют такой вид: «для того чтобы число n делилось на число b, необходимо и достаточно, чтобы...» и далее формулируется конкретное условие. По этой причине математически корректнее было бы говорить: не *признак* делимости, а *критерий* делимости. Соберём некоторые из них в таблицу.

Делимость	**Необходимое и достаточное условие делимости числа n**
на 2	последняя цифра числа n делится на 2
на 5	последняя цифра числа n делится на 5 (равна 0 или 5)
на 10	число n оканчивается на 0
на 25	число n оканчивается на 25, 50, 75 или на 00
на 3	сумма цифр числа n делится на 3
на 9	сумма цифр числа n делится на 9
на 11	знакочередующаяся сумма цифр числа n делится на 11

Поясним две последние строчки в таблице. Для конкретности рассмотрим шестизначное число

$$n = \overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f.$$

Сумма его цифр — это $s = a + b + c + d + e + f$. Надо доказать, что $n\vdots 9 \Leftrightarrow s\vdots 9$. Эта краткая запись расшифровывается так: из $n\vdots 9$ следует $s\vdots 9$, а из $s\vdots 9$ следует $n\vdots 9$.

Составим разность $n - s$:

$$n - s = 99\,999a + 9999b + 999c + 99d + 9e + 0 \cdot f,$$

$$(n - s)\vdots 9.$$

Если $s \vdots 9$, то $n = s + (n - s)$ и $n \vdots 9$ как сумма чисел, кратных 9. Если $n \vdots 9$, то $s = n - (n - s)$ и $s \vdots 9$ как разность чисел, кратных 9.

Отметим, что доказано чуть больше, чем нужно было. А именно: *число n и сумма s его цифр дают одинаковый остаток* при делении на 9. Кстати, аналогично обстоит дело и с делимостью на 3.

Теперь составим знакочередующуюся сумму цифр числа $n = \overline{abcdef}$, для этого цифру f единиц берём с плюсом, а далее знаки цифр чередуем, двигаясь справа налево:

$$s = f - e + d - c + b - a.$$

Надо доказать, что $n \vdots 11 \Leftrightarrow s \vdots 11$. Составим разность $n - s$:

$$n - s = 100\,001a + 9999b + 1001c + 99d + 11e + 0 \cdot f.$$

У слагаемых правой части все числовые коэффициенты кратны 11. Смотрите:

$$100\,001 = 99\,990 + 11,\ 9999 \vdots 11,\ 1001 = 990 + 11,\ 99 \vdots 11,\ 11 \vdots 11.$$

Поэтому разность $n - s$ всегда кратна 11.

Если $s \vdots 11$, то $n = s + (n - s)$ кратно 11 как сумма чисел, кратных 11. Если $n \vdots 11$, то $s = n - (n - s)$ кратно 11 как разность чисел, кратных 11.

Пример 6 Доказать, что:

а) числовой ребус АААББ = ВГ · ДЕ не имеет решений (А, Б, В, Г, Д, Е — попарно различные цифры);

б) степень двойки не может оканчиваться на четыре одинаковые цифры;

в) при перестановке цифр десятичной записи степени двойки не получится степень тройки;

г) число, десятичная запись которого состоит из 10 единиц, 10 двоек и 10 троек, не может быть квадратом целого числа.

Решение. а) Левая часть ребуса кратна 11 (по признаку делимости на 11), а правая часть нет, так как ни ВГ, ни ДЕ не кратны 11, ведь это двузначные числа, образованные различными цифрами.

б) Предположим, что существует число $n \in N$, для которого $2^n = 10\,000 \cdot a + \overline{bbbb}$. Запись $\overline{bbbb}$ означает последние четыре цифры числа 2^n. А теперь смотрите: $10\,000 \vdots 16$, а числа 1111, 2222, ..., 9999 не кратны 16. Значит, $10\,000 \cdot a + \overline{bbbb}$ не может быть степенью двойки.

в) Степень двойки не кратна 3, и поэтому сумма её цифр не кратна 3. При перестановке цифр их сумма не меняется. Значит, при перестановке не может получиться число, кратное 3, и, в частности, не может получиться степень тройки.

г) Сумма цифр такого числа равна $10 \cdot (1 + 2 + 3) = 60$. Значит, это число кратно 3. Если бы оно было квадратом целого числа, то по основной теореме арифметики оно было бы кратно 9, а это не так, ведь 60 не делится на 9.

Пример 7 На листах № 1 и № 2 надо написать 30 натуральных чисел, в сумме дающих 1176. Все числа на листе № 1 должны быть различны и должны быть кратны 3. Все числа на листе № 2 должны быть различны и должны быть кратны 7. Какое наибольшее количество чисел может быть записано на листе № 2?

Решение. Пусть n — количество чисел на листе № 2, обозначим их сумму S_2; тогда на листе № 1 будет $30 - n$ чисел, обозначим их сумму S_1.

Из условия следует, что сумма S_2 больше или равна сумме первых n различных натуральных чисел, кратных 7, т. е. $S_2 \geqslant 7 + 7 \cdot 2 + \ldots + 7 \cdot n = 7 \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{7n^2 + 7n}{2}$. Аналогично

$$S_1 \geqslant 3(1 + 2 + 3 + \ldots + (30 - n)) = 3 \cdot \frac{(31 - n)(30 - n)}{2} = \frac{3n^2 - 183n + 2790}{2}.$$

Так как сумма $S_1 + S_2$ всех чисел по условию равна 1176, то

$$1176 \geqslant \frac{10n^2 - 176n + 2790}{2},$$

$$1176 \geqslant 5n^2 - 88n + 1395,$$

$$5n^2 - 88n + 219 \leqslant 0,$$

$$3 = \frac{44 - 29}{5} \leqslant n \leqslant \frac{44 + 29}{5} = 14{,}6.$$

Так как n — целое, то $n \leqslant 14$. Мы получили оценку сверху для n. Остаётся привести пример того, что n может равняться 14. Начнём со случая, когда на каждом из листов выписаны наименьшие суммы. Тогда

$$S_2 = 7(1 + 2 + \ldots + 14) = 7 \cdot 7 \cdot 15 = 735,$$

$$S_1 = 3(1 + 2 + \ldots + 16) = 3 \cdot 8 \cdot 17 = 408.$$

Общая сумма равна 1143, и, к сожалению, она на 33 меньше, чем нужные 1176. Значит, нужно поменять числа так, чтобы одна из сумм увеличилась на 33. Сделаем так: на листе № 1, где числа кратны 3, оставим $3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, ..., $3 \cdot 15$, а вместо $3 \cdot 16$ напишем $3 \cdot 27 = 3 \cdot 16 + 33$. Тогда общая сумма увеличится на 33, и общая сумма станет равной $1143 + 33 = 1176$.

Ответ: 14.

Иногда в задачах на делимость чисел оказывается полезным метод математической индукции. Вы знакомы с этим методом из курса алгебры 9 класса.

Суть *метода математической индукции* состоит в следующем.

Утверждение, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого n, если выполнены два условия:

1) утверждение верно для $n = 1$;
2) из справедливости утверждения для $n = k$, где k — любое натуральное число, вытекает справедливость утверждения и для следующего натурального числа $n = k + 1$.

Пример 8 Доказать, что для любого $n \in N$ справедливо соотношение

$$(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) \vdots 11. \qquad (1)$$

Решение. 1) Проверим справедливость утверждения (1) при $n = 1$.

При $n = 1$ выражение $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ принимает следующий вид: $36 + 27 + 3$. Вычислив, получим 66 — число, кратное числу 11. Значит, проверяемое утверждение верно при $n = 1$.

2) Предположим, что соотношение (1) верно при $n = k$, т. е. предположим, что $(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k) \vdots 11$. Докажем, что тогда соотношение (1) справедливо и для $n = k + 1$, т. е. докажем, что $(6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1}) \vdots 11$. Имеем:

$$6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1} = 36 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^k =$$
$$= 33 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^k =$$
$$= 33 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot (6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k).$$

Таким образом, $6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1} = 33 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot (6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k)$. В правой части этого равенства записана сумма двух числовых выражений. Первое из них $33 \cdot 6^{2k}$ кратно числу 11, а для второго выражения, согласно нашему предположению, выполняется соотношение

$3\cdot(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k})\vdots 11$. Значит, и сумма указанных двух числовых выражений делится на 11.

Итак, оба условия метода математической индукции выполнены. Вывод: проверяемое утверждение верно для любого натурального числа n.

Пример 9 Доказать, что для любого числа $n \in N$ выполняется равенство

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}. \qquad (2)$$

Решение. 1) При $n=1$ утверждение (2) принимает следующий вид: $1^2=\frac{1\cdot(4\cdot 1^2-1)}{3}$, т. е. $1=1$ — это верно. Посмотрим ради интереса, как выглядит утверждение (2) при $n=2$: $1^2+3^2=\frac{2\cdot(4\cdot 2^2-1)}{3}$, т. е. $10=10$ — верно.

2) Предположим, что утверждение (2) верно при $n=k$, т. е. предположим, что

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2k-1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}. \qquad (3)$$

Докажем, что тогда утверждение (3) справедливо и для $n=k+1$, т. е. докажем, что

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{(k+1)(4(k+1)^2-1)}{3}.$$

Займёмся алгебраическими преобразованиями, воспользовавшись равенством (3):

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}+(2k+1)^2=$$
$$=\frac{k(2k+1)(2k-1)+3(2k+1)^2}{3}=\frac{(2k+1)(2k^2-k+6k+3)}{3}=$$
$$=\frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}=\frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}=$$
$$=\frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3}=\frac{(k+1)(4(k+1)^2-1)}{3}.$$

Итак, оба условия метода математической индукции выполнены. Вывод: проверяемое утверждение верно для любого натурального числа n.

Упражнения

32.1. Найдите количество двузначных чисел, кратных числу:
а) 2; б) 3; в) 5; г) 4; д) 6; е) 7.

32.2. Найдите количество трёхзначных чисел, кратных числу:
а) 10; в) 25; д) 99;
б) 11; г) 9; е) 125.

32.3. Докажите, что произведение 113 идущих подряд натуральных чисел делится на:
а) 113; в) 339; д) 1243;
б) 565; г) 791; е) 11 413.

32.4. Докажите, что:
а) если $a \vdots n$ и $b \vdots n$, то $(a + b) \vdots n$;
б) если $a \vdots n$, то $(ab) \vdots n$ при всех $b \in \boldsymbol{N}$;
в) если $a \vdots n$ и $b \not\vdots n$, то $(a - b) \not\vdots n$;
г) если $a \vdots n$ и $b \vdots n$, то $(a - b) \vdots n$;
д) если $a \vdots n$ и $b \vdots m$, то $(ab) \vdots (mn)$;
е) если $a \vdots n$ и $b \not\vdots n$, то $(a + b) \not\vdots n$.

32.5. Верно ли данное утверждение?
а) Если a и b — чётные числа, то их сумма тоже чётное число.
б) Если a и b — нечётные числа, то их сумма тоже нечётное число.
в) Если a и b — нечётные числа, то их произведение тоже нечётное число.
г) Если a — чётное число, b — нечётное число, то их сумма — нечётное число.
д) Если a — чётное число, b — нечётное число, то их произведение — нечётное число.
е) Если a — чётное число, b — нечётное число, то произведение их суммы и разности — нечётное число.

32.6. Докажите, что значение выражения:
а) $10^8 + 5^7$ делится на 23; г) $8^7 - 2^{18}$ делится на 28;
б) $114^2 - 107^2$ делится на 91; д) $126^2 - 109^2$ делится на 85;
в) $138^3 + 37^3$ делится на 25; е) $132^3 - 100^3$ делится на 16.

32.7. Докажите, что:
а) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 189^3 + 190^3) \vdots 191$;
б) $(5^3 + 6^3 + 7^3 + \ldots + 211^3 + 212^3) \vdots 217$.

32.8. При каких натуральных значениях m значение выражения $A(m)$ является натуральным числом, если:

а) $A(m) = \dfrac{3m+14}{m}$;

б) $A(m) = \dfrac{4m-13}{m+2}$;

в) $A(m) = \dfrac{m^2-3m+4}{m}$;

г) $A(m) = \dfrac{2m+15}{m}$;

д) $A(m) = \dfrac{5m+52}{m+5}$;

е) $A(m) = \dfrac{m^3+5m^2+100}{m^2}$?

32.9. Приведите пример четырёхзначного натурального числа, про которое известно, что оно:
а) кратно 44 и его любые две соседние цифры отличаются на 2;
б) кратно 36 и его любые две соседние цифры отличаются на 1.

32.10. Приведите пример трёхзначного числа, про которое известно, что оно:
а) больше числа 300 и при делении на 3, на 4 и на 5 даёт в остатке 2;
б) больше числа 400 и при делении на 4, на 5 и на 6 даёт в остатке 3.

32.11. Верно ли, что:
а) произведение натуральных чисел от 1 до 17 делится на сумму этих же чисел;
б) сумма квадратов двух натуральных чисел кратна 5 тогда и только тогда, когда каждое число кратно 5;
в) произведение натуральных чисел от 1 до 18 делится на сумму этих же чисел;
г) сумма квадратов двух натуральных чисел кратна 3 тогда и только тогда, когда каждое число кратно 3?

32.12. Установите, какой цифрой оканчивается степень числа:
а) 9^{1956}; б) 4^{2021}; в) 7^{95}; г) 3^{88}; д) 2022^{2021}; е) 5678^{1234}.

32.13. Приведите примеры таких натуральных чисел p и m, при которых значение выражения является натуральным числом, кратным 10:
а) $1562^p - 968^m$; б) $389^m + 437^p$; в) $987^m - 543^p$; г) $236^p + 724^m$.

32.14. Докажите, что произведение:
а) трёх последовательных натуральных чисел кратно 6;
б) четырёх последовательных натуральных чисел кратно 24;

в) пяти последовательных натуральных чисел кратно 120;
г) семи последовательных натуральных чисел кратно 5040.

32.15. Известно, что корни уравнения $x^2 - px + q = 0$ — натуральные числа, а p и q — простые числа. Найдите значения p и q.

32.16. Найдите простые числа m и n, для которых верно равенство:
а) $19m + 5n = 130$; в) $5m + 7n = 86$;
б) $7m + 3n = 92$; г) $13m + 3n = 202$.

32.17. Запишите формулу натурального числа a, при делении которого на натуральное число b неполное частное равно n, а остаток — r, если:
а) $b = 7$, $r = 3$; в) $b = 5$, $r = 0$; д) $b = 10$, $r \vdots 3$;
б) $b = 13$, $r = 1$; г) $b = 9$, $r = 0$; е) $b = 17$, $r \vdots 5$.

32.18. При делении числа a на 12 получается остаток 7. Какой остаток получится при делении числа a на число:
а) 6; б) 4; в) 3; г) 2?

32.19. Докажите утверждение:
а) Остаток от деления натурального числа на 5 равен остатку от деления последней цифры этого числа на 5.
б) Остаток от деления натурального числа на 4 равен остатку от деления числа, образованного его двумя последними цифрами, на 4.
в) Остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3.

32.20. Найдите остаток от деления числа:
а) 137 598 749 на 2; г) 278 493 768 на 5;
б) 1 428 490 556 на 3; д) 222 777 455 на 9;
в) 396 487 901 на 25; е) 7 894 672 019 на 4.

32.21. а) Известно, что число, равное $5^n + 4n - 1$, при некотором натуральном значении n делится на 4. Докажите, что число, равное $5^n + 4n + 3$, также делится на 4.
б) Известно, что число, равное $2^{3n} + 14n - 1$, при некотором натуральном значении n делится на 7. Докажите, что число, равное $2^{3n+3} + 14n + 13$, также делится на 7.

32.22. Докажите, что при любых натуральных значениях n:
а) $(2n^3 - 3n^2 + n) \vdots 6$; г) $(n^3 + 9n^2 + 26n + 24) \vdots 6$;
б) $(3^{2n} + 3) \vdots 4$; д) $(7^{2n} - 1) \vdots 12$;
в) $(7^n + 3n - 1) \vdots 9$; е) $(10^n + 18n - 28) \vdots 27$.

Докажите, что при любом натуральном значении n верно равенство.

32.23. а) $1-4+9-16+\ldots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$;

в) $2^2+5^2+8^2+\ldots+(3n-1)^2=\dfrac{n(6n^2+3n-1)}{2}$;

г) $1-2^3+3^3-4^3+\ldots+(2n-1)^3-(2n)^3=-n^2(4n+3)$;

д) $1-3+9-27+\ldots+3^{n-1}\cdot(-1)^{n+1}=\dfrac{1-(-3)^n}{4}$;

е) $2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

32.24. а) $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\ldots+n(2n+1)=\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$;

в) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^3}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$;

г) $2\cdot3+3\cdot5+4\cdot7+\ldots+(n+1)(2n+1)=\dfrac{n(4n^2+15n+17)}{6}$;

д) $\dfrac{1}{4\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot7}+\ldots+\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{n}{4(n+4)}$;

е) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{3}{3^3}+\ldots+\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{2n+3}{3^n}\right)$.

32.25. Докажите неравенство при $n\in N$:

а) $5^n>2n+1$;
б) $3^n>n+1$;
в) $2^n>5n$, $n>4$;
г) $2^n>2n+1$, $n>2$;
д) $3^n>n^3$, $n>3$;
е) $5^n>5n^3+2$, $n\geqslant4$.

32.26. а) Сколько двузначных чисел n обладают следующим свойством: n^2 и $(n+18)^2$ дают один и тот же остаток при делении на 90?

б) Найдите все двузначные числа n, которые обладают следующим свойством: n^2 и $(n+19)^2$ дают один и тот же остаток при делении на 25.

32.27. Некоторое трёхзначное натуральное число, не кратное 100, разделили на сумму его цифр. Могло ли в частном получиться число:

а) 64; г) 44;

б) 52; д) 37;

в) 82; е) 75?

В случае положительного ответа приведите пример такого числа.

Упражнения для повторения

32.28. а) Чтобы пройти в следующий круг соревнований, участник должен набрать хотя бы 3 очка в двух играх. В случае выигрыша участник получает 2 очка, в случае ничьей 1 очко, проигрыша — 0 очков. Найдите вероятность того, что участнику удастся выйти в следующий круг соревнований, считая, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

б) Вероятность того, что на зачёте по алгебре Мария верно решит больше 5 задач, равна 0,75. Вероятность того, что Мария верно решит больше 6 задач, равна 0,65. Найдите вероятность того, что Мария верно решит ровно 6 задач.

32.29. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x + \sqrt{3}\cos^2 x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\sin 2x$;

б) $\sqrt{3}\sin^2 x + 5\cos^2 x = \dfrac{5\sqrt{3}+1}{2}\sin 2x$.

32.30. а) Через первую трубу бак наполняется за 8 мин, через вторую — за 6 мин, а через третью — за 24 мин. За сколько минут наполнится бак, если будут открыты все три трубы одновременно?

б) Первый насос опорожняет бак за 21 мин, второй — за 28 мин, а третий — за 12 мин. За сколько минут опорожнят бак три насоса, работая одновременно?

32.31. Постройте график функции $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$. Найдите:

а) область определения функции;

б) основной период функции;

в) нули функции и промежутки знакопостоянства.

§ 33. Рациональные, иррациональные числа. Множество действительных чисел

Рациональные числа — это числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число. Множество рациональных чисел принято обозначать буквой $\boldsymbol{Q}$. Любое целое число m является рациональным, поскольку его можно представить в виде $\frac{m}{1}$. Итак, можно сказать, что рациональные числа — это все целые числа, а также положительные и отрицательные обыкновенные дроби. Любая десятичная дробь как частный случай обыкновенной дроби тоже является рациональным числом. В курсе алгебры 8 класса мы говорили о том, что любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Пример 1 Представить в виде бесконечной десятичной дроби число:

а) 27; б) $\frac{71}{25}$; в) $\frac{13}{99}$; г) $\frac{53}{44}$.

Решение. а) $27 = 27{,}00000\ldots = 27{,}(0)$. Разумеется, на практике представлять целое число в виде бесконечной дроби никто не будет. Тем не менее факт остаётся фактом: к целым числам указанное общее утверждение тоже относится.

б) $\frac{71}{25} = 2\frac{21}{25} = 2\frac{84}{100} = 2{,}84 = 2{,}840000\ldots = 2{,}84(0)$ — бесконечная периодическая десятичная дробь.

в) Выполним деление «уголком» числа 13 на число 99.

$$\begin{array}{l|l} 13{,}0000\ldots & 99 \\ \underline{99} & \hline 0{,}1313\ldots \\ 310 & \\ \underline{297} & \\ 130 & \\ \underline{99} & \\ \ldots & \end{array}$$

Остатки повторяются, процесс становится периодическим. Итак, $\frac{13}{99} = 0{,}131313\ldots = 0{,}(13)$ — бесконечная периодическая десятичная дробь, в периоде — число 13.

г) Выполним деление «уголком» числа 53 на число 44.

$$\begin{array}{l|l} 53{,}0000\ldots & 44 \\ \underline{44} & \hline 1{,}204545\ldots \\ \quad 90 & \\ \quad \underline{88} & \\ \quad\ 200 & \\ \quad\ \underline{176} & \\ \quad\ \ 240 & \\ \quad\ \underline{220} & \\ \quad\ \ 200 & \\ \quad\ \underline{176} & \\ \quad\ \ 240 & \\ \quad\ \ \ldots & \end{array}$$

Остатки начали повторяться (20, 24, 20, 24...), процесс становится периодическим. Итак, $\frac{53}{44} = 1{,}20454545\ldots = 1{,}20(45)$ — бесконечная периодическая десятичная дробь, в периоде — число 45.

Ответ: а) 27,(0); б) 2,84(0); в) 0,(13); г) 1,20(45).

Верно и обратное: любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби. Для этого используется формула суммы бесконечной геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$, с которой мы познакомили вас в курсе алгебры 9 класса. Мы докажем эту формулу в 11 классе, а в следующем примере покажем, как она работает.

Пример 2 Представить бесконечную десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(13); б) 1,20(45).

Решение. а) $0{,}(13) = 0{,}131313\ldots = \frac{13}{100} + \frac{13}{10\,000} + \frac{13}{1\,000\,000} + \ldots =$

$$= \frac{13}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{1\,000\,000} + \ldots\right).$$

В скобках — сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{100}$. Значит, $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$, и мы получаем: $0{,}(13) = \frac{13}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{13}{99}$.

Однако на практике предпочитают пользоваться более простым приёмом.

Положим $0,(13) = 0,131313\ldots = x$. В периоде две цифры, поэтому составим число $100x$, чтобы запятая переместилась вправо на две цифры: $100x = 13,131313\ldots$. Далее имеем:

$$\begin{array}{r} 100x = 13,131313\ldots \\ -\quad x = 0,131313\ldots \\ \hline 99x = 13 \end{array}$$

Итак, $99x = 13$, значит, $x = \frac{13}{99}$, т. е. $0,(13) = \frac{13}{99}$.

б) Положим $1,20(45) = 1,20454545\ldots = x$. В дробной части числа $1,20(45)$ до периода стоят две цифры, поэтому составим число $100x$, чтобы запятая переместилась вправо на две цифры и оказалась непосредственно перед периодом: $100x = 120,454545\ldots$. А теперь ещё раз умножим обе части последнего равенства на 100, чтобы, как в предыдущем примере, запятая переместилась ровно на один период вправо: $10\,000x = 12\,045,454545\ldots$. Далее имеем:

$$\begin{array}{r} 10\,000x = 12\,045,454545\ldots \\ -\quad 100x = 120,454545\ldots \\ \hline 9900x = 11\,925 \end{array}$$

Итак, $9900x = 11\,925$, значит, $x = \frac{11\,925}{9900} = \frac{477}{396} = \frac{53}{44}$, и мы получили, что $1,20(45) = \frac{53}{44}$.

Ответ: а) $\frac{13}{99}$; б) $\frac{53}{44}$.

Из курса алгебры 8 класса вам известно, что не все числа, с которыми приходится встречаться в математике, являются рациональными. Известно вам и то, что в математике не принято говорить «нерациональное число», обычно используют термин *иррациональное число*. Термины «рациональное число», «иррациональное число» происходят от латинского слова *ratio* — разум (буквальный перевод: рациональное число — разумное число, иррациональное число — неразумное число). Если рациональное число — это бесконечная десятичная *периодическая* дробь, то иррациональное число — это бесконечная десятичная *непериодическая* дробь. Самый известный пример иррационального числа — это число π, которое мы активно использовали в предыдущих главах учебника: $\pi = 3,1415926535\ldots$.

Если натуральное число не является точным квадратом, то квадратный корень из этого натурального числа не может быть рацио-

нальным числом (см. § 32, пример 2). В частности, иррациональными являются числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, ..., $\sqrt{73}$, ..., $\sqrt{811}$, ...

Любая арифметическая операция над рациональными числами (кроме, разумеется, деления на 0) в результате приводит к рациональному числу, поскольку мы оперируем при этом над обыкновенными дробями. Если в арифметической операции участвует одно рациональное число и одно иррациональное число, то в результате получится иррациональное число. Если в арифметической операции участвуют два иррациональных числа, то результат может быть как рациональным, так и иррациональным. Например, $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ — иррациональные числа, а их сумма и произведение — рациональные числа; $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ — иррациональные числа, и их произведение, т. е. $\sqrt{6}$, тоже иррациональное число.

Если множество рациональных чисел объединить с множеством иррациональных чисел, то получится *множество действительных чисел*, которое обычно обозначают буквой $\boldsymbol{R}$; используют также символическую запись $(-\infty; +\infty)$.

Понятие действительного числа формировалось в математике в течение долгого времени. Строгие теории действительных чисел, основанные на той или иной системе аксиом, были построены лишь в конце XIX — начале XX в. Приведём одну из таких систем.

Аксиомы сложения

Для любых чисел a, b, c справедливы следующие свойства:

1. $a + b = b + a$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. $a + 0 = a$.
4. Для любого числа a существует число b, такое, что $a + b = 0$. Это число b называют *противоположным* числу a и обозначают $-a$.

Аксиома 4 позволяет ввести операцию *вычитания* на множестве действительных чисел: *под разностью* $a - b$ понимается сумма $a + (-b)$.

Аксиомы умножения

Для любых чисел a, b, c справедливы следующие свойства:

5. $ab = ba$.
6. $(ab)c = a(bc)$.
7. $a \cdot 1 = a$.
8. Для любого отличного от нуля числа a существует число b, такое, что $ab = 1$. Это число b называют *обратным* числу a и обозначают $\frac{1}{a}$.
9. $(a + b)c = ac + bc$.

Аксиома 8 позволяет ввести операцию деления на множестве действительных чисел: под частным $\frac{a}{b}$ понимается произведение $a \cdot \frac{1}{b}$ $(b \neq 0)$.

Аксиомы порядка

10. Для любых чисел a, b верно одно и только одно из утверждений: $a = b$; $a < b$; $b < a$.
11. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (*транзитивность*).
12. Если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$.
13. Если $a < b$, то $a + c < b + c$.

Перечисленные 13 аксиом выполняются и в множестве $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел. Но, как известно, рациональные числа не заполняют сплошь числовую прямую, там бесконечно много точек, соответствующих иррациональным числам. Образно говоря, множество $\boldsymbol{Q}$ не сплошное, тогда как множество $\boldsymbol{R}$ — сплошное или, как говорят, непрерывное. Эта непрерывность множества $\boldsymbol{R}$ выражается в виде специальной аксиомы.

Прежде чем сформулировать аксиому непрерывности, введём несколько новых понятий. Будем говорить, что числовое множество A расположено левее числового множества B, если для любого $a \in A$ и для любого $b \in B$ выполняется неравенство $a \leqslant b$; кратко $A \leqslant B$. Например, если $A = (1; 5)$, $B = [6; 9]$, то A левее B. Если множество A *расположено левее* множества B, а число c таково, что для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leqslant c \leqslant b$, то говорят, что c — *разделяющее число*, и пишут: $A \leqslant c \leqslant B$. Например, для указанных выше множеств $A = (1; 5)$, $B = [6; 9]$ разделяющих чисел бесконечно много, таковыми будут любые числа из полуинтервала $[5; 6)$. А, скажем, для множеств $M = (-\infty; 0)$, $K = (0; +\infty)$ есть только одно разделяющее число — число 0.

Аксиома непрерывности

14. Для любых непустых числовых множеств A и B, таких, что A расположено левее B, существует разделяющее число.

Эта аксиома — основной технический инструмент, позволяющий доказывать многочисленные свойства множества действительных чисел. Приведём два примера использования этой аксиомы.

Пример 3 (принцип Архимеда) Доказать, что для любого $x > 0$ существует такое натуральное число n, что $n > x$.

Решение. Предположим противное, т. е. предположим, что $n \leqslant x$ для всех натуральных n. Это означает, что число x расположено правее множества N натуральных чисел. Обозначим B множество всех действительных чисел, которые расположены правее N. Применим аксиому 14 непрерывности для множеств $A = N$ и B. Найдём разделяющее их число $N \leqslant c \leqslant B$ и рассмотрим число $c - 1$. Так как $c - 1 < c \leqslant B$, то $c - 1 \notin B$. Значит, правее числа $c - 1$ есть хотя бы одно натуральное число n, т. е. $c - 1 \leqslant n$. Но тогда $c \leqslant n + 1$, что противоречит неравенству $N \leqslant c$. Вывод: наше предположение неверно, а потому существует такое натуральное число n, что $n > x$.

Пример 4 Доказать, что:

а) не существует рационального числа, квадрат которого равен 2;

б) существует положительное действительное число, квадрат которого равен 2.

Решение. а) В предыдущем параграфе в примере 2 «в» мы доказали, что уравнение $m^2 = an^2$ имеет натуральное решение $(m; n)$ только в том случае, когда число a является квадратом некоторого натурального числа. Отсюда, в частности, следует, что уравнение $m^2 = 2n^2$, т. е. уравнение $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, не имеет натуральных решений $(m; n)$. А это как раз и означает, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

б) Пусть A — множество всех положительных чисел, квадрат которых меньше 2, а B — множество всех положительных чисел, квадрат которых больше 2. Если $a \in A$, $b \in B$, то, учитывая положительность a и b, получаем:

$$a^2 < 2 < b^2,$$
$$0 < b^2 - a^2,$$
$$0 < (b - a)(b + a),$$
$$0 < b - a,$$
$$a < b.$$

Значит, $A \leqslant B$ и по аксиоме 14 непрерывности есть разделяющее число c, такое, что $A \leqslant c \leqslant B$.

Если мы докажем, что случаи $c^2 < 2$ и $c^2 > 2$ невозможны, то по аксиоме 10 останется один случай $c^2 = 2$, что нам и требуется.

От противного, пусть $c^2 < 2$. Проверим тогда, что неравенство $\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ имеет натуральные решения. Раскрываем скобки:

$$c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} < 2,$$

$$\frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - c^2.$$

Так как $\frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2c}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2c+1}{n}$, то достаточно найти натуральные решения неравенства $\frac{2c+1}{n} < 2 - c^2$, $\frac{2c+1}{2-c^2} < n$. А последнее неравенство имеет натуральные решения по принципу Архимеда для $x = \frac{2c+1}{2-c^2}$ (см. пример 3).

Получаем противоречие: с одной стороны, $c + \frac{1}{n} \in A$, а с другой стороны, $c + \frac{1}{n} \notin A$, так как $A \leqslant c < c + \frac{1}{n}$. Случай $c^2 > 2$ рассматривается аналогично.

Аксиомы 1—14 множества действительных чисел, как и аксиомы геометрии, являются обобщением многовекового опыта практической деятельности человека, их принимают без доказательств. Роль указанных аксиом в алгебре аналогична роли аксиом в геометрии: как в геометрии доказательство теорем базируется на аксиомах геометрии, так и доказательство алгебраических утверждений строится на аксиомах действительных чисел.

Упражнения

33.1. Сколько натуральных чисел заключено между рациональными числами:

а) $\frac{15\,551}{73}$ и $\frac{78\,487}{365}$; б) $\frac{5678}{49}$ и $\frac{17\,285}{149}$?

33.2. При каких значениях $n \in N$ дробь $\frac{n}{24}$ будет ближайшей к числу:

а) $\frac{2}{11}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{7}{13}$; д) $\frac{12}{17}$; е) $\frac{22}{23}$?

33.3. Найдите на числовой прямой точку $D(x)$, равноудалённую от точек A и C, если:

а) $A\left(\frac{11}{12}\right)$ и $C\left(\frac{12}{13}\right)$; б) $A\left(\frac{19}{41}\right)$ и $C\left(\frac{17}{43}\right)$.

33.4. Представьте в виде десятичной периодической дроби обыкновенную дробь:

а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{4}{7}$; в) $\frac{23}{37}$; г) $\frac{7}{11}$; д) $\frac{8}{15}$; е) $\frac{5}{12}$.

33.5. Найдите цифру, стоящую на n-м месте после запятой в десятичной записи дроби:

а) $\frac{7}{13}$, если $n = 31$; г) $\frac{15}{37}$, если $n = 43$;

б) $\frac{13}{55}$, если $n = 100$; д) $\frac{71}{91}$, если $n = 154$;

в) $\frac{15}{17}$, если $n = 1613$; е) $\frac{16}{19}$, если $n = 1812$.

33.6. Запишите в виде обыкновенной несократимой дроби число:

а) $0,(45)$; в) $0,0(36)$; д) $1,24(243)$;

б) $0,(027)$; г) $0,00(54)$; е) $5,7(06)$.

33.7. Определите, рациональным или иррациональным является число:

а) $\sqrt{3,61}$; в) $\sqrt{0,0(4)}$; д) $\sqrt{\left(7+\sqrt{13}\right)\left(7-\sqrt{13}\right)}$;

б) $\sqrt{0,225}$; г) $\sqrt{2,(7)}$; е) $\sqrt{3-\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$.

33.8. Укажите хотя бы одно рациональное число $q \in [a; b]$, если:

а) $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5}$; г) $a = \pi$, $b = \sqrt{2}+\sqrt{3}$;

б) $a = 1,4$, $b = \sqrt{2}$; д) $a = \sqrt{3}-\sqrt{2}$, $b = 0,(32)$;

в) $a = \sqrt{2}-1$, $b = \sqrt{2}+1$; е) $a = \sqrt{5}-\sqrt{3}$, $b = 0,(50)$.

33.9. Найдите точку с рациональными координатами $(x; y)$ на прямой:

а) $y = \sqrt{2}x - 1$; б) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

33.10. Докажите, что при $0 < x < y$, $k \geqslant 0$ верно неравенство $\frac{x}{y} \leqslant \frac{x+k}{y+k}$.

33.11. На числовой прямой отмечены точки 0 и 1. Как с помощью циркуля и линейки на числовой прямой построить точки:

а) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1$, $3\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}-3$, $-2\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+1$, $2\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{7}$, $\sqrt{7}+2$, $-\frac{\sqrt{7}}{2}$, $\sqrt{7}+\sqrt{3}$?

33.12. а) На числовой прямой отмечены точки -1 и 3. С помощью циркуля и линейки постройте точки 0, 1, -5.
б) На числовой прямой отмечены точки -2 и 1. С помощью циркуля и линейки постройте точки 0, -4, 6.
в) На числовой прямой отмечены точки $\sqrt{2}$ и -3. С помощью циркуля и линейки постройте точку 0.
г) На числовой прямой отмечены точки $-\sqrt{3}$ и 2. С помощью циркуля и линейки постройте точку 0.

33.13. Укажите одно рациональное и одно иррациональное числа, принадлежащие интервалу:

а) $\left(1{,}4;\ \sqrt{2}\right)$; в) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; д) (2,4; 2,5);

б) $\left(\sqrt{3};\ 1{,}8\right)$; г) $\left(\sqrt{5};\ \sqrt{6}\right)$; е) (0,(3); 0,(6)).

33.14. Расположите в порядке возрастания числа:

$$\sqrt{10},\ \frac{22}{7},\ 3{,}14,\ \sqrt[3]{30},\ \pi.$$

33.15. Сравните числа a и b, если:

а) $a=\sqrt{3}+1$, $b=\sqrt{5}$;

б) $a=\sqrt{17}-\sqrt{5}$, $b=\sqrt{19}-\sqrt{7}$;

в) $a=\sqrt{3}-\sqrt{41}$, $b=\sqrt{5}-\sqrt{43}$;

г) $a=\sqrt{13}$, $b=\sqrt{7}+2$;

д) $a=\sqrt{29}+\sqrt{13}$, $b=\sqrt{31}+\sqrt{11}$;

е) $a=\sqrt{23}-\sqrt{73}$, $b=\sqrt{17}-\sqrt{67}$.

33.16. Докажите, что в интервале (99; 100) нет ни наименьшего, ни наибольшего чисел.

33.17. Докажите, что среди решений неравенства $x^2 < 3$ нет ни наименьшего, ни наибольшего чисел.

33.18. Интервал $(a - \delta; a + \delta)$, где $\delta > 0$ (δ — буква греческого алфавита *дельта*), называют δ-*окрестностью* точки a, а число δ — *радиусом окрестности*. Точки $a - \delta$ и $a + \delta$ называют граничными точками данной окрестности. Найдите, при каких значениях δ точка 11,57 лежит в δ-окрестности точки a, если:
а) $a = 11{,}6$; б) $a = 11{,}4$.

33.19. Точки p и q являются граничными точками некоторой δ-окрестности. Найдите δ, если:
а) $p = 18{,}1$, $q = 18{,}2$;
б) $p = -0{,}42$, $q = -0{,}45$;
в) $p = -2{,}27$, $q = 0{,}3$;
г) $p = 9{,}3$, $q = 8{,}28$;
д) $p = -3{,}4$, $q = -2{,}9$;
е) $p = 1{,}05$, $q = -1{,}5$.

33.20. Известно, что $1{,}4 < p < 1{,}5$ и $0{,}2 < q < 0{,}3$. Найдите граничные точки интервала, содержащего все числа вида:

а) $x = p + q$; в) $x = 2p - 3q$; д) $x = \dfrac{q}{p}$;

б) $x = p - q$; г) $x = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$; е) $x = pq$.

33.21. Найдите все такие значения параметра a, при которых в промежутке:
а) $[-3; a]$ содержится ровно десять целых чисел;
б) $(a; 5)$ содержится ровно семь целых чисел;
в) $(-a; a + 2]$ содержится ровно восемь целых чисел;
г) $[1 - a; a)$ содержится ровно девять целых чисел.

33.22. а) При каких значениях m точка $A(-2)$ лежит между точками $K(m - 3m^2)$ и $L(2m + 5)$?
б) При каких значениях m точка $A(m)$ лежит между точками $K(4m - 6m^2)$ и $L(3 - 2m)$?

Упражнения для повторения

33.23. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{7(\sin 20^\circ - \cos 20^\circ)}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}$; в) $\dfrac{(1 - \operatorname{tg} 5^\circ)\cos 5^\circ}{10\sqrt{2}\sin 40^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin^2 28^\circ + \sin 34^\circ}{4\cos^2 28^\circ}$; г) $\dfrac{4(1 - \sin^2 41^\circ)}{\sin 8^\circ + \sin^2 41^\circ}$.

33.24. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а) $2\operatorname{tg} x \cos x + 1 = 2\cos x + \operatorname{tg} x,\ x \in \left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$;

б) $\sin x - 2\cos^2 x = \cos x - \sin 2x,\ x \in \left[-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.

33.25. Решите уравнение:

а) $|x + 9| + |x - 11| = 16$;
б) $|x + 5| + |x - 11| = 16$;
в) $|x + 4| + |x - 12| = 20$;
г) $|x + 14| + |x - 12| = 24$;
д) $|x + 11| + |x - 7| = 18$;
е) $|x + 8| + |x - 10| = 24$.

33.26. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} (x+3)^3, \text{ если } -5 \leqslant x < -3, \\ -\dfrac{4}{x-1} - 1, \text{ если } -3 \leqslant x < 0, \\ \sqrt[3]{x} + 3, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 8. \end{cases}$

а) Постройте график данной функции.
б) Прочитайте график данной функции.
в) Укажите промежутки, на которых график данной функции выше графика функции $y = x + 3$.
г) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = px - 4$ имеет корни.

§ 34. Комплексные числа

Вы уже не раз встречались с цепочкой включений $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$: натуральные числа составляют часть всех целых чисел, которые образуют подмножество множества всех рациональных чисел, в свою очередь включённых в множество действительных чисел. При этом арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление) в множествах $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ согласованы между собой. Например, сумма 9 + 13 или, скажем, частное 13 : 19 не зависят от того, рассматриваем ли мы 9, 13 и 19 как натуральные, как целые, как рациональные или как действительные числа. Возникновение, становление и развитие продолжающих друг друга числовых структур $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ имеет весьма долгую историю. Ограничимся кратким описанием с алгебраической точки зрения.

Простейшее линейное уравнение $x + 5 = 17$, $x \in \boldsymbol{N}$, имеет корень, а вот внешне аналогичное уравнение $x + 17 = 5$, $x \in \boldsymbol{N}$, уже не имеет корней. Расширение множества $\boldsymbol{N}$ до множества $\boldsymbol{Z}$ исправляет эту

ситуацию: уравнение $x + 17 = 5$, $x \in \boldsymbol{Z}$, уже имеет корень, как, впрочем, и любое уравнение $x + b = c$, $x \in \boldsymbol{Z}$, с целыми b и c.

Далее, уравнение $7x = -21$, $x \in \boldsymbol{Z}$, имеет корень, а похожее по виду уравнение $21x = -7$, $x \in \boldsymbol{Z}$, корней не имеет. Переход от множества $\boldsymbol{Z}$ к множеству $\boldsymbol{Q}$ улучшает положение дел: любое уравнение $ax = b$, $x \in \boldsymbol{Q}$, $a \neq 0$, имеет корень, причём не только для целых, но и для рациональных коэффициентов $a \neq 0$ и b, т. е. *любое линейное уравнение с рациональными коэффициентами имеет рациональный корень.*

При решении квадратных уравнений обстоятельства вновь усложняются. Например, уравнения $x^2 = 4$, $4x^2 + 12x + 9 = 0$ имеют рациональные корни, а такие же по виду уравнения $x^2 = 2$, $4x^2 + 12x + 7 = 0$ не имеют рациональных корней. Расширение множества $\boldsymbol{Q}$ до множества $\boldsymbol{R}$, т. е. добавление иррациональных чисел, помогает, но, увы, лишь частично: уравнения $x^2 = 2$, $4x^2 + 12x + 7 = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, имеют корни $\left(x_{1,\,2} = \pm\sqrt{2},\ \ x_{1,\,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{2}}{2} \right)$, а вот уравнения $x^2 = -1$, $4x^2 + 12x + 11 = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, по-прежнему не имеют корней. Для кубических уравнений и уравнений 4-й степени положение ничуть не проще: какие-то из них имеют корни во множестве действительных чисел, а какие-то нет.

Множество $\boldsymbol{C}$ компле́ксных чисел, к знакомству с которыми мы приступаем, во-первых, содержит в себе все действительные числа:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$$

и, во-вторых, обладает замечательным алгебраическим свойством.

Теорема 1 (основная теорема алгебры). Для любого натурального числа n любое уравнение n-й степени с комплексными (и, в частности, с действительными) коэффициентами

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

имеет хотя бы один комплексный корень.

Для построения множества $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел необходимо к уже имеющемуся множеству $\boldsymbol{R}$ действительных чисел добавить какие-то новые элементы. Поразительным является тот факт, что достаточным оказывается добавление корней *единственного квадратного уравнения* $z^2 + 1 = 0$. Основная теорема алгебры гарантирует наличие корней многочленов любых степеней, в том числе и с комплексными коэффициентами.

Перечислим те свойства, которые определяют множество $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел.

Аксиомы множества комплексных чисел

I. Для любых двух комплексных чисел определены их сумма и их произведение так, что выполняются те же свойства, что и для множества $\boldsymbol{R}$ (§ 33, аксиомы 1—9).

II. $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$, и при этом сложение и умножение чисел из множества $\boldsymbol{R}$ приводят к тем же результатам, что и их сложение и умножение в множестве $\boldsymbol{C}$.

III. Существует комплексное число i, такое, что $i^2 = -1$. Это число называют **мнимой единицей**.

Из свойств I—III следует, что, например, $2i$, $-3i$, $5 + 7i$, $-\sqrt{2} + \pi i$, ... — это комплексные числа. В общем виде, всякая сумма $x + yi$ с действительными x и y является комплексным числом. Верно и обратное: всякое комплексное число z представимо в виде $z = x + yi$, где $x \in \boldsymbol{R}$ и $y \in \boldsymbol{R}$.

Определение 1. Множество комплексных чисел — это множество

$$\boldsymbol{C} = \{x + yi \mid x \in \boldsymbol{R},\ y \in \boldsymbol{R}\},$$

где i — мнимая единица, $i^2 = -1$.

Запись $z = x + yi$ — это *стандартный вид* (чаще говорят *алгебраическая форма*) комплексного числа; число $x \in \boldsymbol{R}$ называют *действительной частью* числа z и обозначают $\operatorname{Re} z$ (Re от лат. *real* — реальный), а число $y \in \boldsymbol{R}$ — *мнимой частью* числа z и обозначают $\operatorname{Im} z$ (Im от лат. *imaginary* — воображаемый); несколько непривычно, но мнимая часть — число действительное.

Комплексные числа $z = 0 + yi = yi$ с нулевой действительной частью называют *чисто мнимыми*. В частности, каждое комплексное число — это сумма действительного числа и чисто мнимого числа.

Теорема 2. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части.

Доказательство. Допустим, что $x + yi = c + di$, где $x, y, c, d \in \boldsymbol{R}$. Тогда $x - c = (d - y)i$. Если $d \neq y$, то получаем $\frac{x-c}{d-y} = i$, $\left(\frac{x-c}{d-y}\right)^2 = i^2 = -1$, что противоречит тому, что квадрат действительного числа неотрицателен. Если же $d = y$, то $d - y = 0$, $0 \cdot i = 0$, $x - c = 0$, $x = c$.

В итоге из $x + yi = c + di$ следует, что $x = c$ и $y = d$.

Операции сложения и умножения комплексных чисел определяют в соответствии со свойствами I—III, т. е. с использованием переместительного, сочетательного и распределительного законов.

Пример 1 Доказать, что:

а) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
б) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$;
в) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;
г) $\frac{1}{c+di} = \frac{c-di}{c^2+d^2}$.

Решение.

а) $(a + bi) + (c + di) = ((a + bi) + c) + di = (a + (c + bi)) + di = (a + c) + (bi + di) = (a + c) + (b + d)i$.

б) $(a + bi) - (c + di) = ((a + bi) - c) - di = (a - (c - bi)) - di = (a - c) + (bi - di) = (a - c) + (b - d)i$.

в) $(a + bi)(c + di) = ac + bic + adi + bidi = (ac + bdi^2) + (adi + bci) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

г) Имеем: $(c + di)(c - di) = c^2 - (di)^2 = c^2 - d^2i^2 = c^2 - d^2(i^2) = c^2 - d^2(-1) = c^2 + d^2$.

Итак, $(c + di)(c - di) = c^2 + d^2$. Отсюда следует, что $\frac{1}{c+di} = \frac{c-di}{c^2+d^2}$.

Деление комплексных чисел — операция более деликатная. Удобно начать с нового понятия.

Определение 2. Если $z = a + bi$, то число $\overline{z} = a - bi$ называют **сопряжённым** (комплексно-сопряжённым) к числу z; $\operatorname{Re}\overline{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im}\overline{z} = -\operatorname{Im} z$, $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Корни квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом — комплексно-сопряжённые числа (см. следствие теоремы 2). Примером использования сопряжённых чисел является умножение и числителя, и знаменателя дроби на число, сопряжённое знаменателю. Это позволяет, как говорят, *избавиться от мнимости* в знаменателе и привести частное комплексных чисел к стандартному виду комплексного числа:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i.$$

Например,

$$\frac{6-i}{3+i}=\frac{(6-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{18+i^2}{3^2-i^2}-\frac{6+3}{3^2-i^2}\cdot i=\frac{17}{10}-\frac{9}{10}\cdot i=1{,}7-0{,}9i.$$

Пример 2 Вычислить:

а) $(1+i)(2-3i)-\dfrac{i-1}{i+1}$; в) $i+2i^2+3i^3+4i^4+5i^5$;

б) $\dfrac{i}{(i+1)(i+2)}$; г) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{2021}$.

Решение. а) Сначала раскроем скобки в уменьшаемом:

$$(1+i)(2-3i)=1\cdot 2-i\cdot 3i-1\cdot 3i+i\cdot 2=2+3+(-3+2)i=5-i.$$

Далее, $\dfrac{i-1}{i+1}=\dfrac{i-1}{i+1}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{-(1-i)^2}{2}=\dfrac{-(1-2i+i^2)}{2}=i.$

И, наконец, $(5-i)-i=5-2i$.

б) $\dfrac{i}{(i+1)(i+2)}=\dfrac{i}{i^2+2+(1+2)i}=\dfrac{i}{1+3i}\cdot\dfrac{1-3i}{1-3i}=\dfrac{i-3i^2}{1+3^2}=\dfrac{3+i}{10}=$

$=0{,}3+0{,}1i.$

в) Так как $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=1$, $i^5=i$; то $i+2i^2+3i^3+4i^4+5i^5=$ $=i-2-3i+4+5i=2+3i$.

г) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{2021}=(i+i^2+i^3+i^4)+(i+i^2+i^3+i^4)i^4+\ldots+$ $+(i+i^2+i^3+i^4)i^{2016}+(i^4)^{505}\cdot i=i$, так как $i+i^2+i^3+i^4=i-1-$ $-i+1=0$, $i^4=1$.

Другой способ: воспользуемся формулой суммы членов геометрической прогрессии $S=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$; в нашем случае $b_1=i$, $q=i$. Получим:

$$S=i+i^2+i^3+\ldots+i^{2021}=\frac{i(1-i^{2001})}{1-i}=\frac{i(1-i^{2000}\cdot i)}{1-i}=\frac{i(1-i)}{1-i}=i.$$

Ответ: а) $5-2i$; б) $0{,}3+0{,}1i$; в) $2+3i$; г) i.

Так как для комплексных чисел верны те же свойства арифметических операций, что и для действительных чисел, то верны и формулы сокращённого умножения: разность квадратов, квадрат суммы (разности), куб суммы (разности), разность (сумма) кубов и т. д.

Пример 3 Решить в комплексных числах квадратное уравнение:

а) $z^2 - 289 = 0$; в) $z^2 + 100 = 0$;
б) $z^2 + 1 = 0$; г) $z^2 + d^2 = 0$, $d \in \boldsymbol{R}$.

Решение. а) $z^2 - 289 = 0$; $z^2 - 17^2 = 0$; $(z - 17)(z + 17) = 0$, значит, $z_1 = 17$, $z_2 = -17$.

б) $z^2 + 1 = 0$; $z^2 - (-1) = 0$; $z^2 - i^2 = 0$; $(z - i)(z + i) = 0$; $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

в) $z^2 + 100 = 0$; $z^2 - (-100) = 0$; $z^2 - (10i)^2 = 0$; $(z - 10i)(z + 10i) = 0$; $z_{1,\,2} = \pm 10i$.

г) $z^2 + d^2 = 0$; $z^2 - (-d^2) = 0$; $z^2 - (d \cdot i)^2 = 0$; $(z - di)(z + di) = 0$; $z_{1,\,2} = \pm di$.

Ответ: а) ± 17; б) $\pm i$; в) $\pm 10i$; г) $\pm di$.

В пункте «г» мы, по существу, научились извлекать квадратный корень из отрицательного числа. А что понимать под квадратным корнем из комплексного числа?

Определение 3. $\sqrt{a + bi}$ — это множество корней квадратного уравнения $z^2 = a + bi$. Каждый элемент этого множества называют **квадратным корнем** из числа $a + bi$.

Найдём, например, $\sqrt{-49}$. Для этого решим уравнение $z^2 = -49$:

$$z^2 - (-49) = 0;\ z^2 - (7i)^2 = 0;\ (z - 7i)(z + 7i) = 0;\ z_{1,\,2} = \pm 7i.$$

Итак, $\sqrt{-49} = \pm 7i$.

Сформулируем результат в общем виде:

$$\sqrt{c} = \pm i\sqrt{-c},\ c < 0.$$

Отметим, что в правой части этого равенства квадратный корень $\sqrt{-c}$ извлекается из положительного числа, и это привычная операция в множестве действительных чисел, а в левой части квадратный корень $\sqrt{c}$ извлекается из отрицательного числа, и это уже операция в множестве комплексных чисел.

Теорема 3. Квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$ с действительными коэффициентами $a \neq 0$, b, c и отрицательным дискриминантом $D = b^2 - 4ac$ имеет два комплексных корня:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Доказательство. Используем обычную процедуру выделения полного квадрата.

$$az^2 + bz + c = 0;$$

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0;$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a} = 0, \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{-D}\cdot i}{2a}\right)^2, \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{-D}\cdot i}{2a}\right)^2 = 0,$$

$$\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{-D}\cdot i}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-D}\cdot i}{2a}\right) = 0.$$

Значит, $z = \frac{-b + \sqrt{-D}\cdot i}{2a}$ или $z = \frac{-b - \sqrt{-D}\cdot i}{2a}$.

С учётом равенства $\sqrt{D} = \pm i\sqrt{-D}$ корни можно записать и так: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

А существует ли общая формула для вычисления $\sqrt{a + bi}$ при $b \neq 0$? Ответ — да, существует (см. упражнение 34.15 «б»). Однако она довольно громоздка для запоминания, и в конкретных случаях бывает проще действовать прямо по определению.

Пример 4 Вычислить $\sqrt{1 + 2i}$.

Решение. Следует найти корни уравнения $z^2 = 1 + 2i$. Запишем комплексное число z в стандартном (алгебраическом) виде $z = a + bi$, подставим в уравнение и раскроем скобки:

$(a + bi)^2 = 1 + 2i$, $a^2 + 2abi + (bi)^2 = 1 + 2i$, $(a^2 - b^2) + 2abi = 1 + 2i$.

Поэтому $a^2 - b^2 = 1$, $2ab = 2$ и тем самым $a \neq 0$, $b \neq 0$. Так как $b = \frac{1}{a}$, то

$$a^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 1;\ a^4 - a^2 - 1 = 0;\ a^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}.$$

Поскольку $a^2 > 0$, получаем

$$a^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ a = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

Так как $b = \frac{1}{a}$, то

$$b = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}+1}} = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}} = \pm\sqrt{\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Ответ: $z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$.

Завершая параграф, сделаем два замечания. Первое из них — об аксиомах порядка 10—13 и аксиоме 14 непрерывности, которые имеют место в множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел. Оказывается, что в множестве $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел невозможно ввести отношение порядка, для которого были бы верны все свойства 10—13.

Доказательство проводится от противного. Если допустить наличие такого отношения «<» порядка в $\boldsymbol{C}$, то для $i \neq 0$ верно либо $0 < i$, либо $i < 0$ (см. аксиому 10 в § 33). Если $0 < i$, то перемножим почленно $0 < i$ с $0 < i$. Получим (см. аксиому 12): $0 = 0^2 < i^2 = -1$, что неверно в множестве $\boldsymbol{R}$. Если $i < 0$, то (см. аксиому 13) $0 = i + (-i) < 0 + (-i) = -i$ и, ещё раз возводя в квадрат, получаем $-1 = (-i)^2 > 0^2 = 0$, что вновь противоречит свойствам порядка в множестве $\boldsymbol{R}$.

Вывод — нельзя требовать всего и сразу: уж если в множестве $\boldsymbol{C}$ возможно дополнительное по сравнению с множеством $\boldsymbol{R}$ равенство $i^2 = -1$, то чем-то приходится и жертвовать; в данном случае — наличием хорошего отношения порядка «меньше—больше».

Второе замечание — ответ на вопрос «Как правильно: $z = x + yi$ или $z = x + iy$?». Формально можно и так, и так, ведь есть переместительный закон умножения. На практике выбирают то, что естественнее. Скажем, $5i$, но не $i5$, или $i\sqrt{2}$, $i\sin t$, а не $\sqrt{2}i$, $\sin ti$.

Упражнения

34.1. Приведите к стандартному виду комплексное число:

а) $2(2 + 3i) + 3(-i + 1)$;
б) $2i(2 + 3i) + 3i^2$;
в) $3i(1 - 10i) + 2i(9i - 1)$;
г) $3(3 - 2i) - 3(-4i + 5)$;
д) $-5i(2 - 3i) - 3(-i)^2$;
е) $-5i^2(2i + 7) + 2i(12i - 1)$.

Вычислите.

34.2. а) i^3; б) i^5; в) i^{35}; г) $(-i)^{11}$; д) $(-i)^{111}$; е) $(-i)^{1111}$.

34.3. а) $i + 2i^2$;
б) $i - 2i^2 + 3i^3$;
в) $i - 3i^{12} + 2i^{12}$;
г) $i - (2i)^2$;
д) $i - 2(-i)^2 - (3i)^3$;
е) $i^8 - 3i^{12} - 5(-i)^{21}$.

34.4. а) $(1 + i)(2 + 3i)$;
б) $(2 + i)(4i - 7)$;
в) $i(2i + 3i^2)(7i + 9i^3)$;
г) $(3 - i)(2 - 5i)$;
д) $(2 - 7i)(7i - 12)$;
е) $i^2(3i^2 + 4i^3)(7i - 5)$.

34.5. а) $\frac{1+i}{i}$; в) $\frac{3i-2}{1-2i}$; д) $\frac{1-5i}{2-5i}$;

б) $\frac{1+i}{2-i}$; г) $\frac{1-2i}{-3i}$; е) $\frac{3i^2-2i}{i-5i^4}$.

34.6. Решите уравнение:

а) $iz = 1$;
б) $(1 + i)z = 2i$;
в) $(1 + i)z = 2iz - 3$;
г) $1 + iz = i$;
д) $(1 - i)z = 2i - 1$;
е) $2 - (1 + i)z = i(z - i) + 1$.

34.7. Вычислите:

а) i^{-3};
б) i^{-5};
в) $i^{-1} + i^{-3} + i^{-5} + i^{-135}$;
г) $(-i)^{-5}$;
д) $(-i)^{-7}$;
е) $(-i)^{-1} - (-i)^{-5} + (-i)^{-7} + (-i)^{-751}$.

34.8. Найдите действительную часть степени комплексного числа:

а) $(1 + i)^2$; в) $(3i - 1)^2$; д) $(i + 2)^3$;
б) $(2 - i)^2$; г) $(1 - i)^3$; е) $(1 - i)^4$.

34.9. Найдите мнимую часть степени комплексного числа:

а) $(1 - i)^2$; в) $(3i^2 - i^3)^2$; д) $(2i - 1)^3$;
б) $(2 + 3i)^2$; г) $(1 + i)^3$; е) $(3i^2 - i)^4$.

34.10. Вычислите:

а) $(1 - i)^{-2}$; б) $(2 + i)^{-3}$; в) $\left(\frac{i+1}{i}\right)^{-2}$;

г) $\left(\frac{1-i}{i}\right)^{-2}$; д) $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{-3}$; е) $(2i^2 - 3i)^{-4}$.

34.11. Найдите все действительные значения a, при каждом из которых:

а) $z = (a + i)^2$, $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$;
б) $z = (ai + 1)^2$, $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$;
в) $z = \left(\frac{3i + a}{i}\right)^2$, $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$;
г) $z = (a - i)^2$, $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Im} z$;
д) $z = (2 - ai)^2$, $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$;
е) $z = \left(\frac{1 + ai}{1 + a}\right)^2$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$.

34.12. Найдите число, сопряжённое данному:

а) $\bar{i}$; в) $\overline{(1 - i)^3}$; д) $\overline{(2 + i)^2}$;
б) $\overline{2 + i^3}$; г) $\overline{(-i)}$; е) $\overline{(1 + i)^{-3}}$.

34.13. Решите уравнение:

а) $z = \bar{z}$; в) $z + 2 = 3\bar{z}$; д) $z + \bar{z} = 20i$;
б) $z = 2\bar{z}$; г) $z + \bar{z} = 20$; е) $z + 2i = 4\overline{(iz)}$.

34.14. Вычислите (в комплексных числах):

а) $\sqrt{1}$; в) $\sqrt{(1 + i)^4}$; д) $\sqrt{-4}$;
б) $\sqrt{-1}$; г) $\sqrt{12{,}25}$; е) $\sqrt{(2 - 3i)^4}$.

34.15. Докажите, что для действительных чисел a и $b \neq 0$:

а) $\sqrt{a + bi}$ — это множество из двух противоположных комплексных чисел;

б) $\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \cdot \frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right)$.

Упражнения для повторения

34.16. Найдите значение выражения:

а) $\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{16\pi}{15}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{9}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}$.

34.17. Решите неравенство:

а) $-0{,}5 \leqslant \sin t \leqslant 0{,}1$;

б) $-0{,}7 \leqslant \cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $-0{,}3 \leqslant \sin t \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$;

г) $-0{,}5 \leqslant \cos t < 0{,}9$.

34.18. а) Найдите все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} px + 3y = p - 2, \\ 3px + (2p + 4)y = 3p - 6 \end{cases}$$

имеет более одного решения.

б) Найдите все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} p(x - 1) = 2 - 2y, \\ p(2x + y - 2) = 4 - y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

34.19. а) Расположите в порядке возрастания числа: $9\frac{3}{7}$; 3π; $4\sqrt{5}$; $9{,}(41)$.

б) Расположите в порядке убывания числа: $-6{,}(28)$; -2π; $-2\sqrt{10}$; $-6\frac{2}{7}$.

§ 35. Комплексная плоскость

Геометрической моделью множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел является координатная прямая. Об этом мы не раз говорили в 7—9 классах. Геометрической моделью множества $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел является координатная плоскость.

Каждому комплексному числу $z = x + yi$ поставим в соответствие точку $Z(x; y)$ координатной плоскости, тем самым каждое комплексное число z получает своё геометрическое «изображение» в виде некоторой точки Z. Верно и обратное: каждая точка координатной плоскости является «изображением» некоторого комплексного числа,

а разным числам соответствуют разные точки, т. е. если $z \neq z'$, то $Z \neq Z'$. Как говорят в математике, установлено *взаимно однозначное соответствие* между комплексными числами и точками координатной плоскости. Более того, часто бывает удобным числу $z = x + yi$ ставить в соответствие не саму точку $Z(x; y)$, а вектор $\overrightarrow{OZ}$, выходящий из начала координат $O(0; 0)$ в точку $Z(x; y)$. При таком соответствии многие соотношения между комплексными числами получают наглядное изображение в координатной плоскости.

Комплексной плоскостью называют координатную плоскость, каждую точку $Z(x; y)$ которой считают изображением комплексного числа $z = x + yi$.

Пример 1 Изобразить в комплексной плоскости числа:

а) $z_1 = i$, $z_2 = 2$, $z_3 = 7i + 1$, $z_4 = -1 - i$;

б) z с нулевой мнимой частью $\operatorname{Im} z$;

в) z с неотрицательной мнимой частью $\operatorname{Im} z$ и нулевой действительной частью $\operatorname{Re} z$;

г) $\{z \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Re} z < 1\}$.

Решение. а) $z_1 = i = 0 + 1 \cdot i$. Значит, числу i соответствует точка с координатами (0; 1).

$z_2 = 2 = 2 + 0 \cdot i$. Значит, числу 2 соответствует точка с координатами (2; 0).

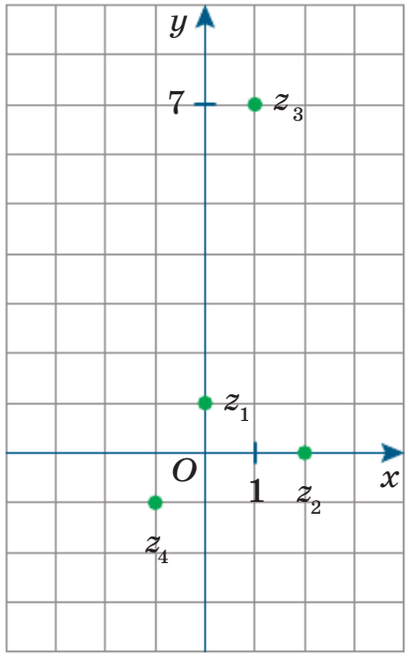


Рис. 140

$z_3 = 7i + 1 = 1 + 7i$. Значит, числу $1 + 7i$ соответствует точка с координатами (1; 7).

$z_4 = -1 - i = -1 - 1 \cdot i$. Значит, числу $-1 - i$ соответствует точка с координатами (–1; –1).

Итак, указанным числам соответствуют точки (0; 1), (2; 0), (1; 7), (–1; –1) (рис. 140).

б) Числа z с нулевой мнимой частью $\operatorname{Im} z$ — это числа вида $z = x + 0 \cdot i$. Им соответствуют точки $(x; 0)$ оси Ox.

в) Числа z с нулевой действительной частью $\operatorname{Re} z$ — это числа вида $z = 0 + yi$. Им соответствуют точки $(0; y)$ оси Oy. Так как $\operatorname{Im} z = y \geqslant 0$, то искомое множество — это верхняя полуось оси Oy.

г) Множеству $\{z = x + iy \mid \operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Re} z < 1\}$ в координатной плоскости соответствует множество $\{(x; y) \mid y \leqslant x < 1\}$. Неравенство $x < 1$ задаёт полуплоскость левее прямой

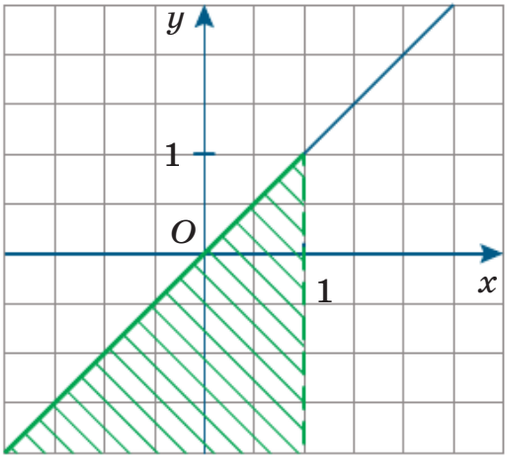


Рис. 141

$x = 1$, а неравенство $y \leqslant x$ задаёт полуплоскость ниже биссектрисы $y = x$ вместе с самой биссектрисой. В результате получаем угол в 45° с вершиной в точке (1; 1) с включённой наклонной стороной угла и невключённой вертикальной стороной (рис. 141).

Взаимно однозначное соответствие $x + yi \leftrightarrow (x; y)$ между комплексными числами и точками координатной плоскости имеет важное свойство.

Теорема 1. Если комплексным числам z и u соответствуют векторы $\overrightarrow{OZ}$ и $\overrightarrow{OU}$, то:

— сумме $z + u$ соответствует сумма векторов $\overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OU}$;

— произведению tz, $t \in \boldsymbol{R}$, соответствует вектор $t \cdot \overrightarrow{OZ}$.

Доказательство. Пусть $z = x + yi$, $u = c + di$. Тогда $v = z + u = (x + c) + (y + d)i$, и числу v соответствует вектор $\overrightarrow{OV}(x + c; y + d)$, который по правилу параллелограмма равен сумме векторов $\overrightarrow{OZ}(x; y)$ и $\overrightarrow{OU}(c; d)$ (рис. 142).

Рассуждая аналогично, получим, что произведению tz, $t \in \boldsymbol{R}$, соответствует вектор $t \cdot \overrightarrow{OZ}$.

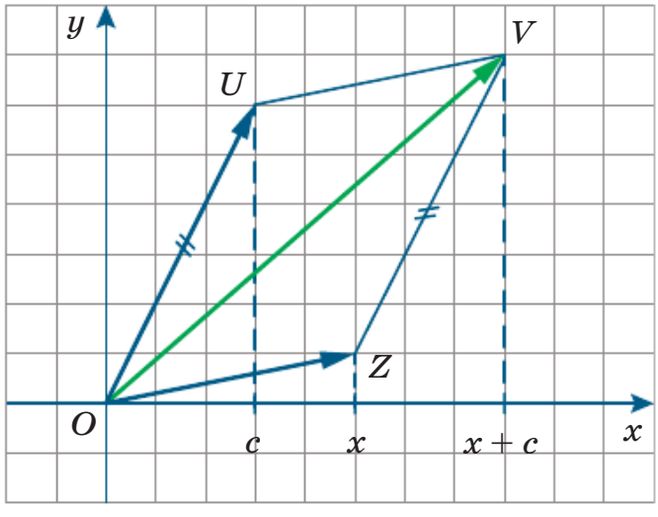


Рис. 142

Следствие. Разности $z - u$ соответствует разность векторов $\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OU}$.

Доказательство. $z - u = z + (-1) \cdot u$; числу $z + (-1) \cdot u$ соответствует сумма

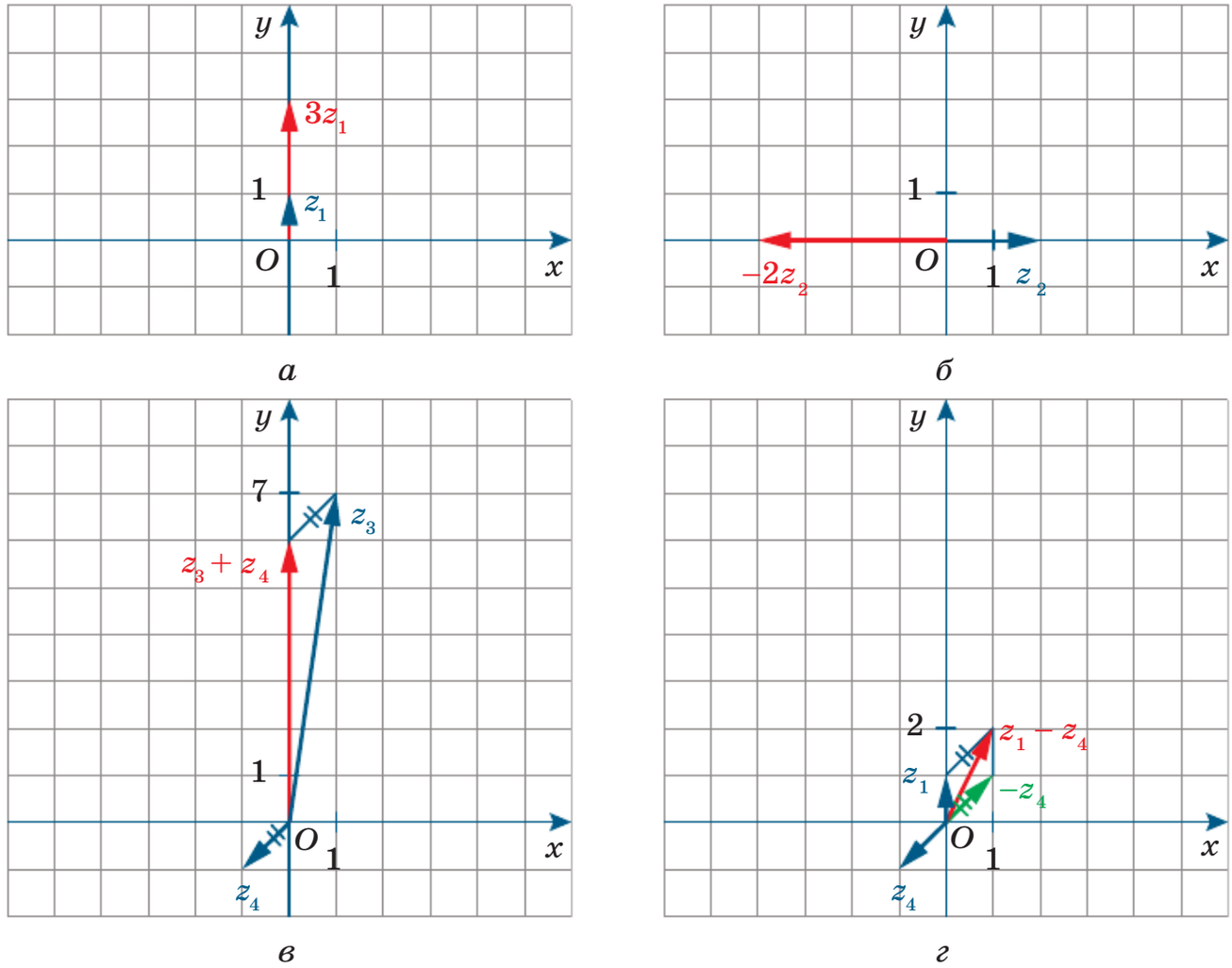
$$\overrightarrow{OZ} + (-1)\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OU}.$$

Пример 2 Даны числа $z_1 = i$, $z_2 = 2$, $z_3 = 7i + 1$, $z_4 = -1 - i$. Изобразить в комплексной плоскости вектор, соответствующий числу:

а) $3z_1$; б) $-2z_2$; в) $z_3 + z_4$; г) $z_1 - z_4$.

Решение представлено на рисунке 143, *а*—*г*.

Определение 1. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называют число $\sqrt{a^2 + b^2}$; это число обозначают $|z|$.



а *б* *в* *г*

Рис. 143

Например, $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$; $|-5+i| = \sqrt{(-5)^2+1^2} = \sqrt{26}$.

Из определения 1 следует, что модуль любого комплексного числа — неотрицательное число.

Если, в частности, z — действительное число, $z = a$, т. е. $z = a + 0 \cdot i$, то $|z| = |a| = |a + 0 \cdot i| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2}$; короче, $|a| = \sqrt{a^2}$, так что для любого действительного числа, как для частного случая комплексного числа, понятие модуля сохраняет привычный смысл.

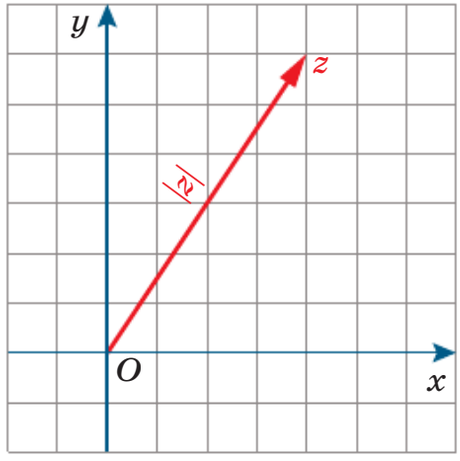


Рис. 144

С геометрической точки зрения $|z| = |a + bi|$ — это расстояние на комплексной плоскости между z и O (рис. 144). Значит, сохраняется геометрический смысл модуля действительного числа: это расстояние на координатной прямой между точками a и 0.

Теорема 2.
а) Расстояние между точками z_1, z_2 комплексной плоскости равно модулю их разности:

$$\rho(z_1; z_2) = |z_1 - z_2|.$$

б) Модуль суммы не больше суммы модулей слагаемых:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

в) Модуль произведения равен произведению модулей множителей:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

г) $|z| = |\bar{z}|$.

д) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Доказательство. а) Пусть $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$. Составим разность чисел z_1 и z_2:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

Тогда $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Из курса алгебры 9 класса вам известно, что расстояние между точками $z_1(x_1; y_1)$ и $z_2(x_2; y_2)$ координатной плоскости вычисляется по формуле $\rho(z_1; z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Таким образом, $\rho(z_1; z_2) = |z_1 - z_2|$.

б) Рассмотрим треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $Z(x_1;\ y_1)$ и $U(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$. Длина стороны OU равна $|z_1 + z_2|$, и она по неравенству треугольника не больше суммы длин сторон OZ и ZU, которые равны соответственно $|z_1|$ и $|z_2|$. Таким образом, получаем

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

в) Пусть $z_1 = x + yi$, $z_2 = s + ti$. Тогда

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = (x^2 + y^2)(s^2 + t^2) = x^2s^2 + y^2s^2 + x^2t^2 + y^2t^2 =$$
$$= (x^2s^2 - 2xsyt + y^2t^2) + (y^2s^2 + 2ysxt + x^2t^2) =$$
$$= (xs - yt)^2 + (ys + xt)^2 = |(xs - yt) + (ys + xt)i|^2 = |z_1z_2|^2.$$

Итак, $|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1z_2|^2$, откуда следует, что $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

г) Пусть $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$. Тогда имеем: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Значит, $|z| = |\overline{z}|$.

д) Пусть $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$. Тогда $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Значит, $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Теорема полностью доказана.

Отметим, что из равенства $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ следует равенство $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, т. е. $\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$, что мы уже видели в предыдущем параграфе.

Определение 2. Если комплексному числу $z = a + bi$ соответствует вектор $\overrightarrow{OZ}$, то угол t между этим вектором и положительным направлением оси абсцисс, удовлетворяющий двойному неравенству $-\pi < t \leqslant \pi$, называют **аргументом числа z** и обозначают **$\arg z$**.

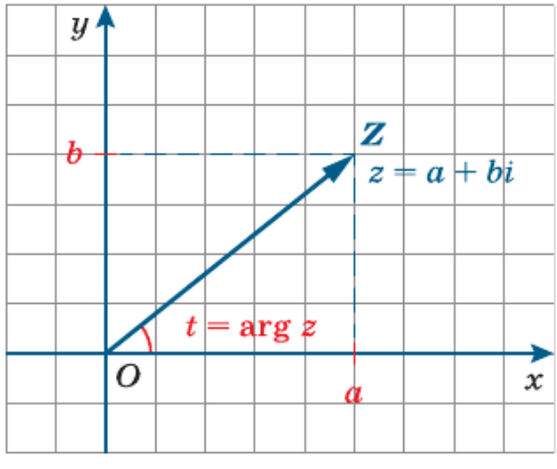


Рис. 145

Если $a \neq 0$, то для вычисления аргумента числа $z = a + bi$ используют формулу $\operatorname{tg} t = \frac{b}{a}$ (рис. 145), при этом учитывают, что $-\pi < t \leqslant \pi$ или (в градусах) $-180° < t \leqslant 180°$.

Пример 3 Найти аргумент t комплексного числа:

а) $1 + i$; в) $-1 - i\sqrt{3}$;

б) $-1 + i$; г) $2 - 2i\sqrt{3}$.

