ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10 КЛАСС

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

Учебное пособие

В двух частях
Часть 1

2-е издание, стереотипное

МОСКВА
«Просвещение»
2026

УДК 373.167.1:51+51(075.3) 12+
ББК 22.1я721
М34

Серия «Лаборатория А. Г. Мордковича» основана в 2020 году

Авторы:

заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования, доктор педагогических наук, профессор Московского городского педагогического университета *А. Г. Мордкович*;

почётный работник высшего профессионального образования РФ, доктор физико-математических наук, профессор отдела математического образования НИУ ВШЭ *П. В. Семенов*;

отличник народного просвещения, учитель математики высшей категории *Л. А. Александрова*;

кандидат педагогических наук, доцент *Е. Л. Мардахаева*.

Математика. Алгебра и начала математического анализа :
М34 10-й класс : базовый и углублённый уровни : учебное пособие : в 2 частях / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева. — 2-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2026. — (Лаборатория А. Г. Мордковича).

ISBN 978-5-09-129505-4.
Ч. 1. — 303, [1] с. : ил.
ISBN 978-5-09-129506-1.

Учебное пособие входит в завершённую предметную линию по алгебре и началам математического анализа базового и углублённого уровней для 10–11 классов. Учебное пособие разработано в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования.

Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением большого числа примеров, практические задания представлены на трёх уровнях сложности. В конце каждой главы приведены основные факты, а также вопросы и тест для самопроверки, дополнительные задачи и исторические сведения.

Учебное пособие содержит избранные темы курса «Вероятность и статистика».

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-129506-1 (ч. 1)
ISBN 978-5-09-129505-4

© АО «Издательство «Просвещение», 2025
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2025
Все права защищены

Условные обозначения

24.13. Задачи базового уровня сложности

24.14. Задачи повышенного уровня сложности

24.15. Задачи высокого уровня сложности

ИКТ Материал может быть рассмотрен с помощью ИКТ-средств

10.11 Упражнения с общим заданием

10.12

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения примера

* Материал, предназначенный для изучения на углублённом уровне.



Южно-Уральский
государственный университет.
Челябинск

§ 1. Что такое числовая окружность

§ 2. Числовая окружность на координатной плоскости

§ 3. Дуги числовой окружности на координатной плоскости

§ 4. Понятия косинуса и синуса числа

§ 5. Понятия тангенса и котангенса числа

§ 6. Соотношения между тригонометрическими функциями

§ 7. Тригонометрические функции углового аргумента

§ 8. Периодические функции

§ 9. Свойства и график функции $y = \cos x$

§ 10. Свойства и график функции $y = \sin x$

§ 11. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = kf(x)$

§ 12. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(mx)$

§ 13*. График гармонического колебания

§ 14. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Глава 1
Тригонометрические функции

§ 1. Что такое числовая окружность

Вам известно, что прямую, на которой заданы начальная точка O, масштаб (единичный отрезок) и положительное направление, называют *числовой прямой*. Любому действительному числу мы можем сопоставить единственную точку числовой прямой, и обратно: любая точка числовой прямой соответствует единственному числу. Например, числу 3 соответствует точка A, числу -2 соответствует точка B (рис. 1), и обратно: точке C соответствует число 5, а точке D — число -4 (рис. 2).

Но в реальной жизни приходится двигаться не только по прямой. Довольно часто рассматривается движение по окружности, например по беговой дорожке стадиона, стандартная длина которой равна 400 м (это, конечно, не окружность, но, идеализируя ситуацию, как принято в математике, её считают окружностью; более того, в обиходной речи называют даже кругом). Как и в случае с числовой прямой, здесь есть точка отсчёта (она расположена на линии старта), есть масштаб — 1 м, указывается направление движения — обычно против часовой стрелки (положительное направление). Так что вполне можно говорить не просто об окружности, а о *числовой окружности*. В зависимости от заданной дистанции (100 м, 200 м, 400 м, 800 м, 1500 м и т. д.) проводят линию финиша. Иными словами, любому числу соответствует единственная точка окружности (не только положительному числу, но и отрицательному, ведь забеги можно устраивать и в