Решение. а) $\operatorname{tg} t = \frac{1}{1} = 1,\ t = \frac{\pi}{4}$.

б) $\operatorname{tg} t = \frac{1}{-1} = -1,\ t = \frac{3\pi}{4}$, поскольку $(-1;\ 1)$ — точка второй четверти.

в) $\operatorname{tg} t = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$. Поскольку $\left(-1; -\sqrt{3}\right)$ — точка третьей четверти, то, учитывая, что $-\pi < t \leqslant \pi$, делаем вывод: $t = -\frac{2\pi}{3}$.

г) $\operatorname{tg} t = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$. Поскольку $\left(2;\ -2\sqrt{3}\right)$ — точка четвёртой четверти, то, учитывая, что $-\pi < t \leqslant \pi$, делаем вывод: $t = -\frac{\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{3}$.

Вернёмся ещё раз к рисунку 145. Из представленного на нём треугольника следует, что $a = |z|\cos t$, $b = |z|\sin t$ (то же самое будет, если z — точка любой другой четверти, проверьте). Значит, $z = a + bi = |z|\cos t + i|z|\sin t = |z|(\cos t + i\sin t)$.

Определение 3. Представление комплексного числа $z = a + bi$ в виде $|z|(\cos t + i\sin t)$, где $t = \arg z$, называют **тригонометрической формой комплексного числа z.**

Пример 4 Представить в тригонометрической форме комплексное число: а) $1 + i$; б) $-1 + i$; в) $-1 - i\sqrt{3}$.

Решение. Аргументы заданных чисел найдены выше в примере 3.

а) $|1 + i| = \sqrt{2},\ \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4};\ 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

б) $|-1 + i| = \sqrt{2},\ \arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4};\ -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

в) $\left|-1 - i\sqrt{3}\right| = 2,\ \arg(-1 - i\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3};\ -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Ответ: а) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

в) $2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

С помощью тригонометрической формы комплексного числа удаётся наглядно описать операции умножения и деления комплексных чисел. На уровне краткого мнемонического правила это выглядит следующим образом.

1. *При умножении комплексных чисел их модули перемножают, а аргументы «складывают».*

2. *При делении комплексных чисел их модули делят, а аргументы «вычитают».*

Математически корректные утверждения выглядят так.

Теорема 3. Если $z_1 = |z_1|(\cos t_1 + i\sin t_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos t_2 + i\sin t_2)$, то:
1) $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2))$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2))$.

Доказательство. 1) Для доказательства первого равенства достаточно аккуратно перемножить комплексные числа и использовать тригонометрические формулы косинуса и синуса суммы.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos t_1 + i\sin t_1) \cdot |z_2|(\cos t_2 + i\sin t_2) =$$
$$= |z_1||z_2|(\cos t_1\cos t_2 - \sin t_1\sin t_2) + i(\sin t_1\cos t_2 + \cos t_1\sin t_2) =$$
$$= |z_1||z_2|(\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2)).$$

2) Докажем, что $z_2 \cdot \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)) = z_1$.

Имеем:

$$z_2 \cdot \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)) =$$
$$= |z_2|(\cos t_2 + i\sin t_2) \cdot \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)) =$$
$$= |z_1|(\cos t_2 + i\sin t_2) \cdot (\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)) =$$
$$= |z_1|(\cos t_2\cos(t_1 - t_2) - \sin t_2\sin(t_1 - t_2)) +$$
$$+ i(\sin t_2\cos(t_1 - t_2) + \cos t_2\sin(t_1 - t_2)) = |z_1|(\cos t_1 + i\sin t_1) = z_1.$$

Итак, мы доказали, что $z_2 \cdot \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)) = z_1$. Отсюда следует, что $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2))$, ч. т. д.

У вас, наверное, возник вопрос, почему выше в мнемоническом правиле слова «складывают» и «вычитают» стоят в кавычках, ведь в теореме в правых частях обеих формул написаны именно $t_1 + t_2$ и соответственно $t_1 - t_2$. Дело в том, что при сложении (вычитании) двух чисел из основного для аргументов промежутка $(-\pi; \pi]$ результат $t_1 + t_2$ (соответственно $t_1 - t_2$) вполне может оказаться меньше $-\pi$ или больше π. В таких случаях «настоящий» аргумент, скажем, произведения $z_1 \cdot z_2$ будет на 2π больше или меньше суммы $t_1 + t_2$ аргументов слагаемых.

Пример 5 Даны числа $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. Представить в тригонометрической форме: а) $z_1 z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. Первое число представлено в тригонометрической форме выше в примере 4 «б»: $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. А вот как выглядит тригонометрическая форма второго числа: $z_2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ (проверьте!).

а) $z_1 z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

На этом можно было бы поставить точку, но в условии требовалось записать результат в тригонометрической форме. Число $\frac{17\pi}{12}$ не может служить аргументом произведения, поскольку $\frac{17\pi}{12} > \pi$; а вот число $\frac{17\pi}{12} - 2\pi$, т. е. $-\frac{7\pi}{12}$, является аргументом, оно принадлежит полуинтервалу $(-\pi; \pi]$.

Итак, $z_1 z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$; вот теперь результат записан в тригонометрической форме.

б) $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) : 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$

Здесь никакие поправки не требуются, поскольку $\frac{\pi}{12} \in (-\pi; \pi]$.

Ответ: а) $4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$; б) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Теорема 4 (формула Муавра). Если $n \in \boldsymbol{Z}$, то

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Для $n = 1$ формула верна. Предположим, что она верна для $n = k$, т. е. $(\cos t + i\sin t)^k = \cos kt + i\sin kt$; докажем, что тогда она верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$.

Имеем:

$$(\cos t + i\sin t)^{k+1} = (\cos t + i\sin t)^k(\cos t + i\sin t) =$$
$$= (\cos kt + i\sin kt)(\cos t + i\sin t) = \cos(kt + t) + i\sin(kt + t) =$$
$$= \cos(k + 1)t + i\sin(k + 1)t.$$

Значит, по принципу математической индукции формула Муавра верна для любого натурального числа n. Верна она и для $n = 0$, поскольку в этом случае в обеих частях формулы получаем 1. Осталось убедиться в справедливости формулы для показателя $-n$, где n — натуральное число.

Имеем:

$$(\cos t + i\sin t)^{-n} = \frac{1}{(\cos t + i\sin t)^n} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{\cos nt + i\sin nt} =$$
$$= \cos(0 - nt) + i\sin(0 - nt) = \cos(-n)t + i\sin(-n)t,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Равенство $z^n = 1$, где $n \in \boldsymbol{N}$, выполняется тогда и только тогда, когда

$$z = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Этот результат записывают в виде

$$\sqrt[n]{1} = \left\{ \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}$$

и называют формулой *корней n-й степени из единицы*; $\sqrt[n]{1}$ — это множество из n чисел на числовой окружности, которые являются вершинами правильного n-угольника и одна из которых равна 1 (рис. 146).

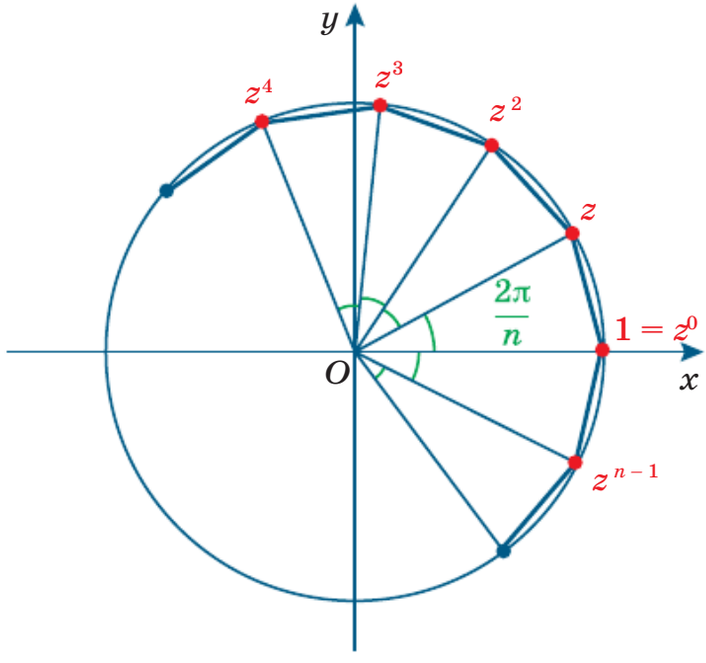


Рис. 146

Упражнения

Изобразите в комплексной плоскости числа z, для которых выполняются указанные соотношения.

35.1. а) $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -2$;
б) $\operatorname{Re} z = 3$, $(\operatorname{Im} z)^2 = 4$;
в) $\operatorname{Re} z \in \{-1; 2; 3\}$, $(\operatorname{Im} z)^2 = 4$;
г) $\operatorname{Re} z = -5$, $\operatorname{Im} z = 1$;
д) $(\operatorname{Re} z)^2 = 9$, $(\operatorname{Im} z)^2 = 4$;
е) $\operatorname{Re} z \in \{-5; -3; 4\}$, $\operatorname{Im} z \in \{1; 2\}$.

35.2. а) $\operatorname{Re} z = 0$;
б) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z < 0$;
в) $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, $\operatorname{Im} z > 0$;
г) $\operatorname{Im} z = 1$;
д) $\operatorname{Re} z > 3$, $\operatorname{Im} z = 0$;
е) $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \leqslant 0$.

35.3. а) $\operatorname{Re} z = |\operatorname{Im} z|$; г) $\operatorname{Im} z = |\operatorname{Re} z|$;
б) $|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z|$; д) $|2\operatorname{Re} z| = 3|\operatorname{Im} z|$;
в) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$; е) $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z + 1 = 0$.

35.4. Изобразите в комплексной плоскости число z, если для сопряжённого с ним числа $\overline{z}$ выполняются соотношения:

а) $\operatorname{Re}\overline{z} = 3,\ (\operatorname{Im}\overline{z})^2 = 4$; г) $(\operatorname{Re}\overline{z})^2 = 9,\ (\operatorname{Im}\overline{z})^2 = 4$;

б) $\operatorname{Re}\overline{z} \leqslant 0,\ \operatorname{Im}\overline{z} > 0$; д) $\operatorname{Re}\overline{z} \cdot \operatorname{Im}\overline{z} \leqslant 0$;

в) $\operatorname{Im}\overline{z} = |\operatorname{Re}\overline{z}|$; е) $\operatorname{Re}\overline{z} \cdot \operatorname{Im}\overline{z} + 1 = 0$.

35.5. Даны числа $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = -2 + 3i$. По правилу параллелограмма постройте в комплексной плоскости число:

а) $z_1 + z_2$; в) $\overline{z_1 - z_2}$; д) $z_1 + \overline{z_2}$;

б) $\overline{z_1} + z_2$; г) $z_2 - z_1$; е) $\overline{z_1 + \overline{z_2}}$.

35.6. Решите уравнение:

а) $z \cdot \operatorname{Im} z = i$; г) $z + \operatorname{Re} z = i$;
б) $z \cdot (\operatorname{Im} z)^2 = i$; д) $z - (\operatorname{Im} z)^2 = i$;
в) $z \cdot \operatorname{Re}(z - 2) = i + 4$; е) $\overline{z}(\operatorname{Im} z + 9) = 3 + 9i$.

Найдите модуль данного комплексного числа.

35.7. а) $3i$; в) $i(4 + 3i)$; д) $6 + 8i$;
б) $3 - 4i$; г) $-4i$; е) $-i(12 - 5i)$.

35.8. а) $(5 - i)(3 + 4i)$; г) $(i + 10)(1 - 4i)$;

б) $\dfrac{7i - 24}{12 - 5i}$; д) $\left(\dfrac{4i - 3}{7 - 24i}\right)^2$;

в) $\left(\dfrac{2i}{1 + i}\right)^{10}$; е) $\left(\dfrac{1 - i}{i}\right)^5 (12 - 5i)^{-2}$.

Изобразите в комплексной плоскости числа z, для которых выполняется указанное соотношение.

35.9. а) $|z| = 1$; г) $|-\overline{z}| = 2$;
б) $|z + 1| = 1$; д) $|z - 4i| = 3$;
в) $|2z + i| = 2$; е) $|4iz + 5| = 8$.

35.10. а) $|z| = |z - 2|$; г) $|z| = |z + 2i|$;
б) $|z - 3| = |z - 4|$; д) $|z - 2i| = |z + 4i|$;
в) $|iz - 1| = |2 + iz|$; е) $|2iz + 3| = |1 + 2z|$.

Изобразите указанное число в комплексной плоскости и найдите его модуль и аргумент.

35.11. а) $-i$;

б) i^3;

в) -10;

г) i^{-1};

д) $\left(-\bar{i}\right)^{-3}$;

е) $-10+3i+\overline{3i-10}$.

35.12. а) $(1+i)^2$;

б) $\left(\sqrt{3}+i\right)^2$;

в) $3i-1$;

г) $(1-i)^{-2}$;

д) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{-2}$;

е) $3+7i$.

35.13. Изобразите в комплексной плоскости числа z, аргумент которых равен:

а) 0;

б) π;

в) $\frac{\pi}{3}$ или $-\frac{\pi}{3}$;

г) $\frac{\pi}{2}$;

д) $-\frac{\pi}{2}$;

е) $-\frac{3\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{6}$.

35.14. Изобразите в комплексной плоскости числа z, для которых выполняются соотношения:

а) $|z|<1,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{4}$;

б) $|z|=3,\ -\frac{4\pi}{7}<\arg z<\frac{3\pi}{7}$;

в) $z\bar{z}=3|z|-2,\ -\frac{5\pi}{6}<\arg z<-\frac{\pi}{2}$;

г) $1<|z|<2,\ \frac{\pi}{5}<\arg z<\frac{2\pi}{5}$;

д) $|z|>3,\ -\frac{8\pi}{9}<\arg z<-\frac{\pi}{9}$;

е) $z\bar{z}=|z|+2,\ -\pi<\arg z<\pi$.

Упражнения для повторения

35.15. Вычислите:

а) $\sin\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$;

б) $\sin(2\operatorname{arctg}5)$;

в) $\cos\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$;

г) $\cos(2\operatorname{arcctg}3)$.

35.16. Решите уравнение:
а) $2\sin^2 x + 3\cos x - 2\sin 2x + 1 = 3\sin x - 2\cos^2 x$;
б) $3 + 2\sin x = 1 - 3\sin 2x - 2\cos x$.

35.17. Решите неравенство:
а) $|x - 11| + |x + 2| > 9$;
б) $|x + 9| + |x + 12| \leqslant 3$;
в) $|x - 11| + |x + 1| \geqslant 16$;
г) $|x + 12| + |x - 5| < 13$;
д) $|x - 4| + |x + 7| > 11$;
е) $|x - 15| + |x - 9| \leqslant 10$.

35.18. а) Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 300$ р. за единицу. Переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 100$ р., постоянные расходы предприятия $f = 1\,000\,000$ р. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в р.) вычисляется по формуле $\Pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 1 000 000 р.
б) Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. р.) задаётся формулой $q = 1000 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. р.) вычисляется по формуле $r(p) = qp$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 21 000 тыс. р. Ответ приведите в тысячах рублей.

§ 36. Применения комплексных чисел

В современном естествознании комплексные числа используются в описании практически любых периодических процессов, колебаний и т. п. Сам математический язык, связанный с комплексными числами и функциями, является основой в электромагнетизме, гидродинамике, теории упругости и других теоретических и практических приложениях математики. Мы ограничимся лишь небольшим числом тех примеров, которые мы в состоянии доказательно объяснить.

1. Тригонометрические формулы двойного и тройного аргумента

Напомним формулу Муавра (см. теорему 4 в § 35):

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Если, в частности, $n = 2$, то $(\cos t + i\sin t)^2 = \cos 2t + i\sin 2t$.
С другой стороны, $(\cos t + i\sin t)^2 = \cos^2 t + 2i\sin t\cos t - \sin^2 t$.
Итак, $\cos 2t + i\sin 2t = (\cos^2 t - \sin^2 t) + 2i\sin t\cos t$.
Отсюда следует, что

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \qquad \sin 2t = 2\sin t\cos t.$$

Как видите, получили хорошо вам известные тригонометрические формулы двойного аргумента.

Тот же самый подход можно применить для вывода тригонометрических формул тройного аргумента:

$$(\cos t + i\sin t)^3 = \cos 3t + i\sin 3t;$$
$$(\cos t + i\sin t)^3 = \cos^3 t + 3\cos^2 t \cdot i\sin t + 3\cos t \cdot (i\sin t)^2 + (i\sin t)^3 =$$
$$= \cos^3 t + 3\cos^2 t \cdot i\sin t - 3\cos t\sin^2 t - i\sin^3 t.$$

Значит,

$$\cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t\sin^2 t = \cos^3 t - 3\cos t(1 - \cos^2 t) = 4\cos^3 t - 3\cos t,$$
$$\sin 3t = 3\cos^2 t\sin t - \sin^3 t = 3(1 - \sin^2 t)\sin t - \sin^3 t = 3\sin t - 4\sin^3 t.$$

Итак,

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t, \qquad \sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t.$$

Этот приём можно применять и для нахождения тригонометрических функций углов $4t$, $5t$, ..., nt, ... Мы не будем выписывать формулы, отметим только, что $\cos nt$ и $\sin nt$ выражаются в виде многочленов n-й степени от $\cos t$ и $\sin t$ соответственно. В случае косинусов — это знаменитый многочлен П. Л. Чебышёва, который среди всех многочленов со старшим коэффициентом 2^{n-1} имеет наименьшее отклонение от нуля на отрезке $[-1; 1]$.

2. Правильные многоугольники

Пусть $Z_0Z_1...Z_{n-1}$ — вершины правильного n-угольника, вписанного в числовую окружность, причём $Z_0(1; 0)$. Проверим, что соответствующие им комплексные числа $z_0 = 1$, z_1, ..., z_{n-1} образуют множество корней уравнения $z^n - 1 = 0$.

Для определённости будем считать, что вершины $Z_0Z_1...Z_{n-1}$ и, соответственно, числа $z_0 = 1$, z_1, ..., z_{n-1} поочерёдно перечислены, начиная с z_0, в положительном направлении. Так как все углы $\angle Z_0OZ_1$, $\angle Z_1OZ_2$, ..., $\angle Z_{n-2}OZ_{n-1}$, $\angle Z_{n-1}OZ_0$ равны между собой, то радианная величина каждого из них равна $t = \frac{2\pi}{n}$. Поэтому

$$z_1 = \cos t + i\sin t,\ z_2 = \cos 2t + i\sin 2t,\ z_3 = \cos 3t + i\sin 3t,\ ...,$$
$$z_{n-1} = \cos(n-1)t + i\sin(n-1)t.$$

Для любого из этих чисел получаем

$$(z_k)^n = (\cos(kt) + i\sin(kt))^n = \cos(nkt) + i\sin(nkt) = \\ = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k = 1.$$

Значит, все числа $z_0 = 1, z_1, \ldots, z_{n-1}$ являются корнями уравнения $z^n - 1 = 0$.

Наоборот, пусть $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ — любой корень уравнения $z^n = 1$, т. е.

$$z^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0).$$

Значит, угол $n\alpha$ кратен 2π или, аккуратнее, $n\alpha = 2\pi N$, $N \in \boldsymbol{Z}$. Разделим N на n с остатком, $N = qn + r$. Тогда $n\alpha = 2\pi(qn + r)$, $\alpha = 2\pi q + \frac{2\pi}{n} \cdot r$, $0 \leqslant r \leqslant n - 1$, т. е. аргумент α отличается от одного из аргументов $\frac{2\pi}{n} \cdot 0$, $\frac{2\pi}{n} \cdot 1$, ..., $\frac{2\pi}{n} \cdot (n-1)$ на слагаемое $2\pi q$. Значит, число $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ совпадает с одним из чисел $z_0 = 1, z_1, \ldots, z_{n-1}$.

Если обозначить $z = z_1$, то получаем геометрическую прогрессию $z_0 = 1 = z^0$, $z_1 = z = z^1$, $z_2 = z^2$, ..., $z_{n-1} = z^{n-1}$. При этом $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0$, так как $z^n - 1 = 0$. Выпишем итоговую *формулу для всех корней n-й степени из единицы*:

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

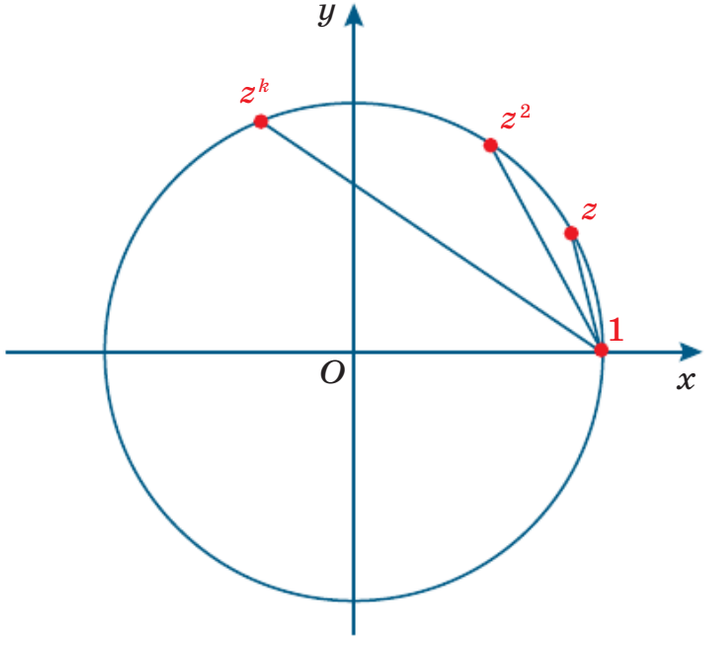


Рис. 147

Пример Найти сумму квадратов длин всех сторон и квадратов длин всех диагоналей правильного 11-угольника, вписанного в окружность радиусом 5 см.

Решение. Сначала решим ту же задачу, но для числовой окружности и вписанного в неё правильного 11-угольника с вершинами $z^0 = 1, z, z^2, \ldots, z^{10}$, $z = \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$ (рис. 147).

Найдём сумму S_0 квадратов длин отрезков с концом в точке $z^0 = 1$. Так как для $k = 1, 2, 3, \ldots, 10$

$$\begin{gathered}|1 - z^k|^2 = (1 - z^k)\overline{1 - z^k} = (1 - z^k)(\overline{1} - \overline{z^k}) = \\ = 1 - z^k - \overline{z^k} + z^k \cdot \overline{z^k} = 1 - z^k - \overline{z^k} + |z^k|^2 = \\ = 2 - z^k - \overline{z^k},\end{gathered}$$

то

$$S_0 = (2 - z - \bar{z}) + \left(2 - z^2 - \overline{z^2}\right) + \ldots + \left(2 - z^{10} - \overline{z^{10}}\right).$$

Так как из $z^n = 1$ следует $\overline{z^n} = (\bar{z})^n = 1$, то все сопряжённые числа $\bar{z}$, $\overline{z^2}$, ..., $\overline{z^{10}}$ — это те же числа z, z^2, ..., z^{10}, но записанные в обратном порядке. Поэтому

$$\begin{gathered}S_0 = 20 - (z + z^2 + \ldots + z^{10}) - \left(\bar{z} + \overline{z^2} + \ldots + \overline{z^{10}}\right) = \\ = 20 - 2(z + z^2 + \ldots + z^{10}) = 20 - 2 \cdot (-1) = 22.\end{gathered}$$

Геометрически ясно, что для каждой из других вершин 11-угольника соответственные суммы S_1, S_2, ..., S_{10} будут такими же. Общую сумму $S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_{10} = 11 \cdot 22$ надо не забыть разделить на 2, так как каждый отрезок посчитан в ней дважды. В итоге получаем ответ 121. Тот же ответ получается и для любого правильного 11-угольника, вписанного в числовую окружность, ведь при повороте длина не изменяется. При гомотетии с коэффициентом 5 числовая окружность перейдёт в окружность с радиусом 5 и центром в начале координат; квадраты длин при этом увеличатся в 25 раз. Используя параллельный перенос, можно после этого получить любую окружность радиусом 5; длины при параллельном переносе не изменятся. Получаем ответ: $121 \cdot 25 = 3025$.

3. Метод Кардано решения кубических уравнений

Ещё в середине XVI в. итальянский учёный Джеро́ламо Карда́но[1] предложил общий способ решения уравнений $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ третьей степени. Общая идея состояла во введении новых переменных, относительно которых уравнение принимает более простой вид. Первый шаг был хорошо известен: если в уравнение вместо x подставить $x + a$, раскрыть скобки и привести подобные, то получится уравнение

[1] Слова «Э, да тут *карданный* вал стучит...», произнесённые автослесарем, связаны именно с Дж. Кардано, который первым опубликовал (не изобрёл) описание механизма передачи крутящего момента между двумя валами.

вида $x^3 + (3a + b)x^2 + \ldots = 0$. Значит, можно a подобрать так, чтобы в новом уравнении избавиться от x^2. Дальнейшие преобразования по методу Кардано покажем на конкретном примере решения уравнения

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Сделаем подстановку $x = t + \frac{a}{t}$. Получим

$$\left(t + \frac{a}{t}\right)^3 - 7\left(t + \frac{a}{t}\right) + 6 = 0,$$

$$t^3 + \frac{a^3}{t^3} + 3a\left(t + \frac{a}{t}\right) - 7\left(t + \frac{a}{t}\right) + 6 = 0,$$

что при $3a = 7$ приводит к

$$t^3 + \frac{a^3}{t^3} + 6 = 0,$$

$$(t^3)^2 + 6t^3 + \frac{343}{27} = 0,$$

$$t^3 = -3 \pm \sqrt{9 - \frac{343}{27}} = -3 \pm \frac{\sqrt{-100}}{3\sqrt{3}} = -3 \pm \frac{10}{3\sqrt{3}}i.$$

После этого находим t, извлекая кубический корень из комплексного числа, и затем возвращаемся к $x = t + \frac{a}{t}$.

Получается удивительная вещь: с одной стороны, уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$ с действительными коэффициентами имеет три сравнительно легко находимых действительных корня $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. С другой стороны, общие формулы корней кубического уравнения приводят к обязательному использованию комплексных чисел.

Всё же, пожалуй, наиболее фундаментальным вкладом комплексных чисел в математику является *основная теорема алгебры* (см. теорему 1 в § 34).

В завершение параграфа приведём ещё один интересный и важный факт. Это одно из многочисленных применений основной теоремы алгебры. В его формулировке нигде не упоминаются комплексные числа, а вот его доказательство базируется именно на использовании комплексных чисел.

Любой многочлен $P_n(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных или квадратных многочленов с действительными коэффициентами.

Упражнения

36.1. Решите уравнение:

а) $z^2 - 4z + 5 = 0$;
б) $z^2 - 6z + 34 = 0$;
в) $2z^2 - 6z + 17 = 0$;
г) $z^2 + 4z + 13 = 0$;
д) $z^2 + 8z + 97 = 0$;
е) $2z^2 + 22z + 73 = 0$.

36.2. Докажите, что:

а) $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$;
б) $(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$;
в) $\left(\overline{x + iy}\right)^2 = \overline{(x + iy)^2}$;
г) для действительных коэффициентов a, b, c уравнения $az^2 + bz + c = 0$ и $a(\bar{z})^2 + b\bar{z} + c = 0$ имеют одинаковые множества корней.

36.3. Составьте приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, корнями которого являются указанные числа. Если такого уравнения нет, то приведите обоснование такого отсутствия:

а) i, $-i$;
б) $-8^{-1,5}i$, $\frac{i}{16}$;
в) $5 + i$, $i - 5$;
г) $4i$, $\frac{4}{i}$;
д) $1 + i$, $-i - 1$;
е) $3 - 2i$, $2i + 3$.

36.4. Составьте приведённое квадратное уравнение с комплексными коэффициентами, корнями которого являются числа:

а) i, $-2i$;
б) $-i$, $\frac{i}{16}$;
в) $5 + i$, $i - 5$;
г) $4i$, $\frac{2}{i}$;
д) $1 + i$, $-i - 1$;
е) $3 - 2i$, $2i + 3$.

36.5. Докажите, что уравнение $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, с комплексными коэффициентами:

а) имеет те же корни, что и уравнение $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$;

б) имеет те же корни, что и уравнение $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$;

в) при $b^2 = 4ac$ имеет единственный корень;

г) при $b^2 \neq 4ac$ имеет два корня $z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

д) при действительных коэффициентах a, b, c и $b^2 < 4ac$ имеет два корня $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$;

е) между формулами $z = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ и $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ нет противоречия.

36.6. Вычислите:

а) $\sqrt{2i}$;
б) $\sqrt{3 - 4i}$;
в) $\sqrt{24i - 7}$;
г) $\sqrt{-8i}$;
д) $\sqrt{5 + 12i}$;
е) $\sqrt{-9i - 40}$.

36.7. Решите уравнение:

а) $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$;
б) $z^2 - 6z + 3 + i = 0$;
в) $z^2 - (4 + i)z + 3 + 3i = 0$;
г) $z^2 + iz + 12 = 0$;
д) $z^2 - (3 + 2i)z + 6i = 0$;
е) $z^2 + 2(2 + 2i)z - 3(1 - 2i) = 0$.

36.8. Для данного множества M изобразите на комплексной плоскости множество $L = \left\{\sqrt{z}:\ z \in M\right\}$, если:

а) $M = \{z: \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z > 0\}$;

б) $M = \left\{z: |z| = 1,\ \frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$;

в) $M = \{z: |z| = 1,\ -\pi < \arg z < \pi\}$;

г) $M = \{z:\ z \cdot \bar{z} = 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$;

д) $M = \left\{z: |z| = 4,\ \frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \pi\right\}$;

е) $M = \{z: |z| = 9,\ -\pi < \arg z < 0\}$.

Вычислите с помощью формулы Муавра.

36.9. а) $(\cos 10° + i\sin 10°)^9$;
б) $(\cos 15° + i\sin 15°)^{36}$;
в) $(\cos 25° - i\sin 25°)^6$;
г) $(\cos 5° + i\sin 5°)^{31}$;
д) $(\cos 15° + i\sin 15°)^{-18}$;
е) $(\cos 25° - i\sin 25°)^{-12}$.

36.10. а) $(1 + i)^4$;
б) $\left(\sqrt{3} + i\right)^5$;
в) $\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)^6$;
г) $(1 + i)^{44}$;
д) $\left(\sqrt{3} - i\right)^{-5}$;
е) $\left(-1 - \sqrt{3}\,i\right)^{-5}$.

36.11. Пусть $\{z,\ z^2,\ z^3,\ \ldots,\ z^n,\ z^{n+1},\ \ldots\}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}11\pi + i\sin 0{,}11\pi$. Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n лежит:
а) во II четверти;
б) в III четверти;
в) в IV четверти;
г) выше биссектрисы I и III четвертей;
д) ниже биссектрисы II и IV четвертей;
е) в IV четверти ниже биссектрисы II и IV четвертей.

Пусть $\{z,\ z^2,\ z^3,\ \ldots,\ z^n,\ z^{n+1},\ \ldots\}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}12\pi + i\sin 0{,}12\pi$.

36.12. Запишите в тригонометрической форме и изобразите в координатной плоскости число:
а) z^3; б) z^{12}; в) z^{17}; г) z^{27}.

36.13. а) Укажите наименьшее натуральное решение n уравнения $z^n = 1$.
б) Сколько различных значений принимает данная прогрессия?

36.14. Обозначим $\sqrt[n]{z_0}$ множество всех корней уравнения $z^n = z_0$. Докажите, что:

а) $\sqrt[n]{\cos t + i\sin t} = \left\{\cos\dfrac{t+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{t+2\pi k}{n},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\right\}$;

б) множество чисел из пункта «а» — это множество вершин правильного n-угольника, вписанного в числовую окружность;

в) $\sqrt[n]{|z|(\cos t + i\sin t)} =$

$$= \left\{\sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\frac{t+2\pi k}{n} + i\sin\frac{t+2\pi k}{n}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\right\},$$

где $\sqrt[n]{|z|}$ — это арифметический корень n-й степени;

г) множество чисел из пункта «в» — это множество вершин правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

36.15. Запишите в тригонометрической форме и изобразите в координатной плоскости:

а) $\sqrt{\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ}$;

б) $\sqrt[3]{8(\cos 105^\circ + i\,\mathrm{si\,n}105^\circ)}$;

в) $\sqrt[4]{81(\cos 160^\circ + i\sin 160^\circ)}$;

г) $\sqrt{\cos 0{,}2\pi + i\sin 0{,}2\pi}$;

д) $\sqrt[3]{8(\cos 0{,}9\pi - i\sin 0{,}9\pi)}$;

е) $\sqrt[4]{81(\cos 2 + i\sin 2)}$.

36.16. Запишите в стандартной форме и изобразите в координатной плоскости:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[3]{8}$; г) $\sqrt[3]{-1}$; д) $\sqrt[3]{-i}$; е) $\sqrt[3]{-64i}$.

36.17. а) Найдите сумму квадратов длин всех сторон и квадратов длин всех диагоналей правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R.

б) Фиксированную точку P соединили отрезками со всеми вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R. Докажите, что сумма квадратов длин этих отрезков равна $n(R^2 + d^2)$, где d — расстояние от P до центра окружности.

в) Каждую вершину правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, соединили отрезками с остальными вершинами. Чему равно произведение длин проведённых отрезков?

г) Точку окружности радиусом R соединили отрезками с вершинами вписанного в окружность квадрата. Докажите, что сумма четвёртых степеней длин отрезков равна $24R^4$.

Упражнения для повторения

36.18. а) Одна таблетка лекарства массой 20 мг содержит 8 % активного вещества. Ребёнку в возрасте до года врач прописывает 0,8 мг активного вещества на каждый килограмм массы в сутки. Сколько таблеток следует дать ребёнку в возрасте семи месяцев и массой 8 кг за один приём, если лекарство следует принимать равными количествами 4 раза в сутки?

б) Одна таблетка лекарства массой 40 мг содержит 12 % активного вещества. Ребёнку в возрасте до трёх лет врач прописывает 0,8 мг активного вещества на каждый килограмм массы в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте двух лет и массой 12 кг в течение суток?

36.19. Решите уравнение:
а) $\sin 5x + \cos 4x = 2$;
б) $\sin 1{,}5x + \cos 3x = -2$.

36.20. Найдите основной период функции:
а) $y = \operatorname{tg}\dfrac{8x+7}{12} + 3$;
в) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{4x-5}{10} - 2$;
б) $y = 3\cos\dfrac{2x-9}{5} - 4$;
г) $y = -2{,}5\sin\dfrac{4x+11}{7} + 5$.

36.21. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1-x}, & \text{если } -7 \leqslant x < 1, \\ -(x-2)^3 - 1, & \text{если } 1 \leqslant x < 3, \\ \dfrac{4}{x-2} - 6, & \text{если } 3 \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$

а) Постройте график функции.
б) Прочитайте график функции.
в) Укажите промежутки, на которых прямая $x + y = 1$ расположена выше графика функции $y = f(x)$.
г) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = px + 3$ имеет корни.

Итак, в главе 4

Мы собрали вместе многие ранее изученные факты о натуральных, целых, рациональных и действительных числах. Дополнили их новыми сведениями об этих расширяющих друг друга числовых структурах. Продолжили эту цепочку расширений, включив множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел в множество $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}.$$

На новом уровне доказательности познакомились:

— с операцией деления с остатком целого числа на натуральное;

— с разложением натурального числа на простые множители и основной теоремой арифметики;

— с отсутствием рациональных чисел, квадраты которых равны 2, 5, 10 и т. п.;

— с критериями делимости на 2, 3, 5, 9, 10, 11, 25;

— с методом математической индукции.

Познакомились с новыми понятиями:

— аксиоматическим подходом к описанию множества действительных чисел;

— аксиомой о разделяющем числе и её следствиями;

— аксиоматическим подходом к описанию множества комплексных чисел;

— координатной плоскостью как геометрической моделью комплексных чисел;

— алгебраической и тригонометрической формами записи комплексных чисел;

— теоремой Муавра и основной теоремой алгебры.

В множестве $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел сформулировали следующие понятия:

— алгебраические операции;

— переход к сопряжённому числу;

— модуль и аргумент комплексного числа;

— квадратный корень из любого комплексного числа, в частности из отрицательного числа;

— корень натуральной степени из единицы.

Узнали свойства перечисленных понятий, их разнообразные применения, формулы, позволяющие успешно оперировать с ними:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i;$$

$$\overline{x + yi} = x - yi;$$

$$\sqrt{c} = \pm i\sqrt{-c}, \quad c < 0;$$

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \cdot \frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right);$$

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|; \qquad |z| = |\bar{z}|;$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \qquad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}};$$

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt, \; n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\sqrt[n]{1} = \left\{\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1\right\}.$$

Вопросы

1. Каких чисел больше среди первых двадцати натуральных чисел: простых или составных?
2. Объясните, почему делитель c числа b, которое является делителем числа a, также является делителем числа a.
3. Объясните, почему различны остатки от деления чисел 2021 и –2021 на число 3.
4. Приведите формулировку критерия делимости на 11.
5. Как по каноническому разложению числа на простые множители определить, делится ли оно на 36?
6. Сформулируйте основную теорему арифметики.
7. Объясните, почему квадрат рационального числа не может быть равен 7.
8. Запишите аксиому *транзитивности* отношения порядка действительных чисел.

9. Объясните, почему квадратное уравнение в комплексных числах всегда имеет корни.

10. Сформулируйте теорему об умножении комплексных чисел в тригонометрической форме.

11. Для каких комплексных чисел z совпадают сопряжённое и обратное числа?

12. Почему в множестве $\boldsymbol{C}$ нельзя ввести отношение порядка с теми же аксиомами, что и в множестве $\boldsymbol{R}$?

Тест

1. Сколько пар простых чисел, отличающихся на 2, есть среди чисел 1, 2, 3, ..., 49, 50?
а) 6 б) 5 в) 4 г) 7

2. Для числа $n = 135\,799\,999$ выберите верное утверждение.
а) $n \vdots 3$
б) $(n+1) \vdots 9$
в) остаток от деления n на 9 равен 2
г) $(n^2 - n) \vdots 3$

3. Укажите неверное утверждение.
а) Сумма двух рациональных чисел всегда рациональное число.
б) Разность двух иррациональных чисел может быть не иррациональным числом.
в) Произведение двух иррациональных чисел всегда иррациональное число.
г) Произведение рационального и иррационального чисел может быть рациональным числом.

4. Выберите верное утверждение для множеств $A = [1; 3)$, $B = [2; 10]$, $C = [3; 7)$, $D = \{5; 100\}$ на числовой прямой.
а) A левее B б) A левее C в) C левее D г) B левее D

5. Дана геометрическая прогрессия $1, i, i^2, i^3, \ldots$. Выберите верное утверждение.
а) На 2021-м месте в данной прогрессии стоит число 1.
б) На 2021-м месте в данной прогрессии стоит число i.
в) Это возрастающая последовательность.
г) Множество значений членов данной прогрессии бесконечно.

6. Выберите верное утверждение относительно комплексного числа $7i - 4$.

а) Действительная часть данного числа — натуральное число.

б) Мнимая часть данного числа — это чисто мнимое число $7i$.

в) Модуль данного числа больше 8.

г) Модуль числа, обратного данному, больше 0,13.

7. Для чисел $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = -2 + 3i$ укажите неверное утверждение.

а) Число z_1 лежит не в третьей координатной четверти.

б) Число z_2 лежит во второй координатной четверти.

в) Число $z_1 + z_2$ лежит не в первой координатной четверти.

г) Число $z_1 - z_2$ лежит не в четвёртой координатной четверти.

8. Для числа $z = -0{,}3 + 0{,}4i$ укажите верное утверждение.

а) $|\bar{z}| < 0{,}45$ б) $|z| = 0{,}7$ в) $|z^2| < 0{,}3$ г) $|z^3| < 0{,}1$

9. Сколько чисел из множества $\left\{\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n \mid n = 1, 2, \ldots, 10, 11\right\}$ имеет отрицательный аргумент?

а) пять б) шесть в) семь г) четыре

10. Назовите количество чисел из множества $\sqrt[11]{1}$, мнимая часть которых меньше действительной.

а) пять б) шесть в) четыре г) восемь

Из истории математики

То, что ныне мы лаконично записываем в виде $\boldsymbol{N \subset Z \subset Q \subset R \subset C}$, т. е. переход от натуральных чисел к целым, от целых к рациональным и далее к действительным и комплексным, соответствует, по существу, всей истории математики.

Те или иные формы натурального счёта и записи подсчётов (на пальцах, палочками, камешками и т. п.) имеются в истории любой известной нам культуры. Наверное, один из самых древних экспонатов счёта *зарубками* относится к XXX (!) в. до н. э.: это волчья кость длиной 18 см, на которой группами по пять расположены 55 зарубок. Она обнаружена в Моравии (Чехия). Зарубки — один из наиболее распространённых наивных способов записи счёта; широко известное «заруби себе на носу» и означает — «сделай зарубку», т. е. хорошенько запомни.

Пятка́ми производили счёт русские торговцы и купцы; этот способ и доныне используется в простейших статистических подсчётах (см. учебник «Алгебра. 7 класс»).

Термин *натуральные* подчёркивает естественное, природное происхождение чисел: *Nature* так и переводится, как натура, природа, естество. Первоначально пифагорейцы, учёные Древней Греции конца VI в. до н. э., числом считали собранные вместе *неделимые* единицы, т. е. число — это всегда натуральное число.

Теория делимости известна нам по изложению в книгах VII и IX «Начал» *Евклида* (III в. до н. э.). Она была основана на алгоритме нахождения наибольшего общего делителя двух чисел, дошедшем до нас практически без изменений. Теорема 1 из § 32 — это утверждение 32 из книги VII «Начал». Каноническое разложение на простые сомножители, по существу, совпадает с утверждением 14 из книги IX, где разобран случай, когда все показатели степеней равны 0 или 1. Евклиду же принадлежит и доказательство бесконечности множества простых чисел.

Идеи и элементы доказательств по индукции встречаются и у Евклида, и у *Прокла* (V в. н. э.), и у многих других математиков. Специальный термин «индукция» стал использовать *Джон Валлис* (1655 г.), а Блез *Паскаль* в 1654 г. использовал этот приём для доказательства свойств треугольника, составленного из чисел сочетаний, названного позже в его честь — треугольник Паскаля. Термин «метод математической индукции» и его формальное изложение предло-

жил английский логик Огастес де Морган в книге «First notions of logic preparatory to the study of geometry» (1839 г.). В качестве логической аксиомы формальной теории арифметики математическая индукция появляется в работах Рихарда Дедекинда (1888 г.) и Джузеппе Пеано (1889 г.). Позже *аксиоматика Пеано* стала одной из базовых аксиоматических теорий в математике.

Дробные числа, доли, части и т. д., т. е. то, что теперь мы называем положительными рациональными числами, естественно возникают, как только приходится *делить* одно натуральное число на другое. Они появлялись при необходимости производить всё более и более сложные подсчёты, связанные с измерением различных величин (масса, площадь, стоимость, ...) и их делением на равные части и доли. Дробные числа прошли столь же долгую историю, что и числа натуральные. К примеру, шестидесятеричные дроби и связанное с ними деление часа на 60 мин, а минуты на 60 с возникли в древнем Вавилоне (III тысячелетие до н. э.), а, скажем, $\frac{1}{2}$ — половина, $\frac{1}{3}$ — треть, $\frac{1}{4}$ — четь, $\frac{1}{5}$ — пятина, $\frac{1}{8}$ — полчеть, $\frac{1}{10}$ — десятина, $\frac{1}{24}$ — полполполтреть (малая треть) были известны ещё в Древней Руси.

Пифагорейцы и вслед за ними Евклид трактовали рациональные числа, по существу, как пары (m, n) натуральных чисел (в нашей терминологии — числитель и знаменатель) и объединяли вместе все пропорциональные между собой пары, выбирая затем из всего объединения «наименьшую пару» (см. «Начала», книга VII, утверждения 20—22). Разумеется, все арифметические операции и свойства были к тому времени известны, разве что вычитать можно было только из большего меньшее. Тот поразительный факт, что имеются отрезки, длины которых не являются рациональными числами, был открыт *пифагорейцами*. Существует легенда о том, что Гиппас из Метапонта за письменное изложение или разглашение *иррациональности* (как он говорил, *алогичности*) длины диагонали единичного квадрата был изгнан из школы пифагорейцев.

Автор книги «Thiende» (что можно перевести как «Decima»/«Десятая»), голландец Симон Стивен (1548—1620), был, пожалуй, первым, кто начал утверждать, что иррациональные числа есть столь же нормальный объект, что и рациональные числа. Кстати, он же первым предложил запись рациональных чисел в виде десятичных дробей и использовать десятичную запятую (точку — в англоязычных странах).

После трактата «Всеобщая арифметика» Исаака Ньютона (1643—1727) и двухтомной «Универсальной арифметики» Леонарда Эйлера

натуральные, целые, рациональные и иррациональные числа традиционно стали рассматриваться вместе и считаться элементами одного и того же множества *действительных* чисел. Строгая математическая теория действительных чисел была построена к концу XIX в. в работах Карла Вейерштрасса, Рихарда Дедекинда, Георга Кантора. Список аксиом действительных чисел, приведённый в § 33, почти повторяет аксиоматику, предложенную Давидом Гильбертом в начале XX в. Исключение, пожалуй, составляет только аксиома о разделяющем элементе, которая, по существу, совпадает с базовой идеей Р. Дедекинда построения действительных чисел. Гильберт вместо неё использовал сочетание принципа Архимеда и принципа вложенных отрезков.

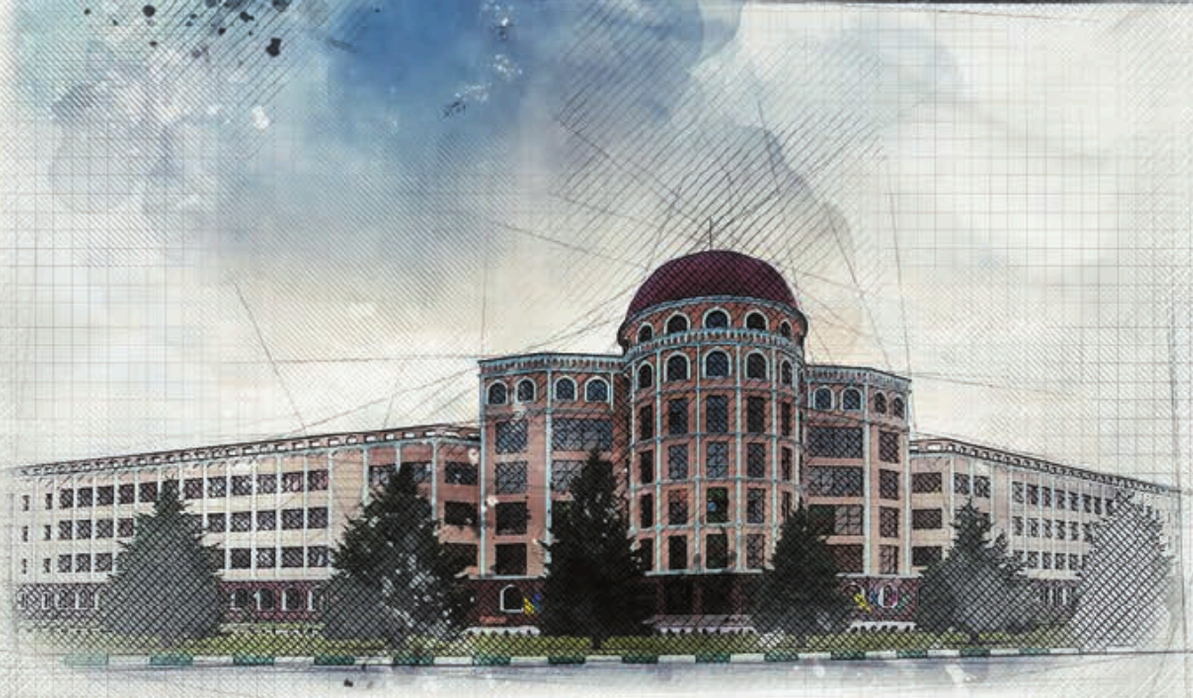
Возникновение в математике комплексных чисел традиционно относят к первой половине XVI в. в связи с методами решения кубических уравнений таких математиков, как Сципион дель Ферро, Никколо Тарталья, Джероламо Кардано. Как писал последний в трактате «Великое искусство», «если требуется разделить 10 на две части, произведение которых дало бы 30 или 40, то ясно, что этот случай невозможен. Но мы поступим так...», и далее описывает (в современных ему обозначениях) числа $5 \pm i\sqrt{15}$. Сам Кардано называл такие объекты (числа) «софистически отрицательными» и старался ими не пользоваться. Несколько позже Рафаэль Бомбелли (1526—1572) при решении кубических уравнений уже действовал с такими числами по привычным алгебраическим правилам, используя специальную терминологию; например, он вместо $\sqrt{-5}$ писал *piudumenoR.q.5*.

Формальные выражения $x + y\sqrt{-1}$, возникающие при решении квадратных и кубических уравнений, Декарт предложил называть «мнимыми», отличая их от настоящих, «реальных» чисел. Определённый скептицизм к таким объектам выражал и Лейбниц, который в 1702 г. писал о «...двойственной сущности, находящейся между бытием и небытием, которую мы называем мнимым корнем из отрицательной единицы». Однако после вывода Абрахамом де Муавром (1667—1754) общей формулы корней n-й степени из единицы, и в особенности после работ Леонарда Эйлера, комплексные числа стали неотъемлемой частью математики.

Эйлер ввёл сам символ i для мнимой единицы и, что особенно важно, показал, каким образом все основные элементарные функции распространяются на комплексные числа. В частности, поразительная *формула Эйлера* $e^{it} = \cos t + i\sin t$ связывает вместе показательную функцию с тригонометрическими, а её частный случай $e^{i\pi} + 1 = 0$ связывает вместе пять «мировых» числовых констант — 0, 1, π, e, i.

Эйлеру же принадлежит явная формулировка *основной теоремы алгебры*, первое корректное доказательство (1799 г.) которой предложил Карл Гаусс. После работ Гаусса за числами вида $x + iy$ прочно закрепилось название «комплексные числа», а термины «модуль», «аргумент», «сопряжённое число» принадлежат Огюстену Луи Коши (1789—1857), который заложил основы науки, называемой теперь *комплексный анализ* или ТФКП — теория функций комплексной переменной.

К концу XIX в. комплексные числа стали применяться при расчёте электрических цепей. Начиная с работ великого русского учёного-механика Николая Егоровича Жуковского (1847—1921), комплексные числа стали общепринятой техникой в исследованиях по аэродинамике, теории крыла и т. п. Активно используются комплексные числа и в *теории фракталов*, возникшей в 70-х гг. XX в.



Ингушский государственный
университет.
Магас

§37. Степенные функции с натуральным показателем
§38. Степенные функции с целым отрицательным показателем
§39. Функция $y = \sqrt[n]{x}$
§40. Свойства корней n-й степени
§41. Понятие степени с любым рациональным показателем
§42. Степенные функции с рациональным показателем
§43. Иррациональные уравнения
§44. Преобразование иррациональных выражений
§45. Понятие степени с иррациональным показателем

Глава 5

Степенные функции

§ 37. Степенные функции с натуральным показателем

В этом параграфе речь пойдёт о функциях вида $y = x^n$, $n \in N$, — их называют *степенными функциями с натуральным показателем*. В курсе алгебры 7—9 классов три такие функции мы уже изучили: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$.

Выясним, как обстоит дело при $n > 3$. Рассмотрим функцию $y = x^4$. Заметим прежде всего, что это чётная функция. В самом деле, если $f(x) = x^4$, то $f(-x) = (-x)^4 = x^4$. Как видите, $f(-x) = f(x)$, а это как раз и означает, что $y = f(x)$, где $f(x) = x^4$, — чётная функция. Значит, её график симметричен относительно оси ординат. Поэтому поступим так: построим график этой функции при $x \geqslant 0$, а затем воспользуемся указанной симметричностью графика.

Составим таблицу значений для функции $y = x^4$, $x \geqslant 0$.

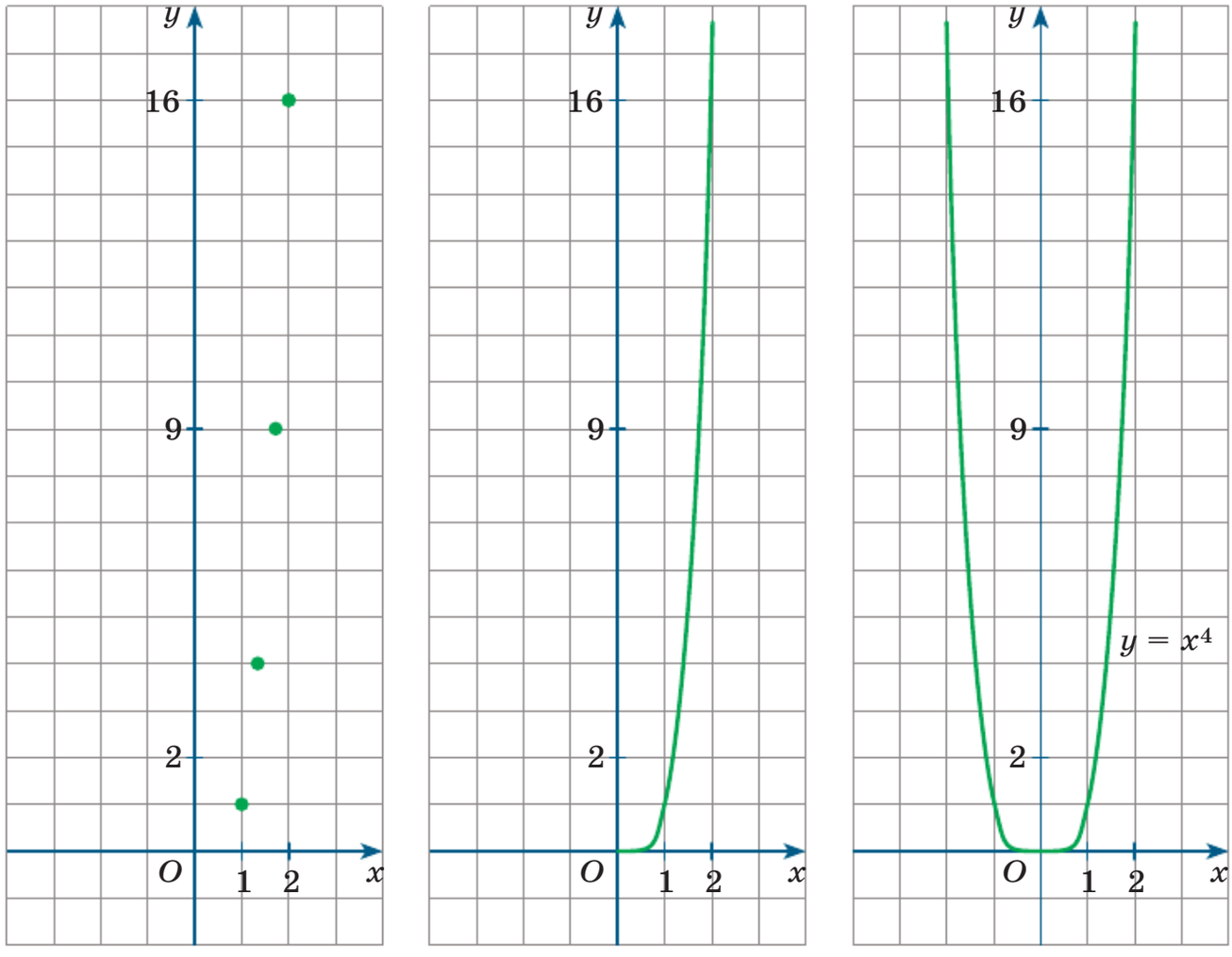
x	0	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	$\sqrt{3} \approx 1{,}7$	2
y	0	1	4	9	16

Построим точки (0; 0), (1; 1), $\left(\sqrt{2}; 4\right)$, $\left(\sqrt{3}; 9\right)$, (2; 16) на координатной плоскости xOy (рис. 148, *а*), они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 148, *б*). Добавив линию, симметричную построенной относительно оси ординат, получим график функции $y = x^4$ (рис. 148, *в*). Как видите, график похож на параболу.

ИКТ Такой же вид имеют графики функций $y = x^6$, $y = x^8$ и вообще $y = x^{2n}$, $n \in N$.

Перечислим свойства функции $y = x^{2n}$, $n \in N$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$.



а *б* *в*

Рис. 148

2. $y = x^{2n}$ — чётная функция.
3. Функция $y = x^{2n}$ возрастает при $x \geqslant 0$, убывает при $x \leqslant 0$.
4. Функция ограничена снизу, не ограничена сверху.
5. $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует.
6. $y = x^{2n}$ — непрерывная функция.
7. Область значений функции $E(f) = [0; +\infty)$.
8. Функция выпукла вниз.

Пример 1 Построить график функции $y = (x + 2)^4 - 3$.

Решение. Перейдём к вспомогательной системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые $x = -2$, $y = -3$, т. е. выбрав в качестве начала новой системы координат точку $(-2; -3)$. К новой системе координат «привяжем» кривую $y = x^4$ (рис. 149).

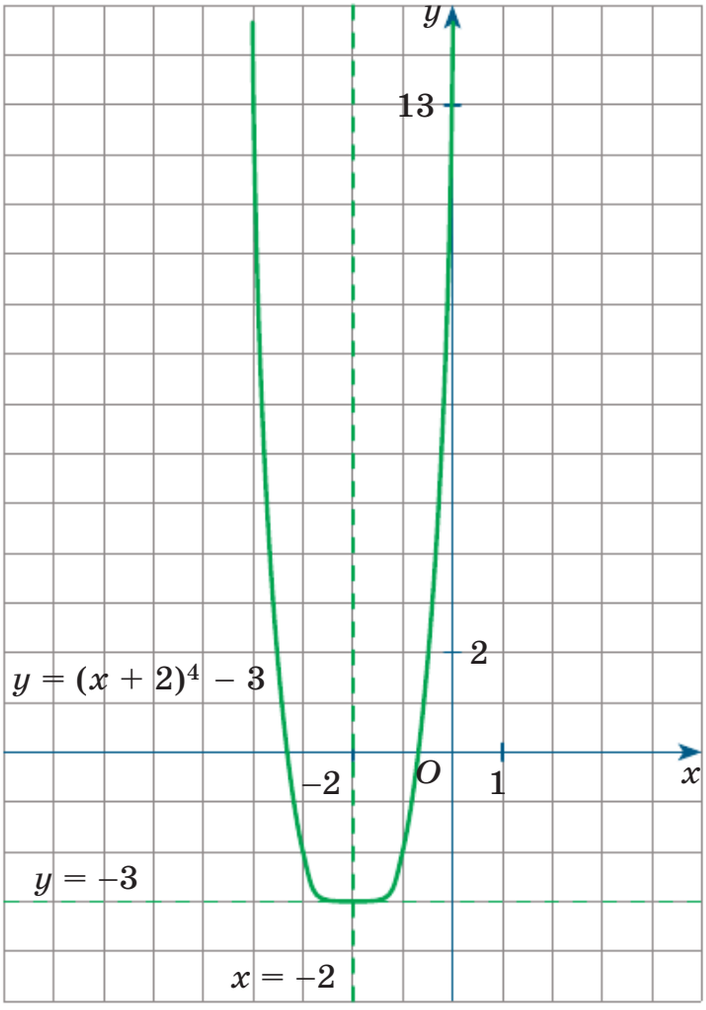


Рис. 149

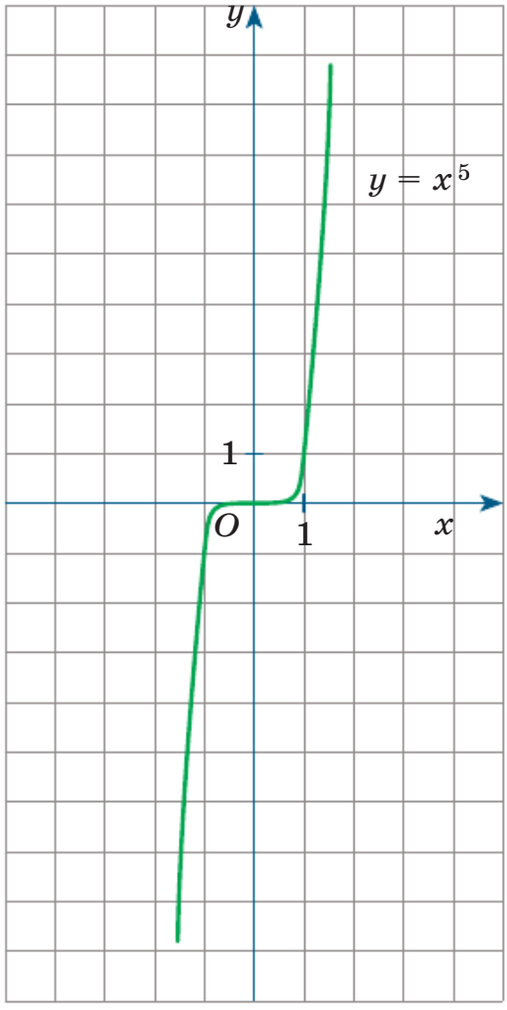


Рис. 150

Рассмотрим функцию $y = x^5$. Заметим прежде всего, что это нечётная функция. В самом деле, если $f(x) = x^5$, то $f(-x) = (-x)^5 = -x^5$. Как видите, $f(-x) = -f(x)$, а это как раз и означает, что $y = f(x)$, где $f(x) = x^5$, — нечётная функция. Значит, её график симметричен относительно начала координат. Поэтому можно построить график этой функции при $x \geqslant 0$, а затем воспользоваться указанной симметричностью графика. При $x \geqslant 0$ график похож на график функции $y = x^4$, $x \geqslant 0$ (см. рис. 148, *б*). А весь график представлен на рисунке 150. Как видите, график похож на кубическую параболу.

ИКТ Такой же вид имеют графики функций $y = x^7$, $y = x^9$ и вообще $y = x^{2n+1}$, $n \in N$.

Перечислим свойства функции $\boldsymbol{y = x^{2n+1}}$, $\boldsymbol{n \in N}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $y = x^{2n+1}$ — нечётная функция.

3. $y = x^{2n+1}$ — возрастающая функция.

4. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.
5. $y_{\text{наим}}$ не существует, $y_{\text{наиб}}$ не существует.
6. $y = x^{2n+1}$ — непрерывная функция.
7. Область значений функции $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
8. Функция выпукла вверх на луче $(-\infty; 0]$, выпукла вниз на луче $[0; +\infty)$.

Пример 2 Решить уравнение $x^5 + 3x - 4 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $x^5 = 4 - 3x$. В левой части стоит возрастающая функция $y = x^5$, а в правой части — убывающая функция $y = 4 - 3x$. Значит, уравнение не может иметь более одного корня. А один корень нетрудно подобрать: это $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Упражнения

37.1. Найдите значение n, при котором график степенной функции $y = x^n$ проходит через точку:

а) $(-2; 64)$; в) $(3; 243)$; д) $\left(\sqrt{7}; 49\right)$;

б) $(-8; -512)$; г) $(4; 256)$; е) $\left(\sqrt{5}; 125\right)$.

Постройте график функции.

37.2. а) $y = x^3$; в) $y = -x^6$; д) $y = -x^8$;

б) $y = x^4$; г) $y = x^5$; е) $y = -x^7$.

37.3. а) $y = (x - 1)^4$; в) $y = \frac{1}{8}x^6 - 3$; д) $y = -(x - 2)^4 + 1$;

б) $y = x^3 + 2$; г) $y = -\frac{1}{4}(x + 1)^5$; е) $y = 0{,}5(x - 1)^3 + 2$.

37.4. Найдите наименьшее и наибольшее значения данной функции на указанном промежутке:

а) $y = (x - 2)^3$ на отрезке $[0; 3]$;
б) $y = -x^6 + 1$ на отрезке $[-1; 2]$;
в) $y = 0{,}25(x - 1)^4$ на отрезке $[-2; 1]$;
г) $y = -(x + 2)^4$ на отрезке $[-3; 0]$;
д) $y = x^5 - 1$ на отрезке $[-2; 2]$;
е) $y = -\frac{3}{4}x^3 + 2$ на отрезке $[-1; 2]$.

37.5. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = -\frac{3}{16}(x - 3)^6 + 4$;

б) $y = \frac{3}{8}(x + 1)^5 - 3$.

37.6. Решите графически уравнение:

а) $x^4 = 16$; в) $x^7 = \frac{1}{x}$; д) $\frac{1}{8}x^5 = 2x$;

б) $x^5 = x$; г) $-x^6 = \frac{1}{x}$; е) $\frac{1}{9}x^4 = -3x$.

37.7. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 = y + 2, \\ 3x + y + 2 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{3}{16}(x+1)^5 = y, \\ 3x - y = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{16}(x-2)^6 - y = 0, \\ x + y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{3}{8}x^4 + y = 1, \\ \sqrt{x-2} - y - 5 = 0. \end{cases}$

37.8. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^5 - |x| = -2$; г) $x^4 - |x| = 4$;

б) $x^6 + |x| = 1$; д) $x^7 + |x| = 4$;

в) $x^4 + 3x^2 = 5$; е) $x^5 + 0{,}5x^3 = 1$?

37.9. Докажите, что данное уравнение не имеет корней:

а) $x^4 + x^2 + 2 = 0$; г) $x^4 + x^2 = 2x - 3$;

б) $x^6 - x + 5 = 0$; д) $x^6 + \sqrt{x+1} = 0$;

в) $|x^3| + x^2 = 2x - 1$; е) $x^5 - \sqrt{x} = -1$.

37.10. Решите графически неравенство:

а) $\sqrt{x} > x^4$; г) $-x^4 < \sqrt{x} + 1$;

б) $x^5 \geqslant \frac{1}{x}$; д) $x^6 \geqslant \frac{1}{x}$;

в) $|x| - 2 \leqslant x^3$; е) $x^5 \leqslant 5 - 4x$.

37.11. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} x^4, \text{если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{если } x < 0, \\ x^5, \text{если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x^6, \text{если } x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, \text{если } x > 1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} x^7, \text{если } x < -1, \\ -x - 2, \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

37.12. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^7}{x^2}$;

б) $y = \dfrac{x^8 - 1}{x^4 - 1}$;

в) $y = \dfrac{x^4}{|x|}$;

г) $y = \dfrac{x^6 + x^5}{|x + 1|}$.

37.13. Дана функция $y = f(x)$. Докажите, что:

а) $f(2x) \cdot f\left(\dfrac{x}{2}\right) = (f(x))^2$, если $f(x) = x^7$;

б) $f(4x) \cdot f\left(-\dfrac{x}{4}\right) = (f(x))^2$, если $f(x) = -x^4$.

37.14. Докажите утверждение:

а) Если $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$, то $(f(4x^2))^2 = g(8x^3)$.

б) Если $f(x) = x^5$, $g(x) = x^6$, то $f\left(2|x|^3\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{g(4x^5)}$.

Постройте график функции.

37.15. а) $y = x^3 + |x^3 - 1|$; б) $y = x^4 - |2x^4 - 2|$.

37.16. а) $y = |1 - |x - 1|^3|$; б) $y = |3 - |x + 2|^3|$.

Решите уравнение.

37.17. а) $x^3 + 5x - 6 = 0$; в) $2x^5 + 4x + x = 7$;
б) $x^3 + 3x = 14$; г) $x^7 + x^5 + 8x + 10 = 0$.

37.18. а) $(x - 1)^3 = 0{,}5\sqrt{x + 2}$; б) $\dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{2}{x} = 6 + \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$.

37.19. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \ x \geqslant 1, \\ \sqrt{x+3} - 1, \ -3 \leqslant x < 1, \\ (x+3)^6 - 2, \ x < -3. \end{cases}$$

а) Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$.
б) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при различных значениях параметра a?

37.20. Найдите количество пар $(n; k)$ натуральных чисел, для которых следующие равенства являются тождествами:

а) $x^n \cdot x^k = x^{17}$;

б) $x^{n-3} \cdot x^{k-4} = x^2$;

в) $x^{n+3} \cdot x^{k-13} = \frac{1}{x}$;

г) $x^n \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{4k} = x^{17}$;

д) $(x^{n-1} \cdot x^{n+1})^k = x^{24}$;

е) $x^n (x^{k-1})^k = (x^{10})^{3!}$.

37.21. Найдите количество пар $(n; k)$ целых чисел, по модулю меньших 11, для которых равенства из упражнения 37.20 «а»—«е» являются тождествами.

Упражнения для повторения

37.22. Найдите значение выражения:

а) $\frac{18 \sin 86^\circ \cos 86^\circ}{\sin 172^\circ}$;

б) $\frac{10 \sin 6^\circ \cos 6^\circ}{\cos 78^\circ}$;

в) $\frac{\cos^2 25^\circ - \sin^2 25^\circ}{4 \sin 40^\circ}$;

г) $\frac{52 \sin 68^\circ \cos 68^\circ}{\sin 136^\circ}$;

д) $\frac{6 \sin 12^\circ \cos 12^\circ}{\cos 66^\circ}$;

е) $\frac{9\cos^2 36^\circ - 9\sin^2 36^\circ}{2 \sin 378^\circ}$.

37.23. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

а) $\sin \frac{\pi(2x-1)}{6} = \frac{1}{2}$;

б) $\cos \frac{\pi(x-3)}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

в) $\sin \frac{\pi(2x-1)}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos \frac{\pi(x+1)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\sin \frac{\pi(3x-5)}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

е) $\cos \frac{\pi(4x+10)}{3} = -\frac{1}{2}$.

37.24. а) На кольцевой трассе протяжённостью 15 км стартовали одновременно два гонщика. Первый гонщик, проехав дистанцию 12 кругов, пришёл на финиш на 8 мин раньше второго. Найдите скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик через 1 ч впервые обогнал его на один круг.

б) По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 80 м, второй длиной 120 м. Сначала первый сухогруз отставал от второго, и в некоторый момент времени расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого составляло 1600 м. В процессе движения первый сухогруз обогнал второй и через 25 мин уже второй отставал от первого так, что расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго оказалось равным 700 м. На сколько километров в час скорость второго сухогруза меньше скорости первого?

37.25. Вычислите:

а) $(64^2)^4 : (8^7)^2$;

б) $(125^5)^4 : (625^5)^3$;

в) $(32^3)^5 : (16^2)^6$;

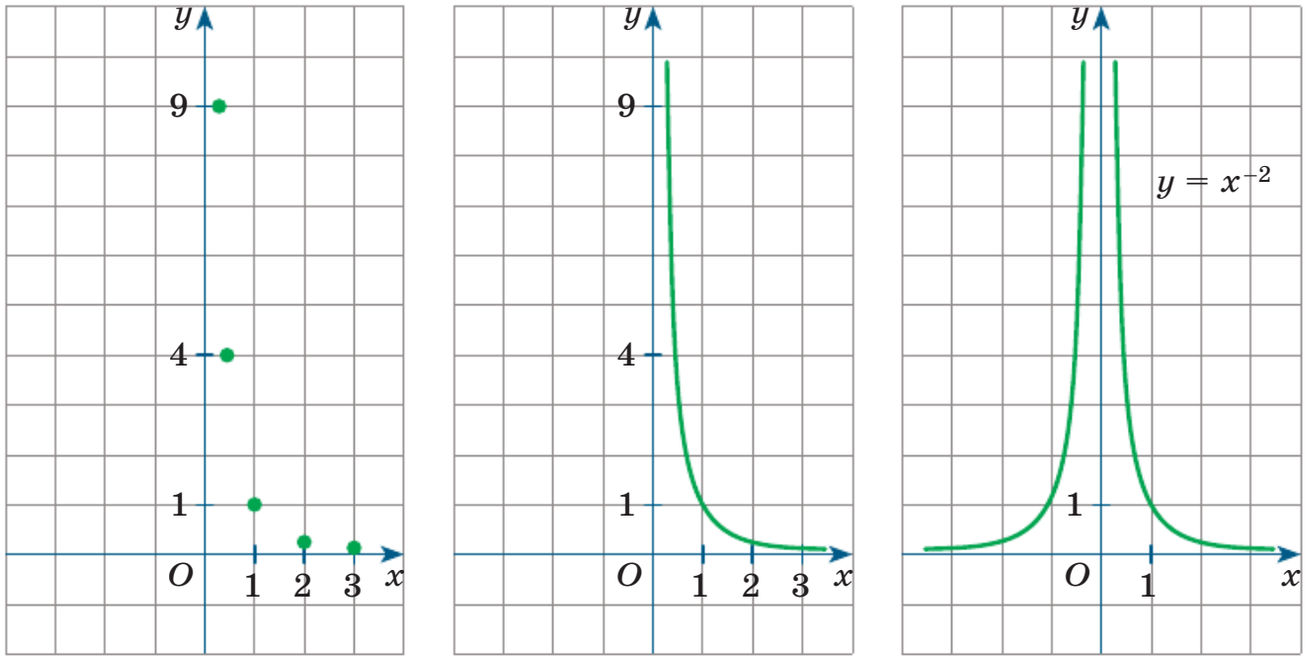
г) $(243^3)^6 : (27^6)^5$.

§ 38. Степенные функции с целым отрицательным показателем

В этом параграфе речь пойдёт о функциях вида $y = x^{-n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, — их называют *степенными функциями с целым отрицательным показателем*. В курсе алгебры 8 класса одну такую функцию мы уже изучили — это $y = x^{-1}$, т. е. $y = \frac{1}{x}$.

Выясним, как обстоит дело при $n > 1$. Рассмотрим функцию $y = x^{-2}$, т. е. $y = \frac{1}{x^2}$. Заметим прежде всего, что это чётная функция. Значит, её график симметричен относительно оси ординат. Поэтому построим график этой функции при $x > 0$, а затем воспользуемся указанной симметричностью графика.

Составим таблицу значений для функции $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$.



а *б* *в*

Рис. 151

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

Построим точки $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $(1; 1)$, $\left(2; \frac{1}{4}\right)$, $\left(3; \frac{1}{9}\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 151, *а*), они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 151, *б*). Добавив линию, симметричную построенной относительно оси ординат, получим график функции $y = x^{-2}$ (рис. 151, *в*).

ИКТ Такой же вид имеют графики функций $y = x^{-4}$, $y = x^{-6}$ и вообще $y = x^{-2n}$, $n \in N$.

Перечислим свойства функции $\boldsymbol{y = x^{-2n}}$, $\boldsymbol{n \in N}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $y = x^{-2n}$ — чётная функция.

3. Функция $y = x^{-2n}$ возрастает при $x < 0$, убывает при $x > 0$.

4. Функция ограничена снизу, не ограничена сверху.

5. $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$ не существуют.

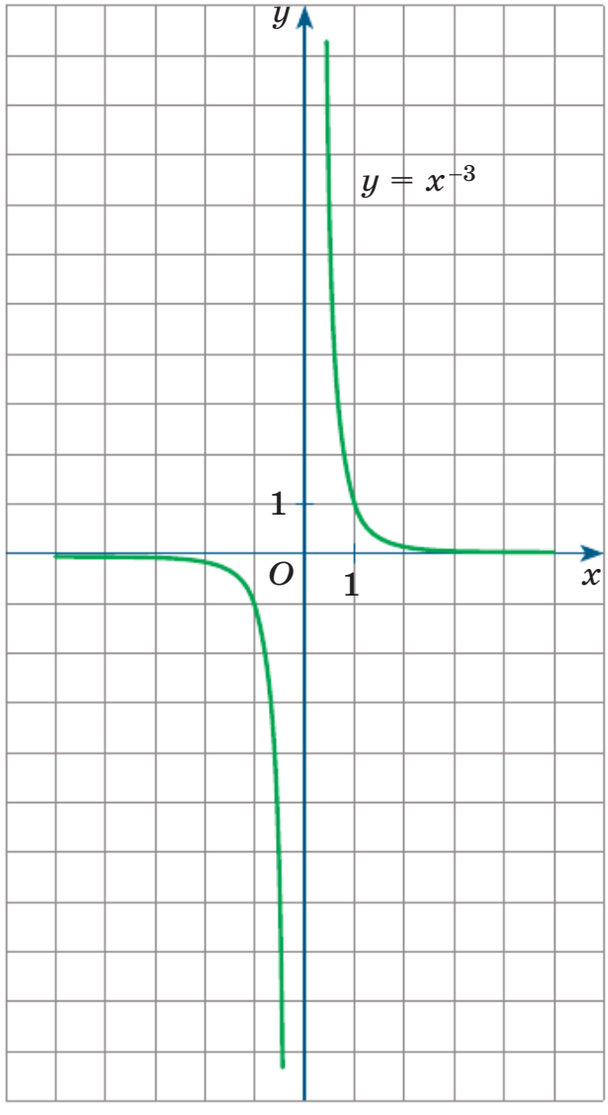


Рис. 152

6. Функция $y = x^{-2n}$ непрерывна на открытом луче $(-\infty; 0)$ и на открытом луче $(0; +\infty)$; $x = 0$ — точка разрыва.

7. Область значений функции $E(f) = (0; +\infty)$.

8. Функция выпукла вниз на открытом луче $(-\infty; 0)$ и на открытом луче $(0; +\infty)$.

Отметим также, что у графика функции имеются две асимптоты: горизонтальная $y = 0$ и вертикальная $x = 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^{-3}$. Заметим прежде всего, что это нечётная функция. Значит, её график симметричен относительно начала координат. Поэтому построим график этой функции при $x > 0$, а затем воспользуемся указанной симметричностью графика. При $x > 0$ график похож на график функции $y = x^{-2}$, $x > 0$ (см. рис. 151, *б*). А весь график представлен на рисунке 152. Как видите, график похож на гиперболу.

Такой же вид имеют графики функций $y = x^{-5}$, $y = x^{-7}$ и вообще $y = x^{-(2n+1)}$, $n \in N$.

Перечислим свойства функции $\boldsymbol{y = x^{-(2n+1)}}$, $\boldsymbol{n \in N}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $y = x^{-(2n+1)}$ — нечётная функция.

3. Функция $y = x^{-(2n+1)}$ убывает при $x < 0$ и при $x > 0$.

4. Функция не ограничена снизу, не ограничена сверху.

5. $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$ не существует.

6. Функция $y = x^{-(2n+1)}$ непрерывна на открытом луче $(-\infty; 0)$ и на открытом луче $(0; +\infty)$; $x = 0$ — точка разрыва.

7. Область значений функции $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

8. Функция выпукла вверх на открытом луче $(-\infty; 0)$ и выпукла вниз на открытом луче $(0; +\infty)$.

Отметим также, что у графика функции имеются две асимптоты: горизонтальная $y = 0$ и вертикальная $x = 0$.

Упражнения

38.1. Найдите значение n, при котором график степенной функции $y = x^{-n}$ проходит через точку:

а) $\left(2; \frac{1}{128}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{6}; -216\right)$; д) $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{4}\right)$;

б) $\left(-5; \frac{1}{625}\right)$; г) $\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; е) $\left(\sqrt{3}; \frac{1}{27}\right)$.

Постройте график функции.

38.2. а) $y = x^{-3}$; в) $y = \frac{1}{x^6}$; д) $y = 2x^{-3}$;

б) $y = x^{-4}$; г) $y = -\frac{1}{x^5}$; е) $y = \frac{4}{x^2}$.

38.3. а) $y = (x + 1)^{-2}$; в) $y = x^{-5} - 1$; д) $y = -(x - 1)^{-4} + 2$;
б) $y = (x - 2)^{-3}$; г) $y = x^{-6} + 2$; е) $y = -(x + 2)^{-1} - 1$.

38.4. Постройте график функции $y = (x - 3)^{-4}$. Найдите промежутки монотонности функции. Составьте уравнения асимптот графика функции.

38.5. Постройте график функции $y = -x^{-2} + 1$. Найдите область значений функции. Составьте уравнения асимптот графика функции.

38.6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном промежутке:

а) $y = x^{-4}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$;

б) $y = (x - 1)^{-5}$ на отрезке $[-1; 0]$;
в) $y = -x^{-2} - 2$ на отрезке $[-2; -1]$;
г) $y = x^{-3}$ на отрезке $[-2; -1]$;
д) $y = (x + 3)^{-2}$ на отрезке $[-2; 0]$;
е) $y = -2x^{-1} + 1$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

ИКТ **38.7.** Решите графически уравнение:

а) $x^{-3} = x$; в) $x^{-2} = x^2$; д) $x^{-4} = \sqrt{x}$;

б) $3x^{-1} = \frac{x}{3}$; г) $x^{-4} = 2x^2 - 1$; е) $\frac{4}{x^5} = \sqrt{x} + 3$.

ИКТ **38.8.** Определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^{-5}, \\ y = -3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^{-4}, \\ y = 3 - 2x^2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = \sqrt{x-4}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = x^{-7}, \\ y = |x| - 7. \end{cases}$

38.9. Не выполняя построения графика функции $y = (x + 2)^{-3} - 1$, найдите:
а) область определения функции;
б) область значений функции;
в) промежутки монотонности;
г) промежутки знакопостоянства.

38.10. Не выполняя построения графика функции $y = (x - 1)^{-1} - 2$, найдите:
а) область определения функции;
б) область значений функции;
в) промежутки монотонности;
г) промежутки знакопостоянства.

38.11. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} x^{-2}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} |x|, \text{ если } x \leqslant 1, \\ x^{-3}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

ИКТ **38.12.** Решите графически неравенство:

а) $x^{-2} > 3x - 2$; в) $2x^{-2} > x^2 + 1$;

б) $x^{-4} \leqslant -2x - 1$; г) $x^{-3} < \sqrt[3]{x}$.

38.13. Даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Докажите, что:

а) $\dfrac{(f(x^2))^2}{32} = 2^{-5}(g(x))^{-2}$, если $f(x) = x^5$, $g(x) = x^{-10}$;

б) $16(f(x^2))^{-1} = \dfrac{1}{g(2x^{-1})}$, если $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{-4}$.

Постройте график функции.

38.14. а) $y = x^{-3} + |x^{-3} - 1|$; б) $y = x^{-5} - |2x^{-5} - 2|$.

38.15. а) $y = |2 - |x - 2|^{-3}|$; б) $y = \|x + 2|^{-1} - 3|$.

38.16. Решите уравнение:

а) $8x^{-2} = \sqrt{x+2}$; б) $x^{-3} = \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} - \dfrac{15}{8}$.

38.17. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & 0 < x \leqslant 1, \\ \sin\dfrac{\pi x}{2}, & 1 < x \leqslant 6, \\ -x^{-5} - 2, & x < 0. \end{cases}$$

а) Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$.
б) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при различных значениях параметра a?

38.18. Для функций $y = 2 + x^{-2}$, $y = 1 - x^{-2}$ и $y = \dfrac{5-2x}{x-1}$ на отрезке $[2; 4]$ найдите:
а) наибольшее из значений всех трёх функций;
б) наименьшее из значений всех трёх функций;
в) наибольшее из наименьших значений трёх функций;
г) наименьшее из наибольших значений трёх функций;
д) наименьшее целое число, которое больше значений всех трёх функций;
е) наибольшее чётное целое число, которое меньше значений всех трёх функций.

38.19. Сколько точек с целыми координатами лежит между осью Ox и графиком функции (точки на оси абсцисс и на графике не учитываются):

а) $y = 3x^{-1}$, $x > 1$; в) $y = 4x^{-1}$, $x < 0$;
б) $y = 2x^{-1}$, $x > 0$; г) $y = 5x^{-2}$, $x > 0$?

Упражнения для повторения

38.20. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{34^2 - 16^2}$; в) $\sqrt{35^2 - 11^2}$; д) $\dfrac{\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)^2}{9 - \sqrt{77}}$;

б) $\sqrt{52^2 - 20^2}$; г) $\sqrt{24^2 - 10^2}$; е) $\dfrac{\left(\sqrt{17} + \sqrt{3}\right)^2}{10 + \sqrt{51}}$.

38.21. а) Найдите два двузначных числа, про которые известно следующее. Если к первому числу приписать справа второе число и затем цифру 0, то получится пятизначное число, которое при делении на квадрат второго числа даёт в частном 39 и в остатке 575. Если к первому числу приписать справа второе, а ко второму числу приписать справа первое, а затем из первого составленного таким образом четырёхзначного числа вычесть второе четырёхзначное число, то получится 1287.

б) Найдите два двузначных числа, про которые известно следующее. Если к первому числу приписать справа цифру 0 и затем второе число, то получится пятизначное число, которое при делении на квадрат первого числа даёт в частном 24 и в остатке 708. Если ко второму числу приписать справа первое, а к первому числу приписать справа второе, а затем из первого составленного таким образом четырёхзначного числа вычесть второе четырёхзначное число, то получится 1089.

38.22. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а) $-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)\cdot\sin x=\cos x,\ x\in\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$;

б) $2\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)\cdot\cos x=\sqrt{3}\sin x,\ x\in\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

38.23. Дана функция $y=f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{x+2}-1, \text{ если } -5\leqslant x<-3,\\ \frac{1}{2}(x+1)^2, \text{ если } -3\leqslant x<0,\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right), \text{ если } 0\leqslant x\leqslant\frac{11}{6}.\end{cases}$

а) Постройте график функции $y=f(x)$.

б) Прочитайте график функции $y=f(x)$.

в) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x)=p$ имеет единственное решение.

г) Найдите все значения x, для которых график функции $y=f(x)$ лежит выше прямой $y=-\frac{3}{\pi}x+2$.

§ 39. Функция $y = \sqrt[n]{x}$

В курсе алгебры 9 класса было введено понятие корня n-й степени из неотрицательного числа. Напомним соответствующее определение.

Если $n \in N$, $n > 1$, $a \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{a}$ — неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается a.

Например, $\sqrt[3]{8} = 2$, так как $2 > 0$ и $2^3 = 8$; $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3 > 0$ и $3^4 = 81$; $\sqrt[5]{0} = 0$, так как $0 \geqslant 0$, $0^5 = 0$; $\sqrt[16]{1} = 1$, так как $1 > 0$ и $1^{16} = 1$. А вот написать $\sqrt[6]{64} = -2$ нельзя: хотя $(-2)^6 = 64$ — верное равенство, но повторим ещё раз, что корень из неотрицательного числа — неотрицательное число.

Иногда выражение $\sqrt[n]{a}$ называют *радикалом* (от лат. *radix* — корень).

Построим график функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$. Рассуждать будем следующим образом. Рассмотрим известную нам из § 37 функцию $y = x^n$, $x \geqslant 0$, её график представлен на рисунке 148, *б* (см. с. 74). Она монотонна (возрастает), значит, обратима (см. часть 1, § 15), для неё существует обратная функция $x = \sqrt[n]{y}$. Поменяем, как принято, x и y местами: $y = \sqrt[n]{x}$. Итак, $y = \sqrt[n]{x}$ — это функция, обратная для функции $y = x^n$, $x \geqslant 0$. Значит, график функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$, и график функции $y = x^n$, $x \geqslant 0$, симметричны друг другу относительно прямой $y = x$ (рис. 153).

Перечислим свойства функции $\boldsymbol{y = \sqrt[n]{x}}$, $\boldsymbol{x \geqslant 0}$.

1. Область определения функции $D(f) = [0; +\infty)$.

2. $y = \sqrt[n]{x}$ — функция общего вида (ни чётная, ни нечётная).

3. $y = \sqrt[n]{x}$ — возрастающая функция.

4. Функция ограничена снизу, не ограничена сверху.

5. $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует.

6. $y = \sqrt[n]{x}$ — непрерывная функция.

7. Область значений функции $E(f) = [0; +\infty)$.

8. Функция выпукла вверх.

Пример 1 Построить и прочитать график функции

$$y = \begin{cases} x^{-4}, & x < 0, \\ \sqrt[3]{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 8. \end{cases}$$

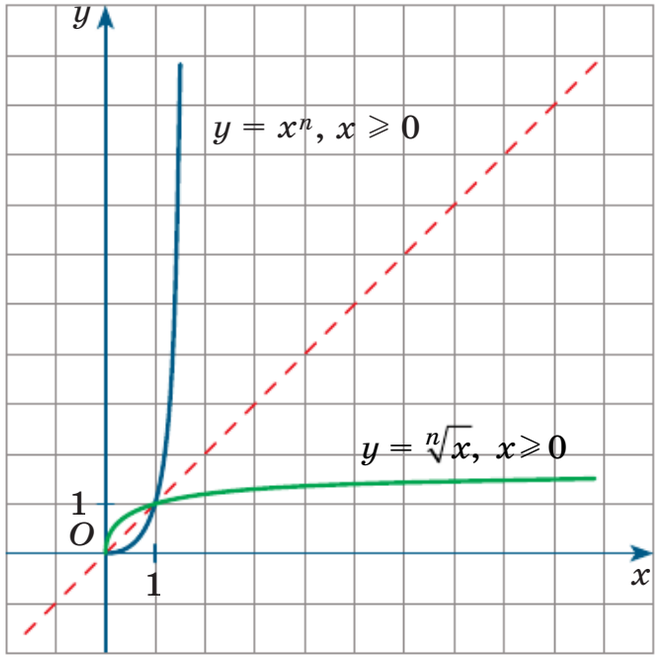


Рис. 153

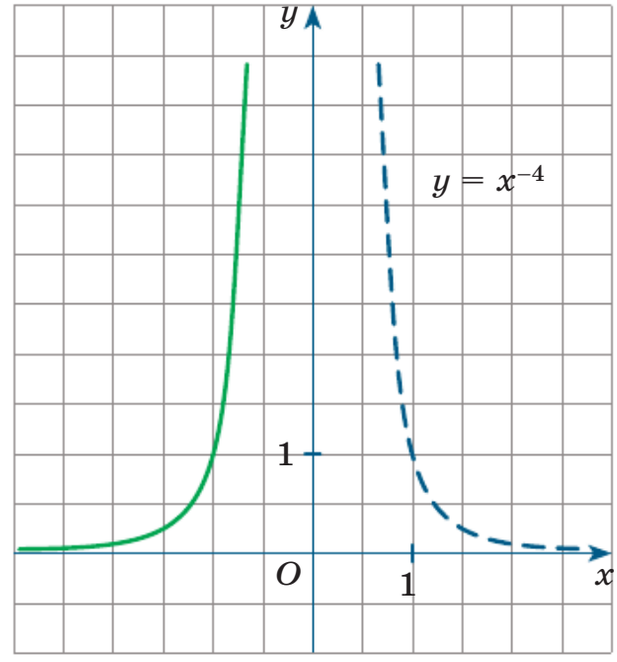


Рис. 154

Решение. Построим график функции $y = x^{-4}$ и выделим его часть на открытом луче $(-\infty; 0)$ (рис. 154). Построим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и выделим его часть на отрезке $[0; 8]$ (рис. 155). Теперь обе выделенные части поместим в одной координатной плоскости (рис. 156). График заданной кусочной функции построен. Перечислим её свойства.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 8]$.

2. Функция общего вида (ни чётная, ни нечётная).

3. Функция возрастает на открытом луче $(-\infty; 0)$ и на отрезке $[0; 8]$.

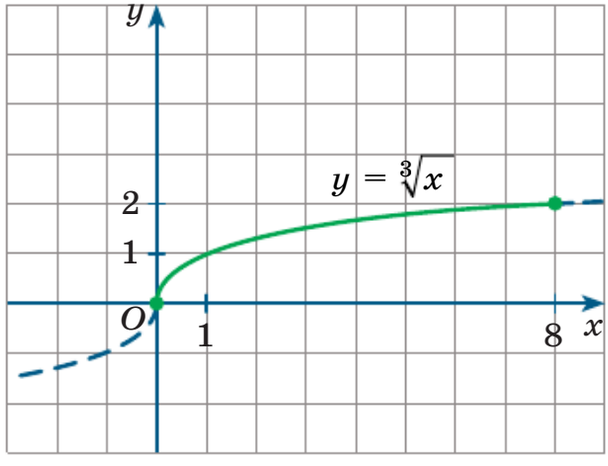


Рис. 155

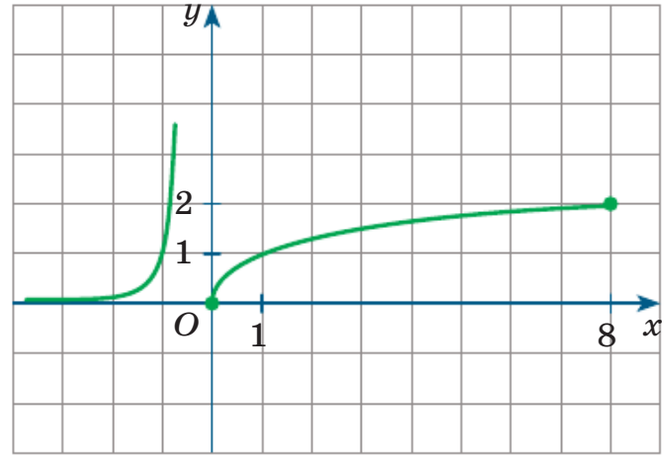


Рис. 156

4. Функция ограничена снизу, не ограничена сверху.

5. $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует.

6. Функция непрерывна на открытом луче $(-\infty; 0)$ и на отрезке $[0; 8]$; $x = 0$ — точка разрыва функции.

7. Область значений функции $E(f) = [0; +\infty)$.

8. Функция выпукла вниз на открытом луче $(-\infty; 0)$ и выпукла вверх на отрезке $[0; 8]$.

До сих пор мы говорили о функции $y = \sqrt[n]{x}$ только для неотрицательных значений аргумента. Но при нечётном показателе корня выражение $\sqrt[n]{x}$ определено и для $x < 0$. Например, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[7]{-1} = -1$. Значит, следует поговорить о функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае нечётного n для любых значений x.

Заметим, что $y = \sqrt[n]{x}$ $(n = 3, 5, 7, \ldots)$ — нечётная функция. Смотрите: если $f(x) = \sqrt[n]{x}$, то $f(-x) = \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$, т. е. $f(-x) = -f(x)$, а это и означает нечётность функции.

Как же выглядит график функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае нечётного показателя корня? При $x \geqslant 0$ так, как показано на рисунке 153. Добавив линию, симметричную построенной относительно начала координат, получим график функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае нечётного n (рис. 157).

Пример 2 Решить неравенство $\sqrt[5]{x} \geqslant -3x - 4$.

Решение. Построим в одной координатной плоскости графики функций $y = \sqrt[5]{x}$, $y = -3x - 4$ (рис. 158). Судя по чертежу, они пересекаются в точке $(-1; -1)$. И на самом деле эта точка, как показывает

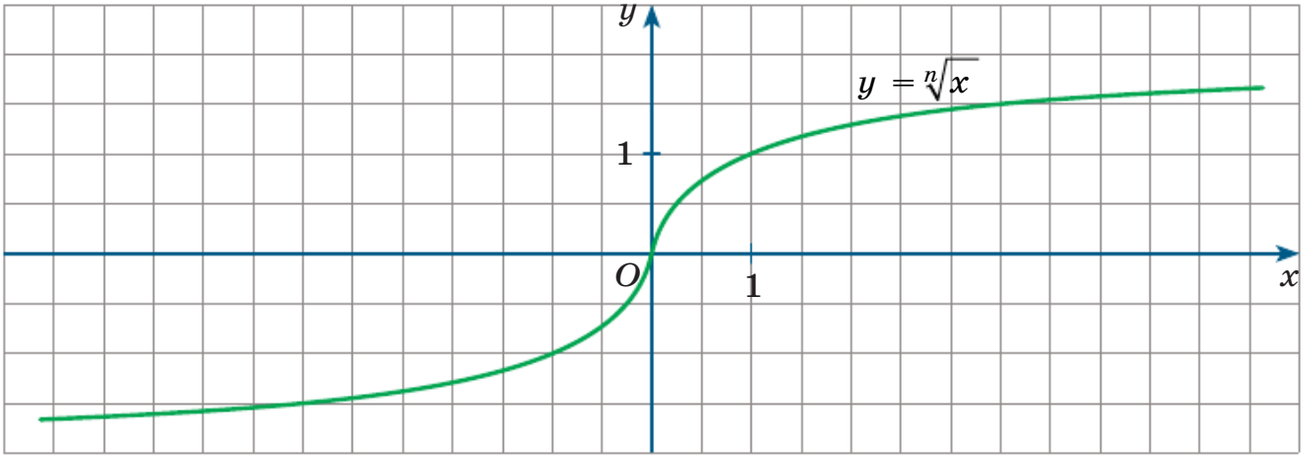


Рис. 157

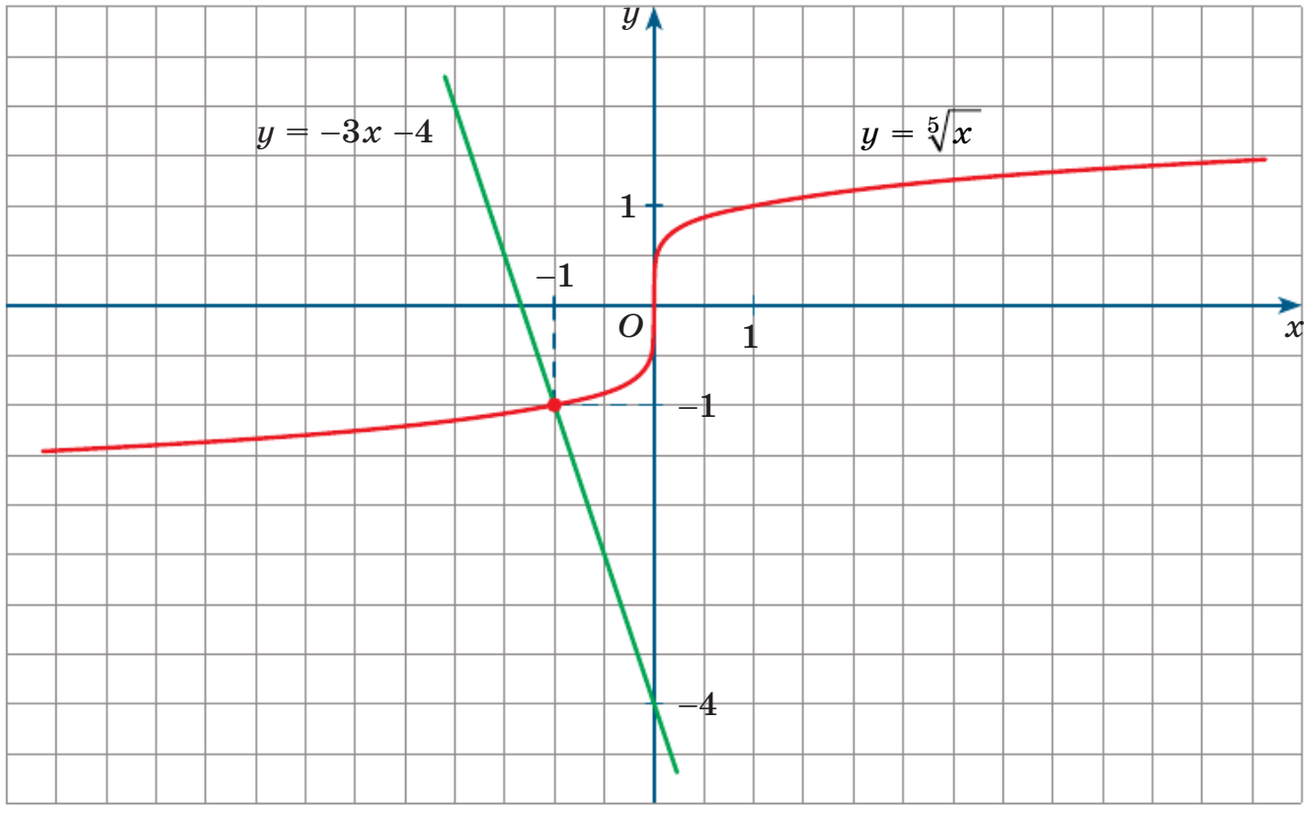


Рис. 158

проверка, удовлетворяет и уравнению $y = \sqrt[5]{x}$, и уравнению $y = -3x - 4$. График функции $y = \sqrt[5]{x}$ расположен *выше* графика функции $y = -3x - 4$ при $x > -1$. Значит, решение заданного нестрогого неравенства таково: $x \geqslant -1$.

Ответ: $x \geqslant -1$.

Упражнения

39.1. Вычислите:

а) $\sqrt[6]{64}$; в) $\sqrt[3]{-0{,}125}$; д) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$;

б) $\sqrt[3]{216}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; е) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$.

39.2. Найдите, между какими ближайшими целыми числами расположено число:

а) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt[3]{-10}$; д) $\sqrt[4]{111}$;

б) $\sqrt[3]{42}$; г) $\sqrt[5]{-29}$; е) $\sqrt[6]{750}$.

39.3. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{19}$, 2; в) 3, $\sqrt[5]{35}$, $\sqrt[6]{720}$;

б) $\sqrt[3]{-0{,}15}$, 0, $\sqrt[5]{-1{,}1}$; г) -1, $\sqrt[3]{-2}$, $-\sqrt[4]{17}$.

39.4. Расположите в порядке убывания числа:

а) $\sqrt[3]{75}$, $\sqrt[5]{100}$, 4; в) 2, $\sqrt[6]{60}$, $\sqrt[4]{25}$;

б) -1, $\sqrt[3]{-5}$, $-\sqrt[4]{\frac{15}{16}}$; г) -2, $\sqrt[5]{-1{,}5}$, $\sqrt[3]{-9}$.

39.5. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt[4]{x+1}$; в) $y = \sqrt[5]{x} - 1$; д) $y = 2 - \sqrt[3]{x-1}$;

б) $y = \sqrt[3]{x-2}$; г) $y = 1 - \sqrt[6]{x}$; е) $y = \sqrt[4]{x+6} - 2$.

ИКТ **39.6.** Решите графически уравнение:

а) $\sqrt{x} = -x$; в) $\sqrt[4]{x} = 2 - x$; д) $\sqrt[3]{x} + 2x + 3 = 0$;

б) $\sqrt[3]{x} = 7 - 6x$; г) $\sqrt[5]{x} = -x^2$; е) $\sqrt[4]{x} + 2x^3 = 3$.

ИКТ **39.7.** Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sqrt[4]{x}, \\ y = x^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x}, \\ y = |x|; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = 2\sqrt[4]{x}, \\ y = 0{,}25x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \sqrt[6]{x}, \\ y = x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = \sqrt[5]{x}, \\ y = -x - 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{2x}, \\ y = \frac{8}{x}. \end{cases}$

39.8. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt[4]{x}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \sqrt[5]{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt[4]{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

39.9. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[8]{x^2 - 2x - 15}$; в) $y = \sqrt[4]{5x+8} - \frac{\sqrt[6]{2x+6}}{x+1}$;

б) $y = \sqrt{x-5} \cdot \sqrt[4]{x+3}$; г) $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2+2x-3}} + \sqrt[4]{6-x-x^2}$.

39.10. а) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt[6]{x^2 - 4x + 68}$.

б) Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt[10]{-x^2 + 6x - 8}$.

39.11. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x + 4}}$;

б) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}} + 1$;

в) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}}$;

г) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}} - 2x$.

39.12. Докажите утверждение:

а) если $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sqrt[6]{x}$, то $(f(8x^6) = g(64x^{12})$;

б) если $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = \sqrt[5]{x}$, то $f(16|x|^4) = \dfrac{2}{x^2} g(x^{15})$.

39.13. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 29} = 3$;

б) $\sqrt[4]{2x^2 + 6x - 8} = \sqrt{x - 1}$;

в) $\sqrt[5]{25x^3 - 43} = -3$;

г) $\sqrt[6]{5x^2 + 4x - 69} = \sqrt[3]{2x + 4}$.

39.14. Решите неравенство:

а) $\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{x + 7} \leqslant 2 - |x - 9|$;

б) $\sqrt[3]{x - 1} < \arccos x$;

в) $\sqrt[5]{x - 3} + 1 + |x - 2| > 0$;

г) $\arcsin \dfrac{x}{2} > 2 - \sqrt{x + 4}$.

39.15. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & x \geqslant 2, \\ \sqrt[3]{x + 6}, & -5 \leqslant x < 2, \\ -x - 4, & x < -5. \end{cases}$$

а) Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$.

б) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при различных значениях параметра a?

39.16. Сколько точек с целыми координатами лежит между графиками функций (точки на графиках не учитываются):

а) $y = 2 - x$ и $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x}$ при $0 < x < 3$;

б) $y = 4 - x$ и $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x}$ при $0 < x < 4$;

в) $y = 4x - 4$ и $y = 1 - \sqrt[3]{x}$ при $-2 < x < 1$;

г) $y = 4x - 4$ и $y = 1 - \sqrt[3]{x}$ при $1 < x < 5$;

д) $y = x^{-1}$ и $y = \sqrt[4]{x}$ при $1 < x < 18$;

е) $y = -x^{-1}$ и $y = \sqrt[4]{x}$ при $1 < x < 18$?

Упражнения для повторения

39.17. Вычислите:

а) $\dfrac{8\cos 134^\circ}{\cos 46^\circ}$; в) $\dfrac{\sin 223^\circ}{2\cos 47^\circ}$; д) $\dfrac{2\cos 226^\circ}{\sin 316^\circ}$;

б) $\dfrac{5\sin 117^\circ}{\sin 63^\circ}$; г) $\dfrac{\cos 103^\circ}{10\sin 13^\circ}$; е) $\dfrac{4\sin 138^\circ}{\cos 312^\circ}$.

39.18. а) Дана арифметическая прогрессия (a_n). Известно, что $a_2 = 4$, $a_8 = 22$. Найдите S_{10}.

б) Дана геометрическая прогрессия (b_n). Известно, что $b_5 = 16$, $b_8 = 128$. Найдите S_{11}.

39.19. а) Саша и Маша бросают игральный кубик по одному разу. Выигрывает тот, у кого выпадает больше очков. Найдите вероятность того, что выиграет Саша, при условии, что в сумме выпадет 8 очков.

б) В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что «решка» выпадет все три раза.

39.20. Найдите все значения параметра p, при которых имеет решение уравнение:

а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = p$; б) $p\sin x + \cos 2x = 2p - 7$.

§ 40. Свойства корней n-й степени

В этом параграфе мы познакомимся с основными алгебраическими свойствами операции извлечения корня. Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что n — натуральное число, большее 1.

Из курса алгебры 8 класса вам известно, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Аналогичные свойства справедливы для корней любой степени.

Теорема 1. Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Доказательство. Во-первых, $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, значит, и произведение $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ неотрицательно. Во-вторых, по определению $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$, значит, $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$.

Итак, число $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ неотрицательно и n-я степень этого числа равна ab. По определению это означает, что число $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ является корнем n-й степени из ab, т. е. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, что и требовалось доказать.

Теорема 1 справедлива для любого числа множителей. Например, верно равенство $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

Следствие. Если $a \geqslant 0$, $k \in N$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.

Доказательство.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множителей}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Смысл доказанного следствия заключается в следующем: *чтобы возвести корень n-й степени в натуральную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение.*

Теорема 2. Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Доказательство. Во-первых, по определению $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$, значит, частное $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ определено и неотрицательно. Во-вторых, по определению $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$, значит,

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}.$$

Итак, число $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ неотрицательно и n-я степень этого числа равна $\frac{a}{b}$. По определению это означает, что число $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ является корнем n-й степени из $\frac{a}{b}$, т. е. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, что и требовалось доказать.

Пример 1 Вычислить:

а) $\sqrt[4]{16 \cdot 81 \cdot 625}$; б) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

Решение. а) Воспользовавшись первым свойством корней (теорема 1), получим:

$$\sqrt[4]{16 \cdot 81 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{625} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

б) Обратим смешанное число $7\frac{19}{32}$ в обыкновенную дробь:

$$7\frac{19}{32} = \frac{7 \cdot 32 + 19}{32} = \frac{243}{32}.$$

Воспользовавшись вторым свойством корней (теорема 2), получим:

$$\sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: а) 30; б) 1,5.

Пример 2 Вычислить:

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2{,}7} \cdot \sqrt[3]{5}$; б) $\frac{\sqrt[6]{320}}{\sqrt[6]{5}}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2{,}7} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 2{,}7 \cdot 5} = \sqrt[3]{(2 \cdot 5) \cdot 2{,}7} = \sqrt[3]{27} = 3$.

б) $\frac{\sqrt[6]{320}}{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[6]{\frac{320}{5}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Ответ: а) 3; б) 2.

Продолжим изучение свойств корней n-й степени.

Теорема 3. Если $a \geqslant 0$ и n, k — натуральные числа, большие 1, то справедливо равенство $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Краткая формулировка (облегчающая запоминание этого свойства): *чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней.*

Например, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[15]{a}$; $\sqrt{\sqrt[6]{x}} = \sqrt[12]{x}$.

Доказательство. Введём обозначение $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = x$. По определению корня n-й степени равенство $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = x$ означает, что $x^n = \sqrt[k]{a}$. Далее, по определению корня k-й степени равенство $x^n = \sqrt[k]{a}$ означает, что $(x^n)^k = a$, т. е. $x^{nk} = a$. И, наконец, равенство $x^{nk} = a$ означает, опять-таки по определению, что $\sqrt[nk]{a} = x$.

Итак, $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = x$, $\sqrt[nk]{a} = x$, следовательно, $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, что и требовалось доказать.

Благодаря доказанным теоремам мы узнали, как над радикалами можно осуществлять четыре операции: умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня (из корня). Но наиболее любопытное, на наш взгляд, свойство корней — это то, о котором пойдёт речь в следующей теореме.

Теорема 4. Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится:

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}. \qquad (1)$$

Например:

$\sqrt[16]{a^{12}} = \sqrt[4]{a^3}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 4);

$\sqrt[10]{x^5} = \sqrt{x}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 5);

$\sqrt[7]{y^5} = \sqrt[14]{y^{10}}$ (показатели корня и подкоренного выражения умножили на 2).

Доказательство. Обозначим левую часть равенства (1) буквой x: $\sqrt[np]{a^{kp}} = x$. Тогда по определению корня должно выполняться равенство

$$x^{np} = a^{kp}. \qquad (2)$$

Обозначим правую часть равенства (1) буквой y: $\sqrt[n]{a^k} = y$. Тогда по определению корня должно выполняться равенство $y^n = a^k$.

Возведём обе части последнего равенства в одну и ту же степень p:

$$y^{np} = a^{kp}. \qquad (3)$$

Итак (см. равенства (2) и (3)),

$$x^{np} = a^{kp}, \quad y^{np} = a^{kp}.$$

Сопоставляя эти два равенства, приходим к выводу, что $x^{np} = y^{np}$, а значит, $x = y$, т. е. $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$, что и требовалось доказать.

Теоремы 1 и 2 позволяют умножать и делить корни одной и той же степени, а теорема 4 позволяет выполнять эти операции и над корнями разных степеней.

Пример 3 Выполнить умножение: $\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[8]{x^3}$.

Решение. Найдём наименьшее общее кратное чисел 6 и 8 — это число 24.

Обратим оба перемножаемых корня в корни 24-й степени; для этого используем теорему 4. Смотрите:

$$\sqrt[6]{x} = \sqrt[6\cdot 4]{x^{1\cdot 4}} = \sqrt[24]{x^4}; \quad \sqrt[8]{x^3} = \sqrt[8\cdot 3]{x^{3\cdot 3}} = \sqrt[24]{x^9}.$$

А теперь уже нетрудно найти требуемое произведение:

$$\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[8]{x^3} = \sqrt[24]{x^4} \cdot \sqrt[24]{x^9} = \sqrt[24]{x^4 \cdot x^9} = \sqrt[24]{x^{13}}.$$

Ответ: $\sqrt[24]{x^{13}}$.

Все свойства корней, которые мы обсудили в этом параграфе, рассмотрены нами только для случая, когда переменные принимают неотрицательные значения. Но в случае корней нечётной степени можно опираться на доказанные теоремы и при работе с отрицательными подкоренными выражениями. Смотрите:

$$\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{25} = -\left(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}\right) = -\sqrt[3]{5 \cdot 25} = -\sqrt[3]{5^3} = -5;$$

$$\frac{\sqrt[5]{-8}}{\sqrt[5]{-2}} = \frac{-\sqrt[5]{8}}{-\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{8}{2}} = \sqrt[5]{4}.$$

Пример 4 Упростить выражение:

а) $\sqrt[4]{128x^5}$; б) $\left(\sqrt[3]{2y^2}\right)^5$; в) $\sqrt[6]{x^6y^3}$; г) $\sqrt[4]{a^5\sqrt[3]{a^2}}$.

Решение. Упростить выражение — это значит выполнить такие преобразования, чтобы под знаком корня осталось как можно более простое выражение. При этом используются те свойства радикалов, которые мы обсудили в настоящем параграфе. Кроме того, при выполнении преобразований важно учитывать следующее обстоятельство:

если n — нечётное число, то $\sqrt[n]{x^n} = x$;

если n — чётное число, то $\sqrt[n]{x^n} = |x|$; это обобщение формулы $\sqrt{x^2} = |x|$, которая известна вам из курса алгебры 8 класса. Более простое равенство $\sqrt[n]{x^n} = x$ верно, только для $x \geqslant 0$.

а) Здесь $128x^5 \geqslant 0$, значит, $x \geqslant 0$. Имеем:

$$\sqrt[4]{128x^5} = \sqrt[4]{2^7 \cdot x^4 \cdot x} = \sqrt[4]{2^4 \cdot x^4 \cdot 2^3 \cdot x} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{8x} = 2x\sqrt[4]{8x}.$$

б) $\left(\sqrt[3]{2y^2}\right)^5 = \sqrt[3]{(2y^2)^5} = \sqrt[3]{2^5y^{10}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot y^9 \cdot 2^2 \cdot y} =$

$= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{y^9} \cdot \sqrt[3]{4y} = 2y^3\sqrt[3]{4y}$.

в) Здесь $x^6y^3 \geqslant 0$, значит, $y \geqslant 0$, а переменная x может принимать любые значения, как неотрицательные, так и отрицательные. Имеем:

$$\sqrt[6]{x^6y^3} = \sqrt[6]{x^6} \cdot \sqrt[6]{y^3} = |x| \cdot \sqrt{y}.$$

г) Здесь $a^5 \geqslant 0$, значит, $a \geqslant 0$. Имеем:

$$\sqrt[4]{a^5\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{15}} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{17}}} = \sqrt[12]{a^{17}} = \sqrt[12]{a^{12} \cdot a^5} = a\sqrt[12]{a^5}.$$

Ответ: а) $2x\sqrt[4]{8x}$; б) $2y^3\sqrt[3]{4y}$; в) $|x|\sqrt{y}$; г) $a\sqrt[12]{a^5}$.

Пример 5 Упростить выражение:

а) $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$; б) $\sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}}$.

Решение. а) Выражение упростится, если окажется, что под знаком квадратного корня содержится полный квадрат. Попробуем представить $10\sqrt{2}$ в виде удвоенного произведения двух чисел, сум-

ма квадратов которых равна 27. Имеем: $10\sqrt{2} = 2\cdot 5\sqrt{2}$. Нам повезло: $\left(\sqrt{2}\right)^2 + 5^2 = 27$. Значит,

$$\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 5\sqrt{2} + 5^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - 5\right)^2} = \left|\sqrt{2} - 5\right| = 5 - \sqrt{2}.$$

б) Выражение упростится, если окажется, что под знаком квадратного корня содержится полный куб, т. е. $(a + b)^3$, где a и b — некоторые числа. Напомним, что

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ясно, что если действительно под знаком кубического корня содержится полный куб, то в ответе должно получиться числовое выражение типа $x\sqrt{3} + y\sqrt{2}$. Проверим простейший случай: $x = 1$, $y = 1$. Имеем:

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^3 = \left(\sqrt{3}\right)^3 + 3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{2} + 3\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3 =$$
$$= 3\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}.$$

Как видите, нам и в данном случае сразу повезло: $\sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Ответ: а) $5 - \sqrt{2}$; б) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Упражнения

Вычислите.

40.1. а) $\sqrt[3]{216\cdot 64}$; в) $\sqrt[5]{243\cdot 0{,}00032}$;
б) $\sqrt[4]{16\cdot 0{,}0081}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0625\cdot 256}$.

40.2. а) $\sqrt[3]{12\cdot 18}$; в) $\sqrt[6]{0{,}004\cdot 0{,}016}$;
б) $\sqrt[4]{108\cdot 12}$; г) $\sqrt[5]{3{,}75\cdot 2{,}025}$.

40.3. а) $\sqrt[4]{5^8\cdot 3^4}$; в) $\sqrt[5]{(-3)^5\cdot 2^{10}}$; д) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12}}{(-2)^8}}$;
б) $\sqrt[3]{2^9\cdot 7^3}$; г) $\sqrt[6]{36^3\cdot(-2)^6}$; е) $\sqrt[3]{\dfrac{125^2}{(-7)^3}}$.

40.4. а) $\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}$; в) $\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}-6}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}+6}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt{17}+3}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{17}}$.

40.5. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{40}$; в) $\sqrt[4]{160}$; д) $\sqrt[5]{486}$;

б) $\sqrt[5]{96}$; г) $\sqrt[6]{128}$; е) $\sqrt[3]{500}$.

40.6. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt[3]{3}$; в) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{18}$; д) $6\sqrt[3]{1\frac{1}{9}}$;

б) $2\sqrt[4]{5}$; г) $0{,}5\sqrt[3]{12}$; е) $\frac{2}{5}\sqrt[4]{3\frac{1}{8}}$.

40.7. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{56}-\sqrt[3]{7}$; в) $5\sqrt[7]{3}-\sqrt[7]{384}$; д) $\sqrt[4]{405}+2\sqrt[4]{80}$;

б) $\sqrt[4]{512}+\sqrt[4]{2}$; г) $3\sqrt[5]{64}-\sqrt[5]{486}$; е) $3\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{625}$.

Упростите выражение при условии, что переменные принимают только положительные значения.

40.8. а) $\sqrt[4]{a^{12}}$; в) $\sqrt[4]{x^2}$; д) $\sqrt[6]{y^4}$;

б) $\sqrt[3]{x^6}$; г) $\sqrt[15]{c^5}$; е) $\sqrt[12]{b^{18}}$.

40.9. а) $\sqrt[3]{27a^3b^6}$; в) $\sqrt{\frac{81x^4}{196y^6}}$; д) $\sqrt[4]{\frac{16a^8b^4}{c^{16}}}$;

б) $\sqrt[4]{16x^8y^{12}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{64a^3}{125b^9}}$; е) $\sqrt[5]{\frac{32x^{20}}{c^{15}y^5}}$.

40.10. Вынесите множитель из-под знака корня при условии, что переменные принимают только неотрицательные значения:

а) $\sqrt{x^7}$; в) $\sqrt[3]{24a^5}$; д) $\sqrt[4]{80x^4y^5}$;

б) $\sqrt[3]{y^4}$; г) $\sqrt[4]{405x^9}$; е) $\sqrt[5]{160m^{10}n^7}$.

40.11. Вынесите множитель из-под знака радикала, считая, что переменные могут принимать как положительные, так и отрицательные значения:

а) $\sqrt{x^2y}$; в) $\sqrt[3]{x^2y^3}$; д) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$;

б) $\sqrt[4]{a^4d}$; г) $\sqrt[6]{a^6b^5}$; е) $\sqrt[5]{x^7y^{11}}$.

40.12. Внесите множитель под знак корня при условии, что переменные принимают только неотрицательные значения:

а) $a\sqrt{a^2b}$; в) $2ab^2\sqrt[3]{a^2b}$; д) $3m^2n^3\sqrt[4]{m^3n^2}$;

б) $b^2\sqrt{ab}$; г) $5xy\sqrt[3]{x^2y}$; е) $0{,}2p^3q^2\sqrt[4]{p^3q}$.

Выполните действия.

40.13. а) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^3$; в) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^8$; д) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$;

б) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5$; г) $\left(\sqrt[3]{10}\right)^9$; е) $\left(\sqrt[p]{x}\right)^{pq}$.

40.14. а) $\left(2\sqrt[4]{5}\right)^4$; в) $\left(\sqrt[5]{3a}\right)^{15}$; д) $\left(5a\sqrt[3]{a}\right)^2$;

б) $\left(3\sqrt[3]{0{,}5}\right)^3$; г) $\left(\sqrt[4]{2x^2}\right)^{16}$; е) $\left(2b^3\sqrt[6]{3b^2}\right)^3$.

40.15. Приведите радикалы к одинаковому показателю корня:

а) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[6]{6}$; в) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{17}$ и $\sqrt[8]{40}$; д) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{5}$ и $\sqrt[8]{6}$;

б) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{5}$; г) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{3}$ и $\sqrt[15]{100}$; е) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[9]{7}$ и $\sqrt[18]{500}$.

40.16. Сравните числа:

а) $\sqrt[4]{26}$ и $\sqrt{5}$; в) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt[6]{7}$ и $-\sqrt[9]{18}$;

б) $\sqrt{6}$ и $\sqrt[6]{215}$; г) $-\sqrt[4]{4}$ и $-\sqrt[3]{3}$; е) $\sqrt[6]{15}$ и $\sqrt[4]{6}$.

40.17. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[6]{18}$; г) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[6]{3}$ и $\sqrt[3]{2}$;

б) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[15]{40}$; д) $3\sqrt[6]{2}$, $2\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{11}$;

в) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[15]{30}$; е) $3\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{70}$ и $2\sqrt[3]{3}$.

Представьте выражение в виде $\sqrt[n]{A}$.

40.18. а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{5}$; д) $\sqrt[4]{2}:\sqrt[6]{7}$;

б) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$; г) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{10}$; е) $\sqrt[6]{3}:\sqrt[8]{5}$.

40.19. а) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$; в) $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2x^2}}$; д) $\sqrt[5]{5ab^2\sqrt[3]{4a^2b}}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}}$; г) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{ab}}$; е) $\sqrt[3]{3xy^2\sqrt[4]{2xy}}$.

40.20. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{3x^3}\cdot\sqrt{3x}$; в) $\sqrt[4]{a^3b^2}\cdot\sqrt[5]{a^4b^3}$; д) $\sqrt[4]{8a^5}:\sqrt[6]{2a^2}$;

б) $\sqrt{2y}\cdot\sqrt[6]{4y^5}$; г) $\sqrt[5]{x^4y^3}\cdot\sqrt[3]{x^5y^2}$; е) $\sqrt[10]{a^3b^5}:\sqrt[15]{a^2b}$.

Решите уравнение.

40.21. а) $\sqrt[3]{7-4x}=3$; в) $\sqrt[4]{4+3x}=-1$; д) $\sqrt[4]{x^2-10x+25}=2$;

б) $\sqrt[4]{1-5x}=2$; г) $\sqrt[5]{9x-5}=-2$; е) $\sqrt[3]{x^2+3x-29}=-1$.

40.22. а) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}=0$; в) $4\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+1=0$;

б) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=0$; г) $\sqrt[4]{x}+2\sqrt[8]{x}-3=0$.

40.23. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt[4]{(x+1)^4}$; в) $y=\sqrt[3]{(x+2)^3}$; д) $y=4-\sqrt[4]{x^4}$;

б) $y=\sqrt[6]{(x-2)^6}$; г) $y=\sqrt[5]{(3-x)^5}$; е) $y=\sqrt[3]{x^6}-2$.

Упростите выражение.

40.24. а) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$; б) $\sqrt{15-4\sqrt{14}}$; в) $\sqrt{23+6\sqrt{10}}$; г) $\sqrt{19-4\sqrt{21}}$.

40.25. а) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$.

40.26. а) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; б) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

40.27. а) $\sqrt[4]{17+\sqrt{288}}$; б) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$.

Докажите числовое равенство.

40.28. а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{19+8\sqrt{3}}=6$; б) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}=3$.

40.29. а) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=3$;

б) $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}-\sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}=3$.

40.30. Вычислите:

а) $3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot\sqrt[8]{27}$;

б) $5\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt[8]{5}\cdot\sqrt[8]{125}$;

в) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$;

г) $\left(2^{0,25}+2\cdot\sqrt[4]{8}\right)^2-9\sqrt{2}$;

д) $\left(\sqrt[4]{27}-3^{1,25}\right)^2-12\sqrt{3}$;

е) $3\sqrt{8}-\left(2^{0,75}+\sqrt[4]{32}\right)^2$.

40.31. Пусть $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt[3]{5}$, $c=\sqrt[6]{21}$. Верно ли неравенство:

а) $a<b<c$;
б) $c<a<b$;
в) $c<b<a$;
г) $b<a<c$;
д) $a+b+c>6$;
е) $abc<10$?

40.32. Пусть $b=\sqrt[3]{21}$, $c=\sqrt[4]{29}$. Верно ли неравенство:

а) $1<b<2$;
б) $c<b$;
в) $2<c<3$;
г) $b<c+1$;
д) $2{,}5\leqslant c$;
е) $bc<10$?

Упражнения для повторения

40.33. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{-14}\cdot a^{10}}{a^{-9}}$;
б) $\dfrac{b^{-12}\cdot b^{-6}}{b^{-20}}$;
в) $\dfrac{x^{-5}\cdot x^{-3}}{x^{-11}}$;
г) $\dfrac{y^{-7}\cdot y^{0}}{y^{3}}$;
д) $\dfrac{c^{-12}}{c^{-14}\cdot c^{6}}$;
е) $\dfrac{z^{-8}}{z^{-4}\cdot z}$.

40.34. а) Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40 %. Сколько нужно взять стали того и другого сорта, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля 30 %?

б) Смешали 15%-ный и 70%-ный растворы соляной кислоты и получили 960 г 28,125%-ного раствора. Найдите массу 15%-ного раствора.

40.35. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а) $\sin x + \cos^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}$, $x \in \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \cos 2x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

40.36. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 3(x+5)^3 - 3, \text{ если } -6 \leqslant x < -4, \\ \sqrt{x+4}, \text{ если } -4 \leqslant x < 0, \\ 2\cos x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

а) Постройте график функции $y = f(x)$.
б) Прочитайте график функции $y = f(x)$.
в) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет единственный корень.
г) Найдите все значения x, для которых график функции $y = f(x)$ лежит не выше прямой $3x + 5y + 12 = 0$.

§ 41. Понятие степени с любым рациональным показателем

Вы знаете, как вычислить значение степени с любым целым показателем n: $a^1 = a$; если $n > 1$, то $a^n = aaaa...a$ (n множителей); если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

В этом параграфе мы обсудим, какой смысл придаётся в математике понятию степени с дробным показателем, выясним, что означают такие символы математического языка, как, например, $3^{\frac{1}{5}}$, $12^{3,7}$, $2^{-\frac{3}{4}}$ и т. д.

Определение 1. Если $a \geqslant 0$ и $\frac{p}{q} > 0$ — обыкновенная дробь, то полагают, что

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Из этого определения следует, в частности, что $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3^1} = \sqrt[5]{3}$, $12^{3,7} = 12^{\frac{37}{10}} = \sqrt[10]{12^{37}}$.

В математике определения просто так не придумываются, во всём присутствует здравый смысл. Известно свойство степеней с натуральными показателями: при возведении степени в степень показатели перемножаются, например $(2^3)^4 = 2^{12}$. Было бы естественно распространить это свойство и на случай дробных показателей, например полагать, что верно равенство $\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^4 = 2^3$ $\left(\text{поскольку } \frac{3}{4} \cdot 4 = 3\right)$.

А теперь смотрите: если $2^{\frac{3}{4}} = x$, то интересующее нас равенство $\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^4 = 2^3$ принимает вид $x^4 = 2^3$, откуда следует, что $x = \sqrt[4]{2^3}$. Вот и получается, что под $2^{\frac{3}{4}}$ следует понимать $\sqrt[4]{2^3}$. Видимо, подобные рассуждения и привели математиков к выбору определения 1.

Пользуясь определением 1, мы сумеем любое *неотрицательное* число возвести в дробную степень. А вот на отрицательные числа определение 1 не распространяется. Например, запись $(-32)^{\frac{1}{5}}$ считается лишённой смысла, несмотря на то, что выражение $\sqrt[5]{-32}$ определено: $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Теперь введём понятие степени с отрицательным рациональным показателем.

Определение 2. Если $a > 0$ и $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь, то полагают, что

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Например,

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Пример 1 Доказать, что для любого основания $a > 0$ справедливо тождество:

а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{1}{3}}$; б) $a^2 : a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{6}{5}}$; в) $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{8}}$.

Решение. Во всех приведённых ниже преобразованиях мы используем определения 1 и 2, а также свойства радикалов (см. предыдущий параграф).

а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-\frac{1}{3}}$;

б) $a^2 : a^{\frac{4}{5}} = \frac{a^2}{\sqrt[5]{a^4}} = \frac{\sqrt[5]{a^{10}}}{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[5]{\frac{a^{10}}{a^4}} = \sqrt[5]{a^6} = a^{\frac{6}{5}}$;

в) $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^{\frac{1}{4}}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[4]{a}}} = \frac{1}{\sqrt[8]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{8}}} = a^{-\frac{1}{8}}$.

В примере 1 «а» мы доказали, что $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{1}{3}}$; это означает, что $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}$. Этот пример иллюстрирует привычное свойство: *при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются.*

В примере 1 «б» мы доказали, что $a^2 : a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{6}{5}}$; это означает, что $a^2 : a^{\frac{4}{5}} = a^{2 - \frac{4}{5}}$. Этот пример иллюстрирует привычное свойство: *при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя делимого вычитается показатель делителя.*

И, наконец, в примере 1 «в» мы доказали, что $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{8}}$; это означает, что $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$. Этот пример иллюстрирует привычное свойство: *при возведении степени в степень показатели перемножаются.*

Как видите, те свойства степеней, к которым вы привыкли, имея дело с целыми показателями, сохраняются и для дробных показателей.

Итак, теперь вы знаете, что такое степень с любым рациональным показателем. Справедливы следующие свойства степени (мы считаем, что $a > 0$, $b > 0$, s и t — произвольные рациональные числа):

1) $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$;
2) $a^s : a^t = a^{s-t}$;
3) $(a^s)^t = a^{st}$;
4) $(ab)^s = a^s \cdot b^s$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$.

Частичные обоснования указанных свойств были сделаны выше, этим мы и ограничимся.

Складывать дроби легче, чем применять свойства радикалов. В этой связи вернёмся к примеру 3 из §40. На получение равенства $\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[8]{x^3} = \sqrt[24]{x^{13}}$ там потребовалось довольно много объяснительного текста. А теперь смотрите, как обстоит дело с дробными показателями:

$$\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[8]{x^3} = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{3}{8}} = x^{\frac{1}{6}+\frac{3}{8}} = x^{\frac{13}{24}} = \sqrt[24]{x^{13}}.$$

Согласитесь, что так быстрее и проще.

Пример 2 Дано: $f(x) = x^{-\frac{3}{8}}$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$. Доказать, что

$$2f\left(x^{\frac{4}{3}}\right) = g\left(\frac{16}{x^2}\right).$$

Доказательство.

$$f(x) = x^{-\frac{3}{8}}, \quad 2f\left(x^{\frac{4}{3}}\right) = 2\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{3}{8}} = 2x^{\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)} = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$g(x) = \sqrt[4]{x}, \quad g\left(\frac{16}{x^2}\right) = \sqrt[4]{\frac{16}{x^2}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{x^2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Итак, мы доказали, что $2f\left(x^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $g\left(\frac{16}{x^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}}$. Значит, $2f\left(x^{\frac{4}{3}}\right) = g\left(\frac{16}{x^2}\right)$, что и требовалось доказать.

Упражнения

41.1. Представьте степень с дробным показателем в виде $\sqrt[n]{A^m}$, где $n \in N$, $m \in Z$:

а) $x^{\frac{2}{3}}$; в) $p^{-1\frac{3}{4}}$; д) $y^{0,2}$;

б) $a^{-\frac{1}{6}}$; г) $b^{2\frac{1}{3}}$; е) $c^{-2,5}$.

41.2. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

а) $\sqrt[3]{a}$; в) $\sqrt[8]{b^{-3}}$; д) $\sqrt[5]{y^4}$;

б) $\sqrt{x^{-1}}$; г) $\sqrt[4]{x^3}$; е) $\sqrt[9]{b^{-5}}$.

Вычислите.

41.3. а) $36^{\frac{1}{2}}$; в) $64^{-\frac{1}{3}}$; д) $16^{\frac{3}{4}}$;

б) $27^{\frac{1}{3}}$; г) $81^{-\frac{1}{4}}$; е) $125^{\frac{2}{3}}$.

41.4. а) $0,25^{1\frac{1}{2}}$; в) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$; д) $0,00032^{1,2}$;

б) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{1\frac{1}{3}}$; г) $0,001^{-\frac{2}{3}}$; е) $0,00243^{-0,4}$.

41.5. а) $64^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{5}{12}} \cdot 8^{-\frac{3}{4}}$; в) $3^{\frac{2}{5}} \cdot 9 : \sqrt[5]{3^{-3}}$; д) $\left(\frac{1}{16} \cdot 9^{-2}\right)^{-\frac{1}{4}}$;

б) $36^{\frac{3}{10}} \cdot 6^{1,4} \cdot 216^{-\frac{2}{3}}$; г) $8^{-\frac{2}{3}} : 32^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$; е) $\left(\frac{1}{64} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Упростите выражение.

41.6. а) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{5}}$; в) $y^{\frac{1}{3}} : y^{-\frac{1}{2}}$; д) $\left(x^{\frac{2}{7}}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

б) $x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}}$; г) $b^{-\frac{3}{5}} : b^{\frac{7}{10}}$; е) $\left(a^{-\frac{5}{8}}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

41.7. а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; в) $b^{0,8} \cdot \sqrt[4]{b^{-3}}$; д) $\sqrt[6]{c^{-1}} : c^{-\frac{2}{3}}$;

б) $y^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{y}$; г) $\sqrt[5]{x^{-3}} \cdot x^{-1,6}$; е) $z^{2,4} : \sqrt[4]{z^5}$.

41.8. а) $(x^{0,5})^{\frac{2}{5}} \cdot x^{-0,4}$; в) $\sqrt[5]{a^3} \cdot \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{9}}$; д) $(8x^{-1,5})^{\frac{2}{3}} \cdot 3\sqrt{x}$;

б) $\left(y^{-\frac{3}{8}}\right)^{0,8} \cdot y^{-0,7}$; г) $\sqrt[3]{c^{-2}} \cdot \left(c^{1\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$; е) $(81x^{-4})^{-\frac{3}{4}} \cdot 5\sqrt[3]{x}$.

41.9. а) Известно, что $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $g(x) = x^{-\frac{2}{3}}$. Докажите, что

$$f(81x^{-4}) = g\left(\frac{x^3}{27}\right).$$

б) Известно, что $f(x) = x^{-0,6}$, $g(x) = \sqrt[4]{x^5}$. Докажите, что

$$f\left(32x^{\frac{5}{6}}\right) \cdot g(16x^{0,4}) = 4.$$

Упражнения для повторения

41.10. Разложите на множители выражение:

а) $\sqrt{xy} - \sqrt{y}$; в) $a - 25$; д) $\sqrt{a^3} + 8$;

б) $a + 2\sqrt{a}$; г) $x - 6\sqrt{x} + 9$; е) $c\sqrt{c} - d\sqrt{d}$.

41.11. Сократите дробь:

а) $\frac{x - 36}{\sqrt{x} - 6}$; в) $\frac{\sqrt{ab} + b}{a + 2\sqrt{ab} + b}$; д) $\frac{x\sqrt{x} - 27}{x + 3\sqrt{x} + 9}$;

б) $\frac{10 + \sqrt{a}}{100 - a}$; г) $\frac{4a - 4\sqrt{ab} + b}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}}$; е) $\frac{\sqrt{a} - 2}{a\sqrt{a} - 8}$.

41.12. Решите неравенство:

а) $3 - \sqrt[3]{x} > 1$; в) $\sqrt{-x} - 2 > 0$;

б) $\sqrt{x + 1} \leqslant x - 1$; г) $\sqrt[3]{x} - 4x + 3 \geqslant 0$.

41.13. Решите уравнение и укажите его корни на заданном промежутке:

а) $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

б) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \sin 8x = 0$, $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

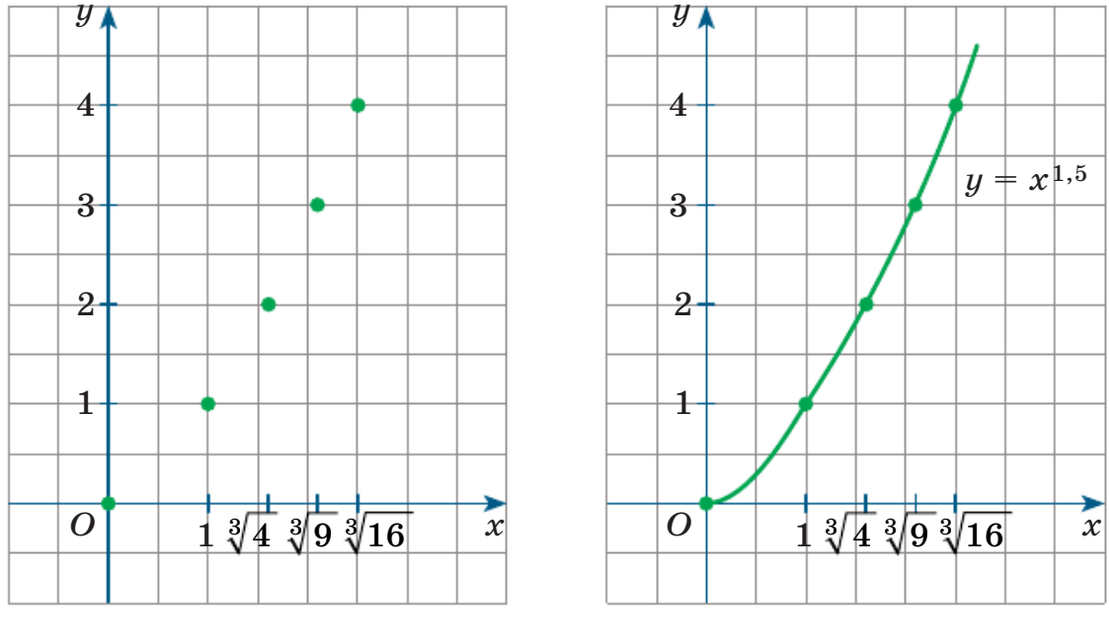
§ 42. Степенные функции с рациональным показателем

В этом параграфе речь пойдёт о функциях вида $y = x^r$, где r — рациональное число ($r \in \boldsymbol{Q}$), их называют *степенными функциями с рациональным показателем*. В § 37—38 мы рассмотрели случаи, когда r — целое число. Теперь рассмотрим степенные функции с дробными показателями. Не оговаривая этого каждый раз особо, всюду в этом параграфе мы полагаем, что показатель r — не целое рациональное число. Сначала выясним, как обстоит дело при $r > 1$.

Рассмотрим функцию $y = x^{1,5}$, т. е. $y = \sqrt{x^3}$. Составим таблицу значений для этой функции.

x	0	1	$\sqrt[3]{4} \approx 1,6$	$\sqrt[3]{9} \approx 2,1$	$\sqrt[3]{16} \approx 2,5$
y	0	1	2	3	4

Построим точки (0; 0), (1; 1), $\left(\sqrt[3]{4};\ 2\right)$, $\left(\sqrt[3]{9};\ 3\right)$, $\left(\sqrt[3]{16};\ 4\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 159, *а*), они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 159, *б*). Как видите, график похож на ветвь параболы.



а *б*

Рис. 159

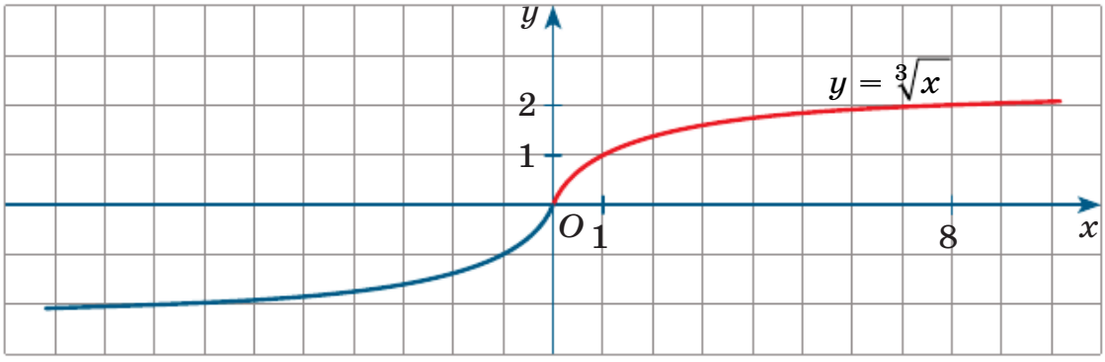


Рис. 160

Такой же вид имеют графики любых степенных функций $y = x^r$, где $r > 1$.

Теперь выясним, как обстоит дело при $0 < r < 1$. Например, рассмотрим функцию $y = x^{\frac{1}{3}}$. Для $x \geqslant 0$ она совпадает с функцией $y = \sqrt[3]{x}$. В § 39 мы говорили о том, как выглядит график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (график функции $y = \sqrt[n]{x}$ с нечётным натуральным n, определённой на всей числовой прямой), он представлен на рисунке 160. Выделим часть этого графика при $x \geqslant 0$ (см. рис. 160) — это и будет график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ — он представлен на рисунке 161. Как видите, график похож на ветвь параболы. Такой же вид имеют графики любых степенных функций $y = x^r$, где $0 < r < 1$.

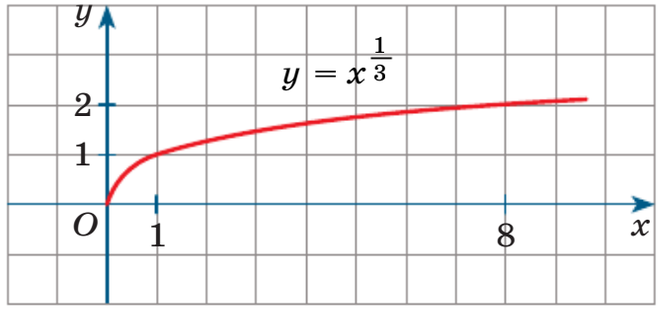


Рис. 161

Подведём итоги. На рисунке 162 представлен график функции $y = x^r$, $r > 1$; на рисунке 163 представлен график функции $y = x^r$, $0 < r < 1$.

Перечислим свойства функции $\boldsymbol{y = x^r}$, $\boldsymbol{r > 0}$.

1. Область определения функции $D(f) = [0; +\infty)$.

2. $y = x^r$ — функция общего вида (ни чётная, ни нечётная).

3. $y = x^r$ — возрастающая функция.

4. Функция ограничена снизу, не ограничена сверху.

5. $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует.

6. $y = x^r$ — непрерывная функция.

7. Область значений функции $E(f) = [0; +\infty)$.

8. Функция выпукла вниз при $r > 1$, выпукла вверх при $0 < r < 1$.

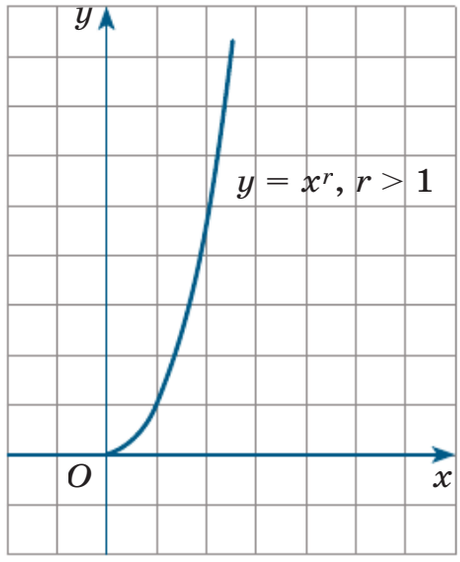


Рис. 162

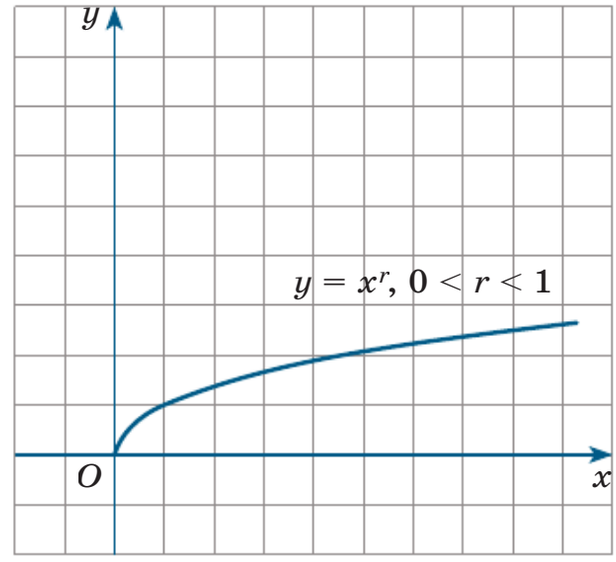


Рис. 163

Пример 1 Построить (схематически) график функции:
а) $y = (x + 2)^{1,7} - 1$; б) $y = -2x^{0,4}$.

Решение. а) Перейдём к вспомогательной системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые $x = -2$, $y = -1$, т. е. выбрав в качестве начала новой системы координат точку $(-2; -1)$. К новой системе координат «привяжем» кривую $y = x^{1,7}$ (рис. 164).

б) Построим график функции $y = x^{0,4}$ (пунктирная линия на рисунке 165). Осуществим растяжение графика от оси абсцисс с коэф-

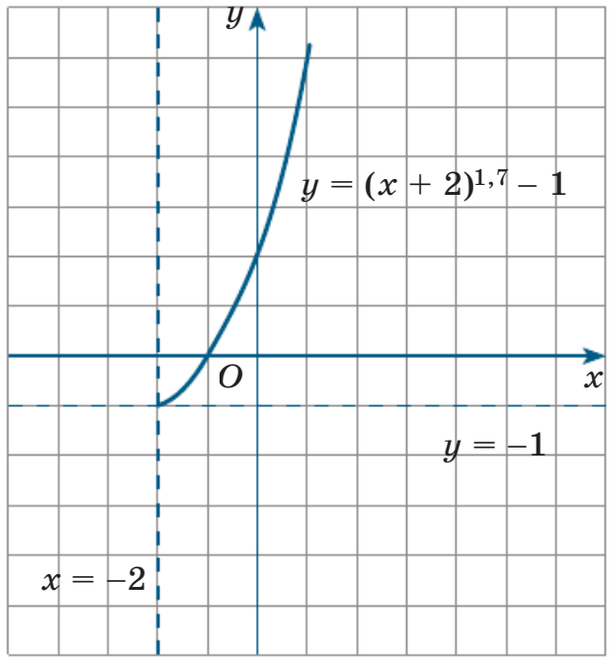


Рис. 164

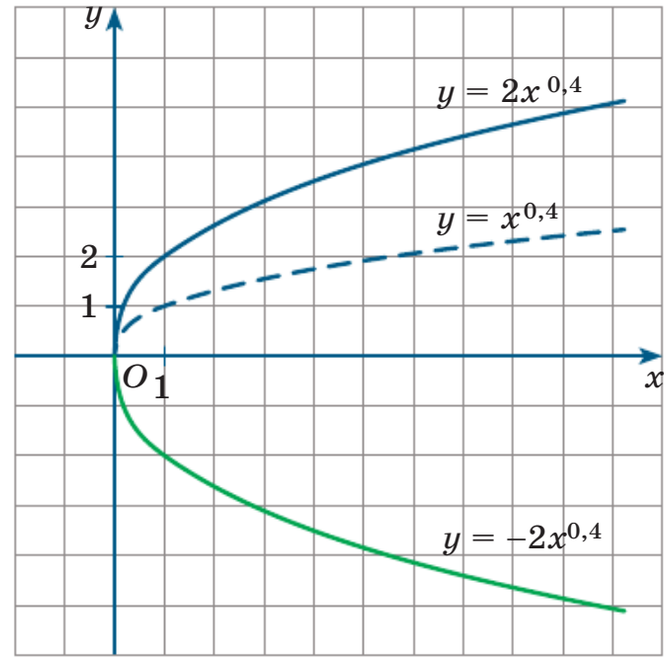


Рис. 165

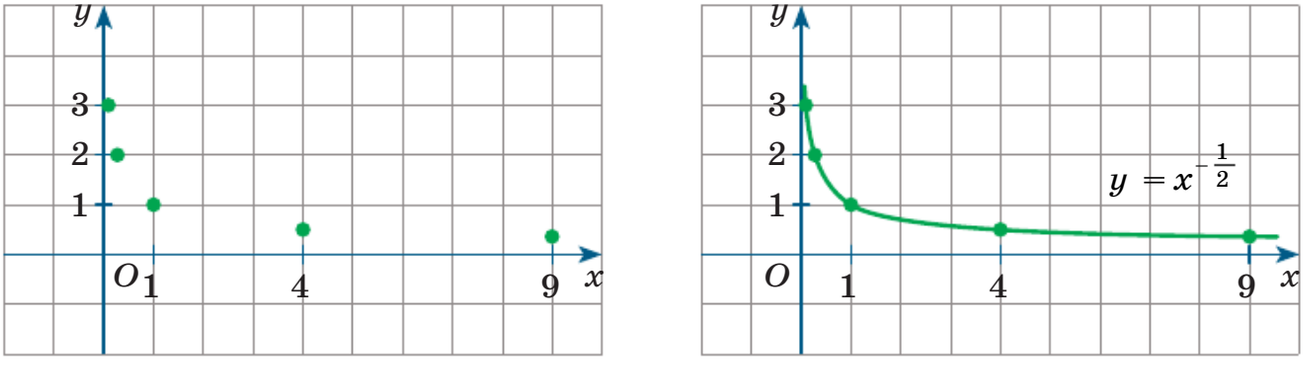
фициентом 2 (синяя линия на рисунке 165), получим график функции $y = 2x^{0,4}$. Отразив график функции $y = 2x^{0,4}$ симметрично относительно оси абсцисс, получим график функции $y = -2x^{0,4}$ (зелёная линия на рисунке 165).

До сих пор в этом параграфе мы говорили о степенных функциях с положительным рациональным показателем. Теперь речь пойдёт о функциях вида $y = x^{-r}$, $r > 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^{-\frac{1}{2}}$, т. е. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Составим таблицу значений для этой функции.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Построим точки $\left(\frac{1}{9}; 3\right)$, $\left(\frac{1}{4}; 2\right)$, $(1; 1)$, $\left(4; \frac{1}{2}\right)$, $\left(9; \frac{1}{3}\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 166, *а*), они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 166, *б*). Как видите, график похож на ветвь гиперболы. Подобный вид имеет график любой степенной функции $y = x^{-r}$, где r — положительное рациональное число, не являющееся натуральным числом (о функциях вида $y = x^{-n}$, $n \in N$, мы специально говорили в § 38, графики этих функций в первой четверти имеют такой же вид, как на рисунке 166, *б*), но у каждого из них есть ещё



а *б*

Рис. 166

одна ветвь, симметричная построенной либо относительно начала координат, либо относительно оси ординат.

Перечислим свойства функции $y = x^{-r}$, $r > 0$, $r \in Q$.

1. Область определения функции $D(f) = (0; +\infty)$.

2. $y = x^{-r}$ — функция общего вида.

3. $y = x^{-r}$ — убывающая функция.

4. Функция ограничена снизу, не ограничена сверху.

5. $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$ не существуют.

6. $y = x^{-r}$ — непрерывная функция.

7. Область значений функции $E(f) = (0; +\infty)$.

8. Функция выпукла вниз.

Отметим также, что у графика функции имеются две асимптоты: горизонтальная $y = 0$ и вертикальная $x = 0$.

Пример 2 Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^{-\frac{2}{3}}, & x > 1, \end{cases}$ на отрезке $\left[\frac{1}{81}; 8\right]$.

Решение. Построим график функции $y = \sqrt[4]{x}$, т. е. график степенной функции $y = x^{\frac{1}{4}}$, и выделим его часть на отрезке $[0; 1]$ (рис. 167). В той же системе координат построим график функции $y = x^{-\frac{2}{3}}$ и выделим его часть на открытом луче $(1; +\infty)$. В итоге построили график заданной кусочной функции (см. рис. 167).

Нам нужно найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $\left[\frac{1}{81}; 8\right]$. Построенный график убеждает нас в том, что $y_{\text{наиб}} = 1$ (этого значения функции достигает в точке $x = 1$).

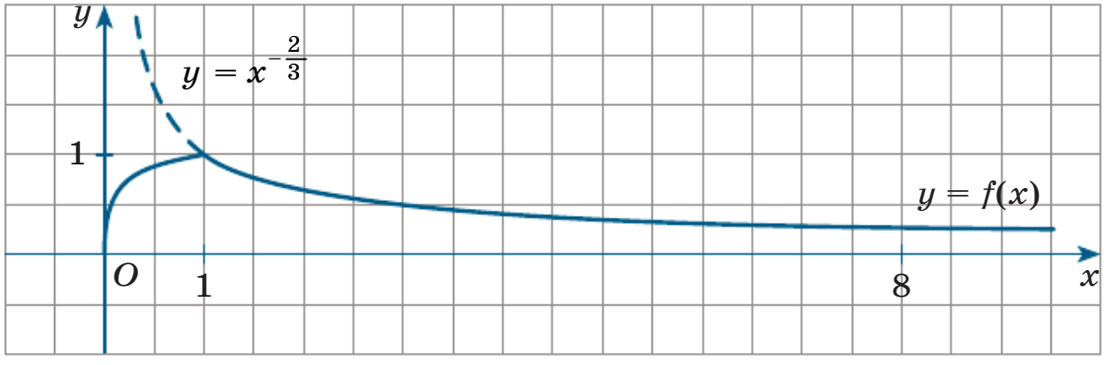


Рис. 167

А наименьшее значение, судя по чертежу, достигается либо в левом, либо в правом конце отрезка; выясним, в каком.

$$f\left(\frac{1}{81}\right)=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\frac{1}{3};\quad f(8)=8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64}}=\frac{1}{4},$$

значит, наименьшее значение функции равно $\frac{1}{4}$ и достигается оно в точке $x=8$.

Ответ: $y_{\text{наим}}=\frac{1}{4}$, $y_{\text{наиб}}=1$.

Упражнения

42.1. Постройте график функции:

а) $y=x^{\frac{4}{3}}$; в) $y=x^{\frac{2}{3}}$; д) $y=x^{-\frac{3}{2}}$;

б) $y=x^{\frac{7}{2}}$; г) $y=x^{\frac{3}{4}}$; е) $y=x^{-\frac{1}{3}}$.

42.2. Постройте и сравните графики функций:

а) $y=x^{\frac{1}{2}}$ и $y=\sqrt{x}$; б) $y=x^{\frac{1}{3}}$ и $y=\sqrt[3]{x}$.

42.3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y=x^{2,5}$ на отрезке $[1;\,4]$;

б) $y=x^{\frac{1}{4}}$ на луче $[16;\,+\infty)$;

в) $y=x^{-\frac{2}{3}}$ на полуинтервале $[1;\,8)$;

г) $y=x^{\frac{4}{3}}$ на отрезке $[0;\,8]$;

д) $y=x^{0,2}$ на открытом луче $(1;\,+\infty)$;

е) $y=x^{-\frac{1}{2}}$ на полуинтервале $(3;\,9]$.

42.4. Постройте график функции.

а) $y=(x-2)^{\frac{1}{3}}$; в) $y=-x^{1,5}+1$; д) $y=(x-1)^{-\frac{2}{3}}-2$;

б) $y=(x+1)^{-\frac{2}{3}}$; г) $y=-x^{\frac{3}{4}}+2$; е) $y=(x+2)^{2,5}-1$.