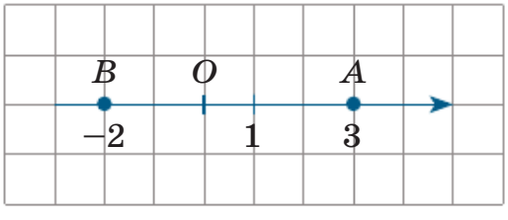


Рис. 1

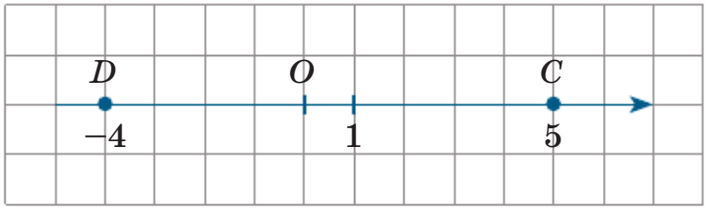


Рис. 2

отрицательном направлении — в направлении по часовой стрелке). А вот обратное неверно: одна и та же точка окружности вполне может соответствовать разным числам. Например, для забегов на 400 м («один круг»), 800 м («два круга»), 10 000 м («двадцать пять кругов») проводят одну и ту же линию финиша, т. е. числам 400, 800, 10 000 соответствует одна и та же точка числовой окружности.

В принципе любую окружность можно рассматривать как числовую, но мы будем использовать для этой цели окружность, радиус которой принимается за единицу измерения; такую окружность для краткости будем называть *единичной окружностью*. Это будет наша «беговая дорожка», её длина l равна 2π ($l = 2\pi R$; здесь $R = 1$), что составляет примерно 6,28.

На рисунке 3 изображена единичная окружность, проведены горизонтальный и вертикальный диаметры CA и DB. Условимся называть дугу AB *первой четвертью*, дугу BC — *второй четвертью*, дугу CD — *третьей четвертью*, дугу DA — *четвёртой четвертью*. Длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.

Пример 1 В единичной окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра: горизонтальный CA и вертикальный DB. Дуга AB разделена точкой M на две равные части, а дуга CD точками K и P — на три равные части (рис. 4). Чему равна длина дуги:

а) AM, MB; б) CK, KP, PD; в) AK, BP?

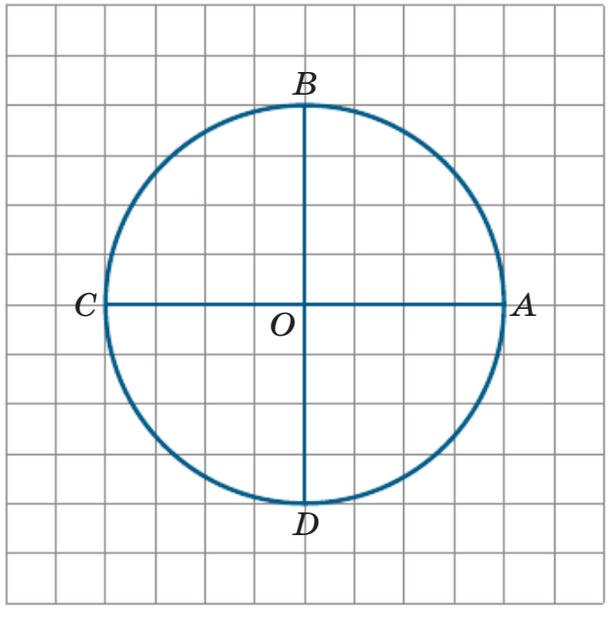


Рис. 3

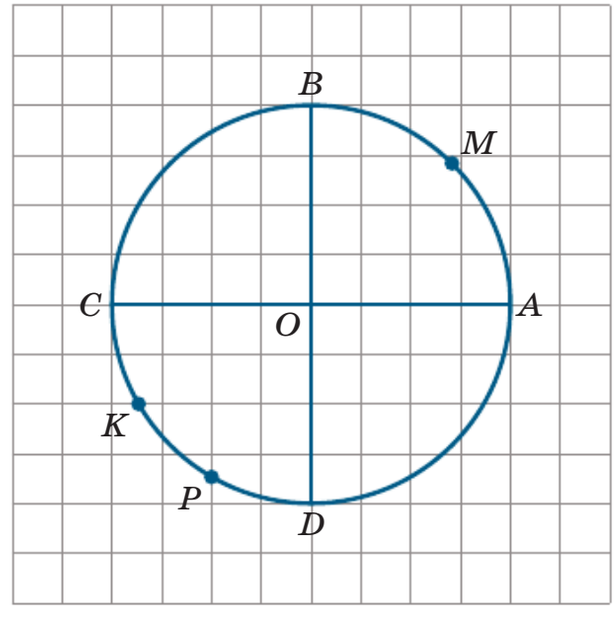


Рис. 4

Решение. Обычно дугу AB обозначают так: $\overset{\smile}{AB}$, а длину дуги обозначают так: $|\overset{\smile}{AB}|$. Чтобы не усложнять записи, мы будем в обоих случаях писать просто AB, а из текста будет ясно, о чём