42.5. а) $y = 4x^{\frac{1}{3}}$; в) $y = -\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{3}{2}}$; д) $y = 2(x-1)^{-\frac{1}{3}} - 2$;

б) $y = -2x^{-0,5}$; г) $y = 2x^{\frac{1}{4}} + 1$; е) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^{1,5} + 1$.

ИКТ 42.6. Решите графически уравнение:

а) $x^{0,5} = x - 2$; в) $x^{-\frac{1}{3}} = x^3$; д) $\frac{1}{4}x^{2,5} = 2x$;

б) $x^{-2} = x^{1,5}$; г) $x^{\frac{2}{3}} = x - 4$; е) $x^{-1,5} = \sqrt{x}$.

ИКТ 42.7. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^{2,5}, \\ y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^{-\frac{3}{2}}, \\ y = \sqrt[3]{x}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = -x^{\frac{3}{4}}, \\ y = -0,5x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = -x^{\frac{2}{3}}, \\ y = -4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^{-\frac{2}{3}}, \\ y = 2x - 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = x^{\frac{1}{5}}, \\ y = |x|. \end{cases}$

ИКТ 42.8. Решите графически неравенство:

а) $x^{\frac{1}{2}} < 4 - 0,5x$; в) $x^{1,5} \leqslant 2x$; д) $x^3 \geqslant x^{-\frac{1}{3}}$;

б) $-x^{\frac{1}{3}} > x - 2$; г) $x > 0,5x^{\frac{4}{3}}$; е) $x^2 \leqslant x^{-\frac{1}{4}}$.

ИКТ 42.9. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x < 0, \\ x^{2,5}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^{\frac{2}{3}}, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \frac{2}{x^2}, \text{ если } x < 0, \\ x^{-0,5}, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} |x|, \text{ если } x < 1, \\ x^{0,25}, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

42.10. а) Даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $g(x) = x^{-2}$. Докажите, что $f(64x^6) = g(0,5x^{-1})$.

б) Даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, $g(x) = x^{-3}$. Докажите, что $f(625x^8) = g(0,2x^{-2})$.

Постройте график функции.

42.11. а) $y = \left|x^{\frac{1}{3}} - 2\right|$; б) $y = |3 - x^{-2,5}|$; в) $y = \left|x^{-\frac{1}{3}} - 1\right|$; г) $y = |2 - x^{1,2}|$.

42.12. а) $y = \left|2 - |x - 1|^{\frac{3}{2}}\right|$; б) $y = |3 - |x - 2|^{-0,25}|$.

Решите уравнение.

42.13. а) $x^{-0,5} = 12x - 1$;
б) $54x^{-1,5} = x - 7$;
в) $16x^{-\frac{4}{3}} = 2x - 15$;
г) $(x - 2)^{-0,5} = 4x - 7$;
д) $27(x - 1)^{-1,5} = 4x - 5$;
е) $9x^{-\frac{2}{3}} = 2x^{\frac{1}{3}} + 1$.

42.14. а) $x^{0,2} + x^{2,5} + 2x^{\frac{7}{3}} = 3 + x^{-\frac{11}{7}}$;

б) $2x^{-\frac{2}{3}} + 3x^{-\frac{5}{8}} = \sqrt[4]{5x^3 + 3x + 8} + 3$.

42.15. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{0,4} + 2, & 1 \leqslant x \leqslant 5, \\ 2\sin\dfrac{\pi x}{2}, & -2 \leqslant x < 1, \\ -\sqrt[6]{-x-2}, & x < -2. \end{cases}$$

а) Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$.
б) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при различных значениях параметра a?

Упражнения для повторения

42.16. Решите уравнение:

а) $x^{10} = 1024$;
б) $x^5 = -1024$;
в) $\sqrt[3]{x - 1} = -3$;
г) $\sqrt{2x + 5} = 7$;
д) $x^{-5} = 32$;
е) $x^{-2} = 0,09$.

42.17. а) Найдите $\operatorname{tg} 2t$, если $\sin t = \frac{3}{5}$ и $\cos t < 0$.

б) Найдите $\operatorname{ctg} 2t$, если $\cos t = -\frac{5}{13}$ и $\sin t > 0$.

42.18. а) Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 96 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба?
б) Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 660 литров она заполняет на 11 минут дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 570 литров?

42.19. Найдите область значений функции:
а) $y = 3\sin x - \cos 2x$;
б) $y = \cos x + \cos 2x$.

§ 43. Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение — это уравнение, в котором переменная содержится под знаками корней *n-й* степени или возводится в степени с дробными показателями.

В этом параграфе мы поговорим о том, какие методы применяют для решения иррациональных уравнений и на что при этом следует обращать особое внимание.

Рассмотрим иррациональное уравнение $\sqrt[3]{3x-1} = 2$. Равенство $\sqrt[3]{3x-1} = 2$ означает, что $2^3 = 3x - 1$, т. е. $3x - 1 = 8$. От заданного иррационального уравнения мы перешли к рациональному уравнению $3x - 1 = 8$, возведя в третью степень обе части иррационального уравнения. *Метод возведения в степень* обеих частей уравнения — основной метод решения иррациональных уравнений, содержащих переменную под знаком радикала. Из уравнения $3x - 1 = 8$ находим $x = 3$. Это — корень как уравнения $3x - 1 = 8$, так и уравнения $\sqrt[3]{3x-1} = 2$.

Метод возведения в степень технически несложен, но может привести к неприятностям. Рассмотрим, например, иррациональное уравнение $\sqrt[6]{2x+5} = \sqrt[6]{x+1}$. Возведя обе части уравнения в шестую степень, получим: $2x + 5 = x + 1$, $x = -4$. Но значение $x = -4$ не является корнем заданного иррационального уравнения. Почему? Подставив -4 вместо x в заданное иррациональное уравнение, получим не имеющее смысла равенство $\sqrt[6]{-3} = \sqrt[6]{-3}$, в котором под знаком корня

чётной степени содержится отрицательное число. В подобных случаях говорят: $x = -4$ — *посторонний корень* для заданного иррационального уравнения. Получается, что уравнение $\sqrt[6]{2x+5} = \sqrt[6]{x+1}$ не имеет корней.

Обнаружить (обычно говорят «отсеять») посторонние корни помогает проверка. Для иррациональных уравнений *проверка — обязательный этап решения уравнения.*

Пример 1 Решить иррациональное уравнение:

а) $\sqrt[4]{5x-16} = \sqrt{x-2}$; б) $\sqrt{2x^2+5x-2} = x-6$.

Решение. а) Возведём обе части уравнения в четвёртую степень:

$$\left(\sqrt[4]{5x-16}\right)^4 = \left(\sqrt{x-2}\right)^4;$$

$$5x - 16 = (x-2)^2;$$
$$5x - 16 = x^2 - 4x + 4;$$
$$x^2 - 9x + 20 = 0;$$
$$x_1 = 5, \quad x_2 = 4.$$

Проверка. Подставив $x = 5$ в уравнение $\sqrt[4]{5x-16} = \sqrt{x-2}$, получим $\sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$ — верное равенство. Подставив $x = 4$ в уравнение $\sqrt[4]{5x-16} = \sqrt{x-2}$, получим $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ — это тоже верное равенство. Значит, оба найденных значения — корни уравнения.

б) Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{2x^2+5x-2}\right)^2 = (x-6)^2;$$

$$2x^2 + 5x - 2 = x^2 - 12x + 36;$$
$$x^2 + 17x - 38 = 0;$$
$$x_1 = 2, \; x_2 = -19.$$

Проверка. Подставив $x = 2$ в уравнение $\sqrt{2x^2+5x-2} = x-6$, получим $\sqrt{16} = -4$ — неверное равенство; подставив $x = -19$ в уравнение $\sqrt{2x^2+5x-2} = x-6$, получим $\sqrt{625} = -25$ — неверное равенство. Таким образом, оба найденных значения — посторонние корни, т. е. заданное иррациональное уравнение не имеет корней.

Ответ: а) 4, 5; б) корней нет.

Во многих случаях весьма эффективным является *метод введения новой переменной.*

Пример 2 Решить уравнение $x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 15 = 0$.

Решение. Введём новую переменную $y = x^{-\frac{1}{3}}$. Тогда

$$x^{-\frac{2}{3}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = y^2.$$

Получаем квадратное уравнение относительно новой переменной y:

$$y^2 - 2y - 15 = 0.$$

Решим это уравнение: $y_1 = -3$, $y_2 = 5$.
Теперь задача сводится к решению двух уравнений:

$$x^{-\frac{1}{3}} = -3; \quad x^{-\frac{1}{3}} = 5.$$

Первое уравнение не имеет корней, поскольку (напомним ещё раз) область допустимых значений переменной для выражения $x^{-\frac{1}{3}}$ в подобных случаях определяется условием $x > 0$, а тогда и $x^{-\frac{1}{3}} > 0$. Решая второе уравнение, последовательно находим:

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 5; \quad x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}; \quad \sqrt[3]{x} = \frac{1}{5}; \quad x = \left(\frac{1}{5}\right)^3; \quad x = \frac{1}{125}.$$

Ответ: $\frac{1}{125}$.

Пример 3* Решить уравнение $\sqrt{x^2 + x - 5} + \sqrt{x^2 + 8x - 4} = 5$.

Решение. $\sqrt{x^2 + x - 5} = 5 - \sqrt{x^2 + 8x - 4}$;

$$\left(\sqrt{x^2 + x - 5}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x^2 + 8x - 4}\right)^2;$$

$$x^2 + x - 5 = 25 - 10\sqrt{x^2 + 8x - 4} + x^2 + 8x - 4;$$

$$10\sqrt{x^2 + 8x - 4} = 7x + 26;$$

$$100(x^2 + 8x - 4) = (7x + 26)^2;$$

$$51x^2 + 436x - 1076 = 0;$$

$$x_1 = 2, \; x_2 = -\frac{538}{51}.$$

Проверка. Подставим значение $x = 2$ в заданное уравнение:

$$\sqrt{2^2 + 2 - 5} + \sqrt{2^2 + 8 \cdot 2 - 4} = 1 + 4 = 5.$$

Значит, $x = 2$ — корень заданного уравнения.

Число $-\frac{538}{51}$ проверить подстановкой в заданное уравнение очень трудозатратно, поступим по-другому. Осуществим проверку по более простому уравнению, получившемуся в результате выполненных преобразований: $10\sqrt{x^2+8x-4} = 7x+26$. Смотрите: $-\frac{538}{51} = -10\frac{28}{51}$, а при этом значении выполняется неравенство $7x + 26 < 0$, т. е. указанное значение не удовлетворяет уравнению $10\sqrt{x^2+8x-4} = 7x+26$, равно как и заданному уравнению. Значит, $x_2 = -\frac{538}{51}$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

Пример 4* Решить уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $\sqrt[3]{2x-6} = \sqrt{x+1} - 2$ и возведём обе части уравнения в третью степень, воспользовавшись для правой части формулой

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Получим:

$$2x - 6 = \left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 3\left(\sqrt{x+1}\right)^2 \cdot 2 + 3\sqrt{x+1} \cdot 2^2 - 2^3;$$
$$2x - 6 = (x+1)\sqrt{x+1} - 6(x+1) + 12\sqrt{x+1} - 8;$$
$$8x + 8 = (x+1)\sqrt{x+1} + 12\sqrt{x+1};$$
$$8\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1} = (x+13)\sqrt{x+1}.$$

Один корень последнего уравнения очевиден: $x_1 = -1$. Если $x \neq -1$, то можно обе части последнего уравнения разделить на отличное от нуля выражение $\sqrt{x+1}$. Получим:

$$8\sqrt{x+1} = x + 13;$$
$$64x + 64 = x^2 + 26x + 169;$$
$$x^2 - 38x + 105 = 0;$$
$$x_2 = 3,\ x_3 = 35.$$

Проверка показывает, что все три найденных корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: –1, 3, 35.

Упражнения

Решите уравнение.

43.1. а) $\sqrt{2x+3}=4$; в) $\sqrt{x^2-11}=5$; д) $\sqrt[3]{x+7}=3$;

б) $\sqrt{5x-1}=3$; г) $\sqrt{3-2x^2}=1$; е) $\sqrt[4]{x-4}=2$.

43.2. а) $\sqrt{4x^2+5x-2}=2$; в) $\sqrt{-3x^2+23x-5}=3$;

б) $\sqrt[4]{x^2-10x+25}=2$; г) $\sqrt[3]{x^2-9x-19}=-3$.

43.3. а) $(x-1)^{\frac{1}{3}}=8$; в) $(2x)^{\frac{2}{3}}=64$; д) $-3(x+4)^{\frac{3}{2}}=-24$;

б) $(x+2)^{\frac{1}{2}}=9$; г) $(5x)^{\frac{1}{4}}-8=2$; е) $4(x-3)^{\frac{2}{3}}=100$.

43.4. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $\sqrt{6-x}+2=0$; г) $\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{2-x}=-1$;

б) $\sqrt[4]{2x-1}+1=0$; д) $\sqrt[4]{3x-5}=\sqrt[4]{9-7x}$;

в) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x^2-2}=0$; е) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[6]{x^2-4}=1$.

Решите уравнение.

43.5. а) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{2x^2+3x-1}$;

б) $\sqrt[4]{5x^2-3x-2}=\sqrt[4]{3x^2-4x+1}$;

в) $\sqrt{4x+3}=\sqrt{4x^2+5x-2}$;

г) $\sqrt[6]{3x^2-5x-1}=\sqrt[6]{2x^2-2x-3}$.

43.6. а) $\sqrt{7-3x}=x+7$; в) $5x-\sqrt{3x+4}=2$;

б) $\sqrt{5x^2-3x+2}=x-3$; г) $\sqrt{3x^2+x+30}=5-x$.

43.7. а) $x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{4}}+2=0$; г) $3x^{\frac{1}{2}}-10x^{\frac{1}{4}}+3=0$;

б) $x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}-2=0$; д) $2x^{\frac{1}{5}}-3x^{\frac{1}{10}}-2=0$;

в) $4x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-4=0$; е) $9x^{-\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}-6=0$.

43.8. а) $(5x-1)+\sqrt{5x-1}=12$;

б) $\sqrt{2x+3}-\frac{2}{\sqrt{2x+3}}+1=0$;

в) $\sqrt[4]{x+1}+2\sqrt[8]{x+1}-3=0$;

г) $(7x+4)-\sqrt{7x+4}=42$;

д) $\sqrt{12x-1}+1=\frac{6}{\sqrt{12x-1}}$;

е) $\sqrt[4]{x-2}-3\sqrt{x-2}+4=0$.

43.9. а) $x^2+2\sqrt{x^2+5}=10$;

б) $\frac{\sqrt{7x-2}}{3x+2}=\frac{\sqrt{3x+2}}{7x-2}$;

в) $x^2+3\sqrt{x^2-8}=12$;

г) $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{3x^2+x-4}=\frac{\sqrt{3x^2+x-4}}{x^2+x-1}$.

43.10. а) $\sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}}+\sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}}=\frac{5}{2}$;

б) $\sqrt{\frac{x}{x-1}}-0{,}5=3\sqrt{1-\frac{1}{x}}$;

в) $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=\frac{10}{3}$;

г) $4\sqrt{3-\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{x}{3x-1}}=3$.

43.11. а) $\sqrt{x+1}=2+\sqrt{x-19}$;

б) $\sqrt{4-2x}+\sqrt{2+x}=\sqrt{2x}$;

в) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$;

г) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=\sqrt{7-x}$.

43.12. а) $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$;

б) $\frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x^2}-25}{\sqrt[3]{x}+5}=5$.

43.13. а) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$;

б) $1-x=\sqrt{1-\sqrt{4x^2-7x^4}}$;

в) $\sqrt{7+(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}=x+2$;

г) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$.

43.14. а) $\sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}}+\sqrt[4]{\frac{x+3}{2-x}}=2$;

б) $\sqrt[7]{\frac{5-x}{3+x}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2$.

43.15. а) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$;

б) $\sqrt{2x^2-8x+12}=x^2-4x-6$;

в) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$;

г) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

43.16. а) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x-1}=1$;

б) $\sqrt{2x}-\sqrt[3]{4x-8}=2$.

43.17. а) $\sqrt[3]{3x+2} = \sqrt{10-3x}$;

б) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$;

в) $\sqrt[4]{17+x} = \sqrt[5]{30-2x}$;

г) $\sqrt[5]{2x-1} + \sqrt[5]{x} + 2\sqrt[5]{3x-2} = 0$.

43.18. а) При каких значениях параметра p уравнение

$$(x-7)\left(\sqrt{x-p} + \sqrt{3p-x}\right) = 0$$

имеет хотя бы один корень?

б) Решите уравнение с параметром p:

$$(x^2-4)\left(\sqrt{2x-p} + \sqrt{2p-x}\right) = 0.$$

Упражнения для повторения

43.19. Найдите значения a, при которых данные числа являются последовательными тремя членами геометрической прогрессии:

а) $a-3$, $\sqrt{4a}$, $a+2$; б) $a-5$, $\sqrt{7a}$, $a+4$.

43.20. а) Клиент положил в банк 500 000 р. с ежегодным начислением 8 % сроком на три года. Какая сумма по вкладу будет получена в конце срока, если никакие операции с вкладом клиент производить не будет?

б) Клиент положил в банк некоторую сумму на депозитный вклад сроком на три года с ежегодным начислением 10 %. Какая сумма была у клиента первоначально, если по окончании срока он получил 798 600 р.?

43.21. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 2x - 2\sin(\pi - x)}{\cos(-x) - 1}$; б) $\dfrac{\cos 2x - \cos^2(\pi + x)}{1 - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$.

43.22. Постройте график функции:

а) $y = \cos^2 x - \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$;

б) $y = \sin^2 x \cdot (2\operatorname{ctg} x + 1) + \cos^2 x$.

§ 44. Преобразование иррациональных выражений

Иррациональное выражение — это алгебраическое выражение, в котором переменные содержатся под знаками корней n-й степени или возводятся в степени с дробными показателями. Для преобразования иррациональных выражений используются свойства корней n-й степени (эти свойства мы обсудили в § 40) и свойства степеней с рациональными показателями (эти свойства мы обсудили в § 41).

Пример 1 Разложить на множители выражение

$$\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[12]{8x^8} - \sqrt[12]{256y^9} - \sqrt[4]{2y^3}\,.$$

Решение. Поработаем со вторым и третьим слагаемыми:

$$\sqrt[12]{8x^8} = \sqrt[12]{2^3 \cdot x^8} = \sqrt[12]{2^3} \cdot \sqrt[12]{x^8} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}\,;$$

$$\sqrt[12]{256y^9} = \sqrt[12]{2^8} \cdot \sqrt[12]{y^9} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y^3} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{y^3}\,.$$

Значит,

$$\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[12]{8x^8} - \sqrt[12]{256y^9} - \sqrt[4]{2y^3} =$$
$$= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{y^3} - \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{y^3}\,.$$

Воспользуемся методом группировки: объединим в одну группу первое и третье слагаемые, а в другую группу — второе и четвёртое слагаемые. Получим:

$$\left(\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{y^3}\right) + \left(\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{y^3}\right) =$$
$$= \sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{y^3}\right) + \sqrt[4]{2}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{y^3}\right) = \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{y^3}\right)\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{2}\right).$$

Пример 2 Найти значение выражения

$$\frac{a^{\frac{2}{5}} - 9b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}} - 3b^{\frac{1}{5}}} - \frac{a^{\frac{2}{5}} + 4a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{5}} + 4b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}} + 2b^{\frac{1}{5}}}$$

при $a = 12{,}37$, $b = \frac{32}{243}$.

Решение. Здесь имеет смысл ввести новые переменные: $a^{\frac{1}{5}} = x$, $b^{\frac{1}{5}} = y$ и учесть, что $a^{\frac{2}{5}} = x^2$, $b^{\frac{2}{5}} = y^2$. Тогда заданное выражение примет более простой вид: $\frac{x^2 - 9y^2}{x - 3y} - \frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x + 2y}$. Далее имеем:

$$\frac{x^2 - 9y^2}{x - 3y} - \frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x + 2y} = \frac{(x - 3y)(x + 3y)}{x - 3y} - \frac{(x + 2y)^2}{x + 2y} =$$
$$= (x + 3y) - (x + 2y) = y = b^{\frac{1}{5}}.$$

Нам удалось преобразовать данное выражение к виду $b^{\frac{1}{5}}$. Следовательно, от a заданное выражение не зависит. Остаётся вычислить $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$. Имеем: $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Упражнения

44.1. Преобразуйте выражение, используя формулы сокращённого умножения:

а) $\left(\sqrt[3]{a} + 2\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[3]{a} - 2\sqrt{b}\right)$;

б) $\left(\sqrt[4]{5x} - 4\sqrt[4]{y}\right)^2$;

в) $\left(2 - \sqrt[3]{x}\right)\left(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)$;

г) $\left(\sqrt[4]{2x} - 3y\right)\left(\sqrt[4]{2x} + 3y\right)$;

д) $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{3c}\right)^2$;

е) $\left(6 + \sqrt[6]{x}\right)\left(36 - 6\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x}\right)$.

Разложите на множители.

44.2. а) $\sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2b}$;

б) $\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[6]{a} + \sqrt{a}$;

в) $\sqrt{3a} - \sqrt{2b} + \sqrt{3b} - \sqrt{2a}$;

г) $x\sqrt{y} - y\sqrt{x}$;

д) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{2x} - 3\sqrt[8]{x}$;

е) $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{xy^3} - \sqrt[3]{x^3y} - \sqrt[3]{y^4}$.

44.3. а) $\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[6]{3y} + \sqrt[3]{y}$;

б) $\sqrt[4]{a^3} - 27$;

в) $2 - 2\sqrt{2x} + x$;

г) $x\sqrt{x} + 2\sqrt{2}$.

44.4. а) $\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{a}-6$;

б) $\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+6$;

в) $\sqrt[3]{p^2}-3\sqrt[3]{pq}+2\sqrt[3]{q^2}$;

г) $6\sqrt[5]{y^2}+7\sqrt[5]{y}+1$;

д) $2\sqrt[4]{c}+\sqrt[8]{c}-3$;

е) $\sqrt{a}+4\sqrt[4]{ab}+3\sqrt{b}$.

44.5. Сократите дробь, считая, что переменные принимают положительные значения.

а) $\dfrac{\sqrt{10a}-\sqrt{15b}}{\sqrt{15a}-\sqrt{5b}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{14n}+\sqrt[3]{21k}}{\sqrt[3]{7k}-\sqrt[3]{14n}}$;

в) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{3b}}$;

д) $\dfrac{\sqrt[4]{x}+4\sqrt[8]{xy}+4\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-4\sqrt[4]{y}}$;

е) $\dfrac{\sqrt[3]{9a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{9a^2}-2\sqrt[3]{3ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

44.6. а) $\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab^2}+b}$;

б) $\dfrac{\sqrt{x}+2y\sqrt[4]{xy^2}+y^3}{\sqrt[4]{x}+y\sqrt{y}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{b}-d\sqrt{d}}{\sqrt[6]{b}-\sqrt{d}}$;

г) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}+2}{\sqrt[5]{x^6}+8}$;

д) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-6}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}$;

е) $\dfrac{\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+6}{\sqrt{x}-9}$.

44.7. Сократите дробь:

а) $\dfrac{z^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}}}{z-t}$;

б) $\dfrac{b-36}{b^{0,5}+6}$;

в) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}{2a^{\frac{1}{3}}}$;

г) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}-1}$;

д) $\dfrac{y-y^{0,5}-12}{4-y^{0,5}}$;

е) $\dfrac{p^{0,5}+3p^{0,25}}{p^{0,5}+2p^{0,25}-3}$.

44.8. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{4-3\sqrt{2}}{\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)^2}$;

б) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{24}+\sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}$;

в) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}$;

г) $\dfrac{1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{45}\right)^2}$;

д) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt[3]{2}-2\sqrt[6]{2}+1}$;

е) $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2}$.

44.9. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{5}{6}}-x^{\frac{1}{3}}}$ при $x=1{,}44$;

б) $\dfrac{2c^{0,5}}{c-4}-\dfrac{1}{c^{0,5}-2}$ при $c=9$;

в) $\dfrac{a-c}{a^{0,5}-c^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-c^{1,5}}{a-c}$ при $a=4,\ c=\dfrac{1}{4}$;

г) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-6{,}25}{a^{\frac{1}{3}}+2{,}5}$ при $a=8$;

д) $\dfrac{2}{y^{0,25}+3}-\dfrac{2}{y^{0,25}-3}$ при $y=100$;

е) $\dfrac{x^{0,5}}{x^{0,5}+y^{0,5}}+\dfrac{y^{0,5}}{x^{0,5}-y^{0,5}}$ при $x=\dfrac{1}{2}$, $y=2$.

Упростите выражение.

44.10. а) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[6]{x}}{(x+y)\sqrt[6]{x^{-1}y^2}}-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

б) $\left(\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2-\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2}{2a-2b}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$.

44.11. а) $\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(1-\sqrt[4]{x}\right)$;

б) $\left(a^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)$;

в) $(a+b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)$;

г) $\left(n^{\frac{1}{8}}-k^{\frac{1}{8}}\right)\left(n^{\frac{1}{8}}+k^{\frac{1}{8}}\right)\left(n^{\frac{1}{4}}+k^{\frac{1}{4}}\right)\left(n^{\frac{1}{2}}+k^{\frac{1}{2}}\right)$.

44.12. а) $\dfrac{x^{1,5}-a^{1,5}}{x^{0,5}+a^{0,5}}\cdot\dfrac{x-a}{x+x^{0,5}a^{0,5}+a}+2x^{0,5}a^{0,5}$;

б) $\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}-2a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}}+\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\right)\cdot a^{-\frac{2}{3}}$;

в) $\left(\dfrac{p^{0,5}}{q-p^{0,5}q^{0,5}}+\dfrac{q^{0,5}}{p-p^{0,5}q^{0,5}}\right)\cdot\dfrac{pq^{0,5}+p^{0,5}q}{p-q}$;

г) $b\left(\left(\dfrac{a\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)-\sqrt[4]{a}\right)^{-4}$.

44.13. а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-4\sqrt{a^{-1}}}-\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{64a}}\right)^{-2}-\sqrt{a^2-8a+16}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)^{-1}+\sqrt[6]{a}$.

Докажите тождество и укажите область его определения.

44.14. а) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2-\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2-(16a+4b)}{4a-b}+\dfrac{10\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\dfrac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}}{1+\sqrt[4]{a^3b^3}}-\dfrac{1-\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=2$.

44.15. а) $\dfrac{a^2+2a-3+(a+1)\sqrt{a^2-9}}{a^2-2a-3+(a-1)\sqrt{a^2-9}}=\dfrac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}}$;

б) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}=\dfrac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$.

44.16. На сколько процентов следует уменьшить (увеличить) a, чтобы получить b:

а) $a=2$, $b=\dfrac{\left(\sqrt[4]{24}+\sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}$;

б) $a=4$, $b=\dfrac{\left(\sqrt[4]{54}+\sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{6}+6\sqrt{2}}$;

в) $a=5$, $b=\dfrac{\left(\sqrt[4]{40}+\sqrt[4]{10}\right)^2}{3\sqrt{10}+4\sqrt{5}}$;

г) $a = 14,\ b = \left(2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^{-1}+\sqrt{5}\right)^4$;

д) $a = 20,\ b = \left(3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)^{-1}+\sqrt{3}\right)^4$;

е) $a = 40,\ b = 2\left(2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^{-1}+\sqrt{3}\right)^4$?

Упражнения для повторения

44.17. Найдите приближённое значение данного числа с недостатком и с избытком с точностью до 0,1:

а) $\sqrt{7}$;

б) $\sqrt{17}$;

в) $4\sqrt{10}$;

г) $3\sqrt{30}$;

д) $\sqrt[3]{15}$;

е) $\sqrt[4]{50}$.

44.18. Найдите, при каком значении n верно равенство:

а) $2^n = 32$;

б) $10^n = 1$;

в) $3^n = \frac{1}{81}$;

г) $5^n = 0{,}04$;

д) $7^n = \sqrt{7}$;

е) $2^n = \sqrt[3]{4}$.

44.19. Расположите числа:

а) $4\sqrt{5}$, $3\sqrt{7}$, $5\sqrt{3}$, $2\sqrt{11}$ в порядке возрастания;

б) $-7\sqrt{3}$, $-8\sqrt{2}$, $-4\sqrt{7}$, $-5\sqrt{6}$ в порядке убывания;

в) $5\sqrt[3]{2}$, $4\sqrt[3]{5}$, $3\sqrt[3]{10}$, $2\sqrt[3]{37}$ в порядке возрастания;

г) $6\sqrt[3]{4}$, $5\sqrt[3]{6}$, $3\sqrt[3]{29}$, $2\sqrt[3]{99}$ в порядке убывания.

44.20. Докажите тождество:

а) $\sin 2x \cos x + \cos 4x \sin x = \cos 2x \sin 3x$;

б) $\operatorname{tg}^2 x(\cos 2x + 1) = 1 - \cos 2x$.

§ 45. Понятие степени с иррациональным показателем

В предыдущих параграфах этой главы мы говорили о степенях с любыми рациональными показателями. Теперь вы знаете, как возвести неотрицательное число в степень с целым и дробным показателем (а отрицательное число — только в степень с целым показателем). Но множество действительных чисел состоит не только из рациональных чисел, есть и иррациональные числа. Естественно, в математике введено и понятие степени неотрицательного числа с иррациональным показателем. Оно очень непростое, постараемся пояснить, какой смысл вкладывается в это понятие, на конкретном примере — на примере символа 2^{π}.

Известно, что $\pi = 3{,}141592\ldots$. Рассмотрим последовательность рациональных чисел — десятичных приближений числа π по недостатку:

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ 3{,}14159;\ 3{,}141592;\ \ldots\ .$$

Эта последовательность возрастает, соответственно, возрастает и последовательность

$$2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ 2^{3,1415},\ 2^{3,14159},\ 2^{3,141592},\ \ldots\ . \qquad (1)$$

Рассмотрим последовательность рациональных чисел — десятичных приближений числа π по избытку:

$$4;\ 3{,}2;\ 3{,}15;\ 3{,}142;\ 3{,}1416;\ 3{,}14160;\ 3{,}141593;\ \ldots\ .$$

Эта последовательность убывает, соответственно, убывает и последовательность

$$2^4,\ 2^{3,2},\ 2^{3,15},\ 2^{3,142},\ 2^{3,1416},\ 2^{3,14160},\ 2^{3,141593},\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Обозначим множество членов последовательности (1) буквой A, а множество членов последовательности (2) буквой B. Любой элемент множества A меньше любого элемента множества B. Если элементы этих множеств изобразить на числовой прямой, то увидим, что *множество A расположено левее множества B* (рис. 168).

Элементы этих множеств с двух разных сторон (слева и справа) всё ближе и ближе подходят к одной и той же точке, её называют

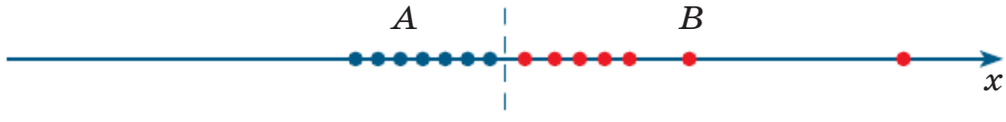


Рис. 168

разделяющим числом для множеств A и B. Это число и принимают за 2^{π}. А число $2^{-\pi}$ определяют уже известным нам способом:

$$2^{-\pi} = \frac{1}{2^{\pi}}.$$

Та же идея используется для любого символа вида a^x, где $a > 0$, а x — иррациональное число.

Естественно, что для любого положительного иррационального числа x полагают $0^x = 0$.

Теперь мы имеем представление о *степенях с любыми действительными показателями*. Степени с действительными показателями обладают всеми привычными свойствами степеней: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении степени в степень — перемножаются и т. д. (соответствующие доказательства приводят в курсе высшей математики).

Пример 1 Расположить в порядке возрастания числа:

а) $3^{\sqrt{7}}$; 9; 3^{π}; 27; $3^{3,1}$; 81; б) $5^{-\sqrt{3}}$; 0,2; $0{,}2^{\sqrt[3]{2}}$; 0,04; $0{,}04^{-\sqrt{5}}$; 1.

Решение. а) Учтём, что $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, и расположим показатели данных шести степеней по возрастанию: 2; $\sqrt{7}$; 3; 3,1; π; 4. Соответственно, данные шесть чисел расположатся в порядке возрастания следующим образом:

$$9;\ 3^{\sqrt{7}};\ 27;\ 3^{3,1};\ 3^{\pi};\ 81.$$

б) Учтём, что:

$$0{,}2 = 0{,}2^1;\quad 0{,}04 = 0{,}2^2;\quad 1 = 0{,}2^0;$$

$$5^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{5^{\sqrt{3}}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}} = 0{,}2^{\sqrt{3}};\quad 0{,}04^{-\sqrt{5}} = (0{,}2^2)^{-\sqrt{5}} = 0{,}2^{-2\sqrt{5}}.$$

Расположим показатели данных шести степеней по возрастанию: $-2\sqrt{5}$; 0; 1; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{3}$; 2. Поскольку основанием данных степеней является число 0,2, которое меньше 1, данные шесть чисел расположатся в порядке возрастания следующим образом:

$$0{,}04;\ 5^{-\sqrt{3}};\ 0{,}2^{\sqrt[3]{2}};\ 0{,}2;\ 1;\ 0{,}04^{-\sqrt{5}}.$$

Пример 2 Между какими целыми числами находится число c, если:

а) $c = 7^{\sqrt{3}}$; б) $c = 5^{-\pi}$?

Решение. а) $1 < \sqrt{3} < 2$, значит, $7^1 < 7^{\sqrt{3}} < 7^2$, т. е. $7 < c < 49$. При необходимости можно получить более точные оценки. Напри-

мер, $\sqrt{3} > 1{,}5$, $7^{\sqrt{3}} > 7^{1,5}$. Далее, $7^{1,5} = \sqrt{7^3} = \sqrt{343} > 18$. Значит, $18 < c < 49$.

б) С одной стороны, $5^{-\pi} > 0$, с другой стороны, $5^{-\pi} < 5^0 = 1$. Значит, $0 < c < 1$.

Упражнения

45.1. Запишите двойным неравенством, между какими целыми числами находится степень с иррациональным показателем:

а) $5^{\sqrt{3,2}}$; в) $3^{-\sqrt{3}}$; д) $9^{\sqrt[3]{17}}$;

б) $4^{\sqrt{5}}$; г) $8^{-\sqrt{4,5}}$; е) $5^{\sqrt[3]{33}}$.

45.2. Установите, верно ли неравенство:

а) $2^{2\sqrt{3}} > 8$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}} < 1$; д) $5^{\sqrt[4]{1,2}} > 5$;

б) $10^{3\sqrt{2}} < 10\,000$; г) $6^{-\sqrt{1,5}} < \frac{1}{6}$; е) $0{,}5^{\sqrt[3]{10}} > 0{,}25$.

45.3. Сравните числа:

а) $2^{\sqrt{10}}$ и $2^{2\sqrt{3}}$; в) $5^{-\sqrt{2}}$ и $5^{-1,4}$; д) $6^{\sqrt[3]{5}}$ и $6^{\sqrt{3}}$;

б) $3^{2\sqrt{2}}$ и $3^{\sqrt{7}}$; г) $7^{-\sqrt{5}}$ и $7^{-2,5}$; е) $10^{\sqrt[5]{3}}$ и $10^{\sqrt[3]{2}}$.

45.4. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $3^{\frac{1}{3}}$, $3^{1,5}$, $3^{\sqrt{2}}$, $3^{-\sqrt{3}}$, $3^{1,4}$, 1;

б) $0{,}2^3$, 1, $0{,}2^{-\sqrt{5}}$, $0{,}2^{0,5}$, $0{,}2^{-3}$, $0{,}2^{\frac{1}{3}}$.

45.5. Расположите в порядке убывания числа:

а) $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{1,7}$, $2^{-\sqrt{5}}$, $2^{\sqrt{3}}$, 2^{-2}, 1;

б) $0{,}5^2$, 1, $0{,}5^{\sqrt{2}}$, $0{,}5^{0,5}$, $0{,}5^{-3}$, $0{,}5^{\frac{2}{3}}$.

Упражнения для повторения

45.6. а) Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определя-

ется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, где v_0 — начальная скорость, g — ускорение свободного падения ($g \approx 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 2,7 с, если $v_0 = 27$ м/с?

б) Инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным дном. Действующая на аппарат выталкивающая сила определяется по формуле $F_A = \rho g a^2 h$, где a — сторона основания аппарата в метрах, h — высота аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, $g \approx 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Какой может быть максимальная длина стороны основания аппарата при высоте 3,5 м, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше 605 052 Н? Ответ выразите в метрах.

45.7. а) Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{11\sin\alpha + 19\cos\alpha}{3\sin\alpha - 37\cos\alpha} = 1$.

б) Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\dfrac{7\sin\alpha - 19\cos\alpha}{2\sin\alpha - 7\cos\alpha} = 3$.

45.8. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), \text{ если } -\dfrac{5\pi}{4} \leqslant x < -\dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, \text{ если } -\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

а) Постройте график функции $y = f(x)$.

б) Прочитайте график функции $y = f(x)$.

в) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет единственный корень.

г) Найдите все значения x, для которых график функции $y = f(x)$ лежит не выше оси абсцисс.

45.9. а) В магазине установлены два одинаковых автомата для продажи кофе. В каждом из них независимо от другого кофе может закончиться с вероятностью 0,15. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется хотя бы в одном автомате.

б) Вероятность того, что новый утюг прослужит больше года, равна 0,95. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,85. Найдите вероятность того, что он прослужит больше года, но меньше двух лет.

Итак, в главе 5

Определили понятие степени числа с любым действительным показателем.

Изучили свойства корней n-й степени.

Построили график и изучили свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$:
а) в случае чётного показателя корня;
б) в случае нечётного показателя корня.

Построили графики и изучили свойства степенных функций:
— с натуральным показателем;
— с отрицательным целым показателем;
— с положительным дробным показателем;
— с отрицательным дробным показателем.

Познакомились с преобразованиями иррациональных выражений и с решением иррациональных уравнений.

Ввели понятие степени с иррациональным показателем.

Вопросы

1. Как выглядит график функции $y = x^n$:
а) в случае чётного натурального показателя степени;
б) в случае нечётного натурального показателя степени?

2. Как выглядит график функции $y = x^{-n}$:
а) в случае чётного n;
б) в случае нечётного n?

3. Как выглядит график функции $y = \sqrt[n]{x}$:
а) в случае чётного показателя корня;
б) в случае нечётного показателя корня?

4. Перечислите свойства корней n-й степени.

5. Сформулируйте определение степени:
а) с положительным дробным показателем;
б) с отрицательным дробным показателем.

6. Как выглядит график функции $y = x^r$, $r \in \boldsymbol{Q}$, если:
а) $r > 1$; б) $0 < r < 1$; в) $r < 0$?

7. Опишите процесс отыскания числа $2^{\sqrt{3}}$.

Тест

1. Вычислите: $2\sqrt[4]{0,0625} - 5\sqrt[3]{0,216}$.

2. Расположите числа $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{5}$ и $\frac{2\pi}{3}$ в порядке возрастания.

а) $\sqrt[3]{7}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\sqrt{5}$ в) $\frac{2\pi}{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$

б) $\frac{2\pi}{3}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{5}$ г) $\sqrt{5}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\sqrt[3]{7}$

3. Укажите неверное равенство, если a и b — неотрицательные числа.

а) $\sqrt[n]{a\sqrt{b}} = \sqrt[2n]{a^2 b}$ в) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

б) $\sqrt[2n]{a^{2k}} = \sqrt[n]{a^k}$ г) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

4. Укажите выражение, тождественно равное выражению $\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$.

а) $\sqrt[9]{x}$ б) $\sqrt[9]{x^2}$ в) $\sqrt[20]{x}$ г) $\sqrt[20]{x^9}$

5. Найдите значение выражения $36^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5} - 625^{0,25} \cdot 32^{-\frac{1}{5}}$.

6. Укажите область определения функции $y = (x+2)^{-\frac{2}{5}}$.

а) $x > 0$ б) $x > -2$ в) $x \geqslant -2$ г) $-2 < x < 0$

7. Задайте аналитически функцию, график которой изображён на рисунке 169.

а) $y = \sqrt[3]{x}$ б) $y = x^{\frac{1}{3}}$ в) $y = x^{-\frac{1}{3}}$ г) $y = x^{\frac{3}{2}}$

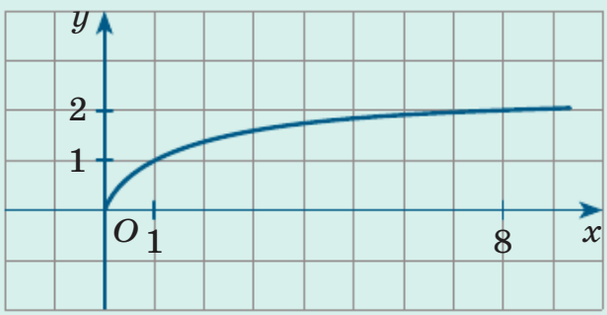


Рис. 169

8. Установите соответствие между уравнением и его решением.

А. $\sqrt[4]{x} = 3$	Б. $x^4 = 9$	В. $x^{\frac{1}{2}} = 3$	Г. $x^{-3} = \frac{1}{27}$
1) 9	2) $\pm\sqrt{3}$	3) 3	4) 81

9. Упростите выражение $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{b}{a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}$.

10. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 3x - 11} = x - 1$.

Из истории математики

До XVII в. в Европе для обозначения возведения в степень использовали или слова, или их сокращения. При этом часто обходились вообще без явного упоминания переменной (неизвестной). Например, у Ф. Виета вместо традиционного a^3 стоит *Acubus*, у изобретателя логарифмической линейки В. Отреда (1575—1660) вместо традиционного $x^4 - 4x^3$ написано: $1qq - 4qc$ (q — quadratic, c — cubic). Привычное нам написание степеней в виде a^3, b^4, x^5 и т. п. предложил Рене Декарт (1596—1650), хотя вплоть до середины XVIII в. вместо a^2, b^2, x^2 часто писали aa, bb, xx.

Термин «радикал» для знака $\sqrt{\ }$ квадратного корня (или знака $\sqrt[n]{\ }$ корня n-й степени) происходит от латинского *radix* — корень. Этот термин встречается не только в математике. Он весьма употребим в химии, в биологии, в лингвистике, в политологии и социологии, хотя в каждом случае смысл заметно отличается от остальных.

Сам знак радикала выглядел весьма по-разному. Это и R^23 вместо привычного нам $\sqrt{3}$, и R_x2 вместо $\sqrt{2}$ (R_x — первая и последняя буквы в слове *radix*). В XV в. часто ограничивались жирной точкой посередине строки. Видимо, во избежание путаницы при чтении и написании, позже точку стали заменять спецзнаком: тёмный ромб с вытянутой вверх правой, наклонённой вправо, стороной. В XVI в. этот спецзнак трансформировался в строчную «галочку» $\vee$, после которой (в скобках или без) указывали число, из которого извлекают квадратный корень. Этот момент связывают с работой Кристофа Рудольфа (1525 г.), «галочка» у него несимметрична: правая сторона была вертикальной.

Довольно быстро стало понятно, что знак радикала неудобно отрывать в обозначениях от числа, к которому этот радикал относится. Тогда стали у «галочки» $\vee$ справа сверху приписывать горизонтальную черту. Так систематически стал делать А. Жирар, правда, он ещё не вносил число под эту горизонтальную черту. Само вытягивание горизонтальной черты вправо и внесение под неё «подкоренного выражения» появилось к середине XVII в., обычно это связывают с работами Рене Декарта. Современное написание $\sqrt[n]{\ }$ утвердилось, скорее всего, после появления «Всеобщей арифметики» И. Ньютона,

напечатанной в 1707 г. Он же стал систематически использовать a^{-3}, b^{-4}, ... вместо $\frac{1}{aaa}$, $\frac{1}{bbbb}$, ...

ISAACI NEWTONI

ARITHMETICA UNIVERSALIS,

SIVE DE COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE

ARITHMETICA LIBER

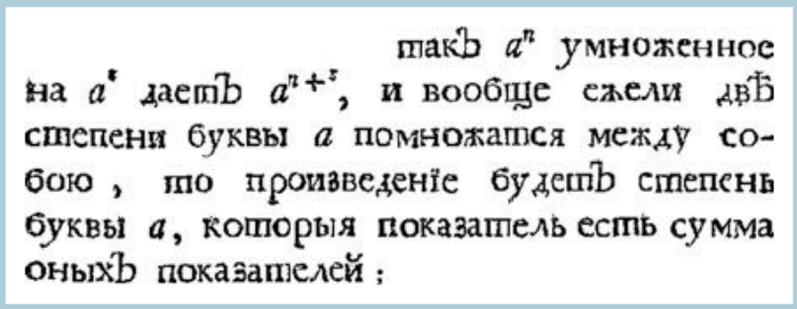
Трактовка операции извлечения корня как возведения в дробную степень впервые встречается в работах Н. Орема (1330—1382). Опять же после работ Ньютона, Лейбница и других математиков конца XVII в. использование степеней с *рациональными* показателями стало общеупотребимым. Собственно, хорошо известное словосочетание *бином Ньютона* (см. главу 7) как раз и было связано с разложением в ряд степенных одночленов выражения $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ с рациональным показателем. Во «Всеобщей арифметике» Ньютон точно формулирует все известные свойства операций с радикалами (перевод на русский 1948 г.):

Когда невозможно извлечь корень из всей радикальной величины, ее приводят, извлекая корень из какого-либо ее делителя.

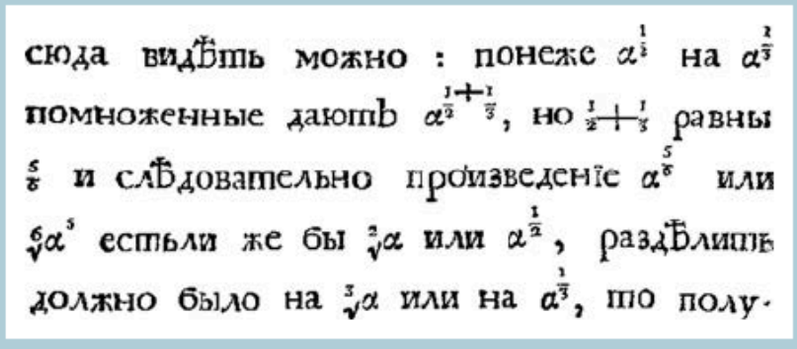
Так, $\sqrt{a^2bc}$, если извлечь корень из делителя a^2, становится $a\sqrt{bc}$; $\sqrt{48}$, или $\sqrt{16\times 3}$, при извлечении корня из делителя 16 становится $4\sqrt{3}$; $\sqrt{48a^2bc}$

После опубликования двухтомника Эйлера с почти тем же названием («Универсальная арифметика») операции со степенными выражениями и их свойства стали классической и стандартной учебной темой сначала в университетах, а позже и в школах. При этом все правила и свойства в те времена обычно описывались словами и

затем иллюстрировались примерами. Общие формулы типа $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ тогда ещё не использовали. Вот, например, как описывает Эйлер приведённое тождество для натуральных и для дробных показателей (цитаты из русского перевода 1768 г.):



такъ a^n умноженное на a^z даетъ a^{n+z}, и вообще ежели двѣ степени буквы a помножатся между собою, то произведеніе будетъ степень буквы a, которыя показатель есть сумма оныхъ показателей:



сюда видѣть можно: понеже $\alpha^{\frac{1}{2}}$ на $\alpha^{\frac{1}{3}}$ помноженные даютъ $\alpha^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, но $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ равны $\frac{5}{6}$ и слѣдовательно произведеніе $\alpha^{\frac{5}{6}}$ или $\sqrt[6]{\alpha^5}$ естьли же бы $\sqrt[3]{\alpha}$ или $\alpha^{\frac{1}{3}}$, раздѣлить должно было на $\sqrt[3]{\alpha}$ или на $\alpha^{\frac{1}{3}}$, то полу-

После появления работ Эйлера к концу XVIII в. степенные выражения и функции стали изучать и для *комплексных* чисел. Извлечение корней n-й степени традиционно рассматривалось как операция, обратная возведению в n-ю степень. Вопрос о реализуемости такой операции как отдельная математическая проблема стал рассматриваться существенно позже, уже к концу XIX в., после построения (Дедекинд, Вейерштрасс, Кантор) теории действительных чисел.

Современная методика построения теории степенных функций и изучения их свойств сложилась в алгебре и в математическом анализе примерно к середине XX в.



Кубанский государственный
технологический университет.
Краснодар

§46. Показательные функции
§47. Понятие касательной. Число e и функция $y = e^x$
§48. Показательные уравнения
§49. Показательные неравенства
§50. Понятие логарифма
§51. Логарифмические функции
§52. Свойства логарифмов
§53. Десятичные логарифмы
§54. Логарифмические уравнения
§55. Логарифмические неравенства
§56. Формулы перехода к новому основанию логарифма

Глава 6

Показательные и логарифмические функции

§ 46. Показательные функции

В предыдущей главе мы узнали, что такое a^x, где основание a — положительное число, а показатель степени — любое действительное число. Значит, можно говорить и о функции $y = a^x$, определённой на множестве всех действительных чисел. Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют *показательной функцией*. Случай, когда $a = 1$, исключают, поскольку для любого показателя x выполняется равенство $1^x = 1$ и получается постоянная функция $y = 1$.

Показательные функции часто встречаются в реальных ситуациях. Например, формулы, связанные с показательной функцией, используются в качестве основных:

— в банковском деле при непрерывном начислении сложных процентов;

— в физике при исследовании законов радиоактивного распада вещества;

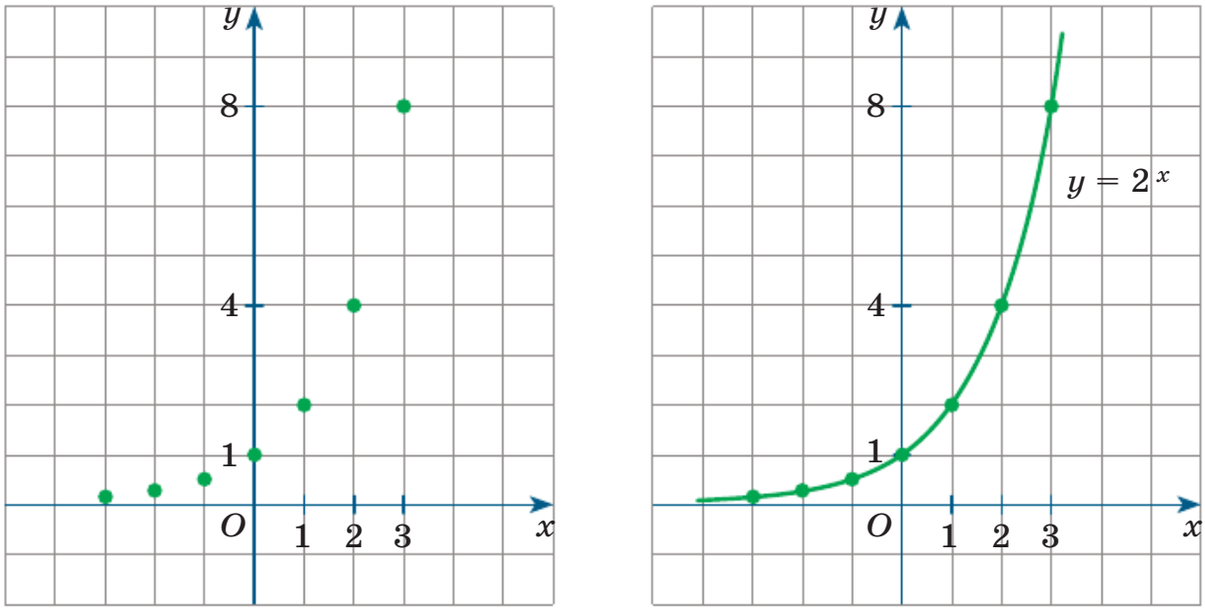
— в биологии при оценке роста численности популяции живых организмов;

— в IT-индустрии при планировании роста числа подписчиков успешной социальной сети.

Распространённость показательных функций связана с тем, что ими описывают процессы, в которых скорость изменения величины прямо пропорциональна значению величины.

Построим график показательной функции с основанием больше 1. Рассмотрим в качестве примера функцию $y = 2^x$. Составим таблицу значений для этой функции.

x	0	1	2	3	–1	–2	–3
y	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



а *б*

Рис. 170

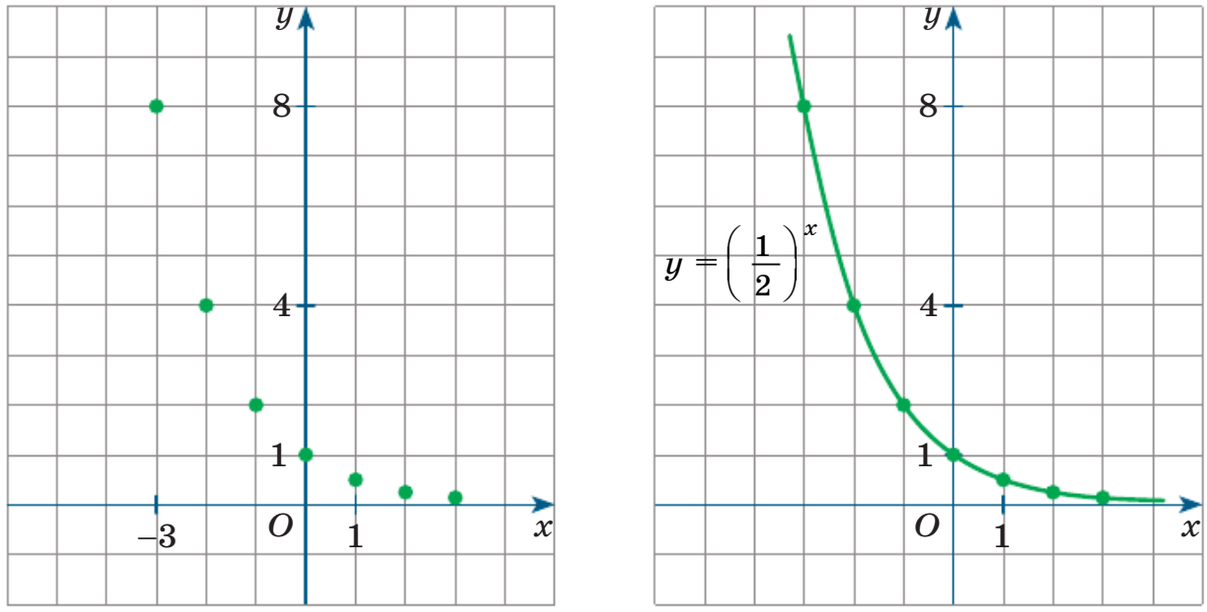
Построим точки (0; 1), (1; 2), (2; 4), (3; 8), $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-2;\frac{1}{4}\right)$, $\left(-3;\frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 170, *а*), они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 170, *б*).

Подобный вид имеет график любой показательной функции $y = a^x$, где $a > 1$.

Теперь выясним, как обстоит дело при $0 < a < 1$. Рассмотрим в качестве примера функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Составим таблицу значений для этой функции.

x	0	–1	–2	–3	1	2	3
y	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Построим точки (0; 1), (–1; 2), (–2; 4), (–3; 8), $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(2;\frac{1}{4}\right)$, $\left(3;\frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 171, *а*), они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 171, *б*).



а *б*

Рис. 171

Подобный вид имеет график любой показательной функции $y = a^x$, где $0 < a < 1$.

Подведём итоги. На рисунке 172 представлен график показательной функции $y = a^x$, $a > 1$; на рисунке 173 представлен график показательной функции $y = a^x$, $0 < a < 1$.

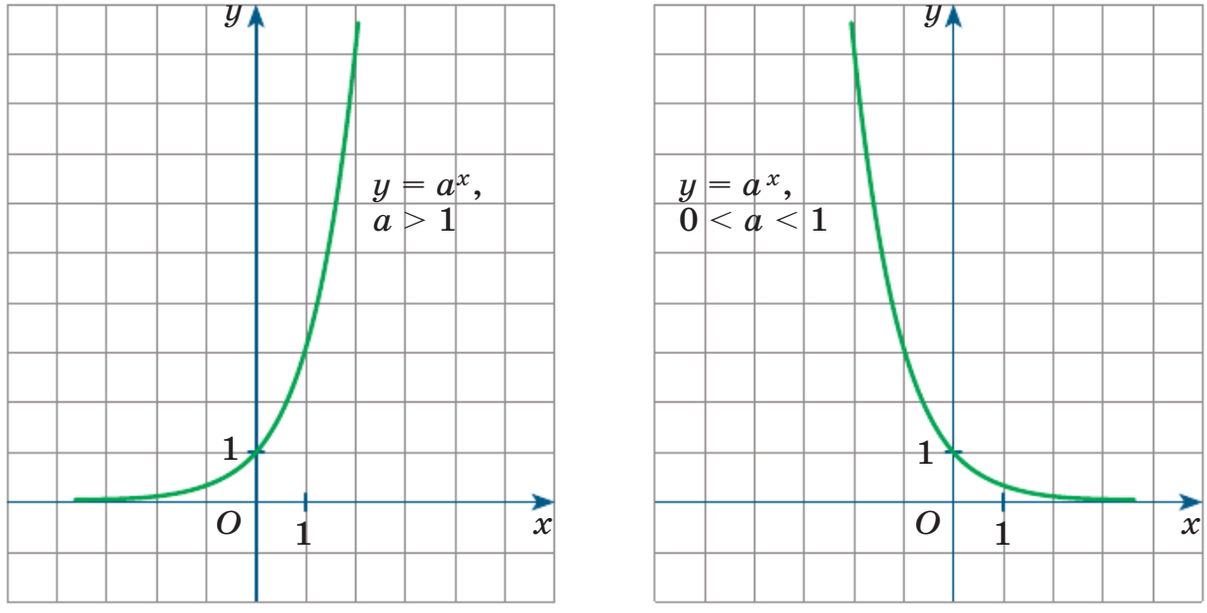


Рис. 172 *Рис. 173*

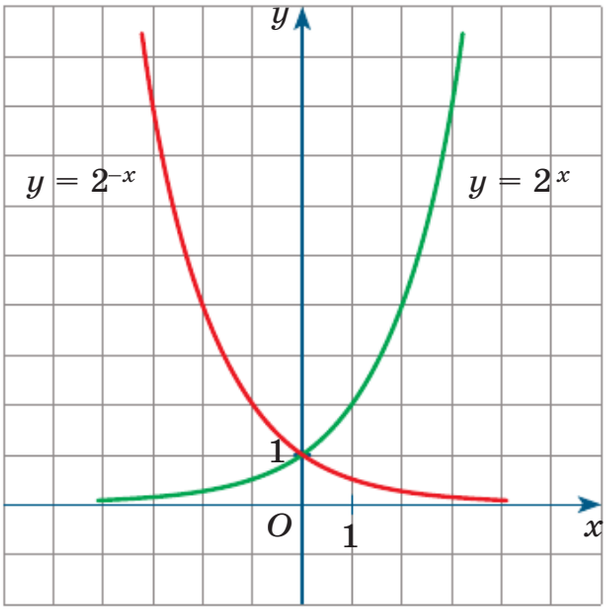


Рис. 174

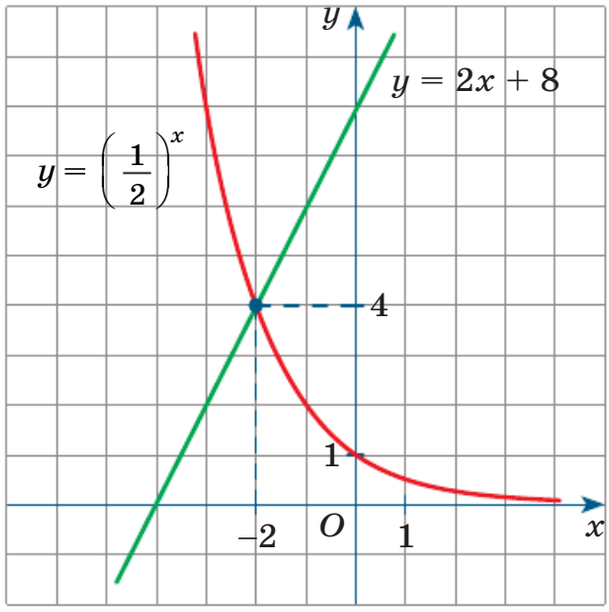


Рис. 175

Обратите внимание: графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, т. е. $y = 2^{-x}$, симметричны относительно оси ординат (рис. 174). Вообще, графики функций $y = a^x$, $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

Перечислим свойства показательной функции $\boldsymbol{y = a^x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $y = a^x$ — функция общего вида (ни чётная, ни нечётная).

3. $y = a^x$ возрастает, если $a > 1$; убывает, если $0 < a < 1$.

4. Функция ограничена снизу, не ограничена сверху.

5. $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$ не существуют.

6. $y = a^x$ — непрерывная функция.

7. Область значений функции $E(f) = (0; +\infty)$.

8. Функция выпукла вниз.

Отметим, что ось Ox является горизонтальной асимптотой графика показательной функции. Но при этом уточняют: если $a > 1$, то ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции $y = a^x$ при $x \to -\infty$ (читают: «При x, стремящемся к минус бесконечности»); если $0 < a < 1$, то ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции $y = a^x$ при $x \to +\infty$ (читают: «При x, стремящемся к плюс бесконечности»).

Пример 1 Решить:

а) уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2x + 8$;

б) неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2x + 8$;

в) неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 2x + 8$.

Решение. а) Построим в системе координат xOy графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2x + 8$ (рис. 175). Судя по чертежу, они пересекаются в точке $(-2; 4)$. Проверим это предположение подстановкой: если $x = -2$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2^{-2}} = 4$ и $2x + 8 = 2 \cdot (-2) + 8 = 4$. Значит, действительно, $x = -2$ является корнем уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2x + 8$. Других корней нет, поскольку функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает, а функция $y = 2x + 8$ возрастает.

Итак, уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2x + 8$ имеет единственный корень $x = -2$.

б) График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ лежит *выше* прямой $y = 2x + 8$, если $x < -2$, — это хорошо иллюстрирует рисунок 175. Значит, $x < -2$ — решение неравенства $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2x + 8$.

в) График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ лежит *не выше* прямой $y = 2x + 8$, если $x \geqslant -2$ (см. рис. 175). Значит, $x \geqslant -2$ — решение неравенства $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 2x + 8$.

Ответ: а) $x = -2$; б) $x < -2$; в) $x \geqslant -2$.

Пример 2 Построить график функции $y = 9 \cdot 3^x - 3$ и найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[-5; 0]$.

Решение. Заметим, что $9 \cdot 3^x - 3 = 3^2 \cdot 3^x - 3 = 3^{x+2} - 3$. Значит, речь идёт о построении графика функции $y = 3^{x+2} - 3$.

Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-2; -3)$ — точке пересечения пунктирных прямых $x = -2$ и $y = -3$ на рисунке 176. «Привяжем» график функции $y = 3^x$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = 3^x$: $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 9)$, $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$, но строить их будем не в старой, а *в новой* системе координат. По этим точкам построим линию — это и будет требуемый график (см. рис. 176).

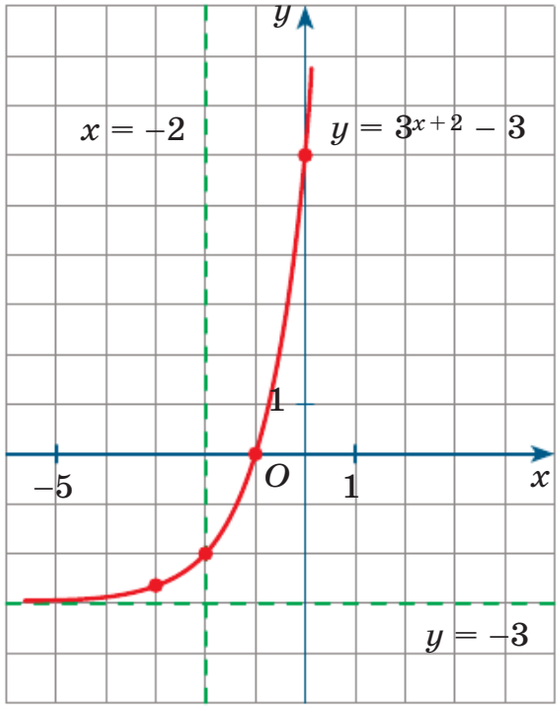


Рис. 176

Чтобы найти наименьшее и наибольшее значения заданной функции на отрезке $[-5; 0]$, воспользуемся тем, что заданная функция возрастает, а потому своих наименьшего и наибольшего значений она достигает соответственно в левом и правом концах отрезка; для удобства положим $f(x) = 3^{x+2} - 3$:

$$y_{\text{наим}} = f(-5) = -2\frac{26}{27};$$

$$y_{\text{наиб}} = f(0) = 6.$$

Упражнения

46.1. Не производя вычислений, сравните, если возможно, числа:

а) $1{,}7^{35}$ и $1{,}7^{33}$;

б) $\left(\frac{3}{8}\right)^6$ и $\left(\frac{3}{8}\right)^{\sqrt{39}}$;

в) $\left(12\frac{1}{3}\right)^{16}$ и $\left(12\frac{2}{3}\right)^{15}$;

г) $0{,}7^{-42}$ и $0{,}7^{-39}$;

д) $\left(2\frac{3}{7}\right)^{-22}$ и $\left(2\frac{3}{8}\right)^{-23}$;

е) $\left(\sqrt{1{,}3}\right)^{48}$ и $\left(\sqrt{1{,}3}\right)^{46}$.

46.2. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $3^{1,5}$, 3^2, $3^{\sqrt{2}}$, $3^{1,7}$, $3^{-\sqrt{2}}$, $3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, 1;

б) $0{,}4^{1,3}$, $0{,}4^3$, $0{,}4^{\sqrt{3}}$, $0{,}4^{1,2}$, $0{,}4^{-\sqrt{3}}$, $0{,}4^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, 1;

в) $5^{-1,5}$, 5^5, 1, $5^{\sqrt{5}}$, $5^{1,5}$, $5^{-\sqrt{5}}$, $5^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$;

г) $0{,}2^{3,1}$, $0{,}2^3$, $0{,}2^{-\sqrt{3}}$, $0{,}2^{-1,2}$, 1, $0{,}2^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $0{,}2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

46.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на заданном промежутке:

а) $f(x) = 2^x$, $x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$;

б) $f(x) = \left(\sqrt[3]{2}\right)^x$, $x \in (-9; 9]$;

в) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$;

г) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$, $x \in [-4; 4)$.

46.4. а) Найдите значения параметров p и q, такие, что наибольшее значение функции $y = 4^x$ на отрезке $[p; q]$ равно 256, а наименьшее 2.

б) Найдите значения параметров p и q, такие, что наибольшее значение функции $y = 0{,}4^x$ на отрезке $[p; q]$ равно 6,25, а наименьшее 0,064.

Исследуйте функцию на монотонность.

46.5. а) $y = \left(\sqrt[3]{5}\right)^x$; в) $y = (\operatorname{tg} 1)^x$; д) $y = \left(\frac{3}{\sqrt[4]{17}}\right)^x$;

б) $y = \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^x$; г) $y = \left(\frac{2\pi}{7}\right)^x$; е) $y = (\operatorname{tg} 3{,}2)^x$.

46.6. а) $y = -2 \cdot 5^{x+3}$; г) $y = -\frac{3^{1-2x}}{4}$;

б) $y = \frac{1}{2^{4-x}}$; д) $y = -\frac{7}{0{,}3^{1-2x}}$;

в) $y = \left(\sqrt[4]{79} - \sqrt[5]{20}\right)^x$; е) $y = \left(\sqrt[5]{34} - \sqrt{0{,}7}\right)^x$.

46.7. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{3}{2^{x^2+1}}$; в) $y = \dfrac{2^{\frac{2}{x}}}{x+1}$; д) $y = 2^{\sqrt{x}}$;

б) $y = \dfrac{3^x}{1-x}$; г) $y = \dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{3^x-3}$; е) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2^x-1}}$.

Найдите область значений функции.

46.8. а) $y = 3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$; в) $y = 3^x - 5$; д) $y = -2 \cdot 5^x + 4$;

б) $y = -5 \cdot \pi^x$; г) $y = 0{,}2^x + 4$; е) $y = 3 - 4 \cdot 10^x$.

46.9. а) $y = \dfrac{1}{2^x+1}$; в) $y = \dfrac{2}{3^x-3}$; д) $y = \dfrac{4^x+3}{4^x+2}$;

б) $y = -\dfrac{1}{0{,}2^x+3}$; г) $y = \dfrac{5}{2^x-4}$; е) $y = \dfrac{3^x-2}{3^x+1}$.

46.10. а) $y = \dfrac{4^x-9}{2^x+3}$; г) $y = \dfrac{25^x-16}{0{,}2^{-x}-4}$;

б) $y = \dfrac{9^x+4\cdot 3^x+4}{3^x+2}$; д) $y = \dfrac{49^x-6\cdot 7^x+9}{7^x-3}$;

в) $y = \dfrac{27^x+8^x}{9^x-6^x+4^x}$; е) $y = \dfrac{125^x+27^x}{25^x-15^x+9^x}$.

46.11. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции:

а) $y = 2^x$, $-4 < x < 3$;
б) $y = 2^x$, $-2{,}5 < x < 2{,}5$;
в) $y = 3^x$, $-3{,}5 \leqslant x \leqslant 3{,}5$;
г) $y = 5 \cdot 2^x$, $-2 < x < 2$;
д) $y = 0{,}5 \cdot 3^x - 5$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$;
е) $y = 5 \cdot 2^{-x} - 3$, $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

46.12. Постройте график функции:

а) $y = 2^x - 1$; в) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 2$; д) $y = 2 \cdot 2^x + 3$;

б) $y = 3^{x+1}$; г) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$; е) $y = 3^{x+1} - 1$.

Решите уравнение.

46.13. а) $3^x = 4 - x$;

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 3x + 31$;

в) $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{x+51}{9}$;

г) $5^x = 35 - 5x$;

д) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = x + 8$;

е) $\left(\frac{11}{3}\right)^x = \frac{13-2x}{3}$.

ИКТ **46.14.** а) $2^x = \sqrt{x} + 1$;

б) $0{,}2^x = -\frac{5}{x}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 = \sqrt{x}$;

д) $3^x = \frac{3}{x}$;

е) $7^x = 9 - 2x$.

46.15. Решите неравенство:

а) $5^x \geqslant 125$;

б) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \leqslant \frac{16}{625}$;

в) $11^x < \frac{1}{121}$;

г) $6^x > 1296$;

д) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leqslant \frac{32}{243}$;

е) $\left(\frac{1}{12}\right)^x > 144$.

ИКТ **46.16.** а) При каких значениях x график функции $y = 2^x$ лежит ниже графика функции $y = -1{,}5x - 1$?

б) При каких значениях x график функции $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ лежит ниже графика функции $y = 3x + 1$?

ИКТ **46.17.** а) При каких значениях x график функции $y = \left(\frac{3}{7}\right)^x$ лежит выше графика функции $y = -x - 2$?

б) При каких значениях x график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ лежит выше графика функции $y = -3x + 1$?

46.18. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 4^x$. Докажите, что верно равенство:

а) $f(2x) \cdot f(-x) = f(x)$;

б) $f(x+1) \cdot f(2x) = 4f^3(x)$;

в) $f(\cos^2 x) = \sqrt{4f(\cos 2x)}$;

г) $f(x) \cdot f(-x) = 1$;

д) $f(-2x+1) \cdot f(x) = 4(f(x))^{-1}$;

е) $f(\sin^2 x) = \dfrac{2}{\sqrt{f(\cos 2x)}}$.

46.19. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 6^x, \text{ если } x < 1, \\ \dfrac{6}{x}, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-2)$; $f(-1{,}5)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(4{,}5)$.

б) Постройте график функции.

в) Прочитайте график функции.

г) Найдите значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет ровно один корень.

46.20. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, \text{ если } x < 2, \\ -\sqrt{x-2} + 0{,}25, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-3)$; $f(-1{,}5)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(3)$.

б) Постройте график функции.

в) Прочитайте график функции.

г) Найдите значения параметра p, при которых все корни уравнения $f(x) = x + p$ больше 1.

46.21. Постройте график функции:

а) $y = 3^{|x|}$;

б) $y = 0{,}2^{|x+1|}$;

в) $y = 5^{|x|}$;

г) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x-1|}$.

Решите неравенство.

ИКТ **46.22.** а) $2^x - 1 \leqslant \sqrt{x}$;

б) $5^x \geqslant \dfrac{5}{x}$;

в) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \geqslant \sqrt{x+1}$;

г) $3^x > -2(x-2)^2 + 9$.

ИКТ **46.23.** а) $2^x + 1 \leqslant \cos x$;

б) $2^{|x|} \leqslant \cos 2x$;

в) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 1 \geqslant \sin x$;

г) $2^{|x|} + 1 \leqslant 2\cos x$.

46.24. Постройте график функции:

а) $y = |3^x - 3|$;

б) $y = 1 - |2^x - 4|$;

в) $y = |3 - |5^x - 5||$;

г) $y = |0{,}2^x - 1|$;

д) $y = 2 + |0{,}5^x - 2|$;

е) $y = \left|2 - \left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3\right|\right|$.

46.25. Решите уравнение:

а) $2^x + 3^x = \frac{15}{\pi}\arccos\frac{x}{2}$;

б) $\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{11}\right)^{2x-4} = \left(\sin\frac{5\pi}{12}\right)^{3x-6}$;

в) $\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x+1} = \sqrt{x+4} + 8$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{5x-13}{x-2}$.

46.26. Решите неравенство:

а) $3^x + 4^x \geqslant 91$;

б) $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x < 23$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 97$;

г) $6 \cdot 2^x + 5^{x+2} > 8$.

46.27. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geqslant 1, \\ 2\sin\frac{\pi x}{2}, & -3 \leqslant x < 1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x - 25, & -4 \leqslant x < -3. \end{cases}$$

а) Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$.

б) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при различных значениях параметра a?

46.28. Сколько целых чисел содержится в области значений функции:

а) $y = \frac{1}{3} \cdot 2^{\sin 7x\cos 4x + \cos 7x\sin 4x + 4}$;

б) $y = \frac{1}{5} \cdot 3^{\cos 4x\cos x - \sin 4x\sin x + 2}$?

Упражнения для повторения

46.29. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arcsin\left(\sqrt{11}-3\right)$;

б) $\arccos\left(\sqrt{19}-\sqrt{21}\right)$;

в) $\arccos\frac{\pi}{2}$;

г) $\arcsin\left(4-\sqrt{13}\right)$;

д) $\arccos\left(\sqrt{15}-\sqrt{31}\right)$;

е) $\arcsin\frac{\pi}{4}$?

46.30. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а) $2\cos 2x-\sin x=\sin 5x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$;

б) $\sin 3x=\sqrt{3}\sin 2x+\sin 7x,\ x\in[-\pi;0]$.

46.31. Вычислите:

а) $\frac{\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}$;

б) $\frac{1-\operatorname{ctg}^2 35^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\sin^2 35^\circ$;

в) $\frac{2\sin^2 46^\circ-1}{4\sin 2^\circ}$;

г) $\frac{\sin 40^\circ-\cos 40^\circ}{\sqrt{2}\sin 5^\circ}$;

д) $\frac{1+\operatorname{tg}10^\circ}{\sqrt{2}\cos 35^\circ}\cdot\sin 80^\circ$;

е) $\frac{1-2\cos^2 13^\circ}{\sin 64^\circ}$.

46.32. а) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $\sqrt{x+1}=2x-p$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $4\sqrt{x-p}=x-2$ имеет более одного корня.

§ 47. Понятие касательной. Число e и функция $y=e^x$

Из курса геометрии вам известно, что такое касательная к окружности. Это прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. А теперь посмотрите на параболу $y=x^2$ (рис. 177). И ось абсцисс, и ось ординат имеют с параболой только одну общую точку, но, если

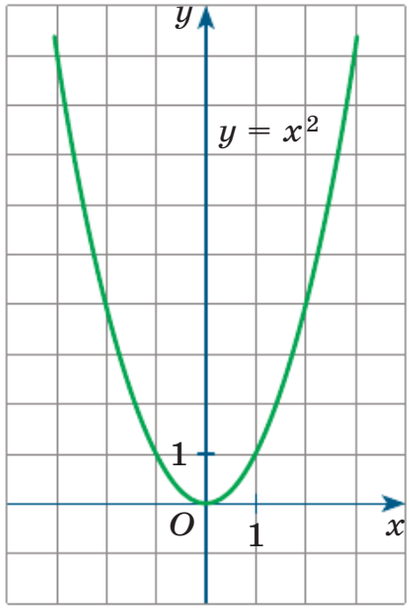


Рис. 177

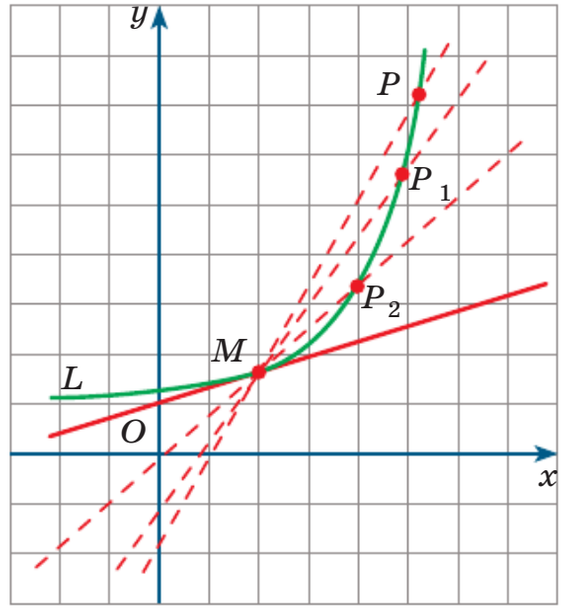


Рис. 178

вас спросят, какую из этих прямых можно назвать *касательной к параболе*, вы, опираясь на интуицию, скажете, что касательной является ось абсцисс. И это будет правильно. А как определить касательную к графику функции в некоторой точке в общем случае? Поговорим об этом.

Дана кривая L — график некоторой функции (рис. 178), на графике выбрана точка M. Нужно провести касательную к этому графику в точке M. Рассуждаем следующим образом. Возьмём ещё одну точку на этой кривой — точку P. Проведём секущую MP. Возьмём на кривой точку P_1 ближе к M, проведём секущую MP_1, затем точку P_2 ещё ближе к M и проведём секущую MP_2 и т. д. Как видите, секущая изменяет своё положение, она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что в этом процессе секущая приближается к некоторому предельному положению. Эту прямую — предельное положение секущей — называют *касательной к кривой L в точке M*.

ИКТ Если, в частности, на параболе $y = x^2$ взять точку P, провести секущую OP, затем начать приближать точку P по параболе к точке O и проводить секущие, то вы увидите, что предельным положением этих секущих будет ось абсцисс. Именно она и является касательной к параболе в точке O, что соответствует нашим интуитивным представлениям.

Проведём в точке $x = 0$ касательные к графикам трёх показательных функций $y = 2^x$, $y = 3^x$ и $y = 10^x$ (рис. 179, 180, 181). Видим, что чем больше основание, тем больше угол наклона касательной и оси

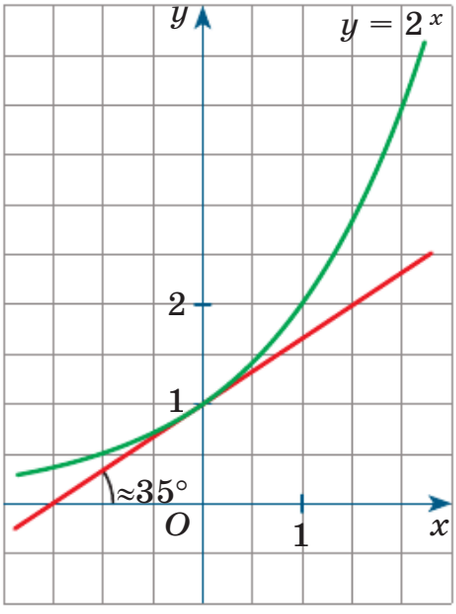


Рис. 179

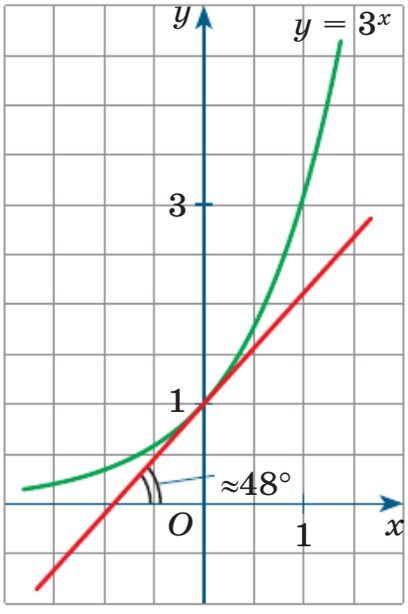


Рис. 180

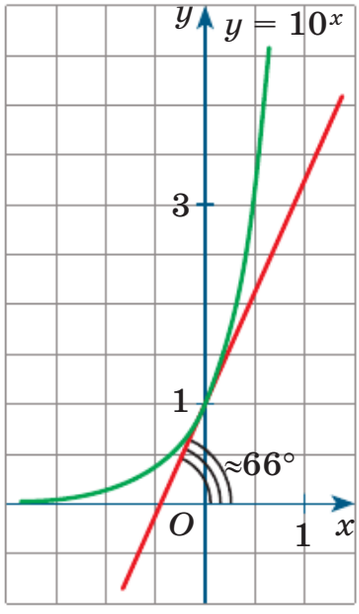


Рис. 181

абсцисс: касательная становится более «крутой». Можно убедиться в том, что касательная к графику функции $y = 2^x$ образует с осью абсцисс угол примерно в 35°, а для касательных к $y = 3^x$ и к $y = 10^x$ получатся углы наклона примерно в 48° и в 66°.

Итак, если основание a показательной функции $y = a^x$ постепенно и непрерывно увеличивается от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x = 0$ и осью абсцисс постепенно и непрерывно увеличивается от 35° до 66°. Значит, существует такое основание e, что касательная к графику показательной функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ образует с осью абсцисс угол 45°. Это основание заключено между числами 2 и 3, поскольку для функции $y = 2^x$ интересующий нас угол равен 35°, что меньше, чем 45°, а для функции $y = 3^x$ он равен 48°, что уже немного больше, чем 45°. В курсе высшей математики доказано, что $e = 2{,}718281828459045\ldots$, это иррациональное число (бесконечная десятичная непериодическая дробь). На практике обычно полагают, что $e \approx 2{,}7$.

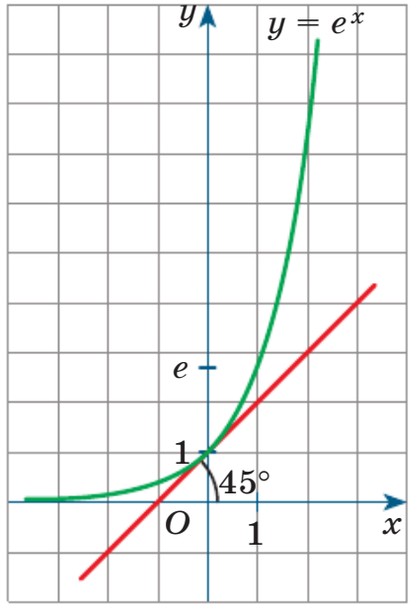


Рис. 182

График показательной функции $y = e^x$ изображён на рисунке 182. Он отличается от графиков показательных функций с другими основаниями тем, что касательная к графику в точке $x = 0$ параллельна биссектрисе $y = x$

первой и третьей координатных четвертей; угол наклона касательной к оси абсцисс равен 45°. Функцию $y = e^x$ называют *экспоненциальной*, а её график — *экспонентой*, хотя зачастую, для краткости, экспонентой называют и саму функцию $y = e^x$, и её график.

Функция $y = e^x$ чаще других показательных функций используется на практике. Приведём два стандартных, широко известных примера.

1) Предположим, что колония живых организмов находится в благоприятных условиях: пространство, занимаемое колонией, и пищевые ресурсы не ограничены, а хищников, питающихся организмами данной колонии, нет, благодаря чему рождаемость выше, чем смертность. В таких условиях обычно считают, что скорость изменения численности колонии пропорциональна численности (чем больше организмов, тем выше скорость; k — коэффициент пропорциональности). Установлено, что число организмов колонии выражается формулой $y = y_0 e^{kt}$, где y_0 — численность колонии в момент времени $t = 0$, а $k > 0$ — некоторый коэффициент.

Примерно по такому же закону изменяется величина вклада в банковской структуре, этот закон называют *законом показательного роста*.

2) В комнату с температурой 20 °C внесли кипящий чайник. При определённых условиях можно считать, что скорость изменения температуры нагретого тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. Температура T тела в момент времени t выражается формулой $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$; здесь T_1 — температура окружающей среды, а T_0 — температура тела в момент времени $t = 0$. В ситуации с чайником $T_1 = 20$ °C, а $T_0 = 100$ °C. Значит, $T = 20 + 80e^{-kt}$. С течением времени температура чайника будет приближаться к температуре окружающей среды. Процессы подобного рода называют *процессами выравнивания*.

Упражнения

47.1. Не производя вычислений на калькуляторе, найдите, между какими соседними целыми числами находится число:

а) $e - 1$; в) $11 - 2e$; д) $e^2 - 20$;

б) $e + 3$; г) $1 - 3e$; е) $4\sqrt{e} + 7$.

47.2. Не производя вычислений на калькуляторе, сравните числа:

а) e^2 и 9; в) e и $\sqrt{7}$; д) $2e$ и $2 + \pi$;

б) e^2 и 5; г) e^{-2} и e^{-3}; е) $3e$ и 2π.

47.3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = e^x$ на заданном промежутке:

а) на отрезке $[-1; 0]$;
б) на луче $(-\infty; 0]$;
в) на отрезке $[-e; \pi]$;
г) на отрезке $[0; 3]$;
д) на полуинтервале $[1; 5)$;
е) на отрезке $[0{,}2; 2{,}1]$.

47.4. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ если } x < 0, \\ 1, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

а) Постройте график функции.
б) Прочитайте график функции.
в) Найдите, при каких значениях параметра p уравнение $f(x) = p$ имеет один корень.

47.5. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, \text{ если } x < 0, \\ e^{-x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

а) Постройте график функции.
б) Прочитайте график функции.
в) Найдите, при каких значениях параметра p уравнение $f(x) = p$ имеет два корня.

ИКТ **47.6.** Постройте график функции:

а) $y = e^{x+2}$;
б) $y = e^x - 2$;
в) $y = 2e^x - 1$;
г) $y = \frac{1}{2}e^{2-x}$;
д) $y = e^{|x|}$;
е) $y = e^{-|x|}$.

Упражнения для повторения

47.7. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{-x}, \text{ если } x < 0, \\ \cos x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

а) Постройте график функции.
б) Прочитайте график функции.
в) Найдите значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ не имеет корней.

47.8. Вычислите:

а) $\cos 1110^\circ - \sin 1500^\circ - \operatorname{ctg} 855^\circ$;
б) $2\cos 1140^\circ - \operatorname{tg} 780^\circ + \sin(-1110^\circ)$;
в) $\cos 1590^\circ + 2\operatorname{ctg}(-1935^\circ) - \sin(-1950^\circ)$;
г) $\operatorname{tg} 1215^\circ + \cos 1860^\circ - \sin 1470^\circ$.

47.9. Решите уравнение:

а) $\cos 5x - \sin 7x = \sin 5x - \cos 7x$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$;

б) $\cos 3x = \sin 5x + \cos 7x$, $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

47.10. а) В банке взят кредит 2 млн р. на срок 2 года. По договору в конце месяца клиент должен возвращать банку часть денег. 1-го числа каждого месяца общая сумма долга возрастает на 1 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную клиентом банку в конце месяца. Ежемесячные выплаты подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму клиент вернёт банку в течение первого года кредитования?

б) Клиент взял в банке кредит 2,4 млн р. сроком на 3 года. По договору в конце месяца он должен возвращать банку часть денег. 1-го числа каждого месяца общая сумма долга возрастает на 1,5 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную банку в конце месяца. Ежемесячные выплаты подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму клиент вернёт банку в течение первого года кредитования?

§ 48. Показательные уравнения

Показательными уравнениями называют уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, и уравнения, сводящиеся к этому виду. В основе решения показательных уравнений лежит следующая теорема.

Теорема. Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Доказательство. Напомним, что два уравнения с одной переменной называют равносильными, если они имеют одинаковые множества корней. Доказательство теоремы мы осуществим в два шага. На первом шаге докажем, что каждый корень уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ является в то же время корнем уравнения $f(x) = g(x)$. На втором шаге докажем, что каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ является в то же вре-

мя корнем уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Это и будет означать, что множества корней рассматриваемых уравнений совпадают, т. е. что уравнения равносильны.

Первый шаг. Пусть $x = b$ — корень уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, т. е. имеет место числовое равенство $a^{f(b)} = a^{g(b)}$. Положим для удобства рассуждений, что $f(b) = m$, $g(b) = p$. Поскольку показательная функция $y = a^x$ монотонна, из равенства $a^m = a^p$ следует равенство $m = p$, т. е. $f(b) = g(b)$. Это значит, что $x = b$ — корень уравнения $f(x) = g(x)$.

Второй шаг. Пусть $x = c$ — корень уравнения $f(x) = g(x)$, т. е. имеет место числовое равенство $f(c) = g(c)$. Но тогда выполняется и числовое равенство $a^{f(c)} = a^{g(c)}$. Это значит, что $x = c$ — корень уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Итак, множества корней уравнений $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$ совпадают, т. е. уравнения равносильны, что и требовалось доказать.

Пример 1 Решить уравнение:

а) $3^{2x^2} = 3^{5x-2}$; б) $\left(\frac{1}{49}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^{9x-6}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{(0,25)^{x+1}} = 8^x$.

Решение. а) Согласно доказанной теореме уравнение $3^{2x^2} = 3^{5x-2}$ равносильно уравнению $2x^2 = 5x - 2$. Решив квадратное уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$, получим: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Это корни заданного уравнения.

б) Поработаем по отдельности с левой и правой частями заданного уравнения:

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{x+1} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^2\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x+2}; \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^{9x-6} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{9x-6} = \left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2}.$$

Таким образом, можно переписать заданное уравнение в виде $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2}$. Значит, $2x + 2 = 3x - 2$, $x = 4$.

в) Обратите внимание: все три основания степеней, фигурирующие в уравнении, можно привести к одному основанию 2. Это наблюдение — ключ к решению. Имеем:

$$\frac{\sqrt{2}}{(0,25)^{x+1}} = 8^x; \quad \frac{2^{0,5}}{(2^{-2})^{x+1}} = (2^3)^x; \quad \frac{2^{0,5}}{2^{-2x-2}} = 2^{3x};$$

$$2^{0,5-(-2x-2)} = 2^{3x}; \quad 2^{2,5+2x} = 2^{3x}; \quad 2,5 + 2x = 3x; \quad x = 2,5.$$

Ответ: а) 2, $\frac{1}{2}$; б) 4; в) 2,5.

Пример 2 Решить уравнение:
а) $100^{x-0,5} - 9 \cdot 10^{x-1} = 1$; б) $3 \cdot 4^x - 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$.

Решение. а) Имеем:

$$100^{x-0,5} - 9 \cdot 10^{x-1} = 1;$$

$$\frac{100^x}{100^{0,5}} - 9 \cdot \frac{10^x}{10} = 1;$$

$$\frac{100^x}{10} - 9 \cdot \frac{10^x}{10} - 1 = 0;$$

$$10^{2x} - 9 \cdot 10^x - 10 = 0.$$

Введём новую переменную $y = 10^x$. Тогда уравнение $10^{2x} - 9 \cdot 10^x - 10 = 0$ примет вид $y^2 - 9y - 10 = 0$, откуда находим: $y_1 = 10$, $y_2 = -1$. Из уравнения $10^x = 10$ находим $x = 1$; уравнение $10^x = -1$ не имеет корней, поскольку при любых значениях x выполняется неравенство $10^x > 0$.

б) Разделим обе части уравнения $3 \cdot 4^x - 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$ почленно на 9^x:

$$3 \cdot \frac{4^x}{9^x} - \frac{6^x}{9^x} - 2 \cdot \frac{9^x}{9^x} = 0; \quad 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

Введём новую переменную $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Тогда уравнение $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$ примет вид

$$3y^2 - y - 2 = 0,$$

откуда $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{2}{3}$.

Вернёмся к исходной переменной. Из уравнения $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ получим $x = 0$, уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -\frac{2}{3}$ не имеет корней.

Ответ: а) 1; б) 0.

Пример 3 Решить уравнение: а) $2^x = x^{\frac{1}{4}} + 1$; б) $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. а) Построим графики функций $y = 2^x$, $y = x^{\frac{1}{4}} + 1$ (рис. 183). Они пересекаются в двух точках: (0; 1) и (1; 2). Значит, заданное уравнение имеет два корня: 0 и 1.

б) Один корень уравнения $3^x + 4^x = 5^x$ подобрать нетрудно: это $x = 2$, поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$ — верное числовое равенство. Нет ли других корней у данного уравнения?

Поступим так: разделим обе части уравнения почленно на 4^x, получим:

$$\frac{3^x}{4^x} + \frac{4^x}{4^x} = \frac{5^x}{4^x}; \quad \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x.$$

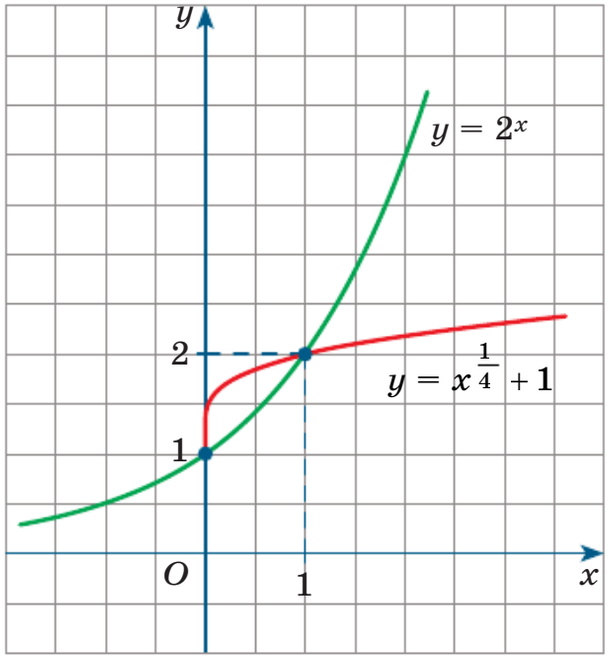


Рис. 183

Функция $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ убывает (здесь основание показательной функции $\frac{3}{4}$ меньше 1), а функция $y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ возрастает (здесь основание показательной функции $\frac{5}{4}$ больше 1). В курсе алгебры 9 класса мы доказали теорему: если функция $y = f(x)$ убывает, а функция $y = g(x)$ возрастает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень, который нам удалось найти подбором.

Ответ: а) 0, 1; б) 2.

Пример 4 Решить систему уравнений $\begin{cases} 25^{2x} + 25^{2y} = 30, \\ 25^{x+y} = 5\sqrt{5}. \end{cases}$

Решение. Учтём, что $25^{x+y} = 25^x \cdot 25^y$, и введём две новые переменные: $a = 25^x$, $b = 25^y$ ($a > 0$, $b > 0$). Тогда заданная система уравнений примет более простой вид: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 30, \\ ab = 5\sqrt{5}. \end{cases}$

Воспользуемся методом подстановки: $\begin{cases} a^2 + \left(\frac{5\sqrt{5}}{a}\right)^2 = 30, \\ b = \frac{5\sqrt{5}}{a}. \end{cases}$

Поработаем с первым уравнением полученной системы:

$$a^2 + \frac{125}{a^2} = 30; \quad a^4 - 30a^2 + 125 = 0; \quad a^2 = 5 \text{ или } a^2 = 25.$$

Значит, $a_1 = \sqrt{5}$, $a_2 = 5$; соответственно, $b_1 = 5$, $b_2 = \sqrt{5}$. Осталось решить две совсем простые системы: $\begin{cases} 25^x = \sqrt{5}, \\ 25^y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 25^x = 5, \\ 25^y = \sqrt{5}. \end{cases}$

Из первой системы получаем $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$; из второй системы получаем $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Завершая параграф, выделим три основных метода решения показательных уравнений.

1) *Метод уравнивания показателей*. Он основан на теореме о том, что уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где a — положительное число, отличное от 1, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$. Мы применили этот метод при решении примера 1.

2) *Метод введения новой переменной*. Мы применили этот метод при решении примеров 2 и 4.

3) *Функционально-графический метод*. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применили этот метод при решении примера 3.

Упражнения

48.1. Решите уравнение.

а) $6^x = \frac{1}{216}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \sqrt[3]{25}$; д) $4^{x-5} = 256$;

б) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$; г) $9^x = \frac{1}{\sqrt[5]{729}}$; е) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x+2} = \frac{1}{343}$.

48.2. а) $5^{3x^2} = 5^{2-5x}$;

б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} = 4^{9-x}$;

в) $\left(\frac{4}{3}\right)^{5x+1} = 0{,}75^{7-3x}$;

г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{7x+9}$;

д) $7^{3-4x} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x-7}$;

е) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} = 2{,}25^{5x-14}$.

48.3. а) $\left(\frac{1}{36}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\right)^{30-9x}$;

б) $5^{x^2-4{,}5} \cdot \sqrt{5} = 3125$;

в) $\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{2x^2+6x}}{0{,}5^{2x+6}} = 4^5$;

г) $\left(\frac{1}{64}\right)^{x^2-2x} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{3x-12}$;

д) $4^{x^2-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4} = 256$;

е) $\frac{0{,}2^{x^2-10}}{\left(\sqrt{5}\right)^{2x-4}} = 25^3$.

48.4. а) $\left(\sqrt{18}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{6}$;

б) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-6} = 0{,}81^{-\frac{7}{4}x}$;

в) $\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{6}}\right)^{16x^2} = 7{,}2^{5x-6}$;

г) $\left(\sqrt{3}\right)^{3x} \cdot \left(\sqrt{12}\right)^{3x} = 36$;

д) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x^2-4} = 6{,}25^{-5{,}5x}$;

е) $\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\right)^{2x^2+9} = 4{,}5^{x^2-2{,}25}$.

48.5. а) $\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-1}$;

б) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 0{,}0001 \cdot (10^{3-x})^3$;

в) $0{,}6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$;

г) $\sqrt[3]{0{,}2} \cdot \sqrt[4]{0{,}04^{2x-\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{0{,}04^{6-3x}}$.

48.6. а) $\left(3\left(3^{\sqrt{x}}+3\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = \frac{3}{\sqrt[10]{3}}$;

б) $\sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$.

48.7. а) $3^x - 3^{x+3} = -78$;

б) $3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+7} - 14 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+8} = 49$;

в) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} = 108\frac{1}{3}$;

г) $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 120$;

д) $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = \frac{16}{9}$;

е) $4^{x-1} + 11 \cdot 4^{x-2} = \frac{15}{16}$.

48.8. а) $2^{2x} - 15 \cdot 2^x - 16 = 0$;

б) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$;

в) $25 \cdot 5^{2x} + 49 \cdot 5^x - 2 = 0$;

г) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;

д) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x} - 9 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x + 8 = 0$;

е) $8 \cdot 2^{2x} + 15 \cdot 2^x - 2 = 0$.

48.9. а) $6 \cdot 36^x + 5 \cdot 6^x - 1 = 0$;

б) $7 \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^x - 8 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x + 1 = 0$;

в) $\left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x - 756 = 0$;

г) $4 \cdot 16^x - 15 \cdot 4^x - 4 = 0$;

д) $9 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x - 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 = 0$;

е) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$.

48.10. а) $5^x = 4^x$;

б) $25^x = 9^{2x}$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 4^x$;

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} = 9^x$.

48.11. а) $6^{2x+5} = 2^{10+x} \cdot 3^{3x}$;

б) $2^{4x+2} \cdot 5^{-3x-1} = 6{,}25 \cdot 2^{x+1}$;

в) $35^{4x+3} = 5^{3x+6} \cdot 7^{5x}$;

г) $3^{5x-1} \cdot 7^{2x-2} = 3^{3x+1}$.

48.12. а) $50^x - 6 \cdot 10^x + 5 \cdot 2^x = 0$;

б) $8 \cdot 12^x - 6^{x+1} + 3^x = 0$.

48.13. а) $12 \cdot 3^{x+1} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^8 \cdot 3^x$;

б) $0{,}8 \cdot 5^{x+3} = \left(\sqrt{x}\right)^4 \cdot 0{,}2^{-x}$.

48.14. а) $100^{\frac{1}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4{,}25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}$;

б) $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 9^{2x-1} = 0$.

48.15. а) $7 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 14^{x} + 2 \cdot 7^{2x} = 0$;
б) $3^{2x+2} - 7 \cdot 12^{x} = 5 \cdot 9^{x} - 4^{2x+1}$;
в) $36^{x+0,5} - 11 \cdot 30^{x} + 25^{x+0,5} = 0$;
г) $5 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 15^{x} + 3 \cdot 5^{2x} = 0$;
д) $18 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 6^{x} + 12 \cdot 3^{2x} = 0$;
е) $16^{x+0,5} - 9 \cdot 20^{x} + 25^{x+0,5} = 25^{x} - 16^{x}$.

48.16. а) $5^{\cos^2 x} - 4 \cdot 5^{\sin^2 x} = 1$;
б) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$.

48.17. а) $\left(\sqrt{5} - 2\right)^{x} + \left(\sqrt{5} + 2\right)^{x} = 18$;
б) $(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x + 1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 1} = \dfrac{4}{2 - \sqrt{3}}$;
в) $\left(2 - \sqrt{3}\right)^{x} + \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x} = 4$;
г) $(3 + 2\sqrt{2})^{2x} + (17 - 12\sqrt{2})^{x} = 6$.

Решите систему уравнений.

48.18. а) $\begin{cases} 64^{2x} + 2^{12y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{x} - 4^{y} = 77, \\ \sqrt{3^{x}} - 2^{y} = 7. \end{cases}$

48.19. а) $\begin{cases} 6\sqrt{6^{x-2y}} = \sqrt[4]{36^{x}}, \\ 0{,}2^{2x-y} \cdot 5^{x-2y} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{5^{x-3}} \cdot \sqrt[3]{25^{2-y}} = 5, \\ 3^{x+y-2} : 27^{2x-5y} = \dfrac{1}{243}. \end{cases}$

48.20. а) $\begin{cases} 4^{x} + y \cdot 2^{x} = 10, \\ y \cdot 2^{x} + y^{2} = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 25^{x} - y \cdot 5^{x} = 15, \\ y \cdot 5^{x} - y^{2} = 6. \end{cases}$

48.21. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых имеет корни уравнение:
а) $\sqrt[3]{5^{x}} = -p$; б) $10^{2x+1} = (p + 2)^{2}$.

48.22. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых не имеет корней уравнение:
а) $p \cdot 3^{x} = p + 3$; б) $9^{x} - 2p \cdot 3^{x} = 1 - p^{2}$.

48.23. Найдите целые значения параметра p, при которых данное уравнение имеет два различных действительных корня:
а) $3 \cdot 25^{x} - 5^{x+1} = 2p$; б) $2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+1} = p$.

Решите уравнение.

48.24. а) $2^{2x+2\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6$;

б) $2^{x+2\sqrt{x^2-4}} - 6 = 5 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}$.

48.25. а) $8^x - 4^{x+0,5} + 2 = 2^x$; б) $8^x - 2^{x+1} = 4$.

48.26. а) $|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1$; в) $|5^x - 1| + |5^x - 5| = 44$;

б) $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$; г) $3^{|x-2|} + 3^{|x+2|} = 3^x$.

48.27. а) $\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}\right) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18$;

б) $2\sqrt{x} \cdot 4^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x} \cdot 2^x + 4$.

48.28. а) $2^{x^2+2x-6} - 2^{7-2x-x^2} = 3,5$;

б) $4^{2x^2-5x-3} - 4^{4+5x-2x^2} = 3$;

в) $3^{2x^2-1} - 3^{(x-1)(x+5)} = 2 \cdot 3^{8(x-1)}$;

г) $3^{2x^2+x} = 26 + 3^{3-x-2x^2}$;

д) $6^{2x^2-2x-7} - 6^{22+12x-2x^2} = 5 \cdot 6^{5x+7}$;

е) $5^{2x^2-1} - 3 \cdot 5^{(x+1)(x+2)} = 2 \cdot 5^{6(x+1)}$.

48.29. а) $3^{|x-2|} = \cos \pi x$; б) $2 \sin \frac{x}{3} = 5^x + 5^{-x}$.

Упражнения для повторения

48.30. Исследуйте функцию на чётность:

а) $y = 2^{|x|} + \cos x$; г) $y = \sin x + 3^x$;

б) $y = \frac{\sin x}{5^x}$; д) $y = \frac{5^{|x|}}{\arcsin x}$;

в) $y = 2^{|\sin x|} \cdot \sin x$; е) $y = 2^{\cos x} + \sin^2 x$.

48.31. Найдите координаты точек пересечения графиков данных функций на заданном промежутке:

а) $y = 2\cos^2 x$ и $y = 5 \sin x - 1$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $y = -2\sin^2 x$ и $y = 1 + 5\cos x$, $[0; \pi]$.

48.32. Найдите, при каких значениях параметра p из отрезка $[0; \pi]$ данное уравнение не имеет корней:

а) $\cos(x + p) + \cos(x - p) = 1$;

б) $\sin(x + p) - \sin(x - p) = -1$.

48.33. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -(x+\pi)^2, \text{ если } -\pi - 2 \leqslant x < -\pi, \\ \sin x, \text{ если } -\pi \leqslant x < \pi, \\ \sqrt{x-\pi}, \text{ если } \pi \leqslant x \leqslant \pi + 4. \end{cases}$

а) Постройте график функции $y = f(x)$.
б) Прочитайте график.
в) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет ровно два корня.

§ 49. Показательные неравенства

Напомним, что два неравенства $f(x) > g(x)$ и $r(x) > s(x)$ называют *равносильными*, если они имеют одинаковые множества частных решений (в частности, если оба неравенства не имеют решений). Напомним также, что термин «множество частных решений» мы обычно заменяем термином «решение».

При решении неравенства его заменяют на более простые, но равносильные ему неравенства. Такие замены называют *равносильными преобразованиями неравенства.*

Из курса алгебры 9 класса вам известны три правила решения неравенств. Напомним их.

Правило 1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не изменив при этом знак неравенства.

Правило 2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не изменив при этом знак неравенства.

Правило 3. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Слово «можно» в этих трёх правилах означает, что преобразования, о которых идёт речь, являются равносильными преобразованиями неравенства.

В курсе алгебры 9 класса мы сформулировали и доказали два утверждения, которые являются обобщениями правил 2 и 3. Напомним эти утверждения (они понадобятся нам в дальнейшем).

Правило 2′. Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, *положительное* при всех значениях x, и *сохранить знак исходного неравенства*, то получится неравенство, равносильное данному.

Правило 3′. Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, *отрицательное* при всех значениях x, и *изменить знак исходного неравенства на противоположный*, то получится неравенство, равносильное данному.

Показательными неравенствами называют неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, и неравенства, сводящиеся к этому виду. В основе решения показательных неравенств лежат две теоремы.

Теорема 1. Если $a > 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ (неравенству того же знака).

Теорема 2. Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$ (неравенству противоположного знака).

Докажите эти теоремы самостоятельно по образцу доказательства теоремы из предыдущего параграфа. Учтите при этом, что функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает, если $0 < a < 1$.

Пример 1 Решить неравенство:

а) $3^{2x^2} < 3^{5x-2}$; б) $\left(\frac{1}{49}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^{9x-6}$.

Решение. а) По теореме 1 неравенство $3^{2x^2} < 3^{5x-2}$ равносильно неравенству $2x^2 < 5x - 2$, т. е. $2x^2 - 5x + 2 < 0$. Корнями квадратного

трёхчлена $2x^2 - 5x + 2$ являются числа 2 и $\frac{1}{2}$. Значит, получаем следующее решение неравенства (рис. 184):

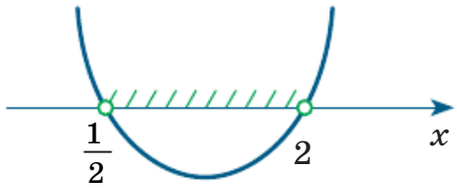


Рис. 184

$$\frac{1}{2} < x < 2.$$

б) Имеем:

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{x+1} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^2\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x+2}; \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^{9x-6} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{9x-6} = \left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2}.$$

Таким образом, мы можем переписать заданное неравенство в более простом виде: $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+2} > \left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2}$. По теореме 2 это неравенство равносильно неравенству $2x + 2 < 3x - 2$, т. е. $x > 4$.

Ответ: а) $\frac{1}{2} < x < 2$; б) $x > 4$.

Пример 2 Решить неравенство $\frac{14 \cdot 5^x + 22}{25 \cdot 5^{x-1} - 1} \leqslant 3$.

Решение. Имеем:

$$\frac{14 \cdot 5^x + 22}{25 \cdot 5^{x-1} - 1} \leqslant 3; \quad \frac{14 \cdot 5^x + 22}{25 \cdot \frac{5^x}{5} - 1} - 3 \leqslant 0; \quad \frac{14 \cdot 5^x + 22}{5 \cdot 5^x - 1} - 3 \leqslant 0.$$

Введём новую переменную $5^x = y$ и решим неравенство $\frac{14y + 22}{5y - 1} - 3 \leqslant 0$:

$$\frac{14y + 22 - 3(5y - 1)}{5y - 1} \leqslant 0; \quad \frac{25 - y}{5y - 1} \leqslant 0; \quad \frac{y - 25}{5\left(y - \frac{1}{5}\right)} \geqslant 0.$$

Воспользовавшись методом интервалов (рис. 185), получим $y < \frac{1}{5}$; $y \geqslant 25$. Остаётся решить два простейших показательных неравенства: $5^x < \frac{1}{5}$; $5^x \geqslant 25$.

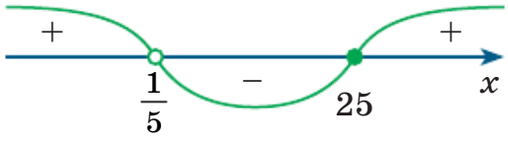


Рис. 185

Из первого неравенства получаем $x < -1$, из второго неравенства получаем $x \geqslant 2$.

Ответ: $x < -1$; $x \geqslant 2$.

Упражнения

Решите неравенство.

49.1. а) $2^{2x-1} > 2^7$;

б) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{6}\right)^{16}$;

в) $\left(3\frac{2}{9}\right)^{2x^2-x} \geqslant \left(3\frac{2}{9}\right)^{2x+2}$;

г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+2} \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$;

д) $12^{x^2} \leqslant 12^9$;

е) $\left(1\frac{6}{11}\right)^{3x^2-2x} > \left(1\frac{6}{11}\right)^{3x+2}$.

49.2. а) $4^x > 64$;

б) $2^x \geqslant 512$;

в) $11^x \leqslant 1$;

г) $\left(\frac{1}{6}\right)^x < 1$;

д) $\left(1\frac{1}{3}\right)^x < 2\frac{10}{27}$;

е) $\left(2\frac{2}{7}\right)^x > 5\frac{4}{7}$.

49.3. а) $\left(\frac{1}{16}\right)^x \geqslant 2$;

б) $5^x \leqslant \frac{1}{625}$;

в) $\left(\sqrt{6}\right)^x \leqslant \frac{1}{6\sqrt{6}}$;

г) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x > 9\sqrt{3}$;

д) $3 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^x > 192$;

е) $4 \cdot \left(3\sqrt{3}\right)^x \leqslant 2916$.

49.4. а) $11^{3x-4} < 121$;

б) $9^{4x-9} > 729$;

в) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2-4x} > \sqrt[3]{\frac{25}{9}}$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3-11x} < \sqrt[5]{\frac{81}{16}}$.

49.5. а) $6^{x^2-5x} < \left(\frac{1}{6}\right)^6$;

б) $0{,}4^{x^2-x} \geqslant 2{,}5^{-6}$;

в) $13^{2x^2+3x} \leqslant 169$;

г) $\left(\sqrt{3}\right)^{3x^2-13x} > \frac{1}{9}$.

49.6. а) $\left(\frac{1}{36}\right)^{3x+10} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\right)^{6x-3}$;

б) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{10}}\right)^{5-3x} < 0{,}01^{x-4}$;

в) $8^{x^2-3x} \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}x-1}$;

г) $\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{1+3x} \geqslant 9^{x^2-x}$.

49.7. а) $21^{\frac{2x-3}{x+2}} > 1$;

б) $0{,}6^{\frac{3x+5}{2x-1}} \geqslant \frac{5}{3}$;

в) $0{,}74^{\frac{7x+1}{2-x}} \leqslant 1$;

г) $4^{\frac{x}{3x-1}} < 64$.

49.8. Найдите наибольшее или наименьшее целочисленное решение неравенства:

а) $0{,}25^{9-2x} > 64^{x}$;

б) $0{,}1^{10-6x} < 100^{x}$;

в) $0{,}2^{7-3x} > 625^{x}$;

г) $0{,}7^{-x} > 0{,}49^{x-14}$;

д) $0{,}04^{-x} > 0{,}2^{x-17}$;

е) $0{,}25^{-x} > 0{,}5^{x-19}$.

Решите неравенство.

49.9. а) $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} < 8^{\frac{x-3}{3x-7}}$;

б) $35^{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot 13^{2\sqrt{x^2-1}} > 35^{x-\sqrt{x^2-1}}$;

в) $(0,(4))^{x^2-1} \geqslant (0,(6))^{x^2+6}$;

г) $\left(\sqrt{14-6\sqrt{5}}\right)^{x-\sqrt{x}} \leqslant \left(3-\sqrt{5}\right)^{x+\sqrt{x}}$.

49.10. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-|x+2|} \geqslant 27 \cdot 81^{0{,}25}$;

б) $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$;

в) $\sqrt{2}^{\left||x-3|+1\right|} < 16\sqrt[3]{64}$;

г) $2 \leqslant 2^{|3x-1|} < 8$.

49.11. а) $5^{x} > 7 - 2x$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \leqslant 4x + 7$;

в) $2^{x} \leqslant \sqrt{x} + 1$;

г) $6^{x} < 7 - x$;

д) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} > 3x + 1$;

е) $3^{x} \geqslant 3 - 2(x-1)^2$.

49.12. а) $5^{x} + 5^{x+2} \leqslant 130$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+5} > 8$;

в) $4^{x+3} - 4^{x} \geqslant 252$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{7x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{7x} < 24$.

49.13. а) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;
б) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} \leqslant 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+1,5}$.

49.14. а) $5 \cdot 0{,}6^{2x} - 8 \cdot 0{,}6^x + 3 > 0$;

б) $4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x} - 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x} + 2 < 0$;

в) $5 \cdot 25^x - 26 \cdot 5^x + 5 \leqslant 0$;
г) $4 \cdot 16^x - 9 \cdot 4^x + 2 \leqslant 0$.

49.15. а) $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 \geqslant 0$;
б) $0{,}5^{2x-1} + 16 \cdot 0{,}5^x + 8 \leqslant 0$;
в) $5^{2x+1} - 5^{x+2} < 5^x - 5$;
г) $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0$.

49.16. а) $(17^x - 289)(x^2 + 8x + 12) \geqslant 0$;

б) $\frac{2^x - 8}{x^2 - 8x + 16} \leqslant 0$;

в) $\left(19^x - \frac{1}{361}\right)(x^2 + 2x - 15) \leqslant 0$;

г) $\frac{x^2 - 4x - 21}{3^x - 81} \leqslant 0$.

49.17. а) $\frac{15 \cdot 6^x - 20}{36 \cdot 6^{x-1} - 1} < 2$;
в) $\frac{45 + 27 \cdot 7^x}{7^{x+1} - 1} < 4$;

б) $\frac{3 \cdot 0{,}2^x - 2{,}04}{5^{-x} - 1} > 2$;
г) $\frac{4 \cdot 0{,}5^x - 7}{0{,}5^x - 1} > 3$.

49.18. а) $\left(4 - \sqrt{15}\right)^x + \left(4 + \sqrt{15}\right)^x > 8$;

б) $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^x + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^x \leqslant 6$.

49.19. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3^{x+1} > 9, \\ 7^{3x-10} < 49; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 0{,}7^{2-x} < 0{,}49, \\ 0{,}1^{x^2+1} > 0{,}01; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}6^{6x+1} < 0{,}36^{2x-9}, \\ 4^x + 2^{x+1} > 3; \end{cases}$
д) $\begin{cases} 2^{5x+1} > 8^{x-3}, \\ 0{,}1^{2x-1} - 101 \cdot 0{,}1^x + 10 < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}5^{4x+2,5} > \sqrt{2}, \\ 10^{x^2-1} > 1000; \end{cases}$
е) $\begin{cases} \sqrt{5} \cdot 5^{2x-0,5} \geqslant 1, \\ 0{,}2^{6-9x} < 125. \end{cases}$

Решите неравенство.

49.20. а) $4^{x+1,5}+6^x<9^{x+1}$; б) $3^{2x+1}-8\cdot 15^x+25^{x+0,5}\leqslant 0$.

49.21. а) $8^x+18^x-6\cdot 27^{x-\frac{1}{3}}>0$; б) $27^x-3^{2x+1}+3^{x+1}\leqslant 9$.

49.22. а) $x\cdot 3^x\leqslant 18$; б) $x^3\cdot 2^x>32$.

Упражнения для повторения

49.23. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2}-2^{-0,5}-2^{0,8}:2^{1,2}$;

б) $2^{0,5}:\frac{2^{0,7}}{1-2^{0,5}}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{-1}$;

в) $\left(1-\sqrt{2}\right)^{-2}-(2^{1,5}+3)^{-1}$;

г) $9^{1,5}\cdot 3^{-4}:\frac{2^{1,8}\cdot 2^{-2,3}}{\sqrt{2}}$;

д) $(3^{0,5}+2^{-1})+\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$;

е) $(3-2^{1,5})^{-2}-3\cdot 2^{2,5}$.

49.24. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=1-x$; б) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}+x=4-\sqrt{x^2-4}$.

49.25. Найдите множество значений функции:

а) $y=3\sin^2 x+\cos 2x$;
б) $y=\cos 2x+4\cos^2 x$;
в) $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$;
г) $y=3\sin^2 x+4\cos x$;
д) $y=5\sin x-6\cos^2 x$;
е) $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

49.26. Решите неравенство:

а) $(\cos x+\sin x)^2\geqslant 2$; б) $(\cos x-\sin x)^2\geqslant 2$.

§ 50. Понятие логарифма

Рассмотрим четыре показательных уравнения: $3^x=9$, $3^x=\frac{1}{27}$, $3^x=\sqrt{3}$, $3^x=5$. Первые три уравнения мы решим без труда, их корни — рациональные числа:

$$3^x=9,\quad x=2;$$

$$3^x=\frac{1}{27},\quad x=-3;$$

$$3^x=\sqrt{3},\quad x=\frac{1}{2}.$$

А как быть с уравнением $3^x = 5$? Мы знаем, что функция $y = 3^x$ возрастает, что $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, а потому между 1 и 2 имеется число x, для которого выполняется равенство $3^x = 5$. Но что это за число?

С аналогичной «нештатной» ситуацией мы встретились в курсе алгебры 8 класса, когда надо было найти положительный корень уравнений: $x^2 = 4$, $x^2 = 9$, $x^2 = 5$. Для первых двух уравнений всё просто: $x = 2$, $x = 3$. А чтобы записать корень третьего уравнения, пришлось вводить новый термин «квадратный корень» и новое обозначение $\sqrt{5}$. С уравнением $3^x = 5$ поступим так же: введём новый термин «логарифм» и новое обозначение $\log_3 5$ (читают: «Логарифм числа 5 по основанию три»). Итак, уравнение $3^x = 5$ мы решили: $x = \log_3 5$.

Определение. Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Обозначение: $\log_a b$ (читают: «*Логарифм числа b по основанию a*»).

Например:

$$2^3 = 8;\ \text{значит, } \log_2 8 = 3;$$
$$3^4 = 81;\ \text{значит, } \log_3 81 = 4;$$
$$5^{-2} = \frac{1}{25};\ \text{значит, } \log_5 \frac{1}{25} = -2;$$
$$a^1 = a;\ \text{значит, } \log_a a = 1;$$
$$a^c = a^c;\ \text{значит, } \log_a a^c = c;$$
$$a^0 = 1;\ \text{значит, } \log_a 1 = 0.$$

Последние три равенства советуем запомнить:

$$\log_a a = 1; \quad \log_a a^c = c; \quad \log_a 1 = 0.$$

Данное выше определение можно записать в следующем виде:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это тождество называют *основным логарифмическим тождеством*.

Особенно часто на практике используют логарифм по основанию e, т. е. $\log_e x$, причём ради экономии вместо $\log_e x$ пишут $\ln x$ и называют символ ln *натуральным логарифмом*. Итак, $\ln x$ — натуральный логарифм числа x, т. е. логарифм числа x по основанию e. С числом e вы познакомились в § 47, $e \approx 2{,}7$.

Пример 1 Вычислить:

а) $\log_9 243$; б) $\log_{0,4}\frac{125}{8}$; в) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt[5]{8}$; г) $\ln\frac{e^2}{\sqrt{e}}$.

Решение. а) Положим $\log_9 243 = x$. Тогда

$$9^x = 243,\ 3^{2x} = 3^5,\ 2x = 5,\ x = 2{,}5.$$

б) Положим $\log_{0,4}\frac{125}{8} = x$. Тогда

$$0{,}4^x = \frac{125}{8},\quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^3,\quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3},\quad x = -3.$$

в) Положим $\log_{\sqrt{2}}\sqrt[5]{8} = x$. Тогда

$$\left(\sqrt{2}\right)^x = \sqrt[5]{8},\quad 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{3}{5}},\quad \frac{x}{2} = \frac{3}{5},\quad x = 1{,}2.$$

г) $\ln\frac{e^2}{\sqrt{e}} = \ln e^{2-0{,}5} = \ln e^{1{,}5} = 1{,}5$.

Ответ: а) 2,5; б) –3; в) 1,2; г) 1,5.

Пример 2 Вычислить $49^{1+\frac{1}{2}\log_7 3}$.

Решение.

$$49^{1+\frac{1}{2}\log_7 3} = 49\cdot 49^{\frac{1}{2}\log_7 3} = 49\cdot\left(49^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_7 3} = 49\cdot 7^{\log_7 3} = 49\cdot 3 = 147.$$

Ответ: 147.

Пример 3 Доказать, что $\log_3 5$ — иррациональное число.

Решение. Предположим, что $\log_3 5$ — рациональное число, т. е. $\log_3 5 = \frac{p}{q}$, где p, q — натуральные числа. Равенство $\log_3 5 = \frac{p}{q}$ означает, что $3^{\frac{p}{q}} = 5$. Далее имеем: $\left(3^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q$, $3^p = 5^q$. Последнее равенство невозможно хотя бы потому, что число 5^q оканчивается цифрой 5, а никакая натуральная степень числа 3 цифрой 5 не оканчивается.

Получили противоречие, это значит, что сделанное предположение о том, что $\log_3 5$ — рациональное число, неверно. Вывод: $\log_3 5$ — иррациональное число.

Упражнения

50.1. Проверьте, верно ли равенство:

а) $\log_7 7 = 1$; в) $\ln 1 = 0$; д) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$;

б) $\log_9 9 = 1$; г) $\log_4 1 = 0$; е) $\log_{0,5} 2 = -1$.

Вычислите.

50.2. а) $\log_2 32$; г) $\log_{\sqrt[3]{11}}\left(\sqrt[3]{11}\right)^0$;

б) $\log_{\frac{1}{4}} 64$; д) $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{625}\right)$;

в) $\log_{0,1} 0{,}000001$; е) $\log_{10} 0{,}0001$.

50.3. а) $\log_{\sqrt{3}} 9$; г) $\log_{\sqrt[3]{2}} 4$;

б) $\log_{0,5} \frac{1}{8\sqrt{2}}$; д) $\log_{\frac{1}{15}}\left(225\sqrt{15}\right)$;

в) $\log_{\sqrt[3]{12}}\left(144\sqrt[3]{12}\right)$; е) $\log_{\sqrt{5}}\left(125\sqrt{5}\right)$.

50.4. а) $7^{\log_7 11}$; в) $5^{2+\log_5 2}$; д) $\left(\frac{2}{7}\right)^{1+\log_{\frac{2}{7}} 4}$;

б) $11^{\log_{11} 7}$; г) $6^{3+\log_6 5}$; е) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2+\log_{\frac{3}{4}} 12}$.

50.5. а) $4^{3\log_2 10}$; в) $\left(2\sqrt{2}\right)^{-2\log_{\sqrt{8}} 25}$; д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log_{\frac{1}{4}} 5}$;

б) $e^{3\ln 10}$; г) $\left(\sqrt{2}\right)^{2\log_2 \sqrt{7}}$; е) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3\log_{\frac{2}{3}} 5}$.

50.6. а) $\log_2 4 + \log_4 8 + \log_{16} 32$; г) $4\log_{4\sqrt{2}}\left(32 \cdot \sqrt[4]{64}\right)$;

б) $\log_3 9 + \log_9 27 + \log_{81} 27$; д) $3\log_{2\sqrt{2}}\left(64 \cdot \sqrt[4]{32}\right)$;

в) $\log_5 25 + \log_{25} 625 + \log_{625} 25$; е) $7\log_{8\sqrt{2}}\left(16 \cdot \sqrt[5]{64}\right)$.

50.7. Сравните числа a и b, если:

а) $a = \log_5 6$, $b = \sqrt[4]{17}$;

б) $a = \log_{0,2} 2$, $b = \sin 8$;

в) $a = \ln 10$, $b = 7^{\frac{1}{3}}$;

г) $a = \log_3 \pi$, $b = \cos\frac{\pi}{3}$.

Решите уравнение.

50.8. а) $\log_8 x = 2$;

б) $\log_2 x = -10$;

в) $\ln x = -5$;

г) $\ln x = 3$;

д) $\log_{0,064} x = \frac{2}{3}$;

е) $\log_{0,125} x = \frac{1}{3}$.

50.9. а) $\log_x 32 = 5$;

б) $\log_x \frac{1}{125} = -3$;

в) $\log_x 7\sqrt{7} = 6$;

г) $\log_x 81 = 4$;

д) $\log_x 1024 = -5$;

е) $\log_x 6\sqrt{6} = 3$.

50.10. а) $7^x = 8$;

б) $4^x = 11$;

в) $\left(\frac{5}{12}\right)^x = 11$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{11}{9}$;

д) $\left(\sqrt[4]{10}\right)^x = 2$;

е) $\left(\sqrt{13}\right)^x = 6$.

50.11. а) $16^{2x-4} = 15$;

б) $3^{x^2} = 2$;

в) $18^{3x-1} = 23$;

г) $\left(\sqrt{13}\right)^{x^2} = 4$.

50.12. а) $9^x + 3^x = 6$;

б) $25^x + 18 = 11 \cdot 5^x$;

в) $4^{2x} + 4^x = 12$;

г) $49^x + 24 = 11 \cdot 7^x$.

Решите неравенство.

50.13. а) $5^x \leqslant 7$;

б) $6^x \geqslant 11$;

в) $0{,}3^x < 19$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} > 9$;

д) $7^{|x|} > 2$;

е) $\left(\sqrt{19}\right)^{x^2} \leqslant 3$.

50.14. а) $4^x + 2^x \geqslant 2$;

б) $3 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x-0,5} + 21 > 38 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x$;

в) $9^x + 3^x > 2$;

г) $5 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} + 10 \geqslant 19 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^x$.

50.15. Постройте график функции:

а) $y = \log_x x^2$;

б) $y = \log_x x^3$;

в) $y = 2^{\log_2 x}$;

г) $y = x^{\log_x 2}$;

д) $y = \log_x \frac{1}{x}$;

е) $y = \log_x \frac{1}{x^2}$.

50.16. Докажите, что c — иррациональное число, если:
а) $c = \log_2 3$; б) $c = \log_{10} 5$.

50.17. Решите уравнение с параметром p:
а) $9^x - 3p \cdot 3^{x-1} + 5p = 25$;
б) $25^x - (10p + 5) \cdot 5^{x-1} + p^2 + p = 2$.

50.18. Решите уравнение:
а) $2^{2x+1} + 25^{x+1} = 150 \cdot 10^{x-1}$;
б) $6^{x+1} + 5^{1+2x} = 30 + 150^x$.

Упражнения для повторения

50.19. Проверьте, верно ли равенство:
а) $\sqrt{14 - 2\sqrt{13}} = \sqrt{13} - 1$;
б) $4 - \sqrt{15} = \dfrac{1}{\sqrt{15} + 4}$;
в) $\dfrac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{7}} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$;
г) $\sqrt{24 - 6\sqrt{15}} = 3 - \sqrt{15}$;
д) $\dfrac{1}{5 - 2\sqrt{6}} = 5 + 2\sqrt{6}$;
е) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{6} = \dfrac{3}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}$.

50.20. Упростите выражение:
а) $\sqrt[3]{2} \cdot \left(5\sqrt[3]{4} + 0{,}5\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{500}\right)$;
б) $\sqrt[3]{3} \cdot \left(4\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{72} - 13\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)$;
в) $\sqrt[4]{\left(1 - \sqrt[3]{2}\right)^4} \cdot \left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$;
г) $\sqrt[3]{0{,}5} \cdot \left(5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}\right)$;
д) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}} \cdot \left(\sqrt[3]{9} - 7\sqrt[3]{72} + 6\sqrt[3]{1125}\right)$;
е) $\sqrt[6]{\left(1 - \sqrt[3]{6}\right)^6} \cdot \left(1 + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36}\right)$.

50.21. Найдите значение выражения:
а) $\dfrac{5}{2 + 3\sin 2t}$, если $\operatorname{ctg} t = 5$;
б) $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$, если $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 3$;

в) $\dfrac{3}{5+4\cos 2t}$, если $\operatorname{tg} t = 0{,}2$;

г) $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$, если $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = -2$.

50.22. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = 2\sqrt[3]{x-1} + 1$;

б) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{x+2} - 1$;

в) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x+2} - 1$;

г) $y = 3\sqrt[4]{x-1} + 2$.

§ 51. Логарифмические функции

Построим график функции $y = \log_a x$. Рассуждать будем следующим образом.

Рассмотрим известную нам из § 46 показательную функцию $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Она монотонна (возрастает, если $a > 1$, убывает, если $0 < a < 1$), значит, обратима (см. § 15) и для неё существует обратная функция $x = \log_a y$. Поменяем, как принято, x и y местами: $y = \log_a x$. Итак, $y = \log_a x$ — это функция, обратная для функции $y = a^x$. Значит, график функции $y = \log_a x$ получается из графика функции $y = a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (см. § 15).

На рисунке 186 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $a > 1$; на рисунке 187 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $0 < a < 1$.

График функции $y = \log_a x$ — это та же линия, что служит графиком показательной функции $y = a^x$, только по-другому расположенная на координатной плоскости (впрочем, иногда график логарифмической функции называют *логарифмической кривой*). У графика функции $y = a^x$ есть горизонтальная асимптота — прямая $y = 0$, у графика функции $y = \log_a x$ есть вертикальная асимптота — прямая $x = 0$.

Перечислим свойства логарифмической функции $\boldsymbol{y = \log_a x}$.

1. Область определения функции $D(f) = (0; +\infty)$.

2. $y = \log_a x$ — функция общего вида (ни чётная, ни нечётная).

3. Функция $y = \log_a x$ возрастает, если $a > 1$, убывает, если $0 < a < 1$.

4. Функция не ограничена снизу, не ограничена сверху.

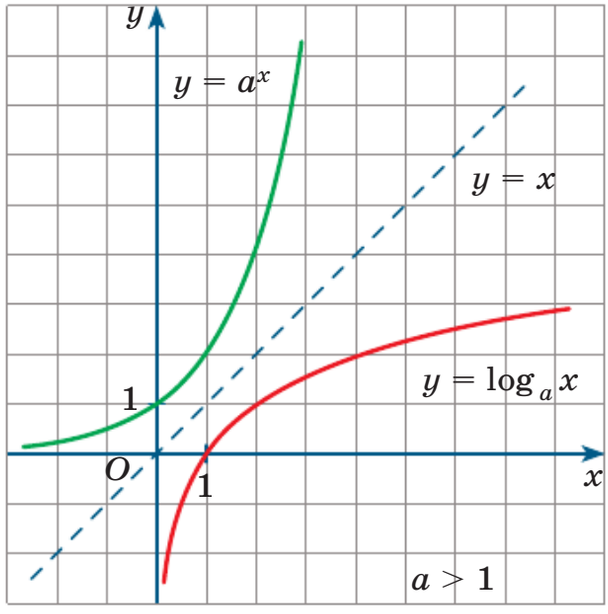


Рис. 186

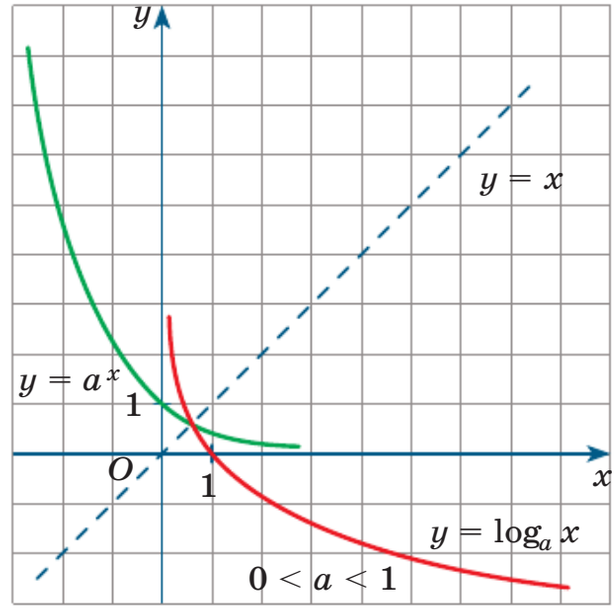


Рис. 187

5. $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$ не существуют.

6. $y = \log_a x$ — непрерывная функция.

7. Область значений функции $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

8. Функция выпукла вверх, если $a > 1$; функция выпукла вниз, если $0 < a < 1$.

Пример 1 Найти наименьшее и наибольшее значения данной функции на заданном промежутке:

а) $y = \log_3 x$, $x \in \left[\frac{1}{27}; 81\right]$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $x \in (4; 7]$.

Решение. а) Функция $y = \log_3 x$ — возрастающая, поскольку её основание (число 3) больше 1. Следовательно, своих наименьшего и наибольшего значений она достигает соответственно на левом и правом концах заданного отрезка:

$$y_{\text{наим}} = \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3; \quad y_{\text{наиб}} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.$$

б) Функция $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ — убывающая, поскольку её основание $\left(\text{число } \frac{1}{2}\right)$ меньше 1. Следовательно, своих наименьшего и наибольшего значений функция достигает соответственно на правом и левом концах заданного промежутка. Но левый конец не принадлежит за-

данному полуинтервалу, значит, наибольшего значения функция не достигает. А наименьшее значение функции равно $\log_{\frac{1}{2}} 7$.

Ответ: а) $y_{\text{наим}} = -3$; $y_{\text{наиб}} = 4$; б) $y_{\text{наим}} = \log_{\frac{1}{2}} 7$; $y_{\text{наиб}}$ не существует.

Пример 2 Построить график функции:
а) $y = |\ln x|$; б) $y = \ln|x|$.

Решение. а) В курсе алгебры 9 класса мы сформулировали алгоритм построения графика функции $y = |f(x)|$. Напомним его.

1. Построить график функции $y = f(x)$.

2. Оставить без изменения ту часть графика функции $y = f(x)$, которая лежит не ниже оси Ox.

3. Часть графика функции $y = f(x)$, которая лежит ниже оси Ox, заменить на симметричную ей относительно оси Ox.

Воспользуемся этим алгоритмом. Построим график функции $y = \ln x$. Напомним, что $\ln x$ — натуральный логарифм, его основанием служит число $e \approx 2{,}7$. Для ориентировки мы использовали две контрольные точки: (1; 0) и (e; 1). Оставим без изменения ту часть графика, которая лежит не ниже оси Ox, а ту часть графика, которая лежит ниже оси Ox (пунктирная линия на рисунке 188), заменим на симметричную ей относительно оси Ox. Получим график функции $y = |\ln x|$ (сплошная линия на рисунке 188).

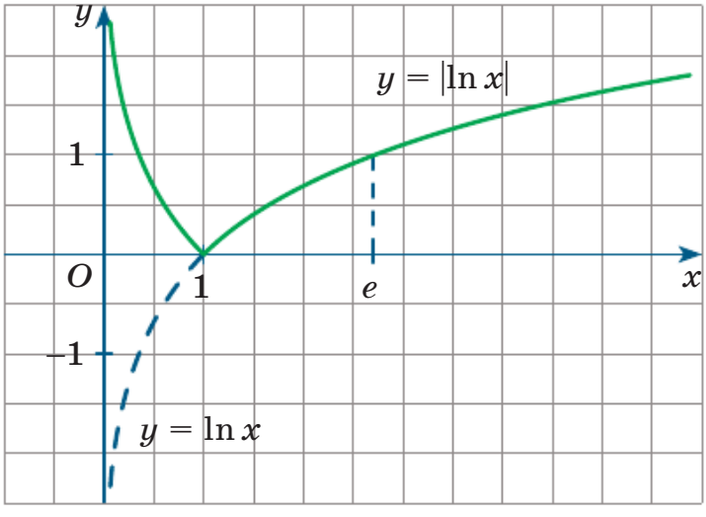


Рис. 188

б) В курсе алгебры 9 класса мы сформулировали алгоритм построения графика функции $y = f(|x|)$. Напомним его.

1. Построить график функции $y = f(x)$.

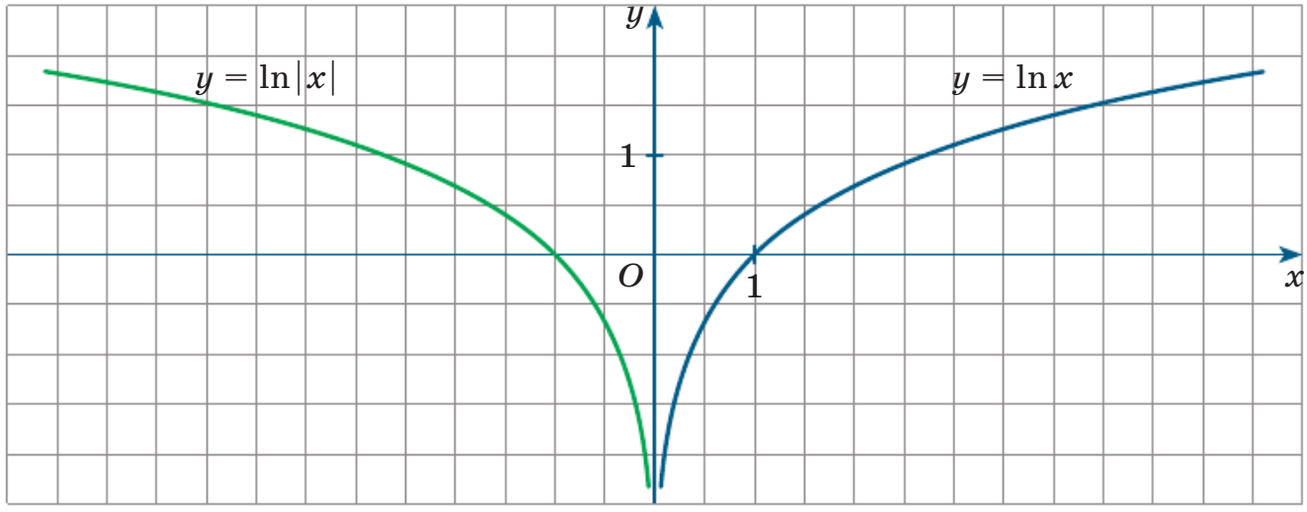


Рис. 189

2. Оставить без изменения ту часть графика, которая расположена правее оси Oy (и точку на оси Oy, если она есть), и отбросить всё, что лежит левее оси Oy.

3. К оставшейся части графика $y = f(x)$ добавить её симметричный образ относительно оси Oy.

Воспользуемся этим алгоритмом. Построим график функции $y = \ln x$ (синяя линия на рисунке 189). Весь график расположен в правой полуплоскости, оставляем его без изменения. Добавляем линию, симметричную построенной относительно оси ординат, получим график функции $y = \ln|x|$ (объединение двух линий на рисунке 189).

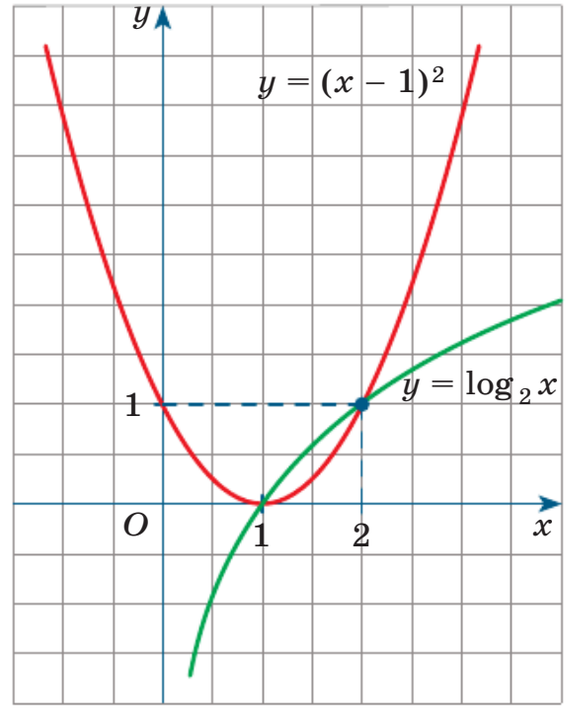


Рис. 190

Пример 3 Решить уравнение $\log_2 x + 2x = x^2 + 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\log_2 x = x^2 - 2x + 1$, т. е. $\log_2 x = (x - 1)^2$. Построим в одной системе координат логарифмическую кривую $y = \log_2 x$ и параболу $y = (x - 1)^2$ (рис. 190). Они пересекаются в точках (1; 0) и (2; 1). Значит, заданное уравнение имеет два корня: 1 и 2.

Ответ: 1; 2.

Упражнения

51.1. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\log_3 2{,}5$, $\log_3 2$, $\log_3 \sqrt{2}$, $\log_3 1{,}9$, $\log_3 \frac{1}{2}$, $\log_3 1$;

б) $\log_{0,3} 1{,}4$, $\log_{0,3} 2$, $\log_{0,3} \sqrt{2}$, $\log_{0,3} 3{,}2$, $\log_{0,3} 0{,}2$, $\log_{0,3} 1$.

51.2. Расположите числа в порядке убывания:

а) $\log_7 1{,}5$, $\log_7 \frac{1}{125}$, $\log_7 1$, $\log_7 \sqrt{5}$, $\log_7 \sqrt[3]{5}$, $\log_7 \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\log_7 5$;

б) $\log_{0,2} 2{,}8$, $\log_{0,2} 4$, $\log_{0,2} \sqrt{5}$, $\log_{0,2} \sqrt{7}$, $\log_{0,2} 1$, $\log_{0,2} \frac{1}{\sqrt{7}}$.

51.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ при заданных условиях:

а) $f(x) = \log_3 x$, $x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$;

б) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $x \in [0{,}5; 1]$;

в) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $x \in [1; 3]$;

г) $f(x) = \log_4 x$, $x \in [0{,}25; 1]$.

Постройте график функции.

51.4. а) $y = \log_3(x + 1)$;

б) $y = \log_{1,5} x - 2$;

в) $y = 2\log_{\sqrt{3}} x$;

г) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$;

д) $y = \log_{2,5} x + 1$;

е) $y = 3\log_{\sqrt{2}} x$.

51.5. а) $y = -3\log_{\frac{1}{5}}(x - 1) + 2$;

б) $y = \log_4(-x)$;

в) $y = \ln|x|$;

г) $y = -0{,}5\log_2(x + 2) - 1$;

д) $y = \log_{1,5}|x|$;

е) $y = |\ln(-x)|$.

51.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ при заданных условиях:

а) $f(x) = \log_2(x - 3)$, $x \in [3{,}5; 5]$;

б) $f(x) = \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) + 2$, $x \in [2; 10]$;

в) $f(x) = -2\ln x + 1$, $x \in \left[\frac{1}{e}; e\right]$;

г) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x + 2)$, $x \in [-1; 3]$.

ИКТ **51.7.** Решите графически уравнение:

а) $\log_3 x = 1 - x$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} x = 2x - 11$;

в) $\log_5 x = 5 - 5x$;

г) $\log_{\frac{1}{7}} x = x - 8$.

ИКТ **51.8.** Решите графически неравенство:

а) $\log_4 x \geqslant 5 - x$;

б) $\log_{0,5} x > \sqrt{x} - 1$;

в) $\log_2(x+2) - 1 \leqslant \frac{2}{|x|}$;

г) $\log_3 x \leqslant 7 - 2x$;

д) $\log_{0,25} x < \sqrt{x} - 3$;

е) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \geqslant -\frac{2}{|x|}$.

51.9. а) Найдите значения параметров p и q, такие, что наибольшее значение функции $y = \log_3 x$ на отрезке $[p; q]$ равно 4, а наименьшее -2.

б) Найдите значения параметров p и q, такие, что наибольшее значение функции $y = \log_{0,5} x$ на отрезке $[p; q]$ равно -1, а наименьшее -3.

51.10. а) Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3)$.

б) Найдите наименьшее значение функции $y = \log_2(x^2 - 4x + 5)$.

Найдите область определения функции.

51.11. а) $y = \log_\pi |x^2 - 3x - 10|$;

б) $y = \log_{\frac{3}{7}}(x^2 - 6x + 8)$;

в) $y = \ln|x^3 - x|$;

г) $y = \log_{\frac{7}{12}}(7x - 12 - x^2)$.

51.12. а) $y = \log_5\left(\sqrt{x} - 2\right)$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(\sin x)$;

в) $y = \log_{0,3}\left(\sqrt{x-1} + 2\right)$;

г) $y = \ln\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$.

51.13. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции:

а) $y = \log_2 x$, $0{,}4 \leqslant x \leqslant 7$;

б) $y = \log_3 x$, $0{,}1 \leqslant x \leqslant 82$;

в) $y = \log_5 x$, $0{,}01 \leqslant x \leqslant 1000$;

г) $y = \log_{0,5} 4x$, $3 \leqslant x \leqslant 300$;

д) $y = \log_4 \sqrt{-x}$, $-500 \leqslant x \leqslant -0{,}5$;

е) $y = 10 \cdot \lg(x+1)$, $10 \leqslant x \leqslant 999$.

51.14. Найдите область значений функции:

а) $y = \ln(x^2 - 6x + 8)$;

б) $y = \log_2(4x - x^2 - 2)$;

в) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 4)$;

г) $y = \log_5(25 - x^2)$.

51.15. Докажите, что если $f(x) = \log_3 x$, то:

а) $f(3^{x-1}) + f(9^x) = f(27^x) + f\left(\frac{1}{3}\right)$;

б) $f(3^{\sin^2 5x}) + f(3^{\cos^2 5x}) = f\left(\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[10]{9}\right)$.

51.16. Постройте и прочитайте график функции:

а) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, \text{ если } x < 1, \\ \log_{\frac{1}{3}} x, \text{ если } x \geqslant 1; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \log_2 |x|, \text{ если } x < 2, \\ \sqrt{x - 2} - 1, \text{ если } x \geqslant 2; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-1}, \text{ если } x < -1, \\ \ln(x + 1), \text{ если } x > -1; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2, \text{ если } x < 2, \\ \log_2 x, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

51.17. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -(x + 2)^2 + 4, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant 1, \\ \log_2 x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

а) Вычислите $f(-5)$; $f(-3)$; $f(2)$; $f(8)$.

б) Постройте график функции.

в) Прочитайте график функции.

г) Найдите значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет ровно два корня.

51.18. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2(x - 1)^2 - 3, \text{ если } x < 2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(8)$.

б) Постройте график функции.

в) Прочитайте график функции.

г) Найдите значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет единственный корень.

Постройте график функции.

51.19. а) $y = 2 + |\log_2 (x - 4)|$; в) $y = \left|\log_{\frac{1}{3}}(x+3)\right| - 1$;

б) $y = 2 - |\log_{0,5} (x + 1)|$; г) $y = 3 - |\log_3 (x - 1)|$.

51.20. а) $y = 2 + \log_2 |x - 4|$; в) $y = \log_{\frac{1}{3}} |x + 3| - 1$;

б) $y = 2 - \log_{0,5} |x + 1|$; г) $y = 3 - \log_3 |x - 1|$.

51.21. а) $y = |2 - \log_3 |x - 3||$; б) $y = |\log_{0,5}|2 - x| - 4|$.

51.22. а) $y = |\log_2 x - 1| - |\log_2 x + 1|$; б) $y = |1 - \log_3 x| + |1 + \log_3 x|$.

51.23. а) $y = 3^{\log_3 |x^2 - 4|}$; г) $y = 0{,}5^{\log_{0,5}|9 - x^2|}$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x - 2)}$; д) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}}(2 - x^2 - x)}$;

в) $y = 0{,}3^{\log_{0,3}(8 + 2x - x^2)}$; е) $y = 5^{\log_5 \sqrt{x+3}}$.

Упражнения для повторения

51.24. Является ли заданное число x корнем уравнения:

а) $x^2 + \frac{8}{x+2} = 1$, $x = 1 - \sqrt{5}$;

б) $x^6 + 3x^{-3} = -2$, $x = -\sqrt[3]{2}$;

в) $(2 - x^{-1}) + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = 5\frac{1}{4}$, $x = 3^{0,5}$;

г) $x^2 + \frac{2}{x+3} = 0$, $x = \sqrt{3} - 1$?

51.25. Вычислите:

а) $\log_2 \sin\frac{3\pi}{4}$; в) $\log_8 \cos\frac{\pi}{3}$; д) $\log_9 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

б) $\log_2 \cos\frac{\pi}{4}$; г) $\log_{0,5} \sin\frac{9\pi}{4}$; е) $\log_7 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

51.26. Исследуйте на чётность функцию:

а) $y = \sin x + \arcsin x$;

б) $y = \dfrac{\sin x}{\arccos x}$;

в) $y = 3\cos x + \arcsin^2 x$;

г) $y = \cos x + \arccos x$;

д) $y = \dfrac{\cos x}{\arcsin x}$;

е) $y = \sin^2 x + |\arccos x|$.

51.27. Решите неравенство:

а) $\sin x \cos x < 0$;

б) $|\sin x| \geqslant \dfrac{1}{2}$;

в) $\sin x \cos \dfrac{x}{2} - \cos x \sin \dfrac{x}{2} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $|\cos x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

§ 52. Свойства логарифмов

Теорема 1. Если a, b, c — положительные числа, $a \neq 1$, то справедливо равенство

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c.$$

Краткая формулировка, которую удобно использовать на практике: *логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей.*

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$\log_a bc = x, \quad \log_a b = y, \quad \log_a c = z.$$

Нам надо доказать, что выполняется равенство $x = y + z$.
Равенство $\log_a bc = x$ означает, что $a^x = bc$.
Равенство $\log_a b = y$ означает, что $a^y = b$.
Равенство $\log_a c = z$ означает, что $a^z = c$.
А теперь смотрите: $a^x = bc = a^y \cdot a^z = a^{y+z}$. Итак, $a^x = a^{y+z}$, значит, $x = y + z$, что и требовалось доказать.

Приведём примеры использования теоремы 1:

$$\log_2 48 = \log_2(16 \cdot 3) = \log_2 16 + \log_2 3 = 4 + \log_2 3;$$
$$\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6(3 \cdot 12) = \log_6 36 = 2.$$

Теорема остаётся справедливой и для случая, когда логарифмируемое выражение представляет собой произведение более двух положительных чисел. Например,

$$\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 = \ln(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) = \ln 210.$$

Теорема 2. Если a, b, c — положительные числа, $a \neq 1$, то справедливо равенство

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c\,.$$

На практике удобнее пользоваться такой формулировкой: *логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя.* Или такой: *логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя.*

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$\log_a \frac{b}{c} = x\,, \quad \log_a b = y, \quad \log_a c = z.$$

Нам надо доказать, что выполняется равенство $x = y - z$.

Равенство $\log_a \frac{b}{c} = x$ означает, что $a^x = \frac{b}{c}$.

Равенство $\log_a b = y$ означает, что $a^y = b$.
Равенство $\log_a c = z$ означает, что $a^z = c$.

А теперь смотрите: $a^x = \frac{b}{c} = \frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$. Итак, $a^x = a^{y-z}$, значит, $x = y - z$, что и требовалось доказать.

Приведём примеры использования теоремы 2:

$$\log_3 \frac{5}{27} = \log_3 5 - \log_3 27 = \log_3 5 - 3\,.$$

$$\log_2 10 - \log_2 5 = \log_2 \frac{10}{5} = \log_2 2 = 1\,.$$

Теорема 3. Если a, b, c — положительные числа, $a \neq 1$, то для любого действительного числа r справедливо равенство

$$\log_a b^r = r \log_a b.$$

На практике удобнее пользоваться такой формулировкой: *логарифм степени равен произведению показателя степени и логарифма основания степени.*

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$\log_a b^r = x, \quad \log_a b = y.$$

Нам надо доказать, что выполняется равенство $x = ry$.

Равенство $\log_a b^r = x$ означает, что $a^x = b^r$.

Равенство $\log_a b = y$ означает, что $a^y = b$.

А теперь смотрите: $a^x = b^r = (a^y)^r = a^{ry}$. Итак, $a^x = a^{ry}$, значит, $x = ry$, что и требовалось доказать.

Приведём примеры использования теоремы 3:

$$\ln 125 = \ln 5^3 = 3\ln 5;$$
$$2{,}5\log_3 4 = \log_3 4^{2,5} = \log_3 (2^2)^{2,5} = \log_3 2^5 = \log_3 32.$$

Пример 1 Вычислить:

а) $\log_5 200$, если известно, что $\log_5 2 = a$;

б) $\log_2 \frac{45}{16}$, если известно, что $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$;

в) $\log_3 18$, если известно, что $\log_3 12 = a$.

Решение.

а)

$$\log_5 200 = \log_5 (25 \cdot 8) = \log_5 25 + \log_5 8 = 2 + \log_5 2^3 = \\ = 2 + 3\log_5 2 = 2 + 3a.$$

б)

$$\log_2 \frac{45}{16} = \log_2 45 - \log_2 16 = \log_2 (9 \cdot 5) - 4 = \log_2 3^2 + \log_2 5 - 4 = \\ = 2\log_2 3 + b - 4 = 2a + b - 4.$$

в) $\log_3 12 = \log_3 (3 \cdot 2^2) = \log_3 3 + \log_3 2^2 = 1 + 2\log_3 2 = a$. Значит, $\log_3 2 = \frac{a-1}{2}$.

Тогда $\log_3 18 = \log_3 (9 \cdot 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \frac{a-1}{2} = \frac{a+3}{2}$.

Ответ: а) $2 + 3a$; б) $2a + b - 4$; в) $\frac{a+3}{2}$.

Доказанные в теоремах 1—3 свойства логарифмов (логарифм произведения, логарифм частного, логарифм степени) мы получили при условии, что логарифмируемые числа положительны. А как быть, если про знак логарифмируемого числа ничего не известно? Можно ли, например, написать $\ln b^4 = 4\ln b$, если о знаке числа b ничего не известно? Отвечаем: нельзя, поскольку при $b < 0$ левая часть равенства $\ln b^4 = 4\ln b$ определена, а правая не определена (логарифм отри-

цательного числа не существует). Как же быть в таком случае? Нас выручит знак модуля: $\ln b^4 = 4\ln|b|$. Это частный случай общей формулы

$$\log_a x^{2n} = 2n\log_a|x|,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Нужно быть внимательным и при замене выражения $\log_a xy$, где $xy > 0$, суммой $\log_a x + \log_a y$. Если известно, что $x > 0$, $y > 0$, то такая замена корректна, а если нет, то, поскольку при $xy > 0$ выполняется равенство $xy = |xy| = |x| \cdot |y|$, следует использовать формулу

$$\log_a xy = \log_a|x| + \log_a|y|.$$

Аналогично, если $\frac{x}{y} > 0$, то $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$.

Если числовое выражение A составлено из положительных чисел x, y, z с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, то, используя свойства логарифмов, можно выразить $\log_a A$ через логарифмы чисел x, y, z. Такое преобразование называют *логарифмированием*. Эта операция сводит вычисления к более простым операциям: произведение, частное, возведение в степень заменяются соответственно на сумму, разность, произведение.

Пример 2 Выразить $\ln x$ через натуральные логарифмы положительных чисел a, b, c, если известно, что $x = \frac{a^2\sqrt{b}}{c^3}$.

Решение. 1) Логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя, значит, $\ln x = \ln\frac{a^2\sqrt{b}}{c^3} = \ln\left(a^2\sqrt{b}\right) - \ln c^3$.

2) Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей, значит, $\ln\left(a^2\sqrt{b}\right) = \ln a^2 + \ln\sqrt{b}$.

3) Логарифм степени равен произведению показателя степени и логарифма основания степени, значит,

$$\ln a^2 = 2\ln a;\quad \ln\sqrt{b} = \ln b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln b;\quad \ln c^3 = 3\ln c.$$

4) А теперь сведём воедино всё то, что отмечено в пунктах 1—3:

$$\ln x = \ln\frac{a^2\sqrt{b}}{c^3} = \ln\left(a^2\sqrt{b}\right) - \ln c^3 = \ln a^2 + \ln\sqrt{b} - \ln c^3 =$$
$$= 2\ln a + \frac{1}{2}\ln b - 3\ln c.$$

Нужно уметь решать и обратную задачу: находить выражение, логарифм которого представлен через арифметические операции над логарифмами некоторых чисел; эту операцию называют *потенцированием*.

Пример 3 Известно, что $\log_3 x = \frac{1}{3}\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 c$. Выразить x через a, b, c.

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{3}\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 c = \log_3 a^{\frac{1}{3}} + \log_3 b - \log_3 c^2 =$$

$$= \log_3\left(\sqrt[3]{a}\cdot b\right) - \log_3 c^2 = \log_3 \frac{b\sqrt[3]{a}}{c^2}.$$

Значит, $\log_3 x = \log_3 \frac{b\sqrt[3]{a}}{c^2}$, откуда следует, что $x = \frac{b\sqrt[3]{a}}{c^2}$.

Пример 4 Известно, что $x^2 + 4y^2 = 12xy$, $x > 0$, $y > 0$. Доказать, что $\ln\frac{x+2y}{4} = \frac{\ln x + \ln y}{2}$.

Решение. Поработаем с условием $x^2 + 4y^2 = 12xy$. Имеем:

$x^2 + 4y^2 + 4xy = 16xy$; $\frac{(x+2y)^2}{16} = xy$; $\left(\frac{x+2y}{4}\right)^2 = xy$. Возьмём натуральный логарифм от обеих частей последнего равенства:

$\ln\left(\frac{x+2y}{4}\right)^2 = \ln xy$, и далее $2\ln\frac{x+2y}{4} = \ln x + \ln y$; $\ln\frac{x+2y}{4} = \frac{\ln x + \ln y}{2}$.

Пример 5* Сравнить числа:

а) $a = \log_2 5$, $b = \log_5 75$; б) $a = \log_4 9$, $b = \log_3 6$.

Решение. а) Имеем:

$$a = \log_2 5 = \log_2(4\cdot 1{,}25) = \log_2 4 + \log_2 1{,}25 = 2 + \log_2 1{,}25;$$
$$b = \log_5 75 = \log_5(25\cdot 3) = \log_5 25 + \log_5 3 = 2 + \log_5 3.$$

Фактически нам надо выяснить, какое из чисел больше: $\log_2 1{,}25$ или $\log_5 3$. Оба эти числа принадлежат интервалу $(0; 1)$, сравним их с серединой интервала — числом $0{,}5$:

$$\log_2 1{,}25 < \log_2 \sqrt{2} = 0{,}5;\ \ \log_5 3 > \log_5 \sqrt{5} = 0{,}5.$$

Итак, $a = \log_2 5 = 2 + \log_2 1{,}25 < 2 + 0{,}5 = 2{,}5$;
$b = \log_5 75 = 2 + \log_5 3 > 2 + 0{,}5 = 2{,}5$.
Вывод: $a < 2{,}5$, $b > 2{,}5$, значит, $a < b$.
б) Имеем:

$$a = \log_4 9 = \log_4(4 \cdot 2{,}25) = \log_4 4 + \log_4 2{,}25 = 1 + \log_4 2{,}25;$$
$$b = \log_3 6 = \log_3(3 \cdot 2) = \log_3 3 + \log_3 2 = 1 + \log_3 2.$$

Фактически нам надо выяснить, какое из чисел больше: $\log_4 2{,}25$ или $\log_3 2$. Оба эти числа принадлежат интервалу $(0; 1)$, сравним их с серединой интервала — числом $0{,}5$:

$$\log_4 2{,}25 > \log_4 2 = 0{,}5;\ \ \log_3 2 > \log_3 \sqrt{3} = 0{,}5.$$

На этот раз нам не повезло: оба сравниваемых числа больше, чем $0{,}5$. Попробуем сравнить интересующие нас числа с числом $0{,}6$. Начнём с числа $\log_4 2{,}25$. Положим $x = \log_4 2{,}25$, $y = 0{,}6 = \log_4 4^{0{,}6}$. Предположим (наугад), что $2{,}25 < 4^{0{,}6}$; тогда $\frac{9}{4} < 4^{\frac{3}{5}}$, $\left(\frac{9}{4}\right)^5 < 4^3$, $9^5 < 4^8$, $\sqrt{9^5} < \sqrt{4^8}$, $3^5 < 2^8$, $243 < 256$. Последнее неравенство верно, значит, $2{,}25 < 4^{0{,}6}$, соответственно, $x = \log_4 2{,}25 < \log_4 4^{0{,}6} = 0{,}6$.

Выполним аналогичную работу с числом $\log_3 2$. Положим $x = \log_3 2$, $y = 0{,}6 = \log_3 3^{0{,}6}$. Предположим (наугад), что $2 > 3^{0{,}6}$; тогда

$$2 > 3^{\frac{3}{5}},\ \ 2^5 > 3^3,\ \ 32 > 27.$$

Последнее неравенство верно, значит, $2 > 3^{0{,}6}$, соответственно,

$$x = \log_3 2 > \log_3 3^{0{,}6} = 0{,}6.$$

Подведём итоги:

$$a = \log_4 9 = 1 + \log_4 2{,}25 < 1 + 0{,}6 = 1{,}6;$$
$$b = \log_3 6 = 1 + \log_3 2 > 1 + 0{,}6 = 1{,}6.$$

Вывод: $a < b$.

Упражнения

52.1. Вычислите.

а) $\log_6 24 + \log_6 9$;

б) $\log_{\frac{1}{15}} 45 + \log_{\frac{1}{15}} 5$;

в) $\log_{12} 48 + \log_{12} 3$;

г) $\log_{\frac{1}{8}} 32 + \log_{\frac{1}{8}} 16$.

52.2. а) $\log_{\frac{2}{3}} 4 - \log_{\frac{2}{3}} 9$;

б) $\log_{12} 720 - \log_{12} 5$;

в) $\log_{15} 675 - \log_{15} 3$;

г) $\log_{\frac{3}{4}} 27 - \log_{\frac{3}{4}} 64$.

52.3. а) $\log_3 27 \cdot (\log_4 8 + \log_4 2)$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} 125 \cdot \left(\log_{\frac{1}{12}} 3 - \log_{\frac{1}{12}} 432\right)$;

в) $\left(\log_{\frac{2}{7}} 4 - \log_{\frac{2}{7}} 49\right) : \log_{3\sqrt{2}} 18$;

г) $\log_5 625 \cdot (\log_9 27 + \log_9 3)$.

Решите уравнение.

52.4. а) $\log_3 x = \log_3 13 + \log_3 2 + \log_3 0{,}25$;

б) $\log_{\frac{4}{7}} x = \log_{\frac{4}{7}} 7 + \log_{\frac{4}{7}} 2 - \log_{\frac{4}{7}} \sqrt{2}$;

в) $\log_{\sqrt{11}} x = 2\log_{\sqrt{11}} 3 + \log_{\sqrt{11}} 5 - \log_{\sqrt{11}} 3$;

г) $\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3 + \log_5 0{,}3$.

52.5. а) $\log_6 x = \log_6 28 - \log_6 2 + 2\log_6 \frac{1}{7}$;

б) $\log_{0,4} x = \frac{1}{2}\log_{0,4} 25 + 3\log_{0,4} \sqrt{2} - \log_{0,4} \sqrt{5}$;

в) $\log_{11} x = \log_{11} 7 + 2\log_{11} 6 - \log_{11} 9$;

г) $\log_{3\sqrt{2}} x = 3\log_{3\sqrt{2}} \sqrt{3} - \log_{3\sqrt{2}} 3 + \frac{1}{2}\log_{3\sqrt{2}} 2$.

Вычислите.

52.6. а) $5^{2+\log_5 2}$;

б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{0,5+2\log_{\frac{1}{9}} 15}$;

в) $7^{2+\log_7 4}$;

г) $\left(\frac{4}{25}\right)^{0,25+2\log_{\frac{4}{25}} 2,5}$.

52.7. а) $\sqrt[4]{125^{\log_5 2} + 27^{\log_3 2}}$;

б) $\sqrt[10]{16^{\log_2 3} - 7^{4\log_7 2 + \log_7 5}}$.

52.8. а) $\sqrt[3]{9}\left(\log_2 4{,}5 + \log_2 \frac{64}{9}\right)^{\frac{1}{3}\log_5 3}$;

б) $\sqrt[5]{16}\left(\log_3 7 + \log_3 \frac{48}{7} - \log_3 \frac{16}{9}\right)^{0,2\log_3 2}$.

52.9. а) $\dfrac{\frac{1}{2}\log_5 64 - 2\log_5 2}{\log_5 2}$;

б) $\dfrac{\log_{12} 9 + 2\log_{12} 6}{\frac{1}{3}\log_{12} 27 + \log_{12} 6}$;

в) $\dfrac{\log_2^2 12 + \log_2 12 \cdot \log_2 6 - 2\log_2^2 6}{\log_2 12 + 2\log_2 6}$;

г) $\dfrac{\log_{0,7} 3}{\log_{0,7} 45 - \frac{1}{2}\log_{0,7} 225}$;

д) $\dfrac{\frac{4}{3}\log_{15} 8 + 2\log_{15} 3}{\log_{15} 24 - \frac{1}{4}\log_{15} 16}$;

е) $\dfrac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 + \log_3 2 \cdot \log_3 18}{2\log_3 2 - \log_3 18}$.

52.10. Найдите:

а) $\log_3 16$, если $\log_3 2 = a$;

б) $\log_{0,5} 10$, если $\log_{0,5} 5 = m$;

в) $\log_5 81$, если $\log_5 3 = b$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} 12$, если $\log_{\frac{1}{3}} 4 = c$.

52.11. Вычислите, если возможно:

а) $\log_3\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + \log_3\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\log_{0,5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right) + \log_{0,5}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\log_2\left(2\cos\frac{\pi}{12}\right) + \log_2\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}\right) + \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}\right)$.

52.12. Известно, что $\log_3 2 = a$ и $\log_3 5 = b$. Выразите через a и b:

а) $\log_3 10$; в) $\log_3 200$; д) $\log_3 \frac{20}{3}$;

б) $\log_3 20$; г) $\log_3 300$; е) $\log_3 0{,}01$.

52.13. Известно, что $\log_{\frac{1}{6}} 4 = p$ и $\log_{\frac{1}{6}} 7 = q$. Выразите через p и q:

а) $\log_{\frac{1}{6}} 196$; в) $\log_{\frac{1}{6}} 14$; д) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{24}{7}$;

б) $\log_{\frac{1}{6}} 28$; г) $\log_{\frac{1}{6}} 98$; е) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{3}{14}$.

Решите уравнение.

52.14. а) $\log_5 4x = \log_5 48 + \log_5 3$;

б) $\log_{\sqrt{21}} x^2 = \log_{\sqrt{21}} 2 + \log_{\sqrt{21}} 8$;

в) $\log_6 5x = \log_6 120 - \log_6 3$;

г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^3 = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3 + 2\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$.

52.15. а) $\log_x 3 + \log_x 27 = 2$; в) $\log_x 11 + \log_x 44 = -1$;

б) $\log_x 3\sqrt{3} - 2\log_x \sqrt{3} = -\frac{1}{2}$; г) $\log_x \sqrt{7} - \log_x 7\sqrt{7} = \frac{1}{2}$.

52.16. Постройте график функции:

а) $y = \log_{0,5} 8x$; в) $y = \log_{\frac{1}{3}} x^2$; д) $y = \log_3 \frac{x}{9}$;

б) $y = \log_3 9x$; г) $y = \log_2 4x$; е) $y = \log_4 \frac{1}{x}$.

52.17. а) Известно, что $x^2 + y^2 = 34xy$, $x > 0$, $y > 0$, $x - y > 0$. Докажите, что

$$\ln \frac{x-y}{4} = \frac{\ln x + \ln 2y}{2}.$$

б) Известно, что $4x^2 + y^2 = 14xy$, $x > 0$, $y > 0$. Докажите, что

$$\ln \frac{2x+y}{3} = \frac{\ln 2x + \ln y}{2}.$$

52.18. Сравните числа a и b:

а) $a = \log_2 10$, $b = \log_{10} 4000$;

б) $a = \log_3 10$, $b = \log_{10} 300$;

в) $a = \log_5 15$, $b = \log_3 5$;

г) $a = \log_2 6$, $b = 2\log_6 12$.

Упражнения для повторения

Решите уравнение.

52.19. а) $\sqrt{2x-6\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{6x-2\sqrt{15}-4}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$;

в) $\sqrt{2x-6\sqrt{7}}=\sqrt{7}-3$;

г) $\sqrt{5x+4\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2$;

д) $\sqrt{4\sqrt{3}-6x}=\sqrt{3}-2$;

е) $\sqrt{3x-4\sqrt{10}+1}=2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

52.20. а) $\sqrt{x+1}=x-11$;

б) $\sqrt{x}+2=\sqrt{x+4}$;

в) $\sqrt{x+1}+3{,}5=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$;

г) $\sqrt{2x-3}=\dfrac{6}{\sqrt{2x-3}}-5$;

д) $\sqrt{x}+\sqrt{25-x}=5$;

е) $\sqrt{x+1}+1{,}7=\dfrac{3}{5\sqrt{x+1}}$.

52.21. Постройте график уравнения:

а) $(\log_3 x-y)(3x-y)=0$;

б) $\left(\log_{\frac{1}{3}} x-y\right)\left(y-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right)=0$.

52.22. Решите уравнение и укажите его корни на заданном промежутке:

а) $\sqrt{2}\sin 3x=\sin x+\sin 5x,\ x\in\left[-\dfrac{7\pi}{2};-\dfrac{5\pi}{2}\right]$;

б) $\cos 9x+\cos 5x=\cos 7x+\cos 3x,\ x\in\left[3\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

§ 53. Десятичные логарифмы

Среди всех показательных функций $y=a^x$ мы выделили экспоненту $y=e^x$, а среди всех логарифмов $\log_a x$ выделили натуральный логарифм $\ln x=\log_e x$. На любом калькуляторе, предназначенном для серьёзных расчётов, есть кнопки операций e^x и ln. Но есть и кнопка lg, отвечающая за ещё одну операцию логарифмирования — за логарифмирование по основанию 10.

Логарифм по основанию 10 называют *десятичным логарифмом*, причём вместо записи $\log_{10} x$ используют более экономную запись $\lg x$. В недалёком прошлом десятичным логарифмам отдавали предпо-

чтение; опираясь на особенности принятой десятичной системы счисления, составляли весьма подробные таблицы десятичных логарифмов, наносили значения логарифмов на шкалы специальных логарифмических линеек. Теперь приоритетное значение десятичных логарифмов утрачено, но тем не менее некоторый интерес они представляют.

В курсе алгебры 8 класса мы ввели понятие *стандартного вида* положительного числа x — это запись числа x в виде $a \cdot 10^m$, где $1 \leqslant a < 10$, а m — целое число, которое называют *порядком числа* a. Например, $5687 = 5{,}687 \cdot 10^3$; порядок числа 5687 равен трём.

Найдём десятичный логарифм числа x, записанного в стандартном виде $x = a \cdot 10^m$:

$$\lg x = \lg(a \cdot 10^m) = \lg a + \lg 10^m = m + \lg a.$$

Проанализируем полученный результат. По условию $1 \leqslant a < 10$, а m — целое число. Поскольку логарифмическая функция $y = \lg x$ возрастает (основание логарифма 10 больше 1), из неравенства $1 \leqslant a < 10$ следует неравенство $\lg 1 \leqslant \lg a < \lg 10$, т. е. $0 \leqslant \lg a < 1$. Таким образом, нам удалось представить число $\lg x$ в виде суммы целого числа m и числа $\lg a$, принадлежащего полуинтервалу $[0; 1)$. Целое число m называют *характеристикой десятичного логарифма числа* x, а число $\lg a$ из полуинтервала $[0; 1)$ называют *мантиссой десятичного логарифма числа* x.

Пример 1 а) Вычислить: $\lg 70$, $\lg 700$, $\lg 700\ 000$, $\lg 0{,}007$, если известно, что $\lg 7 \approx 0{,}8451$; б) найти характеристику и мантиссу числа: $\lg 7$, $\lg 70$, $\lg 700$, $\lg 700\ 000$, $\lg 0{,}07$.

Решение. а) Имеем:

$$\lg 70 = \lg(7 \cdot 10) = \lg 7 + \lg 10 \approx 0{,}8451 + 1 = 1{,}8451;$$
$$\lg 700 = \lg(7 \cdot 10^2) = \lg 7 + \lg 10^2 \approx 0{,}8451 + 2 = 2{,}8451;$$
$$\lg 700\ 000 = \lg(7 \cdot 10^5) = \lg 7 + \lg 10^5 \approx 0{,}8451 + 5 = 5{,}8451;$$
$$\lg 0{,}007 = \lg(7 \cdot 10^{-3}) = \lg 7 + \lg 10^{-3} \approx 0{,}8451 - 3 = -2{,}1549.$$

б)

Число	$\lg 7$	$\lg 70$	$\lg 700$	$\lg 700\ 000$	$\lg 0{,}07$
Характеристика	0	1	2	5	–2
Мантисса	0,8451	0,8451	0,8451	0,8451	0,8451

Этот пример показывает, что достаточно составить таблицу десятичных логарифмов чисел, заключённых в промежутке $[1; 10)$, что-

бы с её помощью и с помощью стандартного вида положительного числа вычислять десятичные логарифмы любых положительных чисел.

Пример 2 Известно, что $\lg 7 \approx 0{,}8451$. Сколько цифр содержит число 7^{100}?

Решение. Вычислим десятичный логарифм числа 7^{100}:

$$\lg 7^{100} = 100 \cdot \lg 7 \approx 100 \cdot 0{,}8451 = 84{,}51.$$

Характеристика логарифма равна 84, значит, порядок числа 7^{100} равен 84, а потому в этом числе 85 цифр.

Ответ: 85.

Упражнения

53.1. Вычислите:

а) $\lg 100$; в) $\lg \sqrt[3]{0{,}1}$; д) $\lg \dfrac{1}{10\sqrt{10}}$;

б) $\lg 0{,}01$; г) $\lg 10\,000$; е) $\lg 0{,}1\sqrt[4]{10}$.

53.2. Решите уравнение:

а) $\lg x = \log_4 32 - \log_4 2$;

б) $\lg x = \log_{0,1} 10 + \log_{0,1} 0{,}01$;

в) $\lg^3 x = 10 \cdot \log_{\frac{1}{5}} 0{,}008 - \log_{0,5} \dfrac{1}{8}$;

г) $\lg x = \log_9 27 - \log_9 3$;

д) $\lg x = \log_{0,2} 0{,}04 + \log_{0,2} 5$;

е) $\lg^2 x = \log_6 \dfrac{16}{9} + 3\log_6 9$.

53.3. Решите неравенство:

а) $\lg x \leqslant 0$; в) $\lg(x-1) > 0$; д) $\lg 2x > 0$;

б) $\lg x \geqslant 0$; г) $\lg(x+2) < 0$; е) $\lg \dfrac{x}{3} \leqslant 0$.

53.4. Найдите характеристику десятичного логарифма:

а) $\lg 5{,}4321$; в) $\lg 0{,}05432$; д) $\lg 504{,}321$;

б) $\lg 4{,}5321$; г) $\lg 0{,}00543$; е) $\lg 54321{,}21$.

53.5. По таблицам десятичных логарифмов можно найти, что $\lg 6 = 0{,}7782$. Найдите десятичный логарифм числа a, записанного в стандартном виде:

а) $a = 6 \cdot 10^2$; в) $a = 6 \cdot 10^{-3}$; д) $a = 6 \cdot 10^5$;

б) $a = 6 \cdot 10^3$; г) $a = 6 \cdot 10^{-2}$; е) $a = 6 \cdot 10^6$.

53.6. Постройте график функции:

а) $y = \lg(x - 2) + 1$; в) $y = 2\lg x$; д) $y = \lg \frac{1}{|x|}$;

б) $y = \lg(x + 1) - 2$; г) $y = \frac{1}{2}\lg x$; е) $y = \lg|x|$.

Упражнения для повторения

53.7. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha} + \sin\beta\cos\alpha$ при $\alpha = 260°$, $\beta = 250°$;

б) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} + \sin\alpha\sin\beta$ при $\alpha = 770°$, $\beta = 650°$.

53.8. Сравните $\frac{\pi}{4}$ и t, если $0 < t < \frac{\pi}{2}$ и выполняется равенство:

а) $\sin t = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; б) $\cos t = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$.

53.9. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^2b^7} : \sqrt{b}$; в) $\sqrt{b^3} \cdot \sqrt[3]{a^5b^2} : \sqrt{a^9}$;

б) $\left(\sqrt{a^5}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{a^7b^3} : \left(\sqrt{b}\right)^{\frac{3}{4}}$; г) $\left(\sqrt{a^3}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[4]{a^9b^5} : \left(\sqrt{b}\right)^{0,5}$.

53.10. а) Областной музыкальный конкурс юных талантов проводится 3 дня. Всего заявлено 40 выступлений от разных музыкальных школ области. Конкурсант от музыкальной школы № 1 участвует в конкурсе. В первый день запланировано 16 выступлений, остальные распределены поровну на два дня. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление конкурсанта от музыкальной школы № 1 состоится в третий день конкурса?

б) На научном семинаре принимают участие 6 учёных из Москвы, 5 из Санкт-Петербурга, 3 из Казани, 4 из Новосибирска и 2 из Красноярска. Каждый из них делает на секции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что последним будет выступать учёный из Новосибирска.

§ 54. Логарифмические уравнения

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, и уравнения, сводящиеся к этому виду. В основе решения логарифмических уравнений лежит следующая теорема.

Теорема. Если $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Доказательство. *Первый шаг.* Пусть $x = b$ — корень уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),$$

т. е. имеет место числовое равенство $\log_a f(b) = \log_a g(b)$. Положим для удобства рассуждений, что $f(b) = m$, $g(b) = p$. Поскольку логарифмическая функция $y = \log_a x$ монотонна, из равенства $\log_a m = \log_a p$ следует равенство $m = p$, т. е. $f(b) = g(b)$. Это значит, что $x = b$ — корень уравнения $f(x) = g(x)$.

Второй шаг. Пусть $x = c$ — корень уравнения $f(x) = g(x)$, т. е. имеет место числовое равенство $f(c) = g(c)$. По условию $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. Значит, в частности, $f(c) > 0$, $g(c) > 0$. Из равенства положительных чисел $f(c)$, $g(c)$ следует равенство логарифмов этих чисел: $\log_a f(c) = \log_a g(c)$. Это значит, что $x = c$ — корень уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Итак, множества корней уравнений $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ и $f(x) = g(x)$ совпадают, т. е. уравнения равносильны, что и требовалось доказать.

На практике советуем поступать так: заменить уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ уравнением $f(x) = g(x)$, решить это уравнение и проверить все найденные его корни по условиям $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$ определя-

ющим область допустимых значений переменной (ОДЗ). Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые удовлетворяют этой системе неравенств, являются корнями исходного логарифмического уравнения. Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые не удовлетворяют этой системе неравенств, являются *посторонними корнями* для исходного логарифмического уравнения.

Пример 1 Решить уравнение $\ln(x^2 - 4x - 6) = \ln(4 - x)$.

Решение. Запишем условия, определяющие ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 4x - 6 > 0, \\ 4 - x > 0. \end{cases}$

При этих условиях заданное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 4x - 6 = 4 - x$. Решим это уравнение:

$$x^2 - 3x - 10 = 0,\ x_1 = 5,\ x_2 = -2.$$

Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ. Значение $x = 5$ не удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2 - 4x - 6 > 0, \\ 4 - x > 0, \end{cases}$ при этом достаточно заметить, что $x = 5$ не удовлетворяет второму неравенству системы; итак, $x = 5$ — посторонний корень для заданного уравнения.

Значение $x = -2$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x = -2$ — корень заданного уравнения.

Ответ: -2.

Пример 2 Решить уравнение

$$\log_2(x - 2) + \log_2(2x + 5) - 1 = \log_2(2x - 0{,}5).$$

Решение. Сначала, использовав свойства логарифмов, преобразуем данное уравнение к виду $\log_2 f(x) = \log_2 g(x)$, чтобы можно было воспользоваться доказанной в этом параграфе теоремой. Имеем:

$$\log_2(x - 2) + \log_2(2x + 5) - \log_2 2 = \log_2(2x - 0{,}5);$$

$$\log_2 \frac{(x-2)(2x+5)}{2} = \log_2(2x - 0{,}5);\quad \frac{(x-2)(2x+5)}{2} = 2x - 0{,}5;$$

$$2x^2 + x - 10 = 4x - 1;\quad 2x^2 - 3x - 9 = 0;$$

$$x_1 = 3,\quad x_2 = -1{,}5.$$

Проверка. ОДЗ для исходного уравнения задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 2x + 5 > 0, \\ 2x - 0{,}5 > 0. \end{cases}$$

Число 3 удовлетворяет этой системе, а число $-1{,}5$ не удовлетворяет; значит, $x = -1{,}5$ — посторонний корень.

Проверку можно было сделать по-другому. Поскольку неравенства, входящие в систему, достаточно простые, можно было начать с решения этой системы. Смотрите:

$$\begin{cases} x > 2, \\ x > -2{,}5, \\ x > 0{,}25. \end{cases}$$

Решение системы достаточно очевидно: $x > 2$. Первый из найденных двух корней этому условию удовлетворяет, а второй — нет.

Ответ: 3.

Пример 3 Решить уравнение:

а) $\lg^2 x + 4 = \dfrac{35}{\lg(100x)} + 2\lg x$; б) $\lg^2 x^3 - \lg(0{,}1x^{10}) = 0$.

Решение. а) Заметив, что $\lg(100x) = \lg 100 + \lg x = 2 + \lg x$, мы увидим, что имеет смысл ввести новую переменную $y = \lg x$; тогда заданное уравнение примет существенно более простой вид:

$$y^2 + 4 = \frac{35}{2 + y} + 2y.$$

Решим уравнение относительно новой переменной:

$$y^2 - 2y + 4 = \frac{35}{y + 2};$$
$$(y + 2)(y^2 - 2y + 4) = 35;$$
$$y^3 + 8 = 35;$$
$$y^3 = 27;$$
$$y = 3.$$

Осталось вернуться к старой переменной: $\lg x = 3$, $x = 1000$.

б) Имеем: $\lg^2 x^3 = (\lg x^3)^2 = (3\lg x)^2 = 9\lg^2 x$; $\lg(0{,}1x^{10}) = \lg 0{,}1 + \lg x^{10} = -1 + \lg|x|$.

Но в состав уравнения входит $\lg x^3$, значит, $x > 0$ и, соответственно, $|x| = x$. Эти рассуждения позволяют нам переписать заданное

уравнение в более «приятном» виде: $9\lg^2 x - 10\lg x + 1 = 0$. Решив это квадратное (относительно $\lg x$) уравнение, получим: либо $\lg x = 1$, $x = 10$, либо $\lg x = \frac{1}{9}$, $x = \sqrt[9]{10}$.

Ответ: а) 1000; б) 10, $\sqrt[9]{10}$.

Пример 4 Решить уравнение $x^{2\log_3 x - 3} = 27^3$.

Решение. Здесь применим так называемый *метод логарифмирования*: возьмём от обеих частей уравнения логарифм по основанию 3:

$$\log_3 x^{2\log_3 x - 3} = \log_3 27^3.$$

Зачем мы это сделали, ведь уравнение вроде бы стало даже более громоздким? Сейчас увидите.

Известно, что $\log_3 x^r = r \log_3 x$; значит,

$$\log_3 x^{2\log_3 x - 3} = (2\log_3 x - 3)\log_3 x = 2\log_3^2 x - 3\log_3 x .$$

Далее,

$$\log_3 27^3 = \log_3 (3^3)^3 = \log_3 3^9 = 9.$$

И в результате мы приходим к уравнению $2\log_3^2 x - 3\log_3 x = 9$, которое без труда решается методом введения новой переменной $y = \log_3 x$:

$$2y^2 - 3y - 9 = 0,$$
$$y_1 = 3, \quad y_2 = -1{,}5.$$

Итак, либо

$$\log_3 x = 3, \quad x = 27;$$

либо

$$\log_3 x = -1{,}5, \quad x = 3^{-1{,}5} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3^3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ: 27, $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Пример 5 Решить уравнение $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Решение. Вроде бы всё просто: задача сводится к решению уравнения $x^2 - 1 = 5 - x$, откуда находим два корня: $x = 2$, $x = -3$. Но те-

перь следует сделать проверку, поскольку область определения уравнения задаётся следующей смешанной системой:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1. \end{cases}$$

Значение $x = 2$ удовлетворяет этой системе, а значение $x = -3$ не удовлетворяет (конкретнее: это значение не удовлетворяет условию $x + 4 \neq 1$).

Ответ: 2.

Пример 6* Решить уравнение $\log_3(8 + 2x - x^2) = 2^{x-1} + 2^{1-x}$.

Решение. Поработаем с правой частью уравнения:

$2^{x-1} + 2^{1-x} = 2^{x-1} + \dfrac{1}{2^{x-1}}$. Положим $a = 2^{x-1}$ и рассмотрим выражение $a + \dfrac{1}{a}$, где $a > 0$. Докажем, что $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$. Имеем: $a + \dfrac{1}{a} - 2 = \dfrac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \dfrac{(a-1)^2}{a} \geqslant 0$, значит, $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$, т. е. $2^{x-1} + 2^{1-x} \geqslant 2$.

Причём $a + \dfrac{1}{a} = 2$, если $a = 1$; соответственно, $2^{x-1} + 2^{1-x} = 2$, если $x = 1$.

Поработаем с левой частью уравнения:

$$\log_3(8 + 2x - x^2) = \log_3(9 - 1 + 2x - x^2) = \log_3(9 - (x-1)^2) \leqslant \log_3 9 = 2.$$

Итак, $\log_3(8 + 2x - x^2) \leqslant 2$, а равенство достигается при $x = 1$.

Подведём итоги. Мы доказали, что $\log_3(8 + 2x - x^2) \leqslant 2$, а $2^{x-1} + 2^{1-x} \geqslant 2$. Равенство $\log_3(8 + 2x - x^2) = 2^{x-1} + 2^{1-x}$ может иметь место тогда и только тогда, когда и левая, и правая части одновременно обращаются в 2. На наше счастье это как раз и происходит при $x = 1$, т. е. $x = 1$ — единственный корень заданного уравнения.

Ответ: 1.

Выделим четыре основных метода решения логарифмических уравнений.

1) *Метод потенцирования* — переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$. Он основан на теореме, доказанной в начале параграфа. Мы применили этот метод в примерах 1, 2, 5.

2) *Метод введения новой переменной*. Мы применили этот метод при решении примеров 3 и 4.

3) *Метод логарифмирования*. Мы применили этот метод при решении примера 4.

4) *Функционально-графический метод*. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применили этот метод при решении примера 6 и примера 3 из § 51.

Пример 7 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2}\right)^y = \log_{0,5} 0,25, \\ \log_4 y - \log_4 x = \ln e. \end{cases}$$

Решение. Поработаем с первым уравнением системы:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2}\right)^y = \log_{0,5} 0,25; \quad 2^{-x} \cdot 2^{\frac{y}{2}} = 2; \quad 2^{\frac{y}{2}-x} = 2^1; \quad \frac{y}{2} - x = 1;$$

$$y - 2x = 2.$$

Поработаем со вторым уравнением заданной системы:

$$\log_4 y - \log_4 x = \ln e; \quad \log_4 \frac{y}{x} = 1; \quad \frac{y}{x} = 4; \quad y = 4x.$$

Как видите, задача свелась к решению простой системы уравнений $\begin{cases} y - 2x = 2, \\ y = 4x. \end{cases}$

Решив эту систему, получим $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4. \end{cases}$

Проверка. Область допустимых значений переменных в данной системе уравнений такова: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$ Пара (1; 4) этим условиям удовлетворяет.

Ответ: (1; 4).

Упражнения

Решите уравнение.

54.1. а) $\ln(2x - 3) = 0$; в) $\lg(5x + 4) = 3$;
б) $\log_2(3 - 2x) = -1$; г) $\log_5(4x + 0,04) = -2$.

54.2. а) $\log_{6,7}(x^2 - 2x - 14) = 0$; в) $\log_3(2x^2 - x + 17) = 3$;
б) $\log_5(17x - 3x^2 - 5) = 1$; г) $\log_{1,3}(x^2 - 8x + 13) = 0$.

54.3. а) $\log_3(4x - 5) = \log_3(2x + 1)$;

б) $\log_{\frac{7}{12}}(18 - 7x) = \log_{\frac{7}{12}}(22 - 3x)$;

в) $\log_{\sqrt{11}}(0{,}5 - 6x) = \log_{\sqrt{11}}(4{,}5 - 7x)$;

г) $\log_{\frac{1}{2}}(5x + 4) = \log_{\frac{1}{2}}(2x + 7)$.

54.4. а) $\log_{0,3}(x^2 + 8x - 13) = \log_{0,3}(x + 5)$;
б) $\log_4(x^2 + 13x + 31) = \log_4(2x + 1)$;
в) $\ln(2x^2 + 12x - 7) = \ln(4 - 9x)$;
г) $\log_6(x^2 - 2x - 16) = \log_6(x + 2)$.

54.5. а) $\log_5^2 2x + 4\log_5 2x + 3 = 0$;

б) $2\log_{0,2}^2(2x - 1) + 5\log_{0,2}(2x - 1) + 2 = 0$;

в) $3\log_9^2 4x - 7\log_9 4x + 2 = 0$;

г) $\log_7^2(3 - 2x) - \log_7(3 - 2x) - 2 = 0$.

54.6. а) $\ln x = \ln 3 + \ln 11$;

б) $3\log_{\frac{7}{9}} x + \log_{\frac{7}{9}} 3 = \log_{\frac{7}{9}} 24$;

в) $\log_{8,9} x = \log_{8,9} 9 + \log_{8,9} 2$;

г) $2\log_6 x = 1 + \log_6 0{,}6 + \log_6 10$.

54.7. а) $\log_{2,9}(x - 2) + \log_{2,9}(x + 2) = \log_{2,9}(2x - 1)$;

б) $\log_{\sqrt{19}}(x + 2) + \log_{\sqrt{19}}(3x - 5) = \log_{\sqrt{19}}(5 - 3x)$;

в) $\log_{0,5}(x + 9) - 2 = \log_{0,5}(8 - 3x)$;
г) $\log_{7,3}(x + 3) + \log_{7,3}(x - 3) = \log_{7,3}(2x - 1)$.

54.8. а) $\log_{0,5}\left(\log_8 \dfrac{x^2 - 2x}{x - 3}\right) = 0$;

б) $\log_4(\log_2(\log_3(x^2 + 7x + 51))) = \dfrac{1}{2}$.

54.9. а) $\log_{x-2}(2x - 9) = \log_{x-2}(23 - 6x)$;
б) $\log_x^2(x + 2) = 1$;
в) $\log_x^2(x^3 - 1) = \log_x^2(x - 1)$;
г) $\log_{5x-2} 2 + 2\log_{5x-2} x = \log_{5x-2}(x + 1)$.

54.10. а) $\ln x + 4 = \dfrac{9}{\ln \dfrac{x}{e^4}}$; в) $\log_5^2 x + 3\log_5 x + 9 = \dfrac{37}{\log_5 \dfrac{x}{125}}$;

б) $\lg^2 x - \lg x + 1 = \dfrac{28}{\lg 10x}$; г) $\ln x - 3 = \dfrac{16}{\ln e^3 x}$.

54.11. а) $\lg 100x \cdot \lg x = -1$;

б) $2\log_4^2 2x - 3\log_4 8x = 1 - 4\log_4 \dfrac{1}{2x}$;

в) $\log_5 625x \cdot \log_5 x = -4$;

г) $\log_5^2 5x + 4\log_5 5x = 11 - 5\log_5 \dfrac{1}{x}$.

54.12. а) $\log_2 (x+1)^2 + \log_2 \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 6$;

б) $\lg^2 100x + \lg^2 10x = 42\lg \sqrt[3]{x} + 15$;

в) $2\log_5 (x^2 - 10x + 25) - \log_5^2 (5 - x) = 4$;

г) $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \log_x \sqrt{5}$.

54.13. а) $\ln(4 - e^x) = x$; в) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}} (3^{x+2} + 9^x) = -4$;

б) $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x$; г) $\ln(2 + e^x) = 2x$.

54.14. а) $\log_x (4x - 3) = 2$; в) $\log_x (6x - 5) = 2$;
б) $\log_x (5x^2 - 4) = 4$; г) $\log_x (3x^2 + x - 3) = 3$.

54.15. а) $x^{\log_2 x} = 16$; в) $x^{\log_5 x} = 625$;
б) $x^{2\log_{25} x - 1} = 25$; г) $x^{2\log_3 x - 1} = 27$.

54.16. а) $\log_3 x = 4 - x$; в) $\log_5 x = 6 - x$;
б) $\log_{0,2} x = x - 27$; г) $\log_{0,4} x = x - 3{,}5$.

54.17. а) $\log_5 x = \dfrac{7}{x+2}$; в) $\log_2 x = \dfrac{8}{x}$;

б) $\left|\log_2 x\right| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - \dfrac{1}{2}$; г) $\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| = x^2 + 0{,}75$.

54.18. а) $5\log_4 x = 5^{1-4x} - 6$; в) $7\log_{\sqrt{7}} x + 12 = 6^{1-7x} - 3$;

б) $31 + 2^{4-x} = 16\log_2 x$; г) $4^{5x+1} - 12 = 4\log_{0,2} x$.

54.19. а) $\log_5(x(x-11)) + \log_5 \frac{x-11}{x} = 0$;

б) $\lg(2x+1)(x+3) - \lg \frac{x+3}{2x+1} = 4$;

в) $\log_2(x-2)(x+5) + \log_2 \frac{x-2}{x+5} = 2$;

г) $\log_9(x(x+7)) - \log_9 \frac{x}{x+7} = 0$.

54.20. а) $\log_9(3^x + 2x - 20) = x - x\log_9 3$;

б) $0{,}4^{\lg^2 x - 1} = 6{,}25^{-2-\lg x^2}$.

54.21. а) $\log_2(9 - 2^x) = 25^{\log_5 \sqrt{3-x}}$;

б) $\log_x(2x^{x-2} - 1) + 4 = 2x$;

в) $\lg(3^x - 2^{4-x}) = 2 + 0{,}25\lg 16 - 0{,}5x\lg 4$;

г) $\log_9(3^x - 3x + 15) = x - x\log_9 3$.

54.22. а) $1{,}25^{1-\log_2^2 x} = 0{,}64^{2\log_2 2x}$;

б) $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_5 x - 1} = \log_3 243$;

в) $2x^{\lg x} + 3x^{-\lg x} = 5$;

г) $16^{\log_x^2} = \lg 0{,}1 + \log_2 512$.

54.23. а) $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3} = \frac{1}{x}$;

б) $x^{\log_2^2 x^2 - \log_2 2x - 2} + (x+2)^{\log_{(x+2)^2} 4} = 3$.

Решите систему уравнений.

54.24. а) $\begin{cases} \log_3(x+y) = 2, \\ \log_2(4x-y) = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(2x+3y) = -1, \\ \log_{\frac{1}{5}}(7x-4y) = -2. \end{cases}$

54.25. а) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}(3x-4y-2) = -1, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_4(2x-y+7) = 2, \\ x^2 - 6xy - 7y^2 = 0. \end{cases}$

54.26. а) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4, \\ y - x = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \lg 5x + \lg y = 1, \\ y - 4x = 2. \end{cases}$

54.27. а) $\begin{cases} \lg x(\lg x + \lg y) = 2, \\ \lg x - \lg y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 5, \\ \log_3 x + \log_3 y = 7. \end{cases}$

54.28. а) $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{-2y} = \frac{1}{27}, \\ \log_2 2x - \log_2 y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{y} = \frac{1}{2}, \\ \log_4 y - \log_4 x = 1. \end{cases}$

Решите уравнение.

54.29. а) $|\log_3 x^2 - 2| - |\log_3 x - 2| = 2$; б) $\left|\log_2 \frac{3x-1}{2}\right| = \left|\log_2 \frac{5-2x}{2}\right|$.

54.30. а) $3x + (3-x)\log_3 2 = \log_3\left(9 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^x + 2 \cdot 6^x\right) + 1$;

б) $\log_2^2(5-x) + \log_2(x+8)^4 - 4\log_2(x+8)(x^2-10x+25) = 9$.

54.31. а) $\log_{\frac{1}{3}}(3 + |\sin x|) = 2^{|x|} - 2$;

б) $\log_2(3 + 2x - x^2) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{4}$.

54.32. а) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$;

б) $\frac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy} = \log_3(8 + 2y - y^2)$.

Упражнения для повторения

54.33. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arcsin(\log_2 0{,}5)$; в) $\arcsin\left(\log_3 \frac{1}{3}\right)$;

б) $\arccos\left(\log_{3\sqrt{3}} 3\right)$; г) $\arccos\left(\log_{\sqrt{2}} 2\right)$?

54.34. Исследуйте функцию на чётность:

а) $y = \ln|x| + x^2$; в) $y = \cos x + \log_2 x^2$;

б) $y = \frac{\sin x}{\log_3 x}$; г) $y = \frac{\sin x}{\lg|x|}$.

54.35. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$; в) $\sqrt{19 - 6\sqrt{10}} - \sqrt{10}$;

б) $\sqrt{20 - 6\sqrt{11}} - \sqrt{20 + 6\sqrt{11}}$; г) $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} + \sqrt{16 + 6\sqrt{7}}$.

54.36. Решите уравнение:

а) $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$;

б) $\sqrt{\cos 2x - 7\sin x - 1} = 2\cos x$.

§ 55. Логарифмические неравенства

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, и неравенства, сводящиеся к этому виду. В основе решения логарифмических неравенств лежат две теоремы.

Теорема 1. Если $a > 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ (*неравенству того же смысла*).

Доказательство. Доказательство теоремы мы осуществим в два шага. На первом шаге докажем, что каждое частное решение неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ является в то же время частным решением неравенства $f(x) > g(x)$. На втором шаге докажем, что каждое частное решение неравенства $f(x) > g(x)$ является в то же время частным решением неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$. Это и будет означать, что множества частных решений рассматриваемых неравенств совпадают, т. е. что неравенства равносильны.

Первый шаг. Пусть $x = b$ — частное решение неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, т. е. имеет место числовое неравенство $\log_a f(b) > \log_a g(b)$. Положим для удобства рассуждений, что $f(b) = m$, $g(b) = p$. Поскольку логарифмическая функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ возрастает, из неравенства $\log_a m > \log_a p$ следует неравенство $m > p$, т. е. $f(b) > g(b)$. Это значит, что $x = b$ — частное решение неравенства $f(x) > g(x)$.

Второй шаг. Пусть $x = c$ — частное решение неравенства $f(x) > g(x)$, т. е. имеет место числовое неравенство $f(c) > g(c)$. Тогда в силу возрастания функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ выполняется и числовое неравенство $\log_a f(c) > \log_a g(c)$. Это значит, что $x = c$ — частное решение неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Итак, множества частных решений неравенств $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ и $f(x) > g(x)$ совпадают, т. е. неравенства равносильны.

Теорема 2. Если $0 < a < 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$ (*неравенству противоположного смысла*).

Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно. При этом учтите, что логарифмическая функция $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ убывает.

Пример 1 Решить неравенство:

а) $\lg(3x - 5) < \lg(x + 2)$; б) $\log_{0,5}(3x - 5) \leqslant \log_{0,5}(x + 2)$.

Решение. а) Прежде всего надо потребовать выполнения условий $3x - 5 > 0$, $x + 2 > 0$. Тогда по теореме 1 неравенство $\lg(3x - 5) < \lg(x + 2)$ будет равносильно неравенству $3x - 5 < x + 2$. Таким образом, задача сводится к решению системы неравенств $\begin{cases} 3x - 5 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ 3x - 5 < x + 2. \end{cases}$ Решим эту систему: $\begin{cases} x > \frac{5}{3}, \\ x > -2, \\ x < 3,5. \end{cases}$ Обратите внимание: если $x > \frac{5}{3}$, то тем более $x > -2$; это значит, что второе неравенство в системе из трёх неравенств можно опустить. Получим более простую систему $\begin{cases} x > \frac{5}{3}, \\ x < 3,5, \end{cases}$ откуда находим $\frac{5}{3} < x < 3,5$.

б) Здесь тоже надо потребовать выполнения условий $3x - 5 > 0$, $x + 2 > 0$. Тогда по теореме 2 неравенство $\log_{0,5}(3x - 5) \leqslant \log_{0,5}(x + 2)$ будет равносильно неравенству $3x - 5 \geqslant x + 2$. Таким образом, задача сводится к решению системы неравенств $\begin{cases} 3x - 5 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ 3x - 5 \geqslant x + 2. \end{cases}$ Решим эту систему: $\begin{cases} x > \frac{5}{3}, \\ x > -2, \\ x \geqslant 3,5. \end{cases}$ Решение этой системы достаточно очевидно: $x \geqslant 3,5$.

Ответ: а) $\frac{5}{3} < x < 3,5$; б) $x \geqslant 3,5$.

Пример 2 Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2+5x-25) \leqslant -3$.

Решение. Представим -3 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{3}$:

$$-3 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \log_{\frac{1}{3}} 3^3 = \log_{\frac{1}{3}} 27 .$$

Теперь заданное неравенство можем записать в виде

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x^2+5x-25) \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 27 .$$

Потребовав выполнения условия $2x^2 + 5x - 25 > 0$ и воспользовавшись теоремой 2, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2+5x-25>0, \\ 2x^2+5x-25 \geqslant 27 . \end{cases}$$

Первое неравенство этой системы можно опустить, поскольку оно автоматически следует из второго неравенства. Значит, нам остаётся лишь решить неравенство $2x^2 + 5x - 25 \geqslant 27$.

Перепишем его в виде $2x^2 + 5x - 52 \geqslant 0$. Найдём корни квадратного трёхчлена $2x^2 + 5x - 52$: $x_1 = 4$; $x_2 = -6{,}5$.

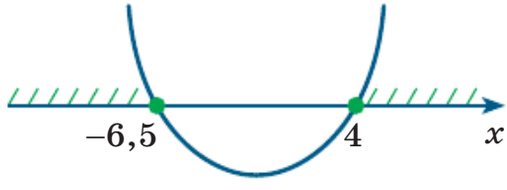


Рис. 191

Графиком функции $y = 2x^2 + 5x - 52$ является парабола с ветвями вверх, пересекающая ось Ox в точках 4 и $-6{,}5$, он представлен (схематически) на рисунке 191. Чертёж помогает нам выбрать промежутки, на которых выполняется неравенство $2x^2 + 5x - 52 \geqslant 0$, — это лучи $(-\infty; -6{,}5]$ и $[4; +\infty)$.

Ответ: $x \leqslant -6{,}5$; $x \geqslant 4$.

Пример 3 Решить неравенство

$$\log_2(x-2) + \log_2(2x+5) - 1 > \log_2(2x-0{,}5).$$

Решение. Сначала, использовав свойства логарифмов, преобразуем данное неравенство к виду $\log_2 f(x) > \log_2 g(x)$, чтобы можно было воспользоваться теоремой 1. Имеем:

$$\log_2(x-2) + \log_2(2x+5) - \log_2 2 > \log_2(2x-0{,}5);$$

$$\log_2 \frac{(x-2)(2x+5)}{2} > \log_2(2x-0{,}5) .$$

Все эти преобразования были выполнены при следующих условиях:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ 2x+5>0, \\ 2x-0{,}5>0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x>2, \\ x>-2{,}5, \\ x>0{,}25, \end{cases}$$

откуда находим: $x > 2$.

При $x > 2$ мы можем воспользоваться теоремой 1 для решения неравенства

$$\log_2 \frac{(x-2)(2x+5)}{2} > \log_2 (2x-0{,}5),$$

получим

$$\frac{(x-2)(2x+5)}{2} > 2x-0{,}5,$$

и далее:

$$2x^2 - 3x - 9 > 0.$$

Корнями квадратного трёхчлена $2x^2 - 3x - 9$ являются числа 3 и $-1{,}5$, а решения неравенства показаны на рисунке 192: $x > 3$; $x < -1{,}5$.

Не забудем и про условие $x > 2$ (нижняя штриховка на рисунке 192). Теперь мы видим, что решением заданного логарифмического неравенства является открытый луч $(3; +\infty)$.

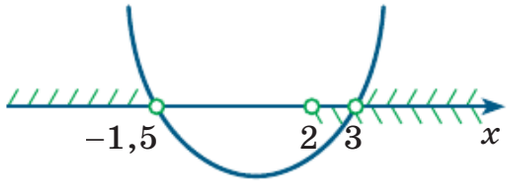


Рис. 192

Ответ: $x > 3$.

Пример 4* Решить неравенство $\log_{x-2}(3x+1) \geqslant \log_{x-2}(2x+5)$.

Решение. Здесь основанием логарифма является не конкретное число, а выражение с переменной $x - 2$, которое может быть как больше, так и меньше единицы. Если $x - 2 > 1$, т. е. $x > 3$, то при решении заданного неравенства следует руководствоваться теоремой 1. Если $0 < x - 2 < 1$, т. е. $2 < x < 3$, то при решении заданного неравенства следует руководствоваться теоремой 2. Значит, нам нужно рассмотреть два случая: 1) $x > 3$; 2) $2 < x < 3$.

1) Если $x > 3$, то, «освобождаясь от логарифмов», следует, согласно теореме 1, сохранить знак исходного неравенства. Это значит, что при $x > 3$ заданное неравенство равносильно системе неравенств

$\begin{cases} x > 3, \\ 3x + 1 > 0, \\ 2x + 5 > 0, \\ 3x + 1 \geqslant 2x + 5. \end{cases}$ Решим эту систему: $\begin{cases} x > 3, \\ x > -\frac{1}{3}, \\ x > -2{,}5, \\ x \geqslant 4. \end{cases}$ Решение этой системы достаточно очевидно: $x \geqslant 4$.

2) Если $2 < x < 3$, то, «освобождаясь от логарифмов», следует, согласно теореме 2, изменить знак исходного неравенства. Это значит, что при $2 < x < 3$ заданное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 2 < x < 3, \\ 3x + 1 > 0, \\ 2x + 5 > 0, \\ 3x + 1 \leqslant 2x + 5. \end{cases}$ Решим эту систему: $\begin{cases} 2 < x < 3, \\ x > -\frac{1}{3}, \\ x > -2{,}5, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$ Решение этой системы таково: $2 < x < 3$.

Ответ: $2 < x < 3$; $x \geqslant 4$.

Пример 5 Решить неравенство $x^{\lg x} < 10$.

Решение. Поскольку $y = \lg x$ — возрастающая функция, мы имеем право взять от обеих частей заданного неравенства десятичный логарифм, сохранив знак неравенства. Получим $\lg (x^{\lg x}) < \lg 10$ и далее:

$$\lg x \cdot \lg x < 1,$$
$$\lg^2 x - 1 < 0,$$
$$(\lg x - 1)(\lg x + 1) < 0,$$
$$-1 < \lg x < 1,$$
$$\lg 0{,}1 < \lg x < \lg 10,$$
$$0{,}1 < x < 10.$$

Ответ: $0{,}1 < x < 10$.

Упражнения

Решите неравенство.

55.1. а) $\log_{0,8} x < 2$; в) $\ln x > -5$; д) $\lg x \leqslant 3$;
б) $\log_{0,2} x < -3$; г) $\ln x > 0$; е) $\lg x \leqslant 4$.

55.2. а) $\log_6(5x + 1) < 2$; в) $\log_7(9x + 100) > 3$;
б) $\log_{0,5}\left(\frac{x}{3} - 4\right) > -3$; г) $\log_{0,1}(11x - 21) \geqslant -2$.

55.3. а) $\log_2(x^2 - 7x) < 3$; в) $\log_3(x^2 + 8x) < 2$;
б) $\log_{0,2}(x^2 - x + 5) > -2$; г) $\log_{0,5}(x^2 + x - 14) < -4$.

55.4. а) $\ln(6x - 3) \geqslant \ln 3 + \ln 5$;
б) $\log_{0,4}(x + 11) > \log_{0,4} 72 - 2\log_{0,4} 3$;
в) $\lg(x^2 + 2x) \leqslant \lg 60 + \lg 25 - 2$;
г) $\log_7(5x - 2) \leqslant \log_7 6 + \log_7 8$.

55.5. а) $\log_{11} x < \log_{11}(6x + 15)$;
б) $\log_{0,35}(3x - 4) > \log_{0,35}(x + 14)$;
в) $\log_{\sqrt{7}}(2x - 11) \geqslant \log_{\sqrt{7}}(16 - 3x)$;
г) $\log_{0,12}(9x - 96) > \log_{0,12} x$.

55.6. а) $\log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}}(2x - 1) \leqslant -2$;
б) $\lg(3x - 14) - \lg x < 1$;
в) $\log_{\sqrt{2}}(7 - x) + \log_{\sqrt{2}} x \geqslant 2 + \log_{\sqrt{2}} 3$;
г) $\log_{\frac{1}{7}} x + \log_{\frac{1}{7}}(2x - 5) \geqslant -1$.

55.7. а) $\log_\pi(x + 27) - \log_\pi(16 - 2x) < \log_\pi x$;
б) $\log_{0,3}(x^3 + 8) - \log_{0,3}(x^2 + 4x + 4) \leqslant \log_{0,3}(x + 58)$.

55.8. а) $\log_3^2 x > 3\log_3 x - 2$; в) $\log_4^2 x < 4 + 3\log_4 x$;
б) $\log_{0,2}^2 x - 2\log_{0,2} x < 3$; г) $\log_{0,3}^2 x - \log_{0,3} x > 2$.

55.9. а) $\log_2^2 x^2 > 15\log_2 x + 4$; в) $\log^2_{\sqrt{11}} x^2 - 9\log_{\sqrt{11}} x + 2 \leqslant 0$;
б) $\log^2_{\frac{1}{3}} x^2 \geqslant 7\log_{\frac{1}{3}} x - 3$; г) $\log_3^2 x^2 + 13\log_3 x + 3 \geqslant 0$.

55.10. а) $\log_2 x < 6 - x$; в) $\log_4 x \geqslant 5 - x$;
б) $\log_4 x \geqslant \dfrac{7}{x + 3}$; г) $\log_2 x \leqslant \dfrac{1}{x} - 3$.

Найдите количество целочисленных решений неравенства.

55.11. а) $\log_{20}(x^2 - x) < 1$; в) $\log_{11}(x^2 + 10x) \leqslant 1$;
б) $\log_{0,3}(7x - x^2 - 5) \leqslant 0$; г) $\log_{0,5}(x^2 - 8x + 7) \geqslant 0$.

55.12. а) $\dfrac{2}{\sqrt{\log_3 x}} \geqslant 1$; б) $\sqrt{\dfrac{4}{\log_4 x}} > 1$;

в) $\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} \geqslant 0{,}5$;

г) $\frac{1}{\sqrt{\lg x}} \geqslant 1$;

д) $\log_2(x^2 - 7x + 18) \leqslant 3$;

е) $\log_2(10 - x) > \log_{0,5} x - 10$.

55.13. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\lg(x^2 - 6x + 6)}$;

б) $y = \sqrt{\frac{x-5}{\log_{0,5}(x-2)}}$;

в) $y = \sqrt{\log_3(6x^2 + x - 1)}$;

г) $y = \sqrt{\frac{9-x}{\log_5(x-4)}}$.

Решите систему неравенств.

55.14. а) $\begin{cases} \log_2(5x - 12) < \log_2(2x + 9), \\ \log_6(7x - 4) \geqslant \log_6(5x + 2); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_7(x^2 - 10x + 28) \geqslant \log_7(3x - 14), \\ \log_{0,1}(3x + 1) \leqslant \log_{0,1}(x - 9); \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_3(11x - 13) > \log_3(8x + 3), \\ \log_{12}(4x - 1) \leqslant \log_{12}(x + 2); \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_{0,5}(x^2 - 7x + 19) \leqslant \log_{0,5}(4x - 11), \\ \ln(4x - 11) \geqslant \ln(3x - 13). \end{cases}$

55.15. а) $\begin{cases} \log_{0,1}(x^2 - 12) < \log_{0,1}(-x), \\ 2^{x^2 - 28} \leqslant \frac{1}{8}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{0,2}(x^2 + 3) \geqslant \log_{0,2} 4x, \\ 3^{x^2 - 5x - 4} < 9. \end{cases}$

Решите неравенство.

55.16. а) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2 - 5x + 8)} \leqslant 2{,}5$;

б) $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$;

в) $2{,}25^{\log_2(x^2 - 3x - 10)} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 \frac{1}{x^2 + 4x + 4}}$;

г) $2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2{,}5$.

55.17. а) $0,2^{6-\frac{3}{\log_4 x}} > \sqrt[3]{0,008^{2\log_4 x-1}}$;

б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x) \geqslant -2$;

в) $\log_3(3^x-1)-\log_3(3^{x+2}-9) < -3$;

г) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(2^{x+2}-4^x) \geqslant -2$.

55.18. а) $\log_{\sqrt{2}}(5^x-1)\cdot\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x-1} > 2$;

б) $2^{\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}2,5x} > 1$;

в) $x^{\log_2 x}+16x^{-\log_2 x} < 17$;

г) $\log_{\frac{2}{2}}^4 x-\log_{\frac{2}{2}}^2\frac{x^3}{8}+9\log_2\frac{32}{x^2} < 4\log_{\frac{2}{2}}^2 x$.

55.19. а) $0,5^{\log_3(\log_{0,2}(x^2-0,8))} \leqslant 1$; б) $0,3^{\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}\right)} < 1$.

55.20. а) $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1) < 1$; б) $\log_2(1-2\log_9 x) < 1$.

55.21. а) $\log_5(\log_3(\log_2(4^x-3\cdot 2^x+10))) > 0$;

б) $\log_{0,5}(\log_2(\log_{x-1}9)) > 0$.

55.22. а) $\frac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x} < 0$; б) $\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)} < 0$.

55.23. а) $\frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x} < 0$; б) $\frac{7x-3-2x^2}{\log_2|x-1|} > 0$.

55.24. $|x-1|^{\log_2(4-x)} > |x-1|^{\log_2(1+x)}$.

55.25. а) $\log_x(x-1) \geqslant 2$;

б) $\log_{x-2}(x+2) > 1$;

в) $\log_x\frac{x+3}{x-1} > 1$;

г) $\log_x(5-x) \geqslant 1$;

д) $\log_{x+1}(x+3) < 1$;

е) $\log_x\frac{6-x}{x-2} \leqslant 1$.

55.26. а) $\log_x 5\sqrt{5}-1,25 > \log_x^2\sqrt{5}$; б) $\log_x(\log_2(4^x-12)) \leqslant 1$.

55.27. а) $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$;

б) $\log_{x+2,5}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 < 0$;

в) $\log_{x-3}^2 729 > 3$;

г) $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4) > 1$.

Упражнения для повторения

55.28. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} (x+2)^2 - 1, \text{ если } x < -1, \\ \sqrt[4]{x+1}, \text{ если } x \geqslant -1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -(x-1)^2 + 1, \text{ если } x < 2, \\ \sqrt[3]{x-2}, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

55.29. Постройте график функции:

а) $y = 2\sin 0{,}5x$;

б) $y = 3\cos\left(-\frac{x}{4}\right)$;

в) $y = -\frac{3}{4}\cos 2x$;

г) $y = 3\cos\frac{x}{3}$;

д) $y = \frac{2}{3}\sin(-0{,}4x)$;

е) $y = -2\sin 3x$.

55.30. а) При каких значениях параметра p уравнение $\frac{\cos x}{1-\sin x} = 0$ на промежутке $[0; p]$ имеет три корня?

б) При каких значениях параметра p уравнение $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = 0$ на промежутке $[0; p]$ имеет два корня?

55.31. а) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $2^{2x+1} - 2^{x+2} = p$ имеет два различных корня.

б) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $4^x = p + 4 \cdot 2^x$ имеет единственный корень.

§ 56. Формулы перехода к новому основанию логарифма

Иногда возникает необходимость перейти от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию. Как быть в таких случаях? Об этом и пойдёт речь в настоящем параграфе.

Теорема. Если a, b, c — положительные числа, причём $a \neq 1$, $c \neq 1$, то имеет место равенство

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \qquad (1)$$

Например, $\log_5 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 5}$; $\log_7 10 = \frac{\lg 10}{\lg 7} = \frac{1}{\lg 7}$.

Доказательство. Пусть $\log_a b = x$, $\log_c b = y$, $\log_c a = z$; нам нужно доказать, что x, y, z связаны соотношением $x = \frac{y}{z}$.

Соотношение $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$;
соотношение $\log_c b = y$ означает, что $c^y = b$;
соотношение $\log_c a = z$ означает, что $c^z = a$.

А теперь смотрите: $a^x = b$ и $c^y = b$; значит, $a^x = c^y$. Но $a = c^z$; значит, $(c^z)^x = c^y$. Таким образом, $c^{zx} = c^y$, откуда следует, что $zx = y$, $x = \frac{y}{z}$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если a, b — положительные числа, причём $a \neq 1$, $b \neq 1$, то имеет место равенство

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \qquad (2)$$

В самом деле, если в формуле (1) положить $c = b$, то получим:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Следствие 2. Если a, b — положительные числа, причём $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ имеет место равенство

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r. \qquad (3)$$

В самом деле, воспользовавшись формулой (1), перейдём от $\log_{a^r} b^r$ к логарифму по основанию a:

$$\log_{a^r} b^r = \frac{\log_a b^r}{\log_a a^r} = \frac{r\log_a b}{r\log_a a} = \log_a b.$$

Вот, например, какие преобразования с $\log_5 2$ можно выполнить, руководствуясь формулой (3):

$$\log_5 2 = \log_{5^2} 2^2 = \log_{25} 4; \quad \log_5 2 = \log_{5^{-1}} 2^{-1} = \log_{0,2} 0,5;$$

$$\log_5 2 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}} = \log_{\sqrt{5}} \sqrt{2}.$$

Следствие 3. Если a, b — положительные числа, причём $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ имеет место равенство

$$\log_{a^r} b = \frac{1}{r}\log_a b. \qquad (4)$$

В самом деле, воспользовавшись формулой (1), перейдём от $\log_{a^r} b$ к логарифму по основанию a:

$$\log_{a^r} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^r} = \frac{\log_a b}{r\log_a a} = \frac{1}{r}\log_a b.$$

Приведём примеры использования формулы (4):

$$\log_{16} x = \log_{2^4} x = \frac{1}{4}\log_2 x;$$

$$\log_{\sqrt{10}} x = \log_{10^{\frac{1}{2}}} x = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_{10} x = 2\lg x.$$

Пример 1 Дано: $\ln 2 = a$, $\ln 3 = b$. Доказать, что $\log_4 12 = 1 + \frac{b}{2a}$.

Решение.

$$\log_4 12 = \frac{\ln 12}{\ln 4} = \frac{\ln 4 + \ln 3}{\ln 4} = \frac{2\ln 2 + \ln 3}{2\ln 2} = \frac{2a + b}{2a} = 1 + \frac{b}{2a}.$$

Пример 2 Решить уравнение:

а) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$; б) $\lg x + 1 = 2\log_x 10$;

в) $\log_{\frac{x}{10}} x + \log_{\frac{x}{5}} x = 0$.

Решение. а) Приведём все логарифмы в левой части уравнения к одному и тому же основанию — основанию 3. Для этого воспользуемся формулой (3): $\log_a b = \log_{a^r} b^r$.

Имеем:

$$\log_{\sqrt{3}} x = \log_{\left(\sqrt{3}\right)^2} x^2 = \log_3 x^2;$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} x^{-1} = \log_3 \frac{1}{x}.$$

Теперь заданное уравнение мы можем переписать в виде

$$\log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 \frac{1}{x} = 6,$$

и далее:

$$\log_3\left(x \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 6; \quad \log_3 x^2 = 6; \quad x^2 = 3^6; \quad x = \pm 3^3 = \pm 27.$$

Поскольку переменная x содержится под знаком логарифма (например, $\log_3 x$), она принимает только положительные значения, значит, $x = 27$.

б) В правой части уравнения воспользуемся формулой $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; имеем: $\log_x 10 = \frac{1}{\log_{10} x} = \frac{1}{\lg x}$. Теперь заданное уравнение мы можем переписать в виде

$$\lg x + 1 = \frac{2}{\lg x}.$$

Введём новую переменную $y = \lg x$:

$$y + 1 = \frac{2}{y}; \quad y^2 + y = 2; \quad y^2 + y - 2 = 0;$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -2.$$

Осталось вернуться к переменной x. Из уравнения $\lg x = 1$ находим $x = 10$; из уравнения $\lg x = -2$ находим $x = 10^{-2} = 0{,}01$.

в) Перейдём в обоих логарифмах к основанию 10:

$$\log_{\frac{x}{10}} x = \frac{\lg x}{\lg \frac{x}{10}} = \frac{\lg x}{\lg x - 1}; \quad \log_{\frac{x}{5}} x = \frac{\lg x}{\lg \frac{x}{5}} = \frac{\lg x}{\lg x - \lg 5}.$$

Теперь заданное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\lg x}{\lg x - 1} + \frac{\lg x}{\lg x - \lg 5} = 0.$$

Введём новую переменную $y = \lg x$ и решим уравнение

$$\frac{y}{y-1} + \frac{y}{y - \lg 5} = 0:$$

$$y^2 - y\lg 5 + y^2 - y = 0,$$

$$y(2y - \lg 5 - 1) = 0,$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{\lg 5 + 1}{2} = \frac{1}{2}\lg 50 = \lg\sqrt{50}.$$

Значит, либо $\lg x = 0$, $x = 1$, либо $\lg x = \lg\sqrt{50}$, $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Ответ: а) 27; б) 10; 0,01; в) 1; $5\sqrt{2}$.

Пример 3* Зная, что $\log_6 30 = a$, $\log_{15} 24 = b$, найти $\log_{12} 60$.

Решение. Обратите внимание, что у всех чисел, имеющихся в условии, есть только три простых делителя: 2, 3, 5. Значит, если мы во всех трёх логарифмах перейдём, например, к основанию 2, то в условии будут фигурировать только $\log_2 3$ и $\log_2 5$. Ситуация станет более прозрачной, особенно, если мы введём новые обозначения: $\log_2 3 = x$, $\log_2 5 = y$. Приступим.

$$\log_6 30 = \frac{\log_2 30}{\log_2 6} = \frac{\log_2(2\cdot 3\cdot 5)}{\log_2(2\cdot 3)} = \frac{1 + \log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = \frac{1 + x + y}{1 + x}.$$

По условию $\frac{1 + x + y}{1 + x} = a$.

$$\log_{15} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 15} = \frac{\log_2(2^3\cdot 3)}{\log_2(3\cdot 5)} = \frac{3 + \log_2 3}{\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{3 + x}{x + y}.$$

По условию $\frac{3 + x}{x + y} = b$.

$$\log_{12} 60 = \frac{\log_2 60}{\log_2 12} = \frac{\log_2(2^2\cdot 3\cdot 5)}{\log_2(2^2\cdot 3)} = \frac{2 + \log_2 3 + \log_2 5}{2 + \log_2 3} = \frac{2 + x + y}{2 + x}.$$

Таким образом, перед нами следующая задача: зная, что $\frac{1+x+y}{1+x}=a$, $\frac{3+x}{x+y}=b$, выразить x, y через a, b и полученные выражения подставить в дробь $\frac{2+x+y}{2+x}$.

Решив систему уравнений $\begin{cases}\frac{1+x+y}{1+x}=a,\\ \frac{3+x}{x+y}=b,\end{cases}$ получим:

$$x=\frac{b+3-ab}{ab-1},\quad y=\frac{2a-b-2+ab}{ab-1}.$$

Подставим полученные выражения вместо x и y в дробь $\frac{2+x+y}{2+x}$ и после соответствующих преобразований получим, что $\log_{12}60=\frac{2ab+2a-1}{ab+b+1}$.

Ответ: $\frac{2ab+2a-1}{ab+b+1}$.

Упражнения

56.1. Вычислите:

а) $\log_3\frac{1}{2}+\log_9 4$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}3+\log_8 27$;

в) $\log_{\sqrt{5}}\frac{5}{\sqrt{6}}+\log_5 6$;

г) $\log_{16}\frac{1}{25}+\log_4 5$;

д) $\log_{\frac{1}{3}}4+\log_{27}64$;

е) $\log_{\sqrt{3}}3\sqrt{2}+\log_3\frac{1}{2}$.

56.2. Известно, что $\log_3 5=a$. Найдите:

а) $\log_5 3$; б) $\log_5\frac{1}{3}$; в) $\log_9 25$; г) $\log_9 125$; д) $\log_{27}5$; е) $\log_{0{,}008}9$.

56.3. Сравните числа:

а) $\log_3 7$ и $\log_7 3$;

б) $\log_6 9$ и $\log_9 8$;

в) $\log_{\frac{1}{4}}5$ и $\log_{\frac{1}{16}}2{,}5$;

г) $\log_8 11$ и $\log_{11}8$;

д) $\log_{11}14$ и $\log_{14}13$;

е) $\log_{\frac{1}{5}}3{,}5$ и $\log_{\frac{1}{25}}7$.

Вычислите.

56.4. а) $4^{\log_2 3} + \log_{\sqrt{5}} 3 \cdot \log_3 25$;

б) $\log_3 8 \cdot \log_2 27 - 7^{\log_{49} 36}$;

в) $10^{0,5\lg 16} + 14\log_3 \sqrt{2} \cdot \log_4 81$;

г) $9^{\log_3 5} + \log_{\sqrt{7}} 4 \cdot \log_4 49$;

д) $\log_2 27 \cdot \log_3 16 - 6^{\log_{36} 49}$;

е) $3^{4\log_3 2} + \log_5 \sqrt{2} \cdot \log_4 25$.

56.5. а) $\dfrac{\log_3 135}{\log_{45} 3} - \dfrac{\log_3 5}{\log_{1215} 3}$;

б) $\dfrac{\log_2 56}{\log_{28} 2} - \dfrac{\log_2 7}{\log_{224} 2}$.

56.6. а) $\log_2 9 - \dfrac{2\log_3 6}{\log_3 2}$;

б) $\dfrac{2\log_5 2}{\log_5 3} - \log_3 108$;

в) $\log_5 4 - \dfrac{2\log_3 10}{\log_3 5}$;

г) $10^{0,5\lg 16} + 14\log_3 \sqrt{2} \cdot \log_4 81$;

д) $5^{\frac{1}{3}\log_5 27} + 2\log_2 \sqrt{3} \cdot \log_9 16$;

е) $7^{0,25\log_7 16} + 3\log_3 \sqrt{5} \cdot \log_{25} 81$.

56.7. а) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{\log_{\frac{125}{64}} 3}$;

б) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$;

в) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$;

г) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\log_{\frac{81}{16}} 5}$;

д) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$;

е) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

56.8. а) $\log_{100} 40$, если $\log_2 5 = a$;

б) $\log_3 5$, если $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$;

в) $\log_2 360$, если $\log_3 20 = a$, $\log_9 225 = b$;

г) $\log_6 16$, если $\log_{12} 27 = a$;

д) $\log_5 3{,}38$, если $\lg 2 = a$, $\lg 13 = b$;

е) $\log_{275} 60$, если $\log_{144} 25 = a$, $\log_{12} 11 = b$.

56.9. Известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Найдите:

а) $\log_9 45$;

б) $\log_{15} 75$;

в) $\log_{0,2} 3$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} 5$;

д) $\log_{\frac{1}{15}} 25$;

е) $\log_{25} 15$.

Решите уравнение.

56.10. а) $\log_9 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_3 x = 7$;

б) $\log_{\sqrt{5}} x + \log_5 x + \log_{\frac{1}{5}} x = 9$.

56.11. а) $\log_3^2 x - \dfrac{7}{\log_x 3} + 6 = 0$;

б) $\log_5 x + 1 = 2\log_x 5$;

в) $2\log_x 2 + \log_2 x = 3$;

г) $2\log_4^2 x - \dfrac{5}{\log_x 4} + 3 = 0$;

д) $\log_6 x - 4 = 5\log_x 6$;

е) $9\log_x 8 + \log_8 x = 10$.

56.12. а) $\log_9(x + 20) \cdot \log_x 3 = 1$;

б) $1 + \log_x 5 \cdot \log_7 x = \log_5 35 \cdot \log_x 5$;

в) $\log_{2x+1}(5 + 8x - 4x^2) = 4 - \log_{5-2x}(1 + 4x + 4x^2)$;

г) $\log_{\frac{1}{4}}(x + 12) \cdot \log_x 0{,}5 = 1$;

д) $2 + \log_x 3 \cdot \log_5 x = \log_3 75 \cdot \log_x 3$;

е) $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$.

56.13. Решите неравенство:

а) $\log_{25} x^2 + \log_5^2(-x) < 2$;

б) $\log_{\frac{1}{9}} x^2 + \log_{\frac{1}{3}}^2(-x) < 6$.

56.14. Докажите тождество:

а) $\log_{ab} ak = \dfrac{\log_b a + \log_b k}{1 + \log_b k}$,

$a > 0,\ k > 0,\ b > 0,\ b \neq 1,\ ab \neq 1$;

б) $\dfrac{1}{\log_a k} + \dfrac{1}{\log_{a^2} k} + \dfrac{1}{\log_{a^3} k} + \dfrac{1}{\log_{a^4} k} + \dfrac{1}{\log_{a^5} k} = 15\log_k a$,

$a > 0,\ a \neq 1,\ k > 0,\ k \neq 1$.

56.15. Упростите выражение:

а) $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$;

б) $\dfrac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1)\log_a \dfrac{a}{b}}$.

Решите уравнение.

56.16. а) $\log_{x+\frac{1}{9}} 2 = \log_x 4$;

б) $\log_{x+1}(x-0{,}5) = \log_{x-0{,}5}(x+1)$;

в) $x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4$;

г) $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0{,}4$;

д) $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2$;

е) $1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\lg x^2 - 1)\log_x 10$.

56.17. а) $x^2 \log_{36}(5x^2 - 2x - 3) - x \log_{\frac{1}{6}} \sqrt{5x^2 - 2x - 3} = x^2 + x$;

б) $x^2 \log_2 \frac{x+3}{10} - x^2 \log_{0,5}(3x+2) = x^2 - 4 + 2\log_{\sqrt{2}} \frac{3x^2 + 11x + 6}{10}$.

56.18. Решите неравенство:

а) $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$;

б) $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$;

в) $\log_2 x \cdot \log_3 2x + \log_3 x \cdot \log_2 3x \geqslant 0$;

г) $\log_x (x^3 + 1) \cdot \log_{x+1} x > 2$.

Упражнения для повторения

56.19. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \cos t \leqslant 0{,}5, \\ \sin t \geqslant -0{,}5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \cos t \geqslant 0{,}3, \\ \sin t \leqslant -0{,}3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos t \geqslant -0{,}4, \\ \sin t \leqslant 0{,}4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \cos t \leqslant -0{,}7, \\ \sin t \geqslant -0{,}7. \end{cases}$

56.20. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{0{,}25^x - 5 \cdot 0{,}5^{x+1} + 1}$; в) $y = \sqrt{1 - 2^x - 2^{2x+1}}$;

б) $y = \sqrt{2^x - 3^x} + \sqrt{x^2 - 1}$; г) $y = 3\sqrt{5^x - 2^x} + 3^{\sqrt{2x-3}}$.

56.21. а) Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1 + 12t - 2t^2$, где h — высота в метрах, t — время

в секундах, прошедшее с момента броска. Через сколько секунд от броска мяч поднимется на высоту 17 м?

б) Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 32$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 4$ м/с^2. За t с после начала торможения он прошёл путь $s(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Через сколько секунд от начала торможения автомобиль проедет 120 м?

56.22. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sin 2x, \text{ если } 0 < x < \pi, \\ (x-\pi)^3, \text{ если } x \geqslant \pi. \end{cases}$

а) Постройте график функции $y = f(x)$.

б) Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

в) Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$.

г) Найдите, при каких значениях параметра p уравнение $f(x) = p$ имеет два корня.

Итак, в главе 6

Построили график и изучили свойства показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Узнали, что такое логарифм числа b по основанию a.

Построили график и изучили свойства логарифмической функции $y = \log_a x (a > 0,\ a \neq 1)$.

Получили целый ряд соотношений, связанных с логарифмами:

$$\log_a a = 1; \quad \log_a 1 = 0; \quad a^{\log_a b} = b;$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc;$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c};$$

$$\log_a b^r = r\log_a b;$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$$

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r.$$

Узнали, что такое число e и что такое натуральный логарифм $\ln b$.

Узнали, что такое десятичный логарифм $\lg b$, что такое характеристика и мантисса десятичного логарифма.

Научились решать:

— показательные уравнения, показательные неравенства;

— логарифмические уравнения, логарифмические неравенства.

Вопросы

1. Какую функцию называют показательной?
2. При каких значениях основания a функция $y = a^x$ возрастает, а при каких — убывает?
3. При каких значениях основания a график функции $y = a^x$ имеет горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$, при $x \to -\infty$? Запишите уравнение этой асимптоты.
4. Какое из двух утверждений верно, если $a > 1$:
   1) неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$;
   2) неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$?

5. Какое из двух утверждений верно, если $0 < a < 1$:
1) неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$;
2) неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$?

6. Сформулируйте определение логарифма положительного числа b по положительному и отличному от единицы основанию a.

7. При каком основании a функция $y = \log_a x$ возрастает, а при каком — убывает?

8. Запишите приближённое значение числа e с точностью до 0,1. Что называют натуральным логарифмом?

9. Какие логарифмы называют десятичными? Что называют характеристикой десятичного логарифма; мантиссой десятичного логарифма?

10. Как вычислить сумму логарифмов положительных чисел по одному основанию?

11. Как вычислить разность логарифмов положительных чисел по одному основанию?

12. Как вычислить логарифм степени положительного числа?

13. Запишите формулу перехода к новому основанию логарифма.

14. При каких условиях уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$?

15. Какое из двух утверждений верно, если $a > 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$:
1) неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$;
2) неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$?

16. Какое из двух утверждений верно, если $0 < a < 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$:
1) неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$;
2) неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$?

Тест

1. Расположите числа $5^{1,4}$, $\lg 5$, $5^{\sqrt{2}}$ в порядке возрастания.

а) $\lg 5$, $5^{1,4}$, $5^{\sqrt{2}}$

б) $5^{\sqrt{2}}$, $\lg 5$, $5^{1,4}$

в) $5^{\sqrt{2}}$, $5^{1,4}$, $\lg 5$

г) $5^{1,4}$, $5^{\sqrt{2}}$, $\lg 5$

2. Укажите свойства, которыми обладает функция $y = e^x - 1$.

а) $D(f) = \boldsymbol{R}$

б) $E(f) = (0; +\infty)$

в) функция возрастает

г) функция ограничена снизу

д) наименьшее значение функции равно -1

3. Укажите функцию, которая определена на всей числовой прямой.

а) $y = \log_2 x^2 + 1$

б) $y = \log_2(x^2 + 1)$

в) $y = \log_2(x^2 - 1)$

г) $y = \log_2(x + 1)^2$

4. Какая из данных функций убывает на промежутке $(0; 1]$?

а) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}$

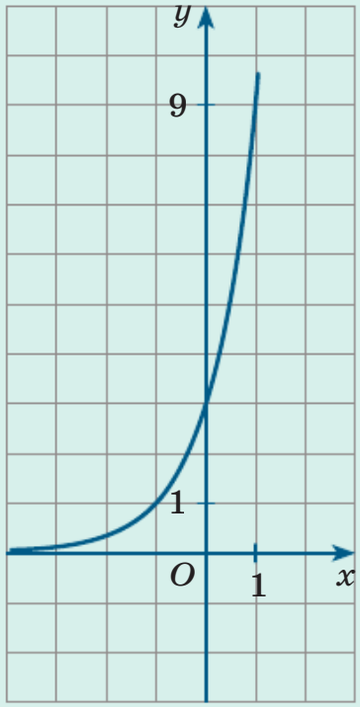
б) $y = \log_{\sqrt{2}} x$

в) $y = 0{,}3^{-x}$

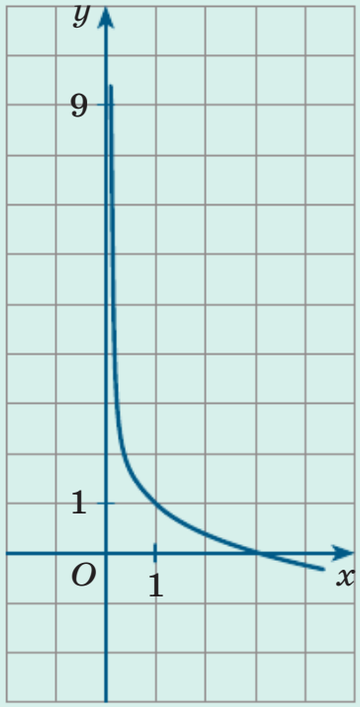
г) $y = 1 - \ln x$

5. Установите соответствие между аналитическим и графическим заданием функции.

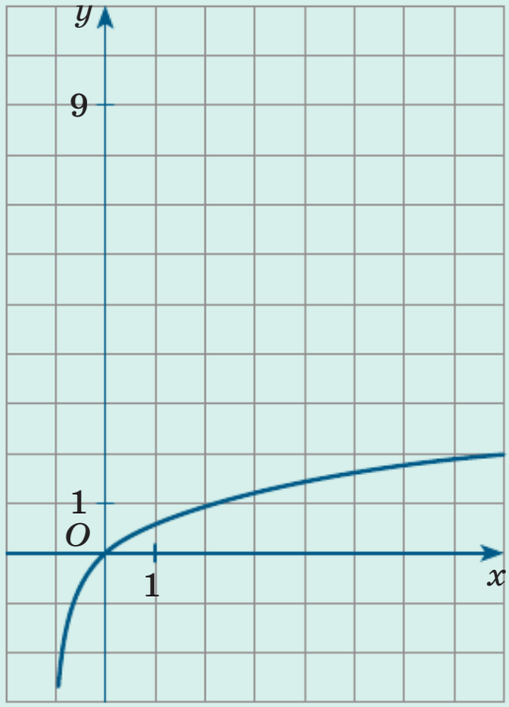
А.



Б.



В.



1) $y = 1 + \log_{\frac{1}{3}} x$

2) $y = \log_3(x + 1)$

3) $y = 3^{x+1}$

6. Найдите значение выражения $6^{\frac{1}{\lg 6}} - \log_5 1000 + \log_5 8$.

7. Решите уравнение $2 \cdot 16^x + 7 \cdot 4^x - 4 = 0$.

8. Укажите верное решение неравенства $0,96^{x^2-2} < 0,96^{3x+2}$.

а) $-1 < x < 4$ в) $x < -4$, $x > 1$

б) $x < -1$, $x > 4$ г) $-4 < x < 1$

9. Решите уравнение $\lg(12 + x - x^2) = \lg 5x$.

10. Решите неравенство $\log_{\sqrt{2}} \frac{4x-3}{x+1} < 2$.

а) $x < -1$, $-1 < x < 2,5$ в) $-1 < x < 2,5$

б) $0 < x < 2,5$ г) $0,75 < x < 2,5$

Из истории математики

По свойствам логарифмов $\lg(bq^n) = \lg b + n \lg q = a + nd$, т. е. при логарифмировании геометрическая прогрессия «превращается» в арифметическую. Использование логарифмов делает совершенно ясной связь между сложением (вычитанием) членов арифметических прогрессий, с одной стороны, и умножением (делением) членов соответствующих геометрических прогрессий, с другой стороны. Однако ещё задолго до появления логарифмов сама эта связь была замечена многими математиками. Явное указание на такое соответствие есть, например, и у Архимеда (III в. до н. э.), и у одного из создателей принципов современной бухгалтерии итальянского математика Луки Пачоли, и у автора слов «биллион», «триллион» француза Николя Шюке (конец XV в.), и у других учёных, работавших до Непера и Бюрги.

В XVI в. резко возросла значимость и необходимость проведения большого количества вычислительных операций в технических, астрономических, инженерных и тому подобных расчётах. Для их проведения составлялись многочисленные таблицы. Например, по квадратам чисел до 100 000 произведение xy находили по формуле $xy = 0{,}25((x + y)^2 - (x - y)^2)$. Швейцарский часовщик Йост Бюрги (1552—1632), сотрудничавший с Кеплером, и шотландский барон Джон Непер (1550—1617) независимо друг от друга разработали таблицы, которые послужили прообразами современных логарифмических таблиц. Сам термин *logarithmus* принадлежит Неперу. Если Бюрги основывался на рассмотрении дискретных прогрессий, то Непер использовал кинематический подход, сравнивая характер двух разных способов движения, по существу вплотную подойдя к идее непрерывности и рассмотрению логарифмической функции.

Оба подхода заметно отличаются от современного. Например, в нынешних обозначениях логарифмы Непера вычисляются по формуле $Log_Nep(x) = 10^7 \cdot \ln\left(\frac{10^7}{x}\right)$. Становление теории логарифмирования и правил их применения происходило на протяжении полутора веков и в основных чертах закончилось к середине XVIII в., когда Л. Эйлер ввёл термин *основание логарифма* и сделал общеупотребительным задание логарифма как соответствующего показателя степени фиксированного основания. Десятичные логарифмы впервые стал

использовать Генри Бригс (1562—1630), разработав к 1625 г. весьма детальные 14-значные таблицы таких логарифмов.

Тезис «*основание натуральных логарифмов — это неперово число*» с исторической точки зрения является заблуждением: ни у Непера, ни у Бюрги, ни у их современников ещё не появлялся сам термин «основание логарифмов». Примерно к 1630 г. были составлены подробные таблицы натуральных (и десятичных) логарифмов, хотя само название «натуральные логарифмы» утвердилось только после 1650 г. Основание натуральных логарифмов как предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и его связь с начислением сложных процентов исследовали и Лейбниц (ок. 1691 г.), и Даниил Бернулли (ок. 1730 г.), и многие другие математики. Обозначение e принадлежит Эйлеру, его связывают или с первыми буквами *Euler, exponential*, или просто с тем, что e — первая буква после уже «занятых» a, b, c, d.

Значения показательных функций a^x при конкретных x есть частные случаи возведения в степень (см. историю вопроса в главе 4). Именно как функции показательные функции исторически были введены как обратные к логарифмическим, что первым сделал Лейбниц около 1690 г. После «Введения в анализ бесконечно малых» (1748 г.) Эйлера более принятым стал обратный порядок, когда первыми вводились именно показательные функции, а логарифмические определялись как обратные к ним. Кроме того, Эйлер определял эти (уже многозначные) функции и для комплексных переменных. Позже, в 1790 г. и в 1797 г. метод был закреплён в книгах «Математические начала» португальца Жозе да Куньи (1744—1787) и «Теория аналитических функций» француза Жозефа Луи Лагранжа (1736—1813). Теория была построена на разложении функций в степенные ряды. Правила дифференцирования показательных и логарифмических функций известны в науке начиная со времён Лейбница и Ньютона.



Севастопольский институт
банковского дела.
Севастополь

§57. Треугольник Паскаля и бином Ньютона
§58. Случайные события и их вероятности
§59. Математическое ожидание (среднее значение) случайных величин
§60. Частота и вероятность. Законы больших чисел

Глава 7
Закон больших чисел

Каждый может ошибаться, сильно или не слишком. Но маловероятно, что ошибаются все в целом, и ошибаются заметно. Примерно так, не в математических, да и не в научных терминах можно дать первое представление о законе больших чисел. На самом деле, правильнее использовать множественное число: есть разные формулировки *законов больших чисел*. В целом все они утверждают, что среднее арифметическое большого числа независимых случайных слагаемых *статистически устойчиво*. Конкретные неточности и ошибки каждого слагаемого не сильно влияют на усреднённый результат большого числа слагаемых: в среднем все ошибки практически «взаимно уничтожаются». В конце этой главы мы познакомимся с одной из простейших форм закона больших чисел.

Начнём с повторения основных фактов комбинаторики и способов нахождения вероятностей. Повторение не будет простым напоминанием: в каждом параграфе вы узнаете новые интересные факты об уже известных понятиях. Начнём мы с двух конструкций, которые связаны с именами великих математиков XVII в.

§ 57. Треугольник Паскаля и бином Ньютона

Термины *комбинаторика* и *комбинаторный анализ* имеют довольно точную дату появления в науке. Их предложил великий немецкий учёный Вильгельм Готфрид Лейбниц в своей книге «*Ars combinatoria*»[1] в середине XVII в. Коротко, *комбинаторика* — это

[1] Другое название «*De arte combinatoria*». Переводят и как «Искусство комбинаторики», и как «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Понятие *Ars combinatoria* также часто использовали и в теории музыки при анализе способов комбинаций нот.

искусство подсчёта числа различных комбинаций, соединений, сочетаний, перестановок и т. п. тех или иных элементов некоторых множеств. С некоторыми из способов подсчёта вы уже знакомы.

Например, если нужно расставить n элементов по одному на n заданных мест, то количество P_n таких расстановок (традиционно говорят *перестановок*) находится по формуле: $P_n = n!$. А если нужно из заданных n элементов выбрать группу из k элементов без учёта их порядка, то количество C_n^k таких выборов (традиционно говорят *сочетаний*) вычисляется так: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Напомним, что $n!$ обозначает произведение натуральных чисел от 1 до n включительно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n;$$

читается «*эн факториал*» (при этом по определению $0! = 1$). Разумеется,

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k,$$
$$(n-k)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k-1) \cdot (n-k).$$

Пример 1 Сколькими способами можно:

а) составить расписание на пять уроков из данных пяти учебных предметов;

б) выбрать три яблока из ста яблок, лежащих в коробке;

в) выбрать десять полевых игроков из имеющихся двенадцати игроков;

г) выбрать для решения три задачи из пяти по алгебре и две из четырёх по геометрии?

Решение.

а) Здесь мы имеем дело с *перестановками* пяти элементов:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

б) Здесь — *сочетания* из ста элементов по три:

$$C_{100}^3 = \frac{100!}{3!97!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 100 \cdot 33 \cdot 49 = 161\,700.$$

в) Проще выбрать двоих из имеющихся двенадцати игроков и оставить их в запасе:

$$C_{12}^{10} = C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 66.$$

г) Выбрать три задачи из пяти по алгебре можно $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ способами. Выбрать две задачи из четырёх по геометрии можно $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ способами. Всего получается $10 \cdot 6 = 60$ способов.

Ответ: а) 120 способами; б) 161 700 способами; в) 66 способами; г) 60 способами.

Отметим, что в пункте «г» заключительный вывод «Всего получается...» основан на комбинаторном правиле умножения.

> Если предмет первого типа можно выбрать n способами, после каждого из которых предмет второго типа можно выбрать k способами, то пару предметов первого, а затем второго типа можно выбрать nk способами.

Разумеется, так же следует поступать и для последовательного выбора предметов трёх, четырёх, пяти и т. д. типов. Подчеркнём, что правило умножения — *основное правило комбинаторики*. Именно оно позволяет доказать формулы

$$P_n = n! \quad \text{и} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Есть некоторая закономерность, «управляющая» тем, как устроено множество всех чисел C_n^k. Эта закономерность хорошо видна при расположении этих чисел в виде специальной *треугольной* таблицы (рис. 193), своего рода *таблицы сложения* для чисел C_n^k.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & \\
 & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & \\
 & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & \\
 & & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & \\
 & C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & \\
C_6^0 & & C_6^1 & & C_6^2 & & C_6^3 & & C_6^4 & & C_6^5 & & C_6^6 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Рис. 193

Называется эта таблица *треугольником Паскаля* в честь великого французского мыслителя середины XVII в. Блеза Паскаля. В её первой строке стоят два числа: C_1^0 и C_1^1. Во второй строке расположены (слева направо) три числа: C_2^0, C_2^1 и C_2^2. Третья строка состоит из четырёх чисел: C_3^0, C_3^1, C_3^2 и C_3^3. В четвёртой строке — пять чисел C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4 и т. д.

Пример 2 Вычислить первые пять строк треугольника Паскаля.

Решение. Во-первых, по краям всегда стоят единицы. Действительно, $C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$ и $C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1$. Во-вторых, $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$, $C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$ и поэтому $C_2^1 = 2$, $C_3^1 = C_3^2 = 3$, а $C_4^1 = C_4^3 = 4$, $C_5^1 = C_5^4 = 5$. Наконец,

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^{n-2}$$

и поэтому $C_4^2 = 6$, $C_5^2 = C_5^3 = 10$ (рис. 194).

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . . . .

Рис. 194

Получается, что в треугольнике Паскаля по краям всех строк стоят единицы, а любое число внутри строки равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке. Это и есть основное правило сложения для чисел сочетаний. Докажем его.

Теорема. $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$.

Доказательство. Возьмём множество из $n+1$ элементов. Один элемент назовём «чёрным», а остальные n штук — «белыми». Будем выбирать группы, состоящие из k элементов. Число таких выборов равно C_{n+1}^k, т. е. равно левой части нужного равенства.

Возможны два варианта: либо «чёрный» элемент будет выбран, либо он не будет выбран. В первом случае останется выбрать $k-1$ из имеющихся n белых элементов. Это можно сделать C_n^{k-1} способами. Во втором случае все k элементов надо выбрать из n белых. Это можно сделать C_n^k способами. Всего получается $C_n^{k-1} + C_n^k$ способов, т. е. получается правая часть нужного равенства. Значит, $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$, что и требовалось доказать.

Это тождество позволяет шаг за шагом заполнять строки треугольника Паскаля (см., например, рис. 195 с десятью заполненными строками).

Треугольник Паскаля имеет много замечательных свойств, но мы ограничимся только одним из них. Речь пойдёт о формулах сокращённого умножения.

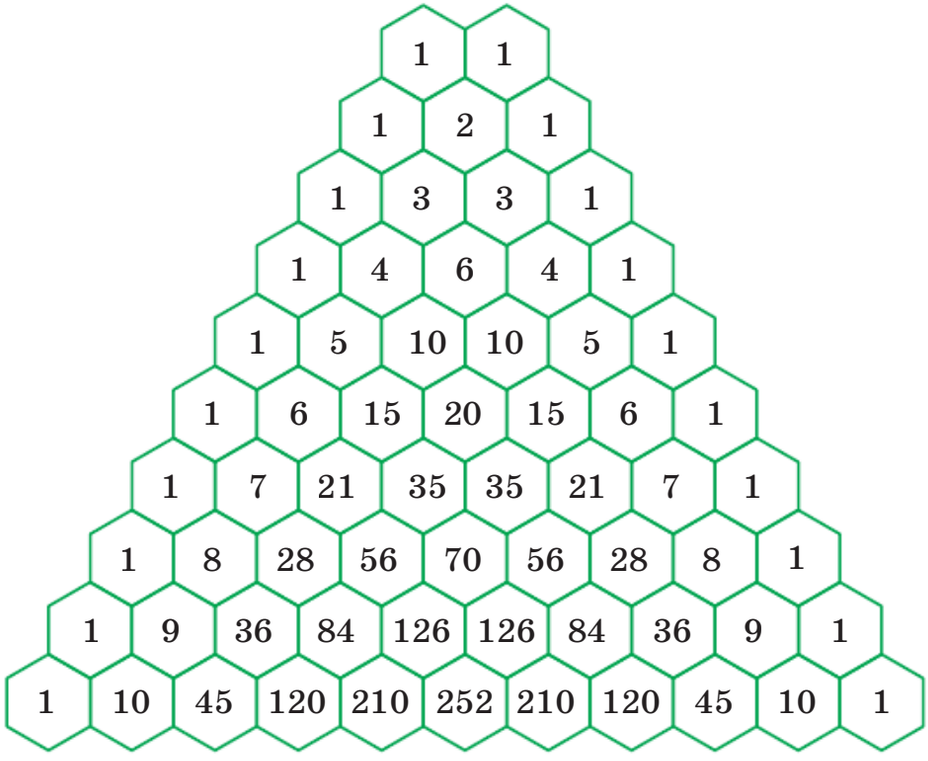


Рис. 195

Хорошо знакомые формулы «квадрат суммы» и «куб суммы» предварим совсем простой формулой «первая степень суммы», специально указав ещё и числовые коэффициенты, равные 1:

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b;$$
$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2;$$
$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3.$$

Для четвёртой степени суммы получится вот что:

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) =$$
$$= a^4 + (1+3)a^3b + (3+3)a^2b^2 + (3+1)ab^3 + b^4 =$$
$$= 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4.$$

Мы видим, что числовые коэффициенты после приведения подобных в первой, второй, третьей и четвёртой степенях суммы $(a+b)$ образуют соответственно первую, вторую, третью и четвёртые строки треугольника Паскаля. Оказывается, что то же самое верно и для любой натуральной степени $(a+b)^n$.

> В треугольнике Паскаля строка с номером n состоит из числовых коэффициентов перед одночленами после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(a+b)^n$.

Используя это правило и уже найденные строки треугольника Паскаля, получаем:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вспомним теперь, что по определению числа в треугольнике Паскаля — это числа C_n^k сочетаний. Значит, выражение $(a+b)^n$ можно записать как сумму одночленов $a^{n-k}b^k$ с коэффициентами C_n^k. Такая запись — это знаменитая формула *бинома Ньютона*.

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

Несколько загадочное слово *бином* объясняется довольно просто. *Ном* — от слова *число* (англ. — *number*, франц. — *nombre*, ит. — *numero*). *Би* — приставка, обозначающая двойственность, удвоение и т. д.; *бином* можно перевести как «два числа», «двучлен», «сумма двух выражений» и т. п.

Пример 3 Найти коэффициент при x после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении:

а) $(1+x)^5$; б) $(1-x)^{15}$; в) $\left(3+\sqrt{x}\right)^6$; г) $\left(5-\sqrt[3]{x}\right)^7$.

Решение.

а) В левой части бинома Ньютона возьмём $a=1$, $b=x$, $n=5$. В правой части рассмотрим одночлен $a^4b = x$. Коэффициент перед a^4b равен $C_5^1 = 5$. Он же равен и коэффициенту при x.

б) В левой части бинома Ньютона возьмём $a=1$, $b=-x$, $n=15$. В правой части рассмотрим одночлен $a^{14}b = -x$. Коэффициент перед $a^{14}b$ равен $C_{15}^1 = 15$. Значит, коэффициент при x равен -15.

в) Здесь $a=3$, $b=\sqrt{x}$, $n=6$, а в правой части нужен одночлен $a^4b^2 = 3^4\left(\sqrt{x}\right)^2 = 81x$. Коэффициент перед a^4b^2 равен $C_6^2 = 15$. Значит, коэффициент при x равен $81 \cdot 15 = 1215$.

г) Здесь $a=5$, $b=-\sqrt[3]{x}$, $n=7$, а в правой части нужен одночлен $a^4b^3 = 5^4\left(-\sqrt[3]{x}\right)^3 = -625x$. Коэффициент перед a^4b^3 равен $C_7^3 = 35$. Значит, коэффициент при x равен $-625 \cdot 35 = -21\,875$.

Ответ: а) 5; б) -15; в) 1215; г) $-21\,875$.

Подведём краткий итог. Числа C_n^k появляются во многих разделах математики и её многочисленных приложениях. Эти числа допускают различные способы определения.

Итак, что такое C_n^k?

1) C_n^k — это число сочетаний из n элементов по k элементов.

2) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

3) C_n^k — это число, стоящее на k-м месте в n-й строке треугольника Паскаля.

4) C_n^k — это коэффициент при $a^{n-k}b^k$ в биноме Ньютона для $(a+b)^n$.

Числа C_n^k называют не только числами сочетаний, но и *биномиальными коэффициентами*.

Подчеркнём также, что нумерация мест в каждой строке треугольника Паскаля начинается с нуля: левая единица $(1 = C_n^0)$ стоит на месте № 0, следующее число $n = C_n^1$ стоит на месте № 1, ..., правая единица $(1 = C_n^n)$ стоит на месте № n.

Упражнения

57.1. В тренировочных сборах по дзюдо участвовали по три борца из команд А и Б, по четыре — из команд В и Г и двое из команды Д. Каждый по разу боролся с каждым. Сколько было схваток:
а) между борцами из команды А;
б) между борцами из одной и той же команды;
в) в которых участвовал хотя бы один борец из команды В;
г) между борцами из команды Г;
д) всего;
е) в которых участвовал хотя бы один борец из команды В или Г?

57.2. Найдите количество всех пятизначных натуральных чисел:
а) в которых нет двух одинаковых цифр;
б) с любыми повторениями цифр;
в) с возрастанием цифр слева направо;
г) с одинаковыми первой и последней цифрами;
д) одна из цифр которых повторена трижды;
е) состоящих из цифр одинаковой чётности.

57.3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске данные фигуры так, чтобы они не били друг друга, если это:
а) две ладьи разного цвета;
б) две ладьи одного цвета;
в) два короля разного цвета;
г) два короля одного цвета;
д) три ладьи одного цвета;
е) король и ладья?

57.4. У учителя 8 задачников по алгебре, а у учительницы 9 задачников по геометрии. Учитель и учительница будут обмениваться этими книгами. Сколькими способами они могут:
а) передать друг другу по одной из своих книг;
б) передать друг другу по 7 из своих книг;
в) обменять 2 книги учителя на 2 книги учительницы;
г) обменяться двумя книгами;
д) обменяться тремя книгами;
е) обменять n книг учителя на m книг учительницы?

57.5. Даны три параллельные прямые. На одной прямой отметили 5 красных точек, на другой — 6 синих точек, а на третьей — 7 чёрных точек. При этом никакие красная, синяя и чёрная точки одновременно не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в точках:
а) трёх цветов;
б) красного и чёрного цветов;
в) не синего цвета;
г) красного и синего цветов;
д) не чёрного цвета;
е) двух цветов?

57.6. На подносе лежат одинаковые по виду пирожки: 4 — с мясом, 5 — с картошкой, 6 — с капустой. Выбирают 4 пирожка. В скольких случаях:
а) все они будут с мясом;
б) все они будут без картошки;
в) будет ровно 3 пирожка с картошкой;
г) все они будут с капустой;
д) будет поровну пирожков с капустой и без неё;
е) будут пирожки и с мясом, и с картошкой, и с капустой?

57.7. Решите уравнение:
а) $C_4^x = 6$;
б) $C_y^1 = 9$;
в) $C_z^2 = 28$;
г) $C_{12}^a = 66$;
д) $C_b^2 = 55$;
е) $C_y^x = 10$.

57.8. Решите неравенство:

а) $C_6^m > 17$; в) $C_n^3 > C_4^n$; д) $C_n^2 + C_n^3 > 100$;

б) $C_8^k > 60$; г) $200 < C_{10}^p < 250$; е) $C_n^3 > C_7^n$.

57.9. Докажите, что:

а) $C_n^2 < C_{n+1}^2$, $n > 2$;

б) $C_n^2 < C_n^3$, $n > 5$;

в) $C_{2n}^0 < C_{2n}^1 < C_{2n}^2 < \ldots < C_{2n}^n$;

г) $C_m^3 < C_{m+1}^3$, $m > 3$;

д) $C_k^3 < C_k^4$, $k > 5$;

е) $C_{2k+1}^k = C_{2k+1}^{k+1}$ — наибольшее из чисел C_{2k+1}^m, $m = 0, 1, \ldots, 2k + 1$.

57.10. (*Пути в координатной сетке.*) В координатной плоскости, начиная движение с точки $O(0; 0)$, можно за один ход сдвигаться на одну единицу вверх или на одну единицу вправо. Найдите количество всех путей из точки O в точку A с данными координатами:

а) $A(1; 0)$; в) $A(2; 3)$; д) $A(2; m)$;

б) $A(1; 2)$; г) $A(n; 1)$; е) $A(n; m)$.

Ответ укажите рядом с точкой в координатной плоскости.

57.11. (*Шары и перегородки.*) Имеется 11 одинаковых шаров. Их распределяют по ящикам № 1, № 2, № 3 так, чтобы не осталось пустых ящиков. Требуется найти количество способов такого распределения. Рассуждение проводится по следующей схеме.

а) Нарисуйте схематично шары, выложенные в один ряд.

б) Сколько получилось промежутков между шарами? Пронумеруйте их слева направо.

в) Сколькими способами можно выбрать два промежутка?

г) Выберите два промежутка и в каждом из них нарисуйте по вертикальному отрезку (перегородке).

д) Объясните, как после этого распределить шары по ящикам № 1, № 2, № 3.

е) Объясните, почему каждое распределение шаров по ящикам № 1, № 2, № 3 может быть получено описанным способом.

57.12. Найдите число распределений N одинаковых шаров по ящикам № 1, № 2, ..., № n, при которых нет пустых ящиков, если:

а) $N = 5$, $n = 2$; г) $N = 7$, $n = 2$;

б) $N = 7$, $n = 3$; д) $N = 10$, $n = 4$;

в) N — любое, $n = 4$; е) N и $n \geqslant N$ — любые.

57.13. Найдите число натуральных или целых неотрицательных решений уравнения:

а) $x_1 + x_2 = 8$, $x_k > 0$;

б) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$, $x_k > 0$;

в) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, $x_k > 0$;

г) $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $x_k \geqslant 0$;

д) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$, $x_k \geqslant 0$;

е) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, $x_k \geqslant 0$.

57.14. Раскройте скобки по формуле бинома Ньютона:

а) $(x - y)^3$;

б) $(2z - 5)^3$;

в) $(a + 1)^4$;

г) $(b - 2)^4$;

д) $(c + 2d)^4$;

е) $(x + y)^5$.

57.15. В выражении $\underbrace{(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n}$ раскрывают скобки и приводят подобные. Докажите, что:

а) каждый выбор k скобок из n позволяет получить одночлен $a^{n-k}b^k$;

б) каждое слагаемое $a^{n-k}b^k$ определяется выбором некоторых k скобок;

в) количество одинаковых слагаемых $a^{n-k}b^k$ равно C_n^k;

г) $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$;

д) при подстановке $a = b = 1$ в формулу из пункта «г» получаем $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

е) при подстановке $a = 1$, $b = -1$ в формулу из пункта «г» получаем $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Упражнения для повторения

57.16. Решите уравнение и укажите его корни на заданном промежутке:

а) $\sin^2 x + 2\cos x + 2 = 0$, $\left[-\frac{7\pi}{2};\ \pi\right]$;

б) $\sin 2x - \sqrt{2}\cos x = 0$, $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $\sqrt{3}\cos^2 2x + \sin 2x \cos 2x = 0$, $[0;\ \pi]$;

г) $\cos^2 x - 3\sin x + 3 = 0$, $\left[-4\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

д) $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$, $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$;

е) $\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2} = 0$, $[-2\pi; \pi]$.

57.17. Вычислите:

а) $\frac{3\sin 16^\circ}{25\cos 74^\circ}$; в) $\frac{3\cos 47^\circ}{4\cos 133^\circ}$; д) $\frac{7\cos 144^\circ}{20\sin 126^\circ}$;

б) $\frac{\cos 22^\circ}{5\sin 112^\circ}$; г) $\frac{21\sin 162^\circ}{10\sin 198^\circ}$; е) $\frac{\sin 156^\circ}{2\cos 66^\circ}$.

57.18. Вычислите:

а) $2\log_6 2 + \log_6 54 - 25^{\log_5 4}$; г) $3\lg 5 + \lg 80 - 6^{\frac{1}{\log_3 6}}$;

б) $\lg 800 - 3\lg 2 - e^{\frac{2}{\lg e}}$; д) $\log_3 2 - \log_3 162 + e^{3\ln 2}$;

в) $6^{\frac{1}{2\log_5 2 - \log_5 24}}$; е) $0{,}5^{\log_2 108 - \frac{1}{\log_6 2}}$.

57.19. Решите неравенство:

а) $\log_{0,1}(x^2 - 4x + 3) \leqslant 2\log_{0,1}(x + 1)$;

б) $\lg(x - 3) + \lg(x + 2) \leqslant \lg(x + 9)$.

§ 58. Случайные события и их вероятности

Если испытание (эксперимент, опыт) имеет конечное число исходов (результатов), то каждый из них некоторым образом обозначают (дают имя). Получают множество, состоящее из названий (имён, обозначений) исходов испытания. Такое множество уже есть некоторая *модель* исходного испытания (эксперимента, опыта). Элементы этого множества называют *элементарными событиями*. Каждое элементарное событие соответствует некоторому исходу и, наоборот, для каждого исхода имеется соответствующее ему элементарное событие.

Например, {1, 2, 3, 4, 5, 6} — множество элементарных событий (э.с.), соответствующее одному бросанию кубика, а {РР, РО, ОР, ОО} — это множество э.с., соответствующее двукратному бросанию монеты. Часто бывает удобно не делать различия между исходом испыта-

ния и соответствующим ему элементарным событием, считая, скажем, что РР — это и есть один из исходов двукратного бросания монеты. Как говорят, исходы *отождествляют* с элементарными событиями.

В каждом испытании (эксперименте, опыте) важны не только его элементарные события, но и то, каким именно образом распределены вероятности этих элементарных событий. Самый простой пример — это испытания с равновозможными э.с. Для них вероятность каждого э.с. равна $\frac{1}{N}$, где N — число всех э.с. В этом случае мы имеем дело с *равномерным распределением* вероятности.

Элементарное событие	x_1	x_2	...	x_{N-1}	x_N
Вероятность	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	...	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$

Но очень часто мы встречаемся и с другими распределениями. Например, для двух независимых повторений испытания с исходами У («успех») и Н («неудача») имеем:

Элементарное событие	УУ	УН	НУ	НН
Вероятность	p^2	pq	qp	q^2

Здесь p — вероятность «успеха» и $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи» в одном испытании. Соответственно, для трёх повторений вероятности распределены так:

УУУ	УУН	УНУ	УНН	НУУ	НУН	ННУ	ННН
p^3	p^2q	p^2q	pq^2	p^2q	pq^2	pq^2	q^3

В общем виде множество всех э.с. вместе с заданным на нём распределением вероятности — это *математическая модель* испытания:

Элементарное событие	x_1	x_2	...	x_{N-1}	x_N	
Вероятность	p_1	p_2	...	p_{N-1}	p_N	Сумма = 1

В первой строке — все элементарные события испытания. Во второй строке — положительные числа, сумма которых равна единице: p_1 — вероятность э.с. x_1, p_2 — вероятность э.с. x_2, ..., p_N — вероятность э.с. x_N.

Определение 1. Случайным событием при проведении испытания называют любое подмножество A множества элементарных событий. **Вероятность** $P(A)$ случайного события A равна сумме вероятностей элементарных событий, составляющих A. Вероятность невозможного события равна нулю.

Проще всего применять это определение для равномерного распределения вероятности. Смотрите, если событие A состоит из $N(A)$ э.с., вероятность каждого из которых равна $\frac{1}{N}$, то

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N}}_{N(A)\text{ раз}} = \frac{N(A)}{N}.$$

Получается *классическое определение вероятности.*

Вероятность события A при проведении некоторого испытания равна отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу равновозможных между собой исходов этого испытания.

Пример 1 На тестировании компьютер выберет 3 из 20 заданных вопросов по теме. Ученик выучил 11 вопросов хорошо, 5 плохо и 4 средне. Какова вероятность того, что ему достанется хотя бы один вопрос, который он выучил:

а) хорошо; б) не плохо?

Решение. Речь идёт о числе сочетаний из 20 вопросов по 3:

$$N = C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 20 \cdot 19 \cdot 3.$$

а) Обозначим A интересующее нас событие. Противоположное ему событие $\overline{A}$ состоит в том, что все три вопроса окажутся среди пяти

«плохих» и четырёх «средних». Значит, $N(\overline{A}) = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 3 \cdot 4 \cdot 7$ и $P(\overline{A}) = \frac{N(\overline{A})}{N} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{20 \cdot 19 \cdot 3} \approx 0{,}074$, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0{,}926$.

б) Обозначим B интересующее нас событие. Противоположное ему событие $\overline{B}$ состоит в том, что все три вопроса — «плохие». Значит,

$$N(\overline{B}) = C_5^3 = 10$$

и

$$P(\overline{B}) = \frac{N(\overline{B})}{N} = \frac{10}{20 \cdot 19 \cdot 3} \approx 0{,}009, \quad P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 0{,}991.$$

Ответ: а) ≈0,926; б) ≈0,991.

В следующем примере классическое определение вероятности уже не применимо: элементарные события в нём не равновозможны.

Пример 2 Стрелок трижды стреляет по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 80 %. Какова вероятность того, что:

а) все три раза результат будет одинаковым;

б) в первый и третий разы будут разные результаты?

Решение. Здесь мы имеем дело с *испытаниями Бернулли*: У («успех») — попадание, Н («неудача») — непопадание, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, а вероятность распределена так:

УУУ	УУН	УНУ	УНН	НУУ	НУН	ННУ	ННН
p^3	p^2q	p^2q	pq^2	p^2q	pq^2	pq^2	q^3

а) Интересующее нас событие A состоит из двух э.с.: УУУ и ННН. Сумма их вероятностей равна $p^3 + q^3 = 0{,}512 + 0{,}008 = 0{,}52$. Это и есть искомая вероятность $P(A)$.

б) Интересующее нас событие B состоит из четырёх э.с.: УУН, УНН, НУУ и ННУ. Сумма их вероятностей равна

$$2(p^2q + pq^2) = 2pq(p + q) = 2pq = 0{,}32.$$

Это и есть $P(B)$.

Ответ: а) 0,52; б) 0,32.

Напомним, что *испытания Бернулли* — это серия из нескольких независимых повторений испытания с двумя исходами: «успех» и «неудача». Здесь независимость — ключевой момент: при последовательном и независимом проведении двух испытаний вероятность того, что в первом из них наступит событие A, а во втором — событие B, равна произведению $P(A) \cdot P(B)$ вероятностей этих событий. Без условия независимости нам не удалось бы так просто заполнить вторую строку в таблице распределения вероятностей. Независимость событий важна и при проведении одного и того же испытания. Тогда события A и B называют *независимыми*, если вероятность $P(AB)$ их произведения (т. е. их одновременного появления) равна произведению $P(A)P(B)$ их вероятностей: $P(AB) = P(A)P(B)$.

Пример 3 При проведении испытания вероятность каждого из двух независимых событий равна 0,9. Какова вероятность того, что:

а) наступят оба эти события;
б) наступит хотя бы одно из событий;
в) не наступит ни одно из событий;
г) наступит только одно из них?

Решение. Обозначим события A и B. По условию $P(A) = P(B) = 0{,}9$.

а) Наступление и A, и B одновременно — это произведение AB. Независимость A и B означает, что

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81.$$

б) Наступление хотя бы одного из событий — это наступление или A, или B, т. е. сумма $A + B$. По формуле вероятности суммы получаем

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}81 = 0{,}99.$$

в) Из независимости событий следует независимость противоположных событий. Значит,

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01\,.$$

г) Наступление только одного из событий — это событие «наступит A, но не B, или наступит B, но не A», т. е. событие $A\overline{B} + \overline{A}B$. Его слагаемые несовместны, а множители слагаемых независимы. Значит,

$$P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}18.$$

Ответ: а) 0,81; б) 0,99; в) 0,01; г) 0,18.

В завершение параграфа рассмотрим *биномиальное* распределение, само название которого связывает его с биномом Ньютона. Только на этот раз это будет распределение единичной вероятности не между э.с., а между значениями некоторой случайной величины.

Рассмотрим испытания с конечным числом исходов.

Определение 2. Случайная величина — это функция, которая каждому элементарному событию (исходу) испытания ставит в соответствие некоторое число.

Вот примеры случайных величин (с.в.):

— рост, месяц рождения, число рождения, номер дома, число братьев и сестёр и т. д. наудачу (случайно) выбранного человека;

— номер, вес, пробег, число штрафов и т. п. случайно выбранной машины;

— число бракованных товаров, температура воздуха (в градусах), число попаданий в мишень.

Пожалуй, наиболее известной случайной величиной является с.в. S — «число успехов в n испытаниях Бернулли», т. е. в серии из n независимых повторений испытания с двумя исходами: У («успех») и Н («неудача»).

Теорема. Число «успехов» в n испытаниях Бернулли принимает следующие значения со следующими вероятностями:

Число «успехов»	0	1	...	k	...	$n-1$	n
Вероятность	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	p^n

Доказательство. Изобразим дерево вариантов, на котором удобно расположить все элементарные события для серий из одного, двух, трёх, ..., n повторений (рис. 196).

При одном повторении — 2 э.с., при двух повторениях — 4 э.с., при трёх повторениях — 8 э.с. При n повторениях — 2^n э.с., и каждое из них — это набор длины n из букв У и Н.

Как составить набор, в котором число букв У равно k? Надо среди возможных n мест выбрать k мест, поставить на них букву У, а на остальные $n-k$ мест поставить Н. Число таких наборов равно C_n^k —

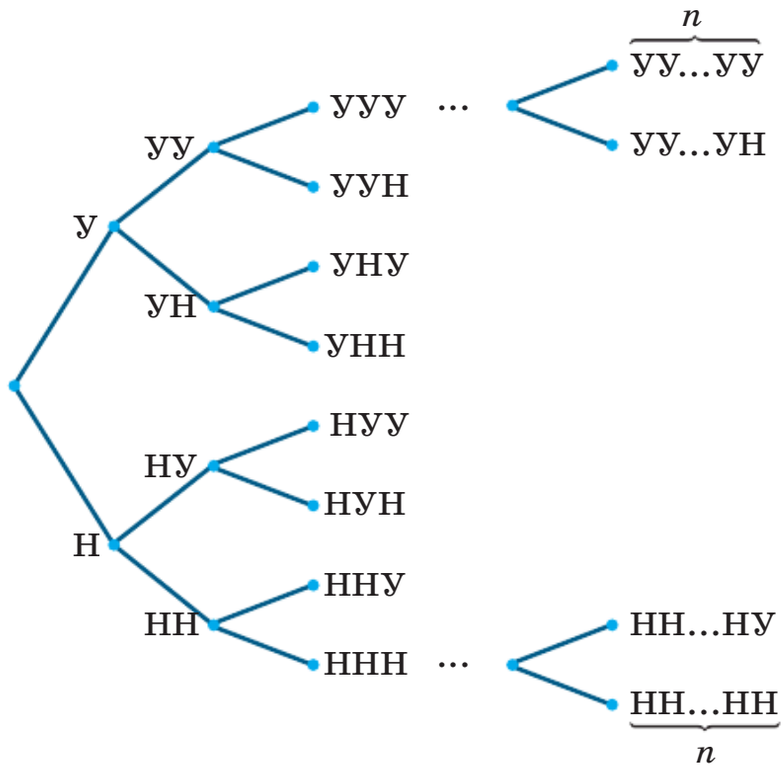


Рис. 196

числу сочетаний из n по k. В силу независимости вероятность каждого такого набора равна произведению n множителей, из которых k равны вероятности p «успеха» и $n - k$ равны вероятности q «неудачи», т. е. вероятность равна $p^k q^{n-k}$.

Итак, получаем C_n^k наборов, вероятность каждого из которых равна $p^k q^{n-k}$. Значит, вероятность того, что «успехов» будет ровно k, равна

$$\underbrace{p^k q^{n-k} + p^k q^{n-k} + \ldots + p^k q^{n-k}}_{C_n^k \text{ раз}} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Замечание 1. На самом деле, в этой теореме мы доказали формулу Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, которую уже упоминали в основной школе.

Замечание 2. Почему это распределение называют *биномиальным*? Смотрите, по биному Ньютона

$$1 = (q + p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p^1 + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + C_n^k q^{n-k} p^k + \ldots + \\ + C_n^{n-1} q^1 p^{n-1} + C_n^n q^0 p^n,$$

и все слагаемые в правой части равны числам из второй строки таблицы распределения соответственно.

Упражнения

58.1. Из натуральных чисел от 1 до 100 наудачу будет выбрано одно. Какова вероятность того, что оно будет:
а) отрицательным;
б) больше 80;
в) чётным числом из промежутка (20; 63);
г) трёхзначным;
д) не меньше 20;
е) кратно или 17, или 19?

58.2. На тарелке лежат три красных, два зелёных и два жёлтых яблока. Из них наудачу выбирают два. Какова вероятность того, что они оба:
а) зелёные; в) не красные; д) одного цвета;
б) красные; г) жёлтые; е) не зелёные?

58.3. Проводится экзамен по математике. Ученику надо выбрать два билета из лежащих перед ним на столе одинаковых по виду четырёх билетов по геометрии и шести билетов по алгебре. Найдите вероятность того, что из выбранных билетов:
а) оба будут по алгебре;
б) будет хотя бы один по алгебре;
в) ровно один будет по геометрии;
г) оба будут по геометрии;
д) хотя бы один будет по геометрии;
е) ученик знает оба, если знает только половину билетов по геометрии и половину по алгебре.

В 10 «А» классе пять, а в 10 «Б» классе шесть круглых отличников. На городской конкурс из них надо выбрать троих, а из остальных надо двоих делегировать на олимпиаду по литературе. Участников городского конкурса и олимпиады по литературе решили определить жеребьёвкой.

58.4. Какова вероятность того, что среди выбранных на конкурс:
а) только один ученик будет из 10 «Б» класса;
б) только один ученик будет из 10 «А» класса;
в) трое будут из 10 «Б» класса;
г) кто-то будет из 10 «Б» класса;
д) кто-то будет из 10 «А» класса;
е) кто-то будет из 10 «А» класса, а кто-то — из 10 «Б» класса?

58.5. Пусть на конкурс уже выбраны два отличника из 10 «А» класса и один из 10 «Б» класса. Какова вероятность того, что среди выбранных на олимпиаду:
а) только один ученик будет из 10 «Б» класса;
б) только один ученик будет из 10 «А» класса;
в) двое будут из 10 «А» класса;
г) двое будут из 10 «Б» класса;
д) кто-то будет из 10 «Б» класса;
е) кто-то будет из 10 «А» класса и кто-то — из 10 «Б» класса?

Если вероятность $P(B)$ отлична от нуля, то равенством $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ определяют *условную вероятность* $P(A/B)$ события A при условии наступления события B, или, чуть короче, при условии B. В случае равновозможных исходов («классическая схема»)

$$P(A/B) = \frac{N(AB)}{N(B)},$$

где $N(AB)$ — число исходов, благоприятствующих наступлению события AB. На наивном уровне $P(A/B)$ — это доля, которую событие AB «занимает» в событии B.

58.6. Монету бросают трижды. Для событий A — «в первый раз выпал „орёл“», B — «во второй раз выпала „решка“», C — «в первый и третий раз результаты различны» вычислите:
а) $P(A/B)$; в) $P(C/B)$; д) $P(C/A)$;
б) $P(A/C)$; г) $P(B/A)$; е) $P((A + B)/C)$.

58.7. Игральный кубик бросают дважды. Для событий A — «в первый раз выпало 6 очков», B — «сумма очков равна 9», C — «во второй раз выпало чётное число очков» вычислите:
а) $P(A/B)$; в) $P(C/(A + B))$; д) $P(C/B)$;
б) $P(A/C)$; г) $P(B/A)$; е) $P(B/(AC))$.

58.8. Докажите, что независимость событий A и B равносильна (при $P(A) > 0$, $P(B) > 0$) равенству:
а) $P(A/B) = P(A)$; г) $P(B/A) = P(B)$;
б) $P(\bar{A}/B) = P(\bar{A})$; д) $P(\bar{B}/A) = P(\bar{B})$;
в) $P(A/\bar{B}) = P(A)$; е) $P(\bar{A}/\bar{B}) = P(\bar{A})$.

58.9. Докажите, что для событий, вероятности которых положительны:
а) $P(AB) = P(B)P(A/B)$;
б) $P(AB) = P(A)P(B/A)$;
в) $0 \leqslant P(A/B) \leqslant 1$;
г) $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$;
д) $P(ABC) = P(C/AB)P(AB)$;
е) $P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)$ — *формула вероятности произведения*.

58.10. В кармане лежат одинаковые по виду монеты: 10 настоящих и 3 фальшивые. Поочерёдно (без возвращений) достают 3 монеты. Найдите вероятность того, что монеты выберут в такой последовательности:
а) настоящая, настоящая, настоящая;
б) настоящая, настоящая, фальшивая;
в) фальшивая, настоящая, фальшивая;
г) фальшивая, фальшивая, фальшивая;
д) настоящая, фальшивая, фальшивая;
е) фальшивая, фальшивая, настоящая.

58.11. Событие A содержится в сумме попарно несовместных событий H_1, H_2, H_3, вероятности которых положительны (H от *hypothesis* — гипотеза). Докажите, что:
а) $A = A(H_1 + H_2 + H_3)$;
б) $A = AH_1 + AH_2 + AH_3$;
в) $P(AH_1) = P(H_1)P(A/H_1)$;
г) события AH_1, AH_2, AH_3 попарно несовместны;
д) $P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + P(AH_3)$;
е) $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)$ — *формула полной вероятности*.

Проводят два независимых повторения испытания с исходами У — «успех» и Н — «неудача»; p — вероятность «успеха», q — вероятность «неудачи».

58.12. Найдите вероятность события:
а) УУ, если $p = 0{,}7$;
б) НН, если $p = 0{,}4$;
в) УУ, если $q = 0{,}7$;
г) НУ, если $q = 0{,}4$;
д) УН, если $p = 0{,}9$;
е) УУ + НН, если $pq = 0{,}19$.

58.13. Найдите:
а) q, если $P(\text{УУ}) = 0{,}64$;
б) q, если $P(\text{УУ}) = 0{,}0225$;
в) $P(\text{НН})$, если $P(\text{УУ}) = 0{,}64$;
г) p, если $P(\text{НН}) = 0{,}09$;
д) $P(\text{УН})$, если $P(\text{УУ}) = 0{,}0121$;
е) $P(\text{НУ})$, если $P(\text{НН}) = 0{,}0441$.

58.14. Вероятность того, что биатлонист попадёт во все пять мишеней на рубеже, оценивается в 80 %. Оцените вероятность того, что в индивидуальной гонке (в которой четыре стрелковых рубежа) биатлонист:
а) ни разу не промахнётся;
б) промахнётся только на одном рубеже;
в) промахнётся на половине рубежей;
г) не промахнётся только на одном рубеже;
д) промахнётся на каждом рубеже;
е) промахнётся только на последнем рубеже.

58.15. Проводится серия из n испытаний Бернулли. Вероятность наступления ровно k «успехов» равна $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ (формула Бернулли).

а) Найдите $\dfrac{P_n(1)}{P_n(0)}$.

б) Найдите $\dfrac{P_n(2)}{P_n(1)}$.

в) Найдите $\dfrac{P_n(n)}{P_n(n-1)}$.

г) Найдите $\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$.

д) Докажите, что $P_n(k) < P_n(k+1)$ при $0 \leqslant k < np - q$.
е) Докажите, что наибольшее значение вероятности $P_n(k)$ достигается при k, равном целому числу, ближайшему справа к $np - q$.

Вероятность $P_n(k)$ принимает наибольшее значение при $k \in [np - q,\ np + p]$, т. е. при $k \approx np$.

Упражнения на повторение

58.16. Постройте график функции:

а) $y = (x - 2)^{2,5}$; в) $y = -x^{\frac{1}{6}} - 1$; д) $y = 4x^{-0,4}$;

б) $y = (x + 2)^{0,75}$; г) $y = -x^{\frac{5}{3}} + 1$; е) $y = -6x^{-1,5}$.

58.17. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{162} + \sqrt[4]{32} - \sqrt[4]{0,125}$; г) $\sqrt[3]{375} - 2\sqrt[3]{0,081} - \sqrt[3]{648}$;

б) $\left(2\sqrt[4]{9} - \sqrt{5}\right)\left(2\sqrt[4]{9} + \sqrt{5}\right)$; д) $\left(\sqrt[6]{8} + 1,5\right)\left(\sqrt[6]{8} - 1,5\right)$;

в) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$; е) $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$.

58.18. Решите уравнение.

а) $\sqrt[4]{3x^2 - 2} = x$; в) $\sqrt{x + 5} = x + 3$; д) $(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} = 4$;

б) $\sqrt[6]{7x^3 + 8} = x$; г) $\sqrt{2 - x} = 2x - 1$; е) $(x^2 - 3x)^{\frac{3}{2}} = 8$.

58.19. а) $\sqrt{21x - 20 - 4x^2} \cdot \left(2\sin 2x - \sqrt{3}\right) = 0$;

б) $\sqrt{6 + 7x - 5x^2} \cdot (2\cos 4x + 1) = 0$.

§ 59. Математическое ожидание (среднее значение) случайных величин

Математическим ожиданием случайной величины называют сумму произведений её значений на те вероятности, с которыми она эти значения принимает.

Зная указанную ниже таблицу распределения случайной величины,

s_1	s_2	...	s_n
p_1	p_2	...	p_n

математическое ожидание можно записать как $s_1p_1 + s_2p_2 + \ldots + s_np_n$. Напомним, что в первой строке таблицы распределения случайной величины S записывают все её значения s_1, s_2, ..., s_n, а в клетки второй строки вписывают соответствующие вероятности:

p_1 — вероятность того, что S примет значение s_1; кратко, $p_1 = P(S = s_1)$;

...

p_n — вероятность того, что S примет значение s_n; кратко, $p_n = P(S = s_n)$.

Математическое ожидание случайной величины S обозначают $M(S)$[1]. Появление слова «ожидание» связано с тем, что первоначально рассматривались различные игровые ситуации (бросания монет, кубиков, делёж ставок, выигрыши в лотереях и т. п.) и исследовали вопрос о «самом ожидаемом» результате.

У математического ожидания есть ясная физическая модель: если на числовой оси в точках s_1, s_2, ..., s_n разместить общую единичную массу, распределив её соответственно на части p_1, p_2, ..., p_n, то получится система материальных точек. Так вот центр масс (центр тяжести, точка равновесия) этой системы как раз и равен $s_1p_1 + s_2p_2 + \ldots + s_np_n$. Например, если в точках s_1, s_2 разместить массы 0,5 и 0,5, то центр масс окажется в середине отрезка $[s_1; s_2]$, в точке $\frac{s_1 + s_2}{2} = s_1 \cdot 0{,}5 + s_2 \cdot 0{,}5$.

Итак, $M(S)$ — это центр масс системы материальных точек: s_1 массой p_1, s_2 массой p_2, ..., s_n массой p_n (рис. 197).

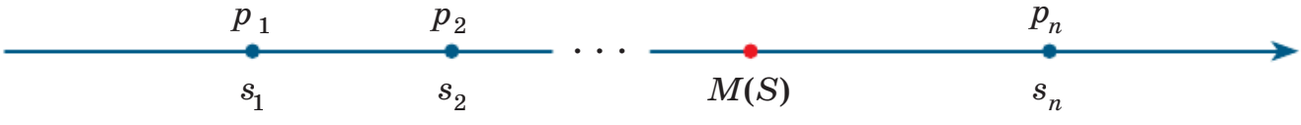


Рис. 197

Если точку опоры разместить в точке

$$M(S) = s_1p_1 + s_2p_2 + \ldots + s_np_n,$$

то система материальных точек окажется в состоянии равновесия.

Математическое ожидание часто называют *средним* значением. Дело в том, что в случае $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$ равномерного распределения получается вот что:

---

[1] Используют также обозначение $E(S)$ (от англ. *expectation* — ожидание) и похожие символы M_S, $M[S]$, E_S. В XVI—XVII вв. использовали термин «моральное ожидание».

$$M(S) = s_1p_1 + s_2p_2 + \ldots + s_np_n =$$
$$= s_1 \cdot \frac{1}{n} + s_2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + s_n \cdot \frac{1}{n} =$$
$$= \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}.$$

Значит, среднее арифметическое числового набора — частный случай математического ожидания. В нём все значения числового набора «равнозначны» между собой, т. е. принимаются с одной и той же вероятностью.

Пример 1 По таблице распределения случайной величины вычислить её математическое ожидание:

а)

0	1
0,35	0,65

в)

–2	–1	3
0,2	0,5	0,3

б)

–4	5
0,1	0,9

в)

0	1	2
q^2	$2pq$	p^2

Решение. Подсчёты проведём по определению.
а) $0 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 0{,}65 = 0{,}65$;
б) $(-4) \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}9 = 4{,}1$;
в) $(-2) \cdot 0{,}2 + (-1) \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 0$;
г) $0 \cdot q^2 + 1 \cdot 2pq + 2 \cdot p^2 = 2p(q + p) = 2p$.

Пример 2 Десять экспертов дали свои прогнозы цены в рублях одного килограмма яблок через месяц: 90, 85, 80, 120, 90, 85, 130, 110, 100, 70. Какую цену в среднем ожидают через месяц, если:

а) оценкам всех экспертов доверяют одинаково;

б) оценке девятого эксперта доверяют на 50 % больше, а оценке десятого эксперта на 50 % меньше, чем оценке каждого из первых восьми экспертов, которым доверяют одинаково?

Решение. Случайная величина — это прогноз эксперта. Надо найти математическое ожидание этой с.в.

а) Здесь с.в. принимает все значения с равной вероятностью и математическое ожидание совпадает со средним арифметическим прогнозов:

$$\frac{90+85+80+120+90+85+130+110+100+70}{10}=$$

$$=100+\frac{-10-15-20+20-10-15+30+10+0-30}{10}=96.$$

б) Здесь таблица распределения случайной величины выглядит так:

90	85	80	120	90	85	130	110	100	70
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,15	0,05

Вероятности первых восьми прогнозов одинаковы, вероятность девятого — на 50 % больше, а десятого — на 50 % меньше. Среднее будет равно

$$\frac{90+85+80+120+90+85+130+110+100\cdot 1,5+70\cdot 0,5}{10}.$$

По сравнению с пунктом «а» числитель изменится на (+50 – 35), т. е. увеличится на 15. Значит, среднее увеличится на 1,5. Получится 97,5 р.

Пример 3 На выборах в городе А за партию Б проголосовали 35 % избирателей не старше 60 лет и 65 % избирателей, которым более 60 лет[1]. В городской газете опубликовали вывод, сделанный руководителем пресс-центра партии Б: «За нашу партию проголосовала половина участвовавших в выборах». Соперники партии Б подали иск в суд за распространение ложных сведений. Кто прав?

Решение. Среднее арифметическое чисел 35 и 65, несомненно, равно 50, но вывод о половине проголосовавших за партию Б неверен.

Первое объяснение — на уровне простейших подсчётов. Если голосовало N человек, и из них было x не старше 60 лет, то число проголосовавших за партию Б равно

$$0,35x+0,65(N-x)=0,65N-0,3x,$$

что равно $0,5N$ (половине голосовавших) только при весьма специальном подборе x.

[1] Процент берётся от числа избирателей, пришедших на выборы.

Второе объяснение — через математическое ожидание. Смотрите, случайная величина «процент проголосовавших за партию Б» принимает значение 35 с вероятностью $\frac{x}{N}$ и значение 65 с вероятностью $1-\frac{x}{N}$. Её математическое ожидание (среднее значение) равно

$$35\frac{x}{N}+65\left(1-\frac{x}{N}\right)=65-30\frac{x}{N}.$$

Оно равно 50, только если $\frac{x}{N}=\frac{1}{2}$, т. е. только если избирателей не старше 60 и старше 60 было поровну. Такое деление пополам в принципе возможно, но, судя по иску, в городе А это было не так. Значит, правы соперники партии Б.

Замечание. Обратите внимание, за вероятности наступления событий мы приняли частоты $\frac{x}{N}$ и $1-\frac{x}{N}=\frac{N-x}{N}$. Тем самым мы предполагаем, что при случайном выборе голосовавшего все варианты равновозможны.

Теорема. Пусть все элементарные события x_1, ..., x_N некоторого испытания равновозможны, а S — случайная величина, заданная на этих э.с. Тогда математическое ожидание $M(S)$ равно среднему арифметическому набора значений с.в. S.

Доказательство. Пусть N — число э.с. Какие-то из значений $S(x_1)$, ..., $S(x_N)$ вполне могут оказаться равными. Обозначим s_1 — наименьшее из значений с.в. S и n_1 — количество повторений этого значения. Далее обозначим s_2 — наименьшее из оставшихся значений с.в. S и n_2 — количество повторений значения s_2 и т. д.

$$\underbrace{s_1, s_1, \ldots, s_1}_{n_1}, \underbrace{s_2, s_2, \ldots, s_2}_{n_2}, \ldots, \underbrace{s_k, s_k, \ldots, s_k}_{n_k},$$

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_k, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N.$$

Среднее арифметическое набора $S(x_1)$, ..., $S(x_N)$ равно

$$\frac{\underbrace{s_1+s_1+\ldots+s_1}_{n_1}+\underbrace{s_2+s_2+\ldots+s_2}_{n_2}+\ldots+\underbrace{s_k+s_k+\ldots+s_k}_{n_k}}{N}=$$

$$=s_1\cdot\frac{n_1}{N}+s_2\cdot\frac{n_2}{N}+\ldots+s_k\cdot\frac{n_k}{N}.$$

Событие «с.в. S примет значение s_1» наступает в n_1 из всех N равновозможных э.с. Его вероятность p_1 равна $\frac{n_1}{N}$. Аналогично и с s_2, ..., s_k. Составляем таблицу распределения с.в. S:

s_1	s_2	...	s_k
$\frac{n_1}{N}$	$\frac{n_2}{N}$	...	$\frac{n_k}{N}$

и находим математическое ожидание:

$$M(S) = s_1 \cdot \frac{n_1}{N} + s_2 \cdot \frac{n_2}{N} + \ldots + s_k \cdot \frac{n_k}{N} =$$

$$= \frac{(s_1 + \ldots + s_1) + (s_2 + \ldots + s_2) + \ldots + (s_k + \ldots + s_k)}{N}.$$

Перечислим важные свойства математического ожидания.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(aS) = aM(S).$$

2. Постоянное слагаемое можно слагаемым выносить за знак математического ожидания:

$$M(S + b) = M(S) + b.$$

3. Математическое ожидание с.в., которая тождественно равна числу, равно этому числу:

$$M(c) = c.$$

4. Математическое ожидание суммы двух с.в. равно сумме их математических ожиданий:

$$M(S + T) = M(S) + M(T).$$

5. Математическое ожидание отклонения с.в. от своего математического ожидания равно нулю:

$$M(S - M(S)) = 0.$$

Доказательства (за исключением свойства 4) очень простые. Докажем свойства 1 и 2.

Доказательство. Таблица распределения с.в. S имеет вид:

s_1	s_2	...	s_k
p_1	p_2	...	p_k

1. В первой строке таблицы распределения с.в. aS стоят те же числа, что и в таблице распределения с.в. S, но только умноженные на число a:

as_1	as_2	...	as_k
p_1	p_2	...	p_k

Поэтому

$$M(aS) = (as_1)p_1 + (as_2)p_2 + \ldots + (as_k)p_k = \\ = a(s_1p_1 + s_2p_2 + \ldots + s_kp_k) = aM(S).$$

2. К числам первой строки таблицы распределения с.в. S добавим константу b. Получим первую строку таблицы распределения с.в. $S + b$:

$s_1 + b$	$s_2 + b$	...	$s_k + b$
p_1	p_2	...	p_k

Поэтому

$$M(S + b) = (s_1 + b)p_1 + (s_2 + b)p_2 + \ldots + (s_k + b)p_k = \\ = (s_1p_1 + s_2p_2 + \ldots + s_kp_k) + b(p_1 + p_2 + \ldots + p_k) = M(S) + b,$$

так как сумма $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ вероятностей во второй строке равна 1.

Кстати, свойство 2 мы уже использовали в решении примера 2 «а». Рассмотрим ещё один пример.

Пример 4 а) У десяти десятиклассниц измерили рост. Получили такие данные (в см): 165, 164, 149, 151, 170, 155, 161, 154, 157, 172. Найти среднее значение роста десятиклассницы.

б) По таблице распределения с.в.:

–3	0,09	1,1	0,57
$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

найти её математическое ожидание.

Решение. а) Вычтем по 160 из всех данных. Получим:

$$5,\ 4,\ -11,\ -9,\ 10,\ -5,\ 1,\ -6,\ -3,\ 12.$$

Сумму этих чисел можно найти устно. Получится –2; среднее равно –0,2. Теперь добавим 160, получится 159,8. Запишем решение формулой: $M(S) = M(S - 160) + 160 = 159{,}8$.

б) Умножим значения с.в. на 100. Получим: –300, 9, 110, 57. Найдём их произведения на числители дробей из второй строки: –300, 27, 110, 114. Их сумму –49 делим на общий знаменатель 7. Получаем –7 и этот результат делим на 100. Получится –0,07. Запишем решение формулой: $M(S) = \dfrac{M(100S)}{100} = -0{,}07$.

Упражнения

Пусть случайная величина (с.в.) S — это число выпадений «решки» при двух бросаниях монеты.

59.1. Укажите множество всех значений следующей с.в.:

а) S; в) $2S - 5$; д) $3 - 4S$;
б) $S + 1$; г) $-S$; е) $(S - 1)^2$.

59.2. Составьте таблицы распределения с.в. из пунктов «а»—«е» упражнения 59.1. и найдите математические ожидания.

Случайная величина (с.в.) S принимает значения 1, 2, 3, 4, 5 с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 соответственно.

59.3. Составьте таблицу распределения с.в. S и найдите математическое ожидание $M(S)$, если:

а) $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$;
б) $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0{,}15$;
в) $p_1 = p_5 = 0{,}05$, $p_3 = p_4 = 0{,}2$;
г) $p_1 = p_2 = p_3$, $p_4 = p_5 = 2p_1$;
д) $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = 0{,}1$;
е) $p_k = kp_1$, $k = 2, 3, 4, 5$.

59.4. Для каждого пункта «а»—«е» упражнения 59.3 найдите соответственно вероятность:
а) $P(S < 2)$;
б) $P(S \leqslant 2)$;
в) $P(S^2 < 15)$;
г) $P(S > 4)$;
д) $P(S \geqslant 3)$;
е) $P(S^2 > 10)$.

Случайная величина S принимает значения s_1, 2, 3, 4, 5 с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 соответственно.

59.5. Найдите s_1, если:
а) $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$ и $M(S) = 2{,}8$;
б) $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0{,}1$ и $M(S) = 4$;
в) $p_1 = p_5 = 0{,}05$, $p_3 = p_4 = 0{,}2$ и $M(S) = 3{,}15$;
г) $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = p_3 = p_4 = p_5$ и $M(S) = 1{,}9$;
д) $p_1 = 0{,}4$, $p_4 = p_5 = 2p_2 = 2p_3$ и $M(S) = 2{,}5$;
е) $p_k = kp_1$, $k = 2, 3, 4, 5$ и $M(S) = 4$.

59.6. Для каждого пункта «а»—«е» упражнения 59.5 найдите соответственно вероятность:
а) $P(S < 0)$;
б) $P(S^2 \leqslant 2)$;
в) $P(S^2 - 3S + 2 = 0)$;
г) $P(S > 0)$;
д) $P(S^2 \geqslant 3)$;
е) $P(S^2 - 4S + 3 \leqslant 0)$.

По таблице распределения случайной величины T найдите вероятность указанного события.

59.7.

–1	0	1	2	3
0,21	0,4	0,13	0,11	0,15

а) $P(T \leqslant 0)$; в) $P(2T < 3)$; д) $P(T^2 > 1)$;
б) $P(T \geqslant 0)$; г) $P(3T > 2)$; е) $P(T^2 = 2T + 3)$.

59.8.

–3	–2	0	1	4
0,2	0,1	0,01	0,6	0,09

а) $P(T < -3)$; в) $P(2T \leqslant 5)$; д) $P(T^2 > 5)$;
б) $P(T > -4)$; г) $P(2T \geqslant 5)$; е) $P(T^2 = T)$.

59.9. Таблица распределения случайной величины S имеет вид:

–2	0	1	3	7
p	p	p	p'	p'

а) Выразите $M = M(S)$ через p.
б) Выразите p через M.
в) Найдите наибольшее значение M.
г) Может ли M быть равным 6?
д) Может ли M быть равным –1?
е) Найдите наименьшее значение M.

59.10. Монету бросают трижды. Составьте таблицу распределения и найдите математическое ожидание случайной величины:
а) A, если A — число выпавших «решек»;
б) B, если B — число выпавших «орлов»;
в) $C = 2A + 3B$;
г) $X = (A - B)^2$;
д) $Y = |A - B|$;
е) $Z = (A + 1)^B$.

Испытание Бернулли с вероятностями p и q «успеха» и «неудачи» соответственно повторяют n раз.

59.11. При $n = 3$ составьте таблицу распределения и найдите математическое ожидание случайной величины:
а) S, если S — число «успехов»;
б) $C = 2S + 3$;
в) $X = S^2$;
г) B, если B — число «неудач»;
д) $Y = 3 - 2B$;
е) $Z = SB$.

59.12. При $n = 4$ для с.в. S — число «успехов» — найдите:
а) вероятность $P(S = 4)$;
б) вероятность $P(S \leqslant 2)$;
в) вероятность $P(S$ — нечётно);
г) вероятность $P(S = 0)$;
д) вероятность $P(S \geqslant 2)$;
е) $M(S)$.

59.13. В лотерейном барабане 7 белых и 3 чёрных шара. Выкатившийся шар возвращают в барабан. «Неудача» — выпадение чёрного шара. Испытание повторяют 4 раза. Найдите вероятность того, что будет:
а) более двух «успехов»;
б) менее двух «успехов»;

в) хотя бы один «успех»;
г) хотя бы одна «неудача»;
д) число «успехов» нечётно;
е) «неудач» больше, чем «успехов».

59.14. Найдите среднее арифметическое числового набора:
а) {2; 4; ...; 20};
б) {190; 193; 195; 198; 199; 203; 205; 206; 207; 210};
в) всех двузначных чисел;
г) всех полных квадратов, меньших 1000 (*указание*: используйте формулу $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$);
д) всех трёхзначных чисел;
е) всех трёхзначных чисел вида $4k + 3$.

59.15. Обозначим c — среднее арифметическое числового набора $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ и a_k (b_k) — среднее первых k (последних k) чисел набора. Докажите, что:
а) $x_1 = a_1 < a_2$;
б) $a_2 < a_3$;
в) $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = c$;
г) $b_2 < b_1 = x_n$;
д) $b_3 < b_2$;
е) $c = b_n < b_{n-1} < \ldots < b_2 < b_1$.

Упражнения для повторения

59.16. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 2^x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2(x-5)^2, \text{ если } x > 3; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x^2 + 8x - 6, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции одну или две общие точки?

59.17. Решите уравнение:

а) $2^{2x-7} = 32$;

б) $5^{x-1} \cdot 2 \cdot 5^{x-3} = 1250$;

в) $49^x - 7^{x+1} = 0$;

г) $3^{4x+9} = \frac{1}{27}$;

д) $3 \cdot 6^{x+1} - 6^{x+2} = -648$;

е) $4^{2x+1} - 13 \cdot 4^x + 3 = 0$.

59.18. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+5x} > 5\frac{1}{16}$;

б) $3^x - 5 \cdot 3^{x+2} < -396$;

в) $25^{x+1} - 51 \cdot 5^x + 2 \geqslant 0$;

г) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2-2x-5} \leqslant 1\frac{11}{25}$;

д) $2^{x-2} - 3 \cdot 2^{x+2} \geqslant -376$;

е) $6 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x < -2$.

59.19. Решите уравнение:

а) $\frac{2 \cdot 64^{\sin x} + 8^{\sin x} - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$;

б) $\frac{15 \cdot 5^{2\operatorname{tg} x} - 34 \cdot 15^{\operatorname{tg} x} + 15 \cdot 3^{2\operatorname{tg} x}}{\sqrt{2}\cos x - 1} = 0$;

в) $\frac{3 \cdot 81^{\cos x} - 4 \cdot 9^{\cos x} + 1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$;

г) $\frac{18 \cdot 9^{\operatorname{tg} x} - 35 \cdot 6^{\operatorname{tg} x} + 12 \cdot 4^{\operatorname{tg} x}}{2\sin x - \sqrt{2}} = 0$.

§ 60. Частота и вероятность. Законы больших чисел

Как проверить, что при бросании монеты вероятность выпадения «орла» действительно следует считать равной 0,5? Самый прямой способ — бросить монету очень *большое* число раз и сосчитать частоту $\frac{k}{n}$ выпадения «орла»; k — число выпадений «орла» в n бросаниях.

Практически во всех классических учебниках по теории вероятностей или статистике, написанных в XIX—XX вв., указывают имена учёных, проводивших весьма длинные серии бросаний монеты[1].

[1] См., например: Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М. : Наука, 1988.

Численные результаты, полученные в этих экспериментах, подтверждают, что частота $\frac{k}{n}$ появления «орла» практически совпадает с 0,5. Например,

$$n = 4040,\ k = 2048,\ \frac{k}{n} \approx 0{,}5069307$$

$$\text{или } n = 24\,000,\ k = 12\,012,\ \frac{k}{n} \approx 0{,}5005 \text{ и т. п.}$$

В наше время на компьютере в онлайн-режиме можно провести эксперимент и с сотней тысяч, и с миллионом подбрасываний монеты. Вот, например, результаты двух виртуальных экспериментов, проведённых в момент написания этого параграфа[1]:

а)

n	10	100	1000	10 000	100 000
k	6	47	512	5325	49 917

б)

n	1 млн	1 млн	1 млн	1 млн	1 млн
k	500 255	499 328	499 985	500 000	501 006

Пример 1 Дополнить приведённую таблицу строками для частот $\frac{k}{n}$ появления «орлов» и строками для погрешности $\delta = \left|\frac{k}{n} - 0{,}5\right|$ приближения $\frac{k}{n} \approx 0{,}5$.

Решение. Так как у нас n — «круглые» числа, то третья строка для частот практически совпадёт со второй. Надо только приписать 0 и десятичную запятую, после чего сравнить ответ с 0,5.

а)

n	10	100	1000	10 000	100 000
k	6	47	512	5325	49 917
$\frac{k}{n}$	0,6	0,47	0,512	0,5325	0,49917
δ	0,1	0,03	0,012	0,0325	0,00083

[1] Был использован интерактивный модуль «Монеты» лаборатории методики вероятности и статистики Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО).

б)

n	1 млн	1 млн	1 млн	1 млн	1 млн
k	500 255	499 328	499 985	500 000	501 006
$\frac{k}{n}$	0,500255	0,499328	0,499985	0,5	0,501006
δ	0,000255	0,000672	0,000015	0	0,001006

Итак, мы видим, что с увеличением числа n бросаний частота появления «орла» практически совпадает с числом 0,5: погрешность δ приближения $\frac{k}{n} \approx 0{,}5$ становится всё меньше и меньше.

Такое практическое совпадение частоты и вероятности называют *статистической устойчивостью*, а получаемое таким образом значение вероятности называют её *статистическим определением*. Оказывается, что явление статистической устойчивости имеет место не только для бросаний монеты, нескольких монет, игральных кубиков, но и вообще для случайных событий при независимых повторениях некоторого испытания.

На практике весьма типична ситуация, когда точное значение вероятности $P(A)$ случайного события A при проведении некоторого испытания X не удаётся найти. Тогда статистическая устойчивость помогает найти приближённое значение вероятности $P(A)$.

Для этого используют испытания Бернулли. А именно, проводят длинные серии из независимых повторений испытания X, «успехом» в каждом из них считают наступление события A и, соответственно, «неудачей» — наступление противоположного события $\bar{A}$. В частности, $p = P(A)$, $q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$. После этого подсчитывают число k «успехов» в серии из n повторений и частоту $\frac{k}{n}$. Эта частота приближённо равна вероятности $P(A)$:

$$\frac{k}{n} \approx p, \quad p = P(A), \quad \frac{k}{n} \approx P(A).$$

Обратите внимание, приближение $\frac{k}{n} \approx P(A)$ правильнее читать справа налево $P(A) \approx \frac{k}{n}$: на вопрос о нахождении $P(A)$ приближённым ответом является частота $\frac{k}{n}$.

Определение. При неограниченном возрастании числа n повторений одного и того же испытания частота $\frac{k}{n}$ наступления события A в этом испытании практически совпадает с некоторым постоянным числом. Это явление называют **статистической устойчивостью**, а указанное число — **статистической вероятностью события A**.

Пример 2 Испытание «серия из 10 000 бросаний трёх монет» провели несколько раз на интерактивном модуле «Монеты» для определения частоты события A «выпадут последовательно „орёл“, „орёл“, „решка“». Событие A наступило соответственно 1225, 1301, 1299, 1203, 1289, 1198, 1310 раз. Найти:

а) вероятность $P(A)$ по классическому определению;

б) частоту наступления события A в каждой серии;

в) модуль отклонения ответов из пункта «б» от ответа из пункта «а» с точностью до 0,001;

г) частоту наступления события A во всех проведённых сериях и модуль её отклонения от ответа из пункта «б».

Решение. а) При бросании трёх монет возможны $2^3 = 8$ исходов. Нас интересует только один из них: $P(A) = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

б) Делим результаты на 10 000 — число повторений в каждой серии. Получаем ответ: 0,1225, 0,1301, 0,1299, 0,1203, 0,1289, 0,1198, 0,1310.

в) Вычитаем по 0,125 и берём модуль разности. Получаем ответ: 0,0025, 0,0051, 0,0049, 0,0047, 0,0039, 0,0052, 0,006.

г) Всего провели 70 000 бросаний трёх монет. Событие A — «выпадут „орёл“, „орёл“, „решка“» наступило

$$1225 + 1301 + 1299 + 1203 + 1289 + 1198 + 1310 = 8825 \text{ раз.}$$

Частота равна примерно 0,1261, а модуль её отклонения от 0,125 равен 0,0011 — значительно меньше, чем все ответы из пункта «в». Значит, при увеличении n с 10 000 до 70 000 ошибки в отдельных сериях по 10 000 почти «взаимно уничтожились» и погрешность приближения $\frac{k}{n} \approx P(A)$ уменьшилась.

Замечание. Так как серии, рассмотренные в примере 2, состоят из одного и того же числа повторений, то ответ в пункте «г» для частоты — это среднее ответов из пункта «б». Поясним это в общем виде, обозначив k_1, ..., k_7 результаты из условия задачи:

$$\frac{k}{70\,000} = \frac{k_1 + \ldots + k_7}{70\,000} = \frac{\frac{k_1}{10\,000} + \ldots + \frac{k_7}{10\,000}}{7}.$$

Практическое совпадение вероятности p «успеха» в одном испытании и частоты $\frac{k}{n}$ «успеха» в серии из *большого числа* n независимых повторений испытания составляет содержание теоремы Бернулли — простейшей формы *закона больших чисел*.

Теорема 1 (теорема Бернулли). Вероятность того, что абсолютная погрешность приближения $\frac{k}{n} \approx p$ превысит заданную точность a, стремится к нулю с ростом n.

В виде формулы теорему можно записать так:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| > a\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Грубо говоря, вероятность заметной ошибки в приближении $\frac{k}{n} \approx p$ мала, если n достаточно велико.

Несколько схожий с теоремой Бернулли результат относится не к приближению $\frac{k}{n} \approx p$, а к приближению $k \approx np$. В нём, правда, нет никакого «неограниченного роста» или даже изменения n: число повторений испытаний Бернулли здесь фиксировано.

Теорема 2. Математическое ожидание числа k «успехов» в серии из n испытаний Бернулли равно np, где p — вероятность «успеха» в одном испытании.

Доказательство. Приведём его для $n = 5$. Вспомним треугольник Паскаля (рис. 198) и то, что с.в. «число успехов в испытаниях Бернулли» имеет биномиальное распределение.

```
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
. . . . . . . . . . . . .
```

Рис. 198

Поэтому таблица распределения этой с.в. выглядит так:

0	1	2	3	4	5
q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5

Вычисляем математическое ожидание:

$$0 \cdot q^5 + 1 \cdot 5pq^4 + 2 \cdot 10p^2q^3 + 3 \cdot 10p^3q^2 + 4 \cdot 5p^4q + 5 \cdot p^5 =$$
$$= 5p(q^4 + 4pq^3 + 6p^2q^2 + 4p^3q + p^4) =$$
$$= 5p(q + p)^4 = 5p.$$

Было бы неправильно при обсуждении теоремы Бернулли не вспомнить о формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, которая даёт ответ для вероятности наступления ровно k «успехов» в n испытаниях Бернулли. Оказывается, число np почти равно тому значению $k = k_0$, при котором вероятность $P_n(k_0)$ будет наибольшей среди всех значений $P_n(k)$. Такое значение $k = k_0$ называют *наивероятнейшим* числом «успехов».

Теорема 3. Наивероятнейшее число k_0 успехов в n испытаниях Бернулли приближённо равно np. Абсолютная погрешность $|k_0 - np|$ не больше единицы. Если np — целое число, то $k_0 = np$.

Иногда теорему Бернулли удобнее использовать, оценивая вероятность не события «$\left|\frac{k}{n} - p\right| > a$», а противоположного события «$\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant a$». Тогда $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant a\right) \to 1$ при $n \to \infty$, т. е. с ростом n практически достоверно, что частота $\frac{k}{n}$ мало отличается от p.

Вопросы, связанные с подсчётом вероятностей событий $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant a$ или $\left|\frac{k}{n} - p\right| > a$ при достаточно больших n, будут рассмотрены в 11 классе.

Упражнения

60.1. В ряд через запятую выписаны 500 данных. Каждое из них — буква А, Б, В, Г, Д или Е. Буква А повторена 102 раза, буква Б — 70 раз, В, Г и Д — одинаковое число раз, а Е — 58 раз.
1) Найдите (относительную) частоту встречаемости:
а) буквы А;
б) буквы Б;
в) буквы В;
г) гласных букв;
д) согласных букв.
2) Почему сумма всех частот равна 1?

60.2. Был продан товар пяти разных марок X, Y, Z, U, W. Товара марки X, Y, Z было продано 32, 51 и 17 штук соответственно. Частота (относительная) продаж товара марки U и марки W равна 0,12 и 0,38 соответственно. Найдите:
а) сколько всего штук товара было продано;
б) сколько всего штук товара марки U было продано;
в) сколько всего штук товара марки W было продано;
г) частоту продаж товара марки X;
д) частоту продаж товара марки Y;
е) частоту продаж товара марки Z.

60.3. Был проведён опрос экспертов по определению лучшего гола месяца. Были оставлены пять кандидатов — № 1, № 2, № 3, № 4 и № 5 — и они повторно были предложены тем же экспертам. По результатам второго опроса за гол № 1 и № 5 проголосовали 23 и 27 экспертов соответственно, а за гол № 2, № 3 и № 4 — 16 %, 12 % и 22 % экспертов соответственно. Найдите:
а) процентную частоту голосования за кандидатов № 1 или № 5;
б) процентную частоту голосования за кандидата № 1;
в) процентную частоту голосования за кандидата № 5;
г) сколько всего было экспертов;
д) сколько экспертов проголосовали за кандидата № 2;
е) какой кандидат в итоге победил в конкурсе.

В интерактивном модуле «Игральные кости» лаборатории методики вероятности и статистики МЦНМО провели 10 повторений эксперимента с 60 бросаниями кубика по определению числа выпадения «6». Результаты представлены в таблице.

Броски	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
«6»	7	12	8	9	10	11	13	15	7	6

60.4. Найдите (с точностью до одной десятой) процентную частоту выпадения «6»:
а) в 120 первых бросаниях;
б) в 180 первых бросаниях;
в) в 300 первых бросаниях;
г) в 300 последних бросаниях;
д) в 540 последних бросаниях;
е) во всех 600 бросаниях.

60.5. В каждом из пунктов упражнения 60.4 найдите погрешность между процентной частотой и приближённым значением 16,6 % вероятности выпадения «6».

В отдел технического контроля (ОТК) из цеха поступили партии № 1—10 однотипных деталей, по 200 деталей в каждой партии. Итоги проверки представлены в таблице.

Номер партии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число бракованных деталей	4	6	2	2	10	4	0	3	12	4

60.6. Найдите процентную частоту числа бракованных деталей:
а) в партии № 1;
б) в партии № 4;
в) в партии с наибольшим числом бракованных деталей;
г) в партиях № 1 и № 2 вместе;
д) в первой тысяче деталей;
е) во всех 2000 деталях.

60.7. Оцените приблизительно число:
а) бракованных деталей при выпуске 4 тыс. деталей;
б) бракованных деталей при выпуске 10 тыс. деталей;
в) бракованных деталей при выпуске 100 тыс. деталей;
г) проверенных ОТК деталей, если число бракованных деталей оказалось равным 45;
д) проверенных ОТК деталей, если число бракованных деталей оказалось равным 100;
е) проверенных ОТК деталей, если число бракованных деталей оказалось равным 470.

Для выполнения упражнений **60.8**, **60.9** выполните следующую инструкцию.

1) Откройте сайт лаборатории методики вероятности и статистики Московского центра непрерывного математического образования.

2) Найдите и откройте закладку «Эл. ресурсы», правый верхний угол, строка ссылок.

3) В выпадающем меню выберите и кликните «Компьютерные модели».

4) Среди трёх интерактивных модулей выберите второй — «Монеты», кликните на него.

5) Скачайте архивный файл coins.7z на Рабочий стол или в нужную папку. Разархивируйте его, выбрав «Extractto». В созданной папке Coins один файл, откройте его (если система защиты спрашивает подтверждение, выберите «Подробнее» и затем «Выполнить в любом случае»).

6) У вас открыт и готов к работе интерактивный модуль «Монеты».

60.8. 1) В «Выборе» (красная цифра 1 в кружке) и в «Редакторе событий» (красная цифра 2 в кружке) не выбирайте пока ничего.

2) В «Выполнении эксперимента» (красная цифра 3 в кружке) нажмите «Начать».

3) Запишите в тетради результаты: число выпадений «орла» и «решки».

4) Используя «Сброс», повторите эксперимент ещё 9 раз, результаты внесите в таблицу.

Число бросаний n	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Число «орлов» k									

5) В каждом из повторений эксперимента на вкладке «Изменение относительных частот» вы увидите график (синий для «орла», зелёный для «решки») этого изменения, когда число бросаний изменяется от 1 до 100.

6) Дополните таблицу двумя строками: третья строка — (относительная) частота $\frac{k}{n}$ и четвёртая строка — погрешность $\delta = \left|\frac{k}{n} - 0{,}5\right|$ (модуль отклонения).

60.9. 1) Заполните таблицы, аналогичные таблице из пунктов 4—6 упражнения 60.8 для 10 серий:
а) из 200 бросаний монеты;
б) из 1000 бросаний монеты;
в) из 10 000 бросаний монеты;
г) из 100 000 бросаний монеты;
д) из 1 000 000 бросаний монеты.
2) Расскажите, как меняются графики частот при переходе от пункта «а» к пункту «д».

Упражнения **60.10—60.12** — это практическое мини-исследование по теме «Распределение простых чисел». Для выполнения этих упражнений необходим калькулятор и таблица простых чисел, меньших 1000 (см. Приложение на с. 300).

60.10. Определите количество $\pi(n)$ простых чисел на отрезке $[1; n]$ и заполните таблицу.

n	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\pi(n)$										

60.11. В редакторе Excel составьте столбиковую диаграмму количества простых чисел на промежутках $[1; 100)$, $[100; 200)$, ..., $[900; 1000)$.

60.12. Таблицу из упражнения 60.10 дополните снизу двумя строками. В первую из них впишите значение (с точностью до тысячных) частоты $\frac{\pi(n)}{n}$, а во вторую — значение $\frac{1}{\ln n}$.

Оказывается, что при неограниченном возрастании n частота $\frac{\pi(n)}{n}$ встречаемости простых чисел на отрезке $[1; n]$ практически совпадает с $\frac{1}{\ln n}$. Это так называемый *асимптотический закон распределения простых чисел*:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(n)}{n} \cdot \ln n = 1.$$

Грубо говоря, при случайном выборе натурального числа от 1 до n вероятность того, что оно окажется простым, приблизительно равна $\frac{1}{\ln n}$.

Упражнения на повторение

60.13. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{12}}$;

б) $\dfrac{\sin\frac{11\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}}$;

в) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{12}}$;

г) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}}{2\cos^2\frac{\pi}{8}}$;

д) $\dfrac{2\sin^2\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}}$;

е) $\dfrac{\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}{\sin^2\frac{\pi}{16}-\cos^2\frac{\pi}{16}}$.

60.14. Решите уравнение:

а) $\log_2(x^2-5x+2)=3$;

б) $\log_5\dfrac{x+4}{x-2}=\log_5 x$;

в) $\log_3(x+1)+\log_{x+1}27=4$;

г) $\log_3(x^2-x-3)=2$;

д) $\log_{0,5}\dfrac{x-11}{x+3}=\log_{0,5}(3-x)$;

е) $\lg(x-2)-\log_{x-2}100=1$.

60.15. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\log_{x+5}(9-x)\leqslant 0,\\ 16^{x^2-3x+20}\leqslant 0{,}25^{2x^2-6x-200};\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{3^x-3^{2-x}-8}{3^x-3}\geqslant 0,\\ \log_2 3+\log_4(1-x)^2\geqslant\log_2(x^2-1).\end{cases}$

60.16. Дана функция $y=f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}, \text{ если } x\leqslant 0,\\ \log_2 x, \text{ если } x>0.\end{cases}$$

а) Найдите $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$, $f(4)$.

б) Постройте и прочитайте график функции.

в) Найдите все значения x, при которых график функции $y=f(x)$ лежит выше прямой $-3x+7y=3$.

г) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x)=p$ имеет более одного корня.

Итак, в главе 7

Повторили основные комбинаторные формулы и правила, напомнили основные сведения о нахождении вероятностей случайных событий.

Узнали четыре способа нахождения числа C_n^k: как числа сочетаний, по формуле через факториалы, по расположению в *треугольнике Паскаля*, как числовых коэффициентов в *биноме Ньютона*.

Для нахождения вероятностей описали общую математическую модель — множество всех элементарных событий и распределение вероятности между ними.

Рассмотрели два частных случая этой общей модели: *равномерное* и *биномиальное* распределение вероятности. В первом из них при решении задач хорошо работает *классическое определение вероятности*. Вычисления во втором случае проводятся по *формуле Бернулли*.

Узнали, что простейшие случайные величины удобно задавать в виде таблиц из двух строк — *таблиц распределения*, в которых собрана основная (но не вся) информация о случайной величине. По этой таблице нетрудно найти *математическое ожидание* случайной величины. Математическое ожидание — это обобщение понятия *среднего значения* числовых наборов; важнейшая числовая характеристика случайных величин.

Познакомились с простейшим вариантом *закона больших чисел* — теоремой Бернулли, в которой утверждается, что с ростом числа повторений испытаний Бернулли *практически достоверным* является тот факт, что частота наступления «успеха» мало отличается от его вероятности в одном испытании.

Изучили новые математические понятия:

— треугольник Паскаля; бином Ньютона; биномиальное распределение;

— случайная величина (с.в.) S на конечном множестве элементарных событий;

— математическое ожидание $M(S)$ с.в. S; теорема Бернулли.

Изучили новые формулы:

— $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$;

— $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$ (бином Ньютона);

— $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ (формула Бернулли);

— $M(S) = s_1 p_1 + s_2 p_2 + \ldots + s_k p_k$ для подсчёта математического ожидания;

— $M(aS) = aM(S)$;

— $M(S + b) = M(S) + b$;

— $M(c) = c$;

— $M(S + T) = M(S) + M(T)$;

— $M(S - M(S)) = 0$;

— $M = np$ для математического ожидания числа «успехов» в n испытаниях Бернулли;

— $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant a\right) \to 1$ или $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| > a\right) \to 0$ в теореме Бернулли.

Вопросы

1. Сформулируйте правило умножения для выбора трёх элементов.
2. Запишите формулы для подсчёта P_n и C_n^k.
3. Заполните треугольник Паскаля до 10-й строки.
4. Запишите формулы сокращённого умножения: квадрат и куб суммы и разности.
5. По треугольнику Паскаля составьте формулу для четвёртой степени суммы.
6. Что означает тождество $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$ применительно к треугольнику Паскаля?
7. Запишите формулу бинома Ньютона в общем виде.
8. Почему числа сочетаний из n элементов по k называют также и биномиальными коэффициентами?
9. Дайте определение суммы и произведения двух событий.
10. Сформулируйте теорему о вероятности суммы двух событий.
11. Приведите определение несовместности и определение независимости двух событий.
12. Приведите формулу Бернулли для подсчёта вероятностей числа «успехов».
13. Дайте определение случайной величины на конечном множестве элементарных событий.
14. Как по таблице распределения с.в. найти её математическое ожидание?

15. Каков геометрический и механический смысл математического ожидания?

16. Перечислите свойства математического ожидания.

1) Объясните, почему математическое ожидание с.в. с равновозможными исходами равно среднему значению набора всех значений этой с.в.

2) Приведите формулу для подсчёта математического ожидания числа «успехов» в испытаниях Бернулли.

3) Чему равно наивероятнейшее число успехов в n испытаниях Бернулли?

4) Что называют частотой наступления события в n повторениях испытания?

5) Опишите, в чём состоит явление статистической устойчивости вероятности.

6) Как статистическая устойчивость может помочь для приближённого вычисления вероятности события?

Тест

1. Сколько есть способов составления расписания на пять разных уроков из данных пяти учебных предметов?

а) 25 в) больше тысячи

б) меньше 100 г) больше 100

2. Выберите неверное утверждение относительно чисел в восьмой строке треугольника Паскаля. В ней:

а) 9 чисел в) все числа двузначные

б) предпоследнее число равно 8 г) все числа меньше 100

3. Вычислите $C_4^2 + C_5^3 + C_6^4$.

а) 31 б) 25 в) 16 г) 21

4. Найдите коэффициент при x^3 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1 - 2x)^5$.

а) –10 б) –80 в) –40 г) 10

5. В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 чёрных, 2 жёлтых и 8 зелёных. Найдите вероятность того, что при случайном вызове свободной машины вызванным окажется зелёное такси.

а) 0,25 б) 0,08 в) 0,8 г) 0,4

6. В соревнованиях по гимнастике участвуют 25 спортсменов: 8 — из России, 7 — из США, 3 — из Канады, 5 — из Австралии, остальные — из Бразилии. Порядок, в котором выступают гимнасты, определяется жребием. Найдите вероятность того, что последним будет выступать спортсмен из государства, расположенного южнее экватора.

а) 0,56 б) 0,28 в) 0,2 г) 0,04

7. «Удача» при вытаскивании одной кости домино — наличие на этой кости «5» или «6». Чему равна вероятность «неудачи»?

а) $\frac{15}{28}$ б) 0,25 в) $\frac{13}{28}$ г) $\frac{11}{28}$

8. Монету подбрасывают трижды. Случайная величина T — это удвоенное число «орлов», уменьшенное на пять. Укажите множество значений случайной величины T.

а) {0; 1; 2; 3} в) {–5; –3; –1; 1}

б) {2; 4; 6} г) {–3; –1; 1}

9. По таблице распределения с.в. вычислите её математическое ожидание.

–2	0	3	5
0,2	0,3	0,4	0,1

а) 1,7 б) 1,6 в) –1,3 г) 1,3

10. Вероятность «неудачи» в одном испытании Бернулли равна 0,7. Найдите наименьшее значение n повторений этого испытания, при котором математическое ожидание числа «успехов» будет больше 19.

а) 190 б) 64 в) 28 г) 100

Из истории математики

Треугольник Паскаля в изложении самого Блэза Паскаля (1623—1662) был прямоугольным и равнобедренным (рис. 199), а не «равносторонним», как мы привыкли.

Обозначение C_n^k для числа сочетаний было предложено Паскалем (C от термина *combinasion* — комбинация), хотя после работ Леонарда Эйлера (1707—1783) в большинстве западных стран используют для этой цели символ $\binom{n}{k}$.

Само расположение чисел сочетаний в треугольной таблице вовсе не авторское изобретение Паскаля. Его использовали многие учёные.

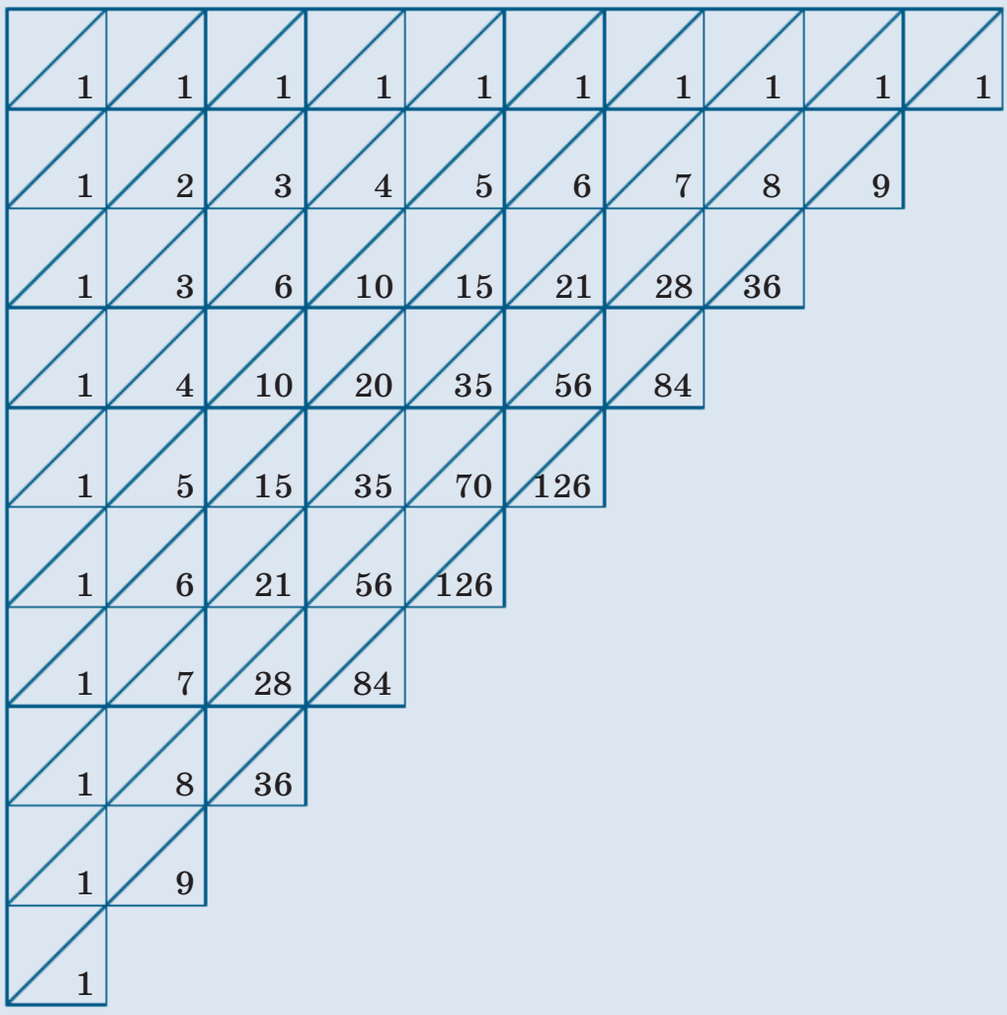


Рис. 199

Например, в Иране и сейчас этот треугольник часто называют треугольником Хайяма в честь Омара Хайяма (1048—1131), а в Европе этот треугольник был изображён на обложке одного из учебников по математике примерно за 100 лет до рождения Паскаля. Представление числа перестановок, размещений и сочетаний в виде сомножителей (через факториалы) также было известно задолго до Паскаля, как минимум, с книги (1321 г.) Леви бен Гершома из Прованса. Всё же именно «Трактат об арифметическом треугольнике» (1654 г., опубликован в 1665 г.) Паскаля был первым систематическим изложением сведений об этой замечательной конструкции. Например, в нём впервые было представлено доказательство рекуррентного тождества $C_{n+1}^{k} = C_{n}^{k-1} + C_{n}^{k}$.

Вопрос авторства также неоднозначен и в истории *бинома Ньютона*. Формулы сокращённого умножения для $(x + y)^n$ при $n > 3$ хорошо были известны в Китае в XIII в. и на Арабском Востоке (Ат-Туси в XII в., Аль-Каши в XV в.). В Европе Михаэль Штифель (1487—1567) уже составлял таблицы для биномов до 18-й степени включительно. Действительным открытием и достижением великого Исаака Ньютона (1643—1727) явился вывод (около 1677 г.) формул для биномов с дробными и отрицательными показателями степени. Позже это послужило основой для создания теории числовых рядов и представлений большого числа функций в виде *бесконечных* степенных рядов.

В 1657 г. была опубликована книга голландского учёного Христиана Гюйгенса (1629—1695) «О расчётах в азартной игре», которая стала первым и до начала XVIII в. практически единственным руководством по теории вероятностей в Европе. В 1713 г. был издан трактат «Искусство предположений» швейцарца Якоба Бернулли (1654—1705), в первой части которого содержались комментарии к книге Гюйгенса.

После появления «Искусства предположений» вероятность стали вычислять, используя то, что сейчас называется *классическим определением вероятности*, т. е. находить значение некоторой дроби, в знаменателе которой стоит число всех равновозможных исходов. Именно в этой работе Я. Бернулли сформулировал теорему о практическом совпадении частоты «успехов» в серии независимых повторений и вероятности «успеха» в отдельно взятом испытании, т. е. получил первый математический результат о *законах больших чисел*. Последний термин предложил в 1835 г. французский математик Симон Пуассон (1781—1840).

В становление теории вероятностей как отдельного раздела математики и развитие законов больших чисел существенный вклад внесли отечественные учёные Пафнутий Львович Чебышёв (1821—1894)

и Андрей Андреевич Марков (1856—1922). Великий советский математик Андрей Николаевич Колмогоров (1903—1987) в своих работах 30-х гг. XX в. предложил аксиоматическое построение теории вероятностей. Именно после работ Колмогорова в математике стали говорить об *алгебре событий*, т. е. общепринятым стало отождествление отдельного исхода испытания с элементом некоторого множества (*пространства элементарных событий*); случайного события с соответствующим подмножеством пространства элементарных событий; случайной величины с числовой функцией на пространстве элементарных событий.

Термин «ожидание» (от англ. *expectation*), видимо, впервые регулярно стал использовать Гюйгенс в рассуждениях об азартных играх: «...Если число случаев, в которых получается сумма a, равно p и число случаев, в которых получается сумма b, равно q и все случаи могут получиться одинаково легко, то стоимость моего *ожидания* равна $(pa + qb) : (p + q)$ ...» В наших терминах $M(S) = (pa + qb) : (p + q)$ для случайной величины, которая равна a для p исходов и равна b для q равновероятных между собой исходов. В «Аналитической теории вероятностей» (1812 г.) Пьер-Симон Лаплас (1749—1827) подходил к математическому ожиданию как к уже чёткому математическому понятию и применял его не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величин. Там же были введены производящие функции, доказаны многие теоремы о вероятностях, в частности обобщение *закона больших чисел* в форме Бернулли, так называемая теорема Муавра — Лапласа.

Относительно статистической устойчивости и большого числа подбрасываний монеты следует сказать, что в учебной литературе часто ссылаются на эксперименты многих учёных (Бюффона, де Моргана, Джевонса, Пирсона, Феллера) с числом бросаний от 4000 до 24 000. Пишут и примерно так: «А наш соотечественник, Всеволод Иванович Романовский, подбрасывая монету 80 тысяч 640 раз, нашёл, что относительная частота выпадения „орла“ в его испытании была равна 0,4923». С одной стороны, результаты такие есть. Но, с другой стороны, довольно странным кажется предположение, что серьёзные учёные через 200 и почти 300 лет после Бернулли действительно вдруг принялись заниматься экспериментальной проверкой его теоремы. На самом деле проводились исследования более деликатных вопросов, а вычисления относительной частоты выпадения «орла» были просто частным случаем[1].

[1] См. детальнее: Фалин Г. И. История опытов с бросанием монеты. Части 1—5.

Ответы

Глава 4

§ 32 **32.3.** б) 81; г) 100; е) 7. **32.8.** г) 1, 3, 5, 15; д) 4, 22; е) 1, 2, 5, 10. **32.11.** а), г) Да; б), в) нет. **32.15.** $p = 3$, $q = 2$. **32.16.** б) $m = 11$, $n = 5$; г) $m = 13$, $n = 11$. **32.26.** а) 18; б) 28; 53; 78. **32.27.** а)—г) Да; д), е) нет.

32.28. а) 0,32; б) 0,1. **32.29.** а) $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} 5 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **32.30.** а) 3 мин; б) 6 мин. **32.31.** а) $x \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) 2π; в) $f(x) = 0$ при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $f(x) < 0$ при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $f(x) > 0$ при $\pi + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 33 **33.5.** г) 4; д) 2; е) 7. **33.6.** б) $\frac{1}{37}$; г) $\frac{3}{550}$; е) $5\frac{233}{330}$. **33.15.** г) $a < b$; д) $a > b$; е) $a > b$. **33.18.** а) $\delta > 0{,}03$; б) $\delta > 0{,}17$. **33.19.** г) $\delta = 0{,}51$; д) $\delta = 0{,}25$; е) $\delta = 1{,}275$.

33.20. б) $1{,}1 < x < 1{,}3$; г) $4 < x < 5\frac{5}{7}$; е) $0{,}28 < x < 0{,}45$.

33.21. а) $6 \leqslant a < 7$; б) $-3 \leqslant a < -2$; в) $a = 3$; г) $a = 5$.

33.22. а) $-3{,}5 < m < -\frac{2}{3}$, $m > 1$; б) $m < 0$, $0{,}5 < m < 1$. **33.23.** в) 0,1; г) 4.

33.24. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{8\pi}{3}$. **33.25.** а) Корней нет; б) $-5 \leqslant x \leqslant 11$; в) -6; 14; г) корней нет; д) $-11 \leqslant x \leqslant 7$; е) -11; 13. **33.26.** в) $-4 < x < -3$, $0 < x < 1$; г) $p \leqslant 0{,}8$ и $p \geqslant 1{,}125$.

§ 34 **34.4.** а) $-1 + 5i$; б) $-18 + i$; в) $-6 + 4i$; г) $1 - 17i$; д) $25 + 98i$; е) $-43 + i$. **34.7.** а) i; б) $-i$; в) 0; г) i; д) $-i$; е) $-2i$. **34.8.** а) 0; б) 3; в) -8; г) -2; д) 2; е) -4.

34.9. а) -2; б) 12; в) -6; г) 2; д) -2; е) 96. **34.10.** г) $-\frac{1}{2}i$; д) $-2 - 2i$; е) $-\frac{119}{28\,561} + \frac{120}{28\,561}i$. **34.11.** а) $1 \pm \sqrt{2}$; б) $-1 \pm \sqrt{2}$; в) $3 \pm 3\sqrt{2}$; г) $\left(-\infty;\ -1 - \sqrt{2}\right) \cup \left(-1 + \sqrt{2};\ +\infty\right)$; д) $\left(-\infty;\ 2 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(2 + 2\sqrt{2};\ +\infty\right)$; е) $\left(-1 - \sqrt{2};\ -1\right) \cup \left(-1;\ \sqrt{2} - 1\right)$.

34.13. а) z — действительное число; б) 0; в) 1; г) $10 + bi$, $b \in \boldsymbol{R}$; д) нет решений; е) $-\frac{8}{15} + \frac{2}{15}i$. **34.16.** а) $\frac{1}{16}$; б) 4. **34.17.** в) $-\arcsin 0{,}3 + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \pi + \arcsin 0{,}3 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x < -\arccos 0{,}9 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \arccos 0{,}9 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **34.18.** а) $p = 2{,}5$; б) $p < 0$, $0 < p < 3$, $p > 3$.

§ 35 **35.8.** а) $5\sqrt{26}$; б) $\frac{25}{13}$; в) 32; г) $\sqrt{1717}$; д) $\frac{1}{25}$; е) $\frac{4\sqrt{2}}{169}$.

35.12. а) $2, \frac{\pi}{2}$; б) $4, \frac{\pi}{3}$; в) $\sqrt{10}$, $\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; г) $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}$; д) $\frac{1}{4}, \frac{2\pi}{3}$; е) $\sqrt{58}$, $\arcsin\left(\frac{7}{\sqrt{58}}\right)$. **35.15.** а) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $-\frac{7}{25}$; г) 0,8.

35.16. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pi(2k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4} + (-1)^m \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pi(2k-1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4} + (-1)^m \arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

35.17. а) x — любое число; б) $-12 \leqslant x \leqslant -9$; в) $x \leqslant -3$, $x \geqslant 13$; г) нет решений; д) $x < -7$, $x > 4$; е) $7 \leqslant x \leqslant 17$. **35.18.** а) 10 000 ед.; б) 70 тыс. р.

§ 36 **36.6.** г) $2 - 2i$, $-2 + 2i$; д) $3 + 2i$, $-3 - 2i$; е) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{2}i$.

36.7. а) 2; i; б) $3 + \sqrt{6 - i}$; в) 3; $1 + i$; г) $-4i$; $3i$; д) 3; $2i$; е) $-2 - 2i + \sqrt{3 + 2i}$.

36.9. г) $\cos 155° + i\sin 155°$; д) i; е) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **36.10.** г) -2^{22}; д) $-\frac{\sqrt{3}}{64} + \frac{1}{64}i$; е) $-\frac{1}{64} - \frac{\sqrt{3}}{64}i$. **36.11.** г) 3; д) 7; е) 14. **36.15.** г) $\cos 0{,}1\pi + i\sin 0{,}1\pi$; $\cos 0{,}9\pi + i\sin(-0{,}9\pi)$; д) $2(\cos 0{,}3\pi + i\sin 0{,}3\pi)$; $2\left(\cos\frac{29\pi}{30} + i\sin\frac{29\pi}{30}\right)$; $2\left(\cos\frac{11\pi}{30} + i\sin\left(-\frac{11\pi}{30}\right)\right)$; е) $3(\cos 0{,}5 + i\sin 0{,}5)$; $3\left(\cos\frac{\pi+1}{2} + i\sin\frac{\pi+1}{2}\right)$; $3\left(\cos\frac{1-2\pi}{2} + i\sin\frac{1-2\pi}{2}\right)$; $3\left(\cos\frac{1-\pi}{2} + i\sin\frac{1-\pi}{2}\right)$.

36.16. а) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ 1$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\ -i$;

в) $-1+\sqrt{3}i;\ -1-\sqrt{3}i;\ 2$; г) $-1;\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\ i$;

е) $-2\sqrt{3}-2i;\ 2\sqrt{3}-2i;\ 4i$. **36.17.** а) R^2n^2; в) $R^{\frac{n(n-1)}{2}}n^{\frac{n}{2}}$.

36.18. а) 1; б) 2. **36.19.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\pi+\frac{4\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$.

36.20. а) $\frac{3\pi}{2}$; б) 5π; в) $\frac{5\pi}{2}$; г) $\frac{7\pi}{2}$. **36.21.** в) $7\leqslant x<0,\ 1<x<2,\ 3<x<6$;

г) $-1\frac{1}{3}\leqslant p\leqslant\frac{1}{7}$.

Тест **1.** а). **2.** г). **3.** в). **4.** б). **5.** а). **6.** в). **7.** г). **8.** в). **9.** а). **10.** б).

Глава 5

§ 37 **37.7.** в) (1; 6); г) (2; –5). **37.8.** г) 2; д) 1; е) 1. **37.10.** г) $x\geqslant 0$; д) $x\geqslant 1$; е) $x\leqslant 1$. **37.17.** а) 1; б) 2; в) 1; г) –1. **37.18.** а) 2; б) –2. **37.19.** б) 0, если $a\leqslant -2$; 1, если $-2<a\leqslant -1$; 2, если $a>1$. **37.20.** а) 16; б) 8; в) 8; г) 8; д) 6; е) 8. **37.21.** а) 4; б) 12; в) 12; г) 7; д) 8; е) 1. **37.22.** г) 26; д) 3; е) 4,5.

37.23. г) 10; д) $\frac{2}{3}$; е) 1. **37.24.** а) 135 км/ч; б) 6 км/ч.

§ 38 **38.9.** г) $y>0$ при $-2<x<-1$, $y<0$ при $x<-2$, $x>-1$. **38.10.** г) $y>0$ при $1<x<1{,}5$, $y<0$ при $x<1$, $x>1{,}5$. **38.12.** в) $-1<x<0$; $0<x<1$; г) $-1<x<0$; $x>1$. **38.16.** а) 2; б) 2. **38.17.** б) 0, если $a<-1$; 1, если $a=-1$; 2, если $-1<a<0$ и $a>1$; 3, если $a=0$ и $a=1$; 4, если $0<a<1$.

38.18. а) 2,25; б) –1; в) $\frac{33}{16}$; г) $\frac{15}{16}$; д) 3; е) –2. **38.19.** а) 1; б) 1; в) 5; г) 5.

38.21. а) 48 и 35; б) 41 и 52. **38.22.** а) $\frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ \frac{11\pi}{4}$; б) $-2\pi,\ -\pi,\ -\frac{7\pi}{6}$.

38.23. в) При $p=-1$; $p=2$; г) $\frac{\pi}{3}<x\leqslant\frac{11\pi}{6}$.

§ 39 **39.9.** в) $[-1{,}6;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$; г) $(-3;\ 1)\cup(1;\ 2]$. **39.10.** а) 2; б) 1. **39.13.** а) 2; 0,5; б) 1; в) –2; г) 17. **39.14.** а) 9; б) $-1\leqslant x<1$; в) $x>2$; г) $0<x<2$. **39.15.** б) 0, если $a<1$; 1, если $a=-1$; 2, если $1<a<2$ и $a>3$; 3, если $2\leqslant a<\sqrt[3]{6}$, $a=3$; 4, если $\sqrt[3]{6}\leqslant a<3$. **39.16.** а) 4; б) 4; в) 13; г) 24; д) 17; е) 33. **39.17.** г) –0,1; д) 2; е) 4. **39.18.** а) 145; б) 2047. **39.19.** а) 0,4; б) 0,375. **39.20.** а) При $-2\leqslant p\leqslant 2$; б) при $2\leqslant p\leqslant 6$.

§ 40 **40.20.** г) $x^2y^{15}\sqrt[7]{x^7y^4}$; д) $\sqrt[12]{128a^{11}}$; е) $\sqrt[30]{a^5b^{13}}$. **40.22.** в) $\frac{1}{16}$; г) 1. **40.24.** в) $3\sqrt{2}+5$; г) $2\sqrt{3}-7$. **40.25.** а) $2+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}-2$. **40.26.** а) $\sqrt{5}-2$; б) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$. **40.27.** а) $1+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}-1$. **40.30.** а) 9; б) 25; в) 16; г) 8; д) –18; е) –8. **40.31.** а), б), г), д) Нет; в), е) да. **40.32.** а), д) Нет; б)—г), е) да. **40.34.** а) 40 т, 100 т; б) 840 г. **40.35.** а) $-\frac{5\pi}{4}$; б) $\pm\frac{\pi}{3}, \pi$. **40.36.** в) При $-6 \leqslant p < -2$, $p = 2$; г) $-6 \leqslant x \leqslant -3$.

§ 41 **41.5.** б) 1; г) $\frac{1}{8}$; е) 20. **41.12.** в) $x < -4$; г) $x \leqslant 1$. **41.13.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{24}$; $\frac{17\pi}{24}$; $\frac{21\pi}{24}$; б) $\frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; π; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{5}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$.

§ 42 **42.6.** б) 1; г) 8; е) 1. **42.7.** б) (8; –4); г) (1; 1); е) (0; 0); (1; 1). **42.8.** б) $0 < x < 1$; г) $0 < x < 8$; е) $0 < x \leqslant 1$. **42.13.** г) 2,25; д) 3,25; е) 3,125. **42.14.** а) 1; б) 1. **42.15.** б) 0, если $a > 2+\sqrt[5]{16}$; 1, если $a < -2$, $0 < a < 2+\sqrt[5]{16}$; 2, если $a = -2$, $a = 0$; 3, если $-2 < a < 0$. **42.17.** а) $-\frac{24}{7}$; б) $\frac{119}{120}$. **42.18.** а) 12 л/мин; б) 22 л/мин. **42.19.** а) $\left[-\frac{17}{8}; 4\right]$; б) $\left[-\frac{9}{8}; 2\right]$.

§ 43 **43.2.** в) $\frac{2}{3}$ и 7; г) 1 и 8. **43.3.** б) 79; г) 200; е) 128. **43.5.** в) 1; г) 2. **43.6.** в) 0,92; г) –0,5 и –5. **43.7.** г) $\frac{1}{81}$ и 81; д) 1024; е) 81. **43.8.** г) $6\frac{3}{7}$; д) $\frac{5}{12}$; е) $5\frac{13}{81}$. **43.9.** в) ±3; г) $\pm\sqrt{1{,}5}$. **43.10.** в) $-\frac{10}{17}$, $\frac{10}{7}$; г) 0,5. **43.11.** в) –1; г) 3. **43.12.** а) 8; б) 27. **43.13.** в) 1; г) 1,25. **43.14.** а) –0,5; б) 1. **43.15.** а) 1, $-\frac{1}{3}$; б) –2, 6; в) –1, 0; г) –7, 2. **43.16.** а) 1, 0; б) 2, 0. **43.17.** а) 2; б) –2; в) –1; г) 1. **43.18.** а) $p = 0$, $\frac{7}{3} \leqslant p \leqslant 7$; б) $x = 2$, если $1 \leqslant p \leqslant 4$; $x = 0$, если $p = 0$; нет корней, если $p < 0$, $0 < p < 1$, $p > 4$. **43.19.** а) $a = 6$; б) $a = 10$. **43.20.** а) 629 856 р.; б) 600 000 р. **43.21.** а) $2\sin x$; б) –1.

§ 44 **44.8.** б) 1; г) $\frac{1}{3}$; е) 0,5. **44.9.** г) –0,5; д) –12; е) $-\frac{5}{3}$. **44.10.** а) $\frac{y}{y-x}$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$. **44.11.** в) a^2-b^2; г) $n-k$. **44.12.** в) $-\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$; г) 1.

44.13. а) $2a+4\sqrt{a}$, если $0<a<4$; $4\sqrt{a}+8$, если $a>4$; б) $\sqrt[6]{b}$.

44.14. а) $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $(a;\ b)\neq(0;\ 0)$, $b\neq 4a$; б) $ab>0$, $ab\neq 1$.

44.15. а) $a>3$; б) $a\geqslant 2$. **44.16.** а) 50; б) 75; в) 80; г) 250; д) 80; е) 25.

§ 45 **45.2.** б) Нет; г) да; е) нет. **45.6.** а) 30°; б) 4,2 м. **45.7.** а) –7; б) –0,5.

45.8. в) При $p=-1$; $p>1$; г) $-\frac{5\pi}{4}\leqslant x<\frac{3\pi}{4}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$. **45.9.** а) 0,9775; б) 0,1.

Тест **1.** –2. **2.** а). **3.** в). **4.** г). **5.** 15,5. **6.** б). **7.** Б). **8.** А — 4; Б — 2; В — 1. **9.** 0. **10.** 4.

Глава 6

§ 46 **46.4.** а) $p=0{,}5$, $q=4$; б) $p=-2$, $q=3$. **46.6.** г) Убывает; д) убывает; е) возрастает. **46.7.** б) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; е) $(0;\ +\infty)$.

46.9. г) $\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$; д) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; е) $(-2;\ 1)$. **46.10.** г) $(4;\ +\infty)$; д) $(-3;\ +\infty)$; е) $(0;\ +\infty)$. **46.11.** г) 18; д) 13; е) 20. **46.13.** г) 2; д) –1; е) 1. **46.14.** г) 0; д) 1; е) 1. **46.15.** г) $x>4$; д) $x\geqslant 5$; е) $x<-2$. **46.16.** а) $x<-1$; б) $x>0$. **46.17.** а) $-\infty<x<+\infty$; б) $x<-1$, $x>0$. **46.19.** г) $p=6$. **46.20.** г) $p<-0{,}5$. **46.22.** в) $-1\leqslant x\leqslant 0$; г) $x<0$, $x>2$. **46.23.** в) $-\infty<x<+\infty$; г) $x=0$. **46.25.** а) 1; б) 2; в) –3; г) –1. **46.26.** а) $x\geqslant 3$; б) $x>-1$; в) $x\leqslant -4$; г) $x>-1$. **46.27.** б) Корней нет, если $a<-2$; один, если $a=-2$, $a>56$; два, если $-2<a\leqslant 56$. **46.28.** а) 8; б) 5. **46.29.** г) Да; д) нет; е) да.

46.30. а) $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$; б) $-\pi$, $-\frac{29\pi}{30}$, $-\frac{19\pi}{30}$, $-\frac{17\pi}{30}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{30}$, $-\frac{\pi}{6}$, 0. **46.31.** г) –1; д) 1; е) –1. **46.32.** а) $p=-2\frac{1}{8}$, $p>-2$; б) $-6<p<-2$.

§ 47 **47.4.** в) $0<p<1$. **47.5.** в) $0<p<1$. **47.7.** в) $p<-1$. **47.8.** в) $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$; г) –1.

47.9. а) $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{35\pi}{24}$, $-\frac{31\pi}{24}$, $-\frac{9\pi}{8}$; б) $-\pi$, $-\frac{4\pi}{5}$, $-\frac{3\pi}{5}$, $-\frac{11\pi}{12}$, $-\frac{7\pi}{12}$.

47.10. а) 1 185 000 р.; б) 1 166 000 р.

§ 48 **48.2.** б) –1; 4,5; г) –2; е) 2. **48.3.** б) 1; $\frac{4}{3}$; г) –2; 2; е) –2; 3. **48.4.** г) $\frac{2}{3}$; д) $-\frac{1}{3}$; 4; е) 0. **48.5.** в) –3; 3,5; г) $\frac{23}{18}$. **48.6.** а) 25; б) 3; –0,2. **48.7.** г) 2; д) 0,4; е) 0.

48.8. г) 2; д) –1; 0; е) –3. **48.9.** г) 1; д) 0; 2; е) 3. **48.10.** в) 0; г) 0. **48.11.** в) 3; г) 1. **48.12.** а) 0; 1; б) –2; –1. **48.13.** а) ±6; б) ±10. **48.14.** а) $\pm\frac{1}{2}$; б) 1. **48.15.** г) 0; 1; д) –1; 2; е) 0; 1. **48.16.** а) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **48.17.** а) ±2; б) $\mathbf{1}$; $1 \pm \sqrt{2}$; в) ±1; г) $\pm\frac{1}{2}$. **48.18.** а) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$; $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right)$; б) (4; 1). **48.19.** а) (0; 1); б) (5; 2). **48.20.** а) (1; 3); б) (1; 2). **48.21.** а) $p < 0$; б) $p < -2$; $p > -2$. **48.22.** а) $-3 \leqslant p \leqslant 0$; б) $p \leqslant -1$. **48.23.** а) –1; б) –1. **48.24.** а) 1,5; б) 2,5. **48.25.** а) 0; 1; б) 1. **48.26.** а) $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) -3, $x \geqslant -1$; в) 2; г) $\varnothing$. **48.27.** а) 9; 2; б) 1; 4. **48.28.** г) 1; –1,5; д) 5; –1,5; е) 4; –1. **48.29.** а) 2; б) 0. **48.31.** а) $\left(\frac{\pi}{6}; 1{,}5\right)$; б) $\left(\frac{2\pi}{3}; -1{,}5\right)$. **48.32.** а) $\frac{\pi}{3} < p < \frac{2\pi}{3}$; б) $0 < p < \frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6} < p \leqslant \pi$. **48.33.** в) При $p = -1$, $p = 1$.

§ 49 **49.4.** в) $-2 \leqslant x \leqslant 0{,}5$; г) $x < \frac{1}{3}$; $x > 4$. **49.5.** в) $-2 \leqslant x \leqslant 0{,}5$; г) $x < \frac{1}{3}$, $x > 4$. **49.6.** в) $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 3$; г) $-3 \leqslant x \leqslant 0{,}5$. **49.7.** в) $-\frac{1}{7} \leqslant x < 2$; г) $x < \frac{1}{3}$; $x > \frac{8}{3}$. **49.8.** г) 10; д) 6; е) 7. **49.9.** в) $-2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}$; г) $x \leqslant 0$. **49.10.** в) $-1 < x < 0$; $0 < x < 1$; $1 < x < 2$; г) $-\frac{2}{3} < x \leqslant 0$. **49.11.** г) $x < 1$; д) $x < 0$; е) $x \leqslant 0$, $x \geqslant 1$. **49.12.** в) $x \geqslant 1$; г) $x > -\frac{3}{7}$. **49.13.** а) $x > 0$; б) $x \geqslant 0$. **49.14.** в) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 0{,}5$. **49.15.** в) $-1 < x < 1$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 2$. **49.16.** в) $x \leqslant -5$, $-2 \leqslant x \leqslant 3$; г) $x \leqslant -3$, $4 < x \leqslant 7$. **49.17.** в) $x < -1$; г) $x < -2$, $x > 0$. **49.18.** а) $x < -1$, $x > 1$; б) $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **49.19.** г) $-1 < x < 0$; д) $-1 < x < 1$; е) $0 \leqslant x < 1$. **49.20.** а) $x > 0$; б) $-1 \leqslant x \leqslant 0$. **49.21.** а) $x < 0$; б) $x \leqslant 1$. **49.22.** а) $x \leqslant 2$; б) $x > 2$. **49.23.** г) $\frac{2}{3}$; д) 2,5; е) 17. **49.24.** а) 0; б) $-\infty < x < +\infty$. **49.25.** г) $\left[-4; 4\frac{1}{3}\right]$; д) $\left[-7\frac{1}{24}; 5\right]$; е) $(-\infty; +\infty)$. **49.26.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) при любых значениях x.

§ 50 **50.3.** г) 6; д) –2,5; е) 7. **50.5.** б) 1000; г) $\sqrt{7}$; е) 0,125. **50.6.** г) 10,4; д) 14,5; е) 10,4. **50.7.** в) $a > b$; г) $a < b$. **50.11.** в) $\frac{1}{3}(\log_{18} 23 + 1)$; г) $\pm\sqrt{2\log_{13} 4}$. **50.12.** в) $\log_4 3$; г) $\log_7 3$, $\log_7 8$. **50.13.** г) $x < \log_{0,25} 9 - 2$; д) $x < -\log_7 2$, $x > \log_7 2$; е) $-\log_{\sqrt{19}} 3 \leqslant x \leqslant \log_{\sqrt{19}} 3$. **50.14.** в) $x > 0$; г) $x \leqslant \log_{\frac{5}{7}} 2$, $x \geqslant 1$. **50.17.** а) Если $p \leqslant 5$, то $x = \log_3 5$; если $p > 5$, то $x = \log_3 5$, $x = \log_3 (p - 5)$; б) если $p \leqslant -2$, то корней нет; если $-2 < p \leqslant 1$, то $x = \log_5 (p + 2)$; если $p > 1$, то $x = \log_5 (p + 2)$, $x = \log_5 (p - 1)$. **50.18.** а) –1, $\log_{0,4} 5$; б) $\log_6 5$, $\log_{25} 6$. **50.20.** г) 3; д) 17; е) 5. **50.21.** в) $\frac{39}{113}$; г) 2.

§ 51 **51.6.** в) $y_{\text{наиб}} = 3$, $y_{\text{наим}} = -1$; г) $y_{\text{наиб}} = 0$, $y_{\text{наим}} = -1$. **51.7.** в) 1; г) 7. **51.8.** г) $0 < x \leqslant 3$; д) $x > 4$; е) $-1 < x < 0$, $0 < x \leqslant 2$. **51.9.** а) $p = \frac{1}{9}$, $q = 81$; б) $p = 2$, $q = 8$. **51.10.** а) $y_{\text{наиб}} = -1$; б) $y_{\text{наим}} = 0$. **51.11.** в) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $(3; 4)$. **51.12.** в) $[1; +\infty)$; г) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **51.13.** г) 7; д) 3; е) 20. **51.17.** г) $p = 4$, $p = 0$. **51.18.** г) $p > -1$. **51.24.** в) Нет; г) да. **51.27.** в) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 52 **52.3.** в) 1; г) 8. **52.4.** в) 15; г) 6,3. **52.5.** в) 28; г) $\sqrt{6}$. **52.6.** в) 196; г) $2{,}5\sqrt{2{,}5}$. **52.7.** а) 2; б) 1. **52.8.** а) 3; б) 2. **52.9.** г) 1; д) 2; е) $2 + 2\log_3 2$. **52.10.** в) $4b$; г) $c - 1$. **52.11.** в) -1; г) вычислить нельзя. **52.12.** б) $2a + b$; г) $2a + 2b + 1$; е) $-2a - 2b$. **52.13.** б) $p + q$; г) $0{,}5p + 2q$; е) $-p - q - 1$. **52.14.** в) 8; г) 3. **52.15.** в) $\frac{1}{484}$; г) $\frac{1}{49}$. **52.18.** а) $a < b$; б) $a > b$; в) $a > b$; г) $a < b$. **52.19.** г) 1,8; д) корней нет; е) 4. **52.20.** г) 2; д) 0; 25; е) $-0{,}91$. **52.22.** а) $\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{8} + nk$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{8\pi}{3}$; -3π; $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{49\pi}{8}$; $-\frac{47\pi}{8}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi m$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}$, $m \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{37\pi}{12}$; $\frac{39\pi}{12}$; $\frac{41\pi}{12}$.

§ 53 **53.2.** г) 10; д) 10; е) 0,01 и 100. **53.3.** б) $x \geqslant 1$; г) $-2 < x < -1$; е) $0 < x \leqslant 3$. **53.4.** б) 0; г) -3; е) 4. **53.5.** б) 3,7782; г) $-1{,}2218$; е) 6,7782. **53.7.** а) 0,5; б) $-0{,}5$. **53.8.** а) $t < \frac{\pi}{4}$; б) $t < \frac{\pi}{4}$. **53.10.** а) 0,3; б) 0,2.

§ 54 **54.2.** в) 2,5; -2; г) 2; 6. **54.3.** в) Нет корней; г) 1. **54.4.** в) -11; г) 6. **54.6.** в) 18; г) 6. **54.7.** в) -4; г) 4. **54.8.** а) 4; 6; б) 3; -10. **54.9.** в) $\varnothing$; г) 1. **54.10.** в) 625; г) e^{-5}; e^5. **54.11.** в) $\frac{1}{25}$; г) $\frac{1}{125}$; 25. **54.12.** в) -20; г) 5; $\sqrt[5]{5}$. **54.13.** в) 1; г) $\ln 2$. **54.14.** в) 5; г) 3. **54.15.** в) $\frac{1}{25}$; 25; г) $\frac{1}{3}$; $3\sqrt{3}$. **54.16.** в) 5; г) 2,5. **54.17.** в) 4; г) 0,5. **54.18.** в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{1}{5}$. **54.19.** в) 6; -2; г) -8. **54.20.** а) 10; б) 10^5; 0,1. **54.21.** а) 0; б) 2; в) 3; г) 5. **54.22.** а) 0,5; 32; б) 1; $10^{-\sqrt{\lg 1{,}5}}$; в) 0,2; 25; г) $\frac{1}{16}$; 2. **54.23.** а) 0,5; 1; 16; б) 1; 2; $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$. **54.24.** б) $(3; -1)$. **54.25.** б) $(3; -3)$, $\left(\frac{63}{13}; \frac{9}{13}\right)$. **54.26.** б) $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. **54.27.** б) $(729; 3)$. **54.28.** б) Нет решений. **54.29.** а) $\frac{1}{9}$; 9;

б) 1; $\frac{17}{12}$; $\frac{11}{6}$. **54.30.** а) 1; б) $5\frac{2}{3}$. **54.31.** а) 0; б) 1. **54.32.** а) 2; 0,25; б) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};1\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **54.33.** в) Да; г) нет. **54.35.** в) –3; г) 6. **54.36.** а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 55 **55.2.** в) $x > 27$; г) $\frac{21}{11} < x \leqslant 11$. **55.3.** в) $-9 < x < -8$; $0 < x < 1$; г) $x < -6$; $x > 5$. **55.4.** в) $-5 \leqslant x < -2$; $0 < x \leqslant 3$; г) $0{,}4 < x \leqslant 10$. **55.5.** в) Нет решений; г) $10\frac{2}{3} < x < 12$. **55.6.** в) $1 \leqslant x \leqslant 6$; г) $-1 \leqslant x < 0$; $2{,}5 < x \leqslant 3{,}5$. **55.7.** а) $3 < x < 4{,}5$; б) $-2 < x < -\frac{56}{31}$. **55.8.** в) $\frac{1}{4} < x < 256$; г) $0 < x < 0{,}09$; $x > 3\frac{1}{3}$. **55.9.** в) $\sqrt[8]{11} \leqslant x \leqslant 11$; г) $0 < x \leqslant \frac{1}{27}$; $x \geqslant \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. **55.10.** в) $x \geqslant 4$; г) $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$. **55.11.** в) 2; г) 0. **55.12.** г) 9; д) 4; е) 9. **55.13.** в) $x \leqslant -\frac{2}{3}$; $x \geqslant \frac{1}{2}$; г) $5 < x \leqslant 9$. **55.14.** в) Нет решений; г) $4\frac{1}{3} < x \leqslant 5$; $x \geqslant 6$. **55.15.** а) $-5 \leqslant x < -4$; б) $1 \leqslant x \leqslant 3$. **55.16.** а) $1 \leqslant x \leqslant 4$; б) $x < -2$, $x > 6$; в) $x < 0{,}25$, $x > 4$; г) $x < 0{,}5$, $x > 2$. **55.17.** а) $1 < x < 2$; б) $0 < x < \log_3 \frac{28}{27}$; в) $x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$; г) $x \leqslant 0$, $\log_2 3 \leqslant x < 2$. **55.18.** а) $\log_5\left(\sqrt{2}+1\right) < x < \log_5 3$; б) $0 < x < 0{,}4$, $x > 1$; в) $0{,}25 < x < 1$, $1 < x < 4$; г) $\frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}$, $4 < x < 8$. **55.19.** а) $-1 \leqslant x < -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5} < x \leqslant 1$; б) $-1 < x < -0{,}5$; $x > 4$. **55.20.** а) $2^{-28} < x < 1$; б) $\frac{1}{3} < x < 3$. **55.21.** а) $x < 0$, $x > 1$; б) $4 < x < 10$. **55.22.** а) $0 < x < 4$; б) $x < \frac{7}{3}$, $x > 3$. **55.23.** а) $x < 0$, $1 < x < 2$; б) $0 < x < 0{,}5$, $2 < x < 3$. **55.24.** $-1 < x < 0$, $1{,}5 < x < 2$. **55.25.** г) $1 < x \leqslant 2{,}5$; д) $-1 < x < 0$; е) $3 \leqslant x < 6$. **55.26.** а) $\sqrt[5]{5} < x < 5$; б) $1 + \log_4 3 < x \leqslant 2$. **55.27.** а) $x > 1$; б) $-2 < x < -1{,}5$, $\frac{8}{3} < x < 5$, $x > 5$; в) $-2\sqrt{3} < x < -2$, $2 < x < 2\sqrt{3}$; г) $x < 0$, $x > 5$. **55.30.** а) $\frac{11\pi}{2} \leqslant p < \frac{15\pi}{2}$; б) $\pi \leqslant p < 2\pi$. **55.31.** а) При $-2 < p < 0$; б) при $p = -4$, $p > 0$.

§ 56 **56.1.** г) 0; д) 0; е) 2. **56.2.** б) $-\frac{1}{a}$; г) $1{,}5a$; е) $-\frac{2}{3a}$. **56.3.** г) $\log_8 11 > \log_{11} 8$; д) $\log_{11} 14 > \log_{14} 13$; е) $\log_{\frac{1}{5}} 3{,}5 < \log_{\frac{1}{25}} 7$. **56.4.** г) 29; д) 5; е) 16,5. **56.5.** а), б) 6.

56.6. г) 18; д) 5; е) 5. **56.7.** г) $\frac{1}{\sqrt[4]{125}}$; д) 890; е) $\frac{1}{3}$. **56.8.** а) $\frac{a+3}{2a+2}$; б) $\frac{b}{1-a}$; в) $\frac{3a-b+5}{a-b+1}$; г) $\frac{4(3-a)}{3+a}$; д) $\frac{a+2b-2}{1-a}$; е) $\frac{a+1}{2a+b}$. **56.9.** б) $\frac{2a+b}{a+b}$; г) $-\frac{a}{b}$; е) $\frac{a+b}{2a}$. **56.10.** б) $625\sqrt{5}$. **56.11.** г) 4; 8; д) $\frac{1}{6}$; 6^5; е) 8; 8^9. **56.12.** г) 4; д) 5; е) $-\frac{1}{4}$. **56.13.** а) $-5 < x < 0{,}04$; б) $-27 < x < -\frac{1}{9}$. **56.15.** а), б) $\log_a b$. **56.16.** а) $\frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$; б) 1; в) 2; г) $\frac{1}{12}$; д) 2; е) 2. **56.17.** а) $-2{,}6$; -1; 3; б) 1; 2. **56.18.** а) $1 < x < 4$; б) $0 < x < 2$, $x > 4$; в) $0 < x \leqslant \frac{\sqrt{6}}{6}$, $x \geqslant 1$; г) $x > 2$. **56.19.** в) $-\arccos 0{,}3 + 2\pi n \leqslant t \leqslant -\arcsin 0{,}3 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\arccos(-0{,}7) + 2\pi n \leqslant t \leqslant \pi + \arcsin 0{,}7 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **56.20.** в) $(-\infty; -1]$; г) $[1{,}5; +\infty)$. **56.21.** а) Через 2 с; б) через 3 с. **56.22.** в) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; $x \geqslant \pi$; г) $p = \pm 1$.

Тест **1.** а). **2.** а), в), г). **3.** б). **4.** г). **5.** А — 3; Б — 1; В — 2. **6.** 7. **7.** $-0{,}5$. **8.** б). **9.** 2. **10.** г).

Глава 7

§ 57 **57.1.** а) 3; б) 19; в) 54; г) 6; д) 120; е) 92. **57.2.** а) 27 216; б) 62 784; в) 5625; г) 4536; д) 4536; е) 3915. **57.3.** а) 3136; б) 1568; в) 3612; г) 1806; д) 18 816; е) 4560. **57.4.** а) 72; б) 288; в) 7056; г) 1008; д) 4704; е) $C_8^n \cdot C_9^m$. **57.5.** а) 210; б) 175; в) 175; г) 135; д) 135; е) 541. **57.6.** а) 1; б) 210; в) 100; г) 15; д) 540; е) 1440. **57.7.** а) 2; б) 9; в) 8; г) 2; д) 11; е) (1; 10), (9; 10), (2; 5), (3; 5). **57.8.** а) 3; б) 4; в) 4; г) 4, 5, 6; д) $n > 8$; е) 6 и 7. **57.10.** а) 1; б) 3; в) 5; г) $n + 1$; д) $2 + m$; е) $n + m$. **57.11.** б) 10; в) 45. **57.12.** а) 4; б) 15; в) C_{N-1}^3; г) 6; д) 84; е) C_{N-1}^{n-1}. **57.13.** а) 7; б) 28; в) 56; г) 9; д) 78; е) 220. **52.14.** а) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$; б) $8z^3 - 60z^2 + 150z - 125$; в) $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$; г) $b^4 - 8b^3 + 24b^2 - 32b + 16$; д) $c^4 + 8c^3d + 24c^2d^2 + 32cd^3 + 16d^4$; е) $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$. **52.16.** а) $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; -3π, $-\pi$, π; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$; д) πn, $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; -3π, $-\frac{19\pi}{6}$, $-\frac{17\pi}{6}$; е) $2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; -2π, 0, $-\frac{4\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$. **52.17.** а) 0,12; б) 0,2; в) $-0{,}75$; г) $-2{,}1$; д) $-0{,}35$; е) 0,5. **57.18.** а) -13; б) -98; в) 0,2; г) 1; д) 4; е) $\frac{1}{18}$. **57.19.** а) $-1 < x \leqslant \frac{1}{3}$; б) $3 < x \leqslant 5$.

§ 58 **58.1.** а) 0; б) 0,2; в) 0,21; г) 0,01; д) 0,2; е) 0,1. **58.2.** а) $\frac{1}{21}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{2}{7}$; г) $\frac{1}{21}$; д) $\frac{5}{21}$; е) $\frac{10}{21}$. **58.3.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{13}{15}$; в) $\frac{8}{15}$; г) $\frac{2}{15}$; д) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{2}{9}$. **58.4.** а) $\frac{12}{33} \approx 0{,}364$; б) $\frac{5}{11} \approx 0{,}455$; в) $\frac{4}{33} \approx 0{,}121$; г) $\frac{31}{33} \approx 0{,}94$; д) $\frac{29}{33} \approx 0{,}879$; е) $\frac{9}{11} \approx 0{,}818$. **58.5.** а), б), е) $\frac{15}{28}$; в) $\frac{3}{28}$; г) $\frac{5}{14}$; д) $\frac{25}{28}$. **58.6.** а)—д) 0,5; е) 0,75. **58.7.** а) 0,25; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{5}{9}$; г) $\frac{1}{6}$; д) 0,5; е) 0. **58.10.** а) $\frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11}$; б) $\frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11}$; в) $\frac{3}{13} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11}$; г) $\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11}$; д) $\frac{10}{13} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11}$; е) $\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11}$. **58.12.** а) 0,49; б) 0,36; в) 0,09; г) 0,24; д) 0,09; е) 0,62. **58.13.** а) 0,2; б) 0,85; в) 0,04; г) 0,7; д) 0,0979; е) 0,04. **58.14.** а), б) 0,4096; в) 0,1536; г) 0,0256; д) 0,0016; е) 0,1024. **58.15.** а) $n \cdot \frac{p}{q}$; б) $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{p}{q}$; в) $\frac{1}{n} \cdot \frac{p}{q}$; г) $\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}$. **58.17.** а) $4{,}5\sqrt[4]{2}$; б) 7; в) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; г) $-1{,}6\sqrt[3]{3}$; д) –0,25; е) $3 - \sqrt{7}$. **58.18.** а) 1 и $\sqrt{2}$; б) 2; в) –1; г) 1; д) –3 и 3; е) –1 и 4. **58.19.** а) $\frac{5}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, 4; б) –0,6, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, 2.

§ 59 **59.2.** а) 1; б) 2; в) –3; г) –1; д) –1; е) 0,5. **59.3.** а) 0,2; б) 3,5; в) 4,05; г) $\frac{24}{7}$; д) 3; е) $\frac{11}{3}$. **59.4.** а) 0,2; б) 0,3; в) 0,3; г) $\frac{2}{7}$; д) 0,8; е) 0,6. **59.5.** а) 0; б) 1; в) 10; г) –0,5; д) 0,5; е) 6. **59.6.** а) 0; б) 0,1; в) 0,5; г) 0,6; д) 0,6; е) 0,4. **59.7.** а) 0,61; б) 0,79; в) 0,74; г) 0,39; д) 0,26; е) 0,36. **59.8.** а) 0; б) 1; в) 0,91; г) 0,09; д) 0,29; е) 0,61. **59.9.** а) $M = 5 - 16p$; б) $p = \frac{5-M}{16}$; в) 5; г) нет; д) нет; е) $-\frac{1}{3}$. **59.10.** а) 1,5; б) 1,5; в) 7,5; г) 3; д) 1,5; е) $\frac{23}{8}$. **59.11.** а) $3p$; б) $6p + 3$; в) $3p(3p^2 + 4pq + q^2)$; г) $3q$; д) $3 - 3q$; е) $6pq$. **59.12.** а) p^4; б) $q^2(q^2 + 4qp + 6p^2)$; в) $4pq(p^2 + q^2)$; г) q^4; д) $p^2(p^2 + 4qp + 6q^2)$; е) $4p$. **59.13.** а) 0,6517; б) 0,0837; в) 0,9919; г) 0,7599; д) 0,4872; е) 0,0837. **59.14.** а) 11; б) 200,6; в) 54,5; г) 549,5; д) 551; е) 336. **59.16.** а) $0 \leqslant m < 0{,}5$ и $m \geqslant 8$; б) $m \leqslant 1$ и $9 < m \leqslant 10$. **59.17.** а) 4; б) 4; в) 1; г) –3; д) 2; е) –1 и $\log_4 3$. **59.18.** а) $-1 < x < 4$; б) $x > 2$; в) $x \leqslant -2$, $x \geqslant \log_5 2$; г) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 3$; д) $x \leqslant 5$; е) $1 < x < \log_{\frac{2}{3}} 0{,}5$. **59.19.** а) $-\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 60 **60.4.** а) 15,8 %; б) 15 %; в) 15,3 %; г) 17,3 %; д) 16,8 %; е) 16,3%.
60.7. а) 94; б) 235; в) 2350; г) 1915; д) 4255; е) 20 000.
60.10, 60.12.

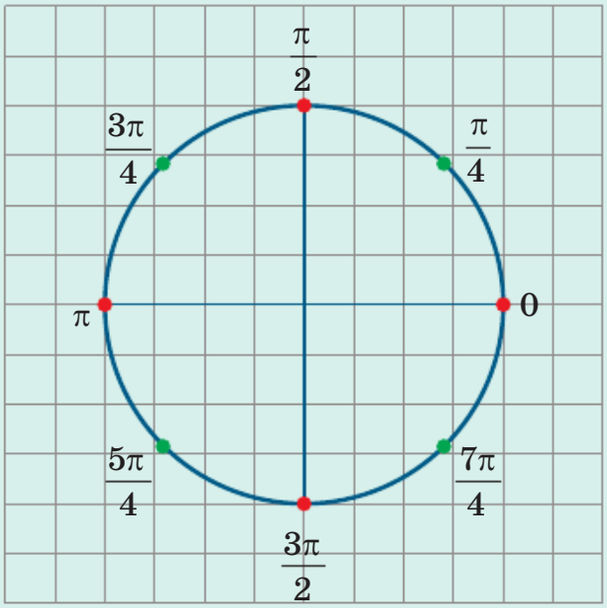
n	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\pi(n)$	25	46	62	78	95	114	125	139	154	168
$\frac{\pi(n)}{n}$	0,25	0,23	0,21	0,195	0,19	0,19	0,179	0,174	0,171	0,168
$\frac{1}{\ln n}$	0,217	0,189	0,175	0,167	0,161	0,156	0,153	0,15	0,147	0,145

60.13. а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) –0,5; г) $\sqrt{2}-1$; д) $2-\sqrt{3}$; е) $-\sqrt{2}$. **60.14.** а) –1 и 6; б) 4; в) 2 и 26; г) –3 и 4; д) –5; е) 2,1 и 102. **60.15.** а) $(-5; -4) \cup \{8\}$; б) $[-4; -1) \cup \{2\}$. **60.16.** в) При $x \leqslant 0$, $1 < x < 8$; г) при $p \geqslant 1$.

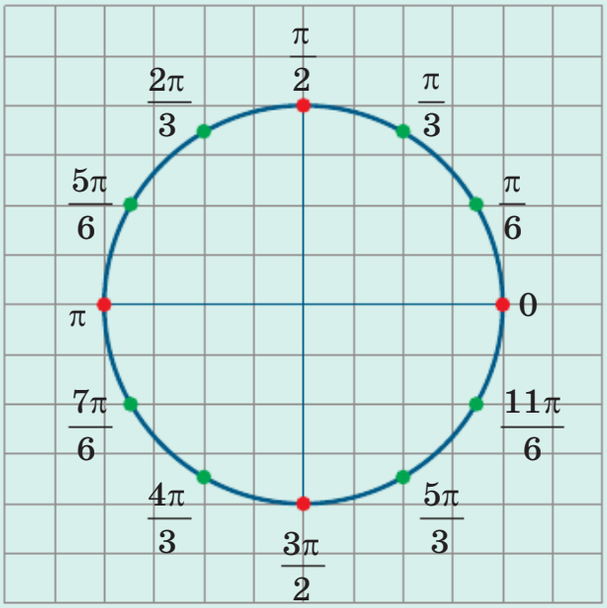
Тест **1.** г). **2.** в). **3.** а). **4.** б). **5.** г). **6.** б). **7.** а). **8.** в). **9.** г). **10.** б).

Справочные материалы

Макет № 1



Макет № 2



Таблицы значений $\cos t$, $\sin t$

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Формулы, связывающие функции аргументов, из которых один вдвое больше другого

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Формулы сложения (вычитания) аргументов

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}; \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

Периодические функции

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют **периодической**, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого $x \in X$ выполняется двойное равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T называют **периодом функции**.

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$, имеет период T, то любое число, кратное T (т. е. число вида nT, $n \in \boldsymbol{Z}$), также является её периодом.

Функции $y = \cos x$, $y = \sin x$ являются периодическими, причём основной период обеих функций равен 2π.

Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ являются периодическими, причём основной период обеих функций равен π.

Если T — основной период функции $y = f(x)$, то $\dfrac{T}{n}$ — основной период для функции $y = f(nx)$.

Обратные тригонометрические функции

Если $|a| \leqslant 1$, то $\boldsymbol{\arcsin a}$ — это такое число из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Если $|a| \leqslant 1$, то $\boldsymbol{\arccos a}$ — это такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{\operatorname{arctg} a}$ — это такое число из интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{\operatorname{arcctg} a}$ — это такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$

Тригонометрические уравнения

Если $|a| < 1$, то уравнение $\cos t = a$ имеет следующие решения:

$$t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Если $|a| < 1$, то уравнение $\sin t = a$ имеет следующие решения:

$$t = \arcsin a + 2\pi n, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Обе эти серии можно объединить одной записью:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ имеет вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ имеет вид

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Свойства логарифмов

Если a, b, c — положительные числа, $a \neq 1$, то справедливы равенства:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Если a, b, c — положительные числа, $a \neq 1$, то для любого действительного числа r справедливо равенство

$$\log_a b^r = r \log_a b.$$

Если a, b, c — положительные числа, $a \neq 1$, $b \neq 1$, то справедливы равенства:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Если a, b — положительные числа, $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ справедливы равенства:

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r,$$

$$\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b.$$

Приложение.
Таблица простых чисел до 1000

2	97	227	367	509	661	829
3	101	229	373	521	673	839
5	103	233	379	523	677	853
7	107	239	383	541	683	857
11	109	241	389	547	691	859
13	113	251	397	557	701	863
17	127	257	401	563	709	877
19	131	263	409	569	719	881
23	137	269	419	571	727	883
29	139	271	421	577	733	887
31	149	277	431	587	739	907
37	151	281	433	593	743	911
41	157	283	439	599	751	919
43	163	293	443	601	757	929
47	167	307	449	607	761	937
53	173	311	457	613	769	941
59	179	313	461	617	773	947
61	181	317	463	619	787	953
67	191	331	467	631	797	967
71	193	337	479	641	809	971
73	197	347	487	643	811	977
79	199	349	491	647	821	983
83	211	353	499	653	823	991
89	223	359	503	659	827	997

Список дополнительной литературы

1. *Арнольд В. И.* Задачи для детей от 5 до 15 лет / В. И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2018.

2. *Гиндикин С. Г.* Рассказы о физиках и математиках / Семён Гиндикин. — М. : Книговек, 2013. — (Мир вокруг нас).

3. Каганов М. И. Абстракция в математике и физике / М. И. Каганов, Г. Я. Любарский. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005.

4. *Клайн Морис.* Математика. Утрата определённости / Морис Клайн. — М. : Римис, 2007.

5. *Колмогоров А. Н.* Введение в теорию вероятностей / А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. — М. : МЦНМО, 2015. — (Библиотечка «Квант»).

6. *Математическая составляющая* / Редакторы-составители Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин ; художник-оформитель Р. А. Кокшаров. — М. : Фонд «Математические этюды», 2015.

7. *Пиковер Клиффорд.* Великая математика. От Пифагора до 57-мерных объектов. 250 вех в истории математики / Клиффорд Пиковер. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.

8. *Писаревский Б. М.* Беседы о математике и математиках / Б. М. Писаревский, В. Т. Харин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006.

9. *Уилан Чарльз.* Голая статистика. Самая интересная книга о самой скучной науке / Чарльз Уилан. — М. : Манн, Иванов и Фербер, 2016. — (МИФ. Научпоп).

Оглавление

Глава 4*. Числа 5

§ 32. Натуральные и целые числа 5
§ 33. Рациональные, иррациональные числа. Множество действительных чисел 21
§ 34. Комплексные числа 31
§ 35. Комплексная плоскость 41
§ 36. Применения комплексных чисел 54

Итак, в главе 4 64
Вопросы 65
Тест 66

Из истории математики 68

Глава 5. Степенные функции 73

§ 37. Степенные функции с натуральным показателем 73
§ 38. Степенные функции с целым отрицательным показателем 80
§ 39. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ 87
§ 40. Свойства корней n-й степени 93
§ 41. Понятие степени с любым рациональным показателем 104
§ 42. Степенные функции с рациональным показателем 110
§ 43. Иррациональные уравнения 118
§ 44. Преобразование иррациональных выражений 125
§ 45. Понятие степени с иррациональным показателем 131

Итак, в главе 5 135
Вопросы 135
Тест 136

Из истории математики 138

Глава 6. Показательные и логарифмические функции 142

§ 46. Показательные функции 142
§ 47. Понятие касательной. Число e и функция $y = e^x$ 153
§ 48. Показательные уравнения 158
§ 49. Показательные неравенства 167
§ 50. Понятие логарифма 173
§ 51. Логарифмические функции 179
§ 52. Свойства логарифмов 187
§ 53. Десятичные логарифмы 196
§ 54. Логарифмические уравнения 200

§ 55. Логарифмические неравенства 210
§ 56. Формулы перехода к новому основанию логарифма 218
Итак, в главе 6 228
Вопросы 228
Тест 229
Из истории математики 232

Глава 7. Закон больших чисел 235
§ 57. Треугольник Паскаля и бином Ньютона 235
§ 58. Случайные события и их вероятности 245
§ 59. Математическое ожидание (среднее значение) случайных величин 256
§ 60. Частота и вероятность. Законы больших чисел 267
Итак, в главе 7 278
Вопросы 279
Тест 280
Из истории математики 282

Ответы 285

Справочные материалы 296

Приложение. Таблица простых чисел до 1000 300



Учебное издание

Серия «Лаборатория А. Г. Мордковича»

Мордкович Александр Григорьевич
Семенов Павел Владимирович
Александрова Лидия Александровна
Мардахаева Елена Львовна

МАТЕМАТИКА
Алгебра и начала математического анализа

10 класс

Базовый и углублённый уровни

Учебное пособие

В двух частях

Часть 2

Центр информатики, технологии и профильного обучения

Ответственный за выпуск *Л. В. Кузнецова*
Редакторы *Л. В. Кузнецова*
Внешнее оформление *В. А. Андрианова*
Художественный редактор *А. А. Павлов*
Иллюстрации: *«Фотобанк Лори»*
Компьютерная вёрстка *А. А. Павлова*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *О. Ч. Кохановская*

Подписано в печать 01.10.2025. Формат 70×90/16.
Усл. печ. л. 22,23. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва,
ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, помещение 1Н.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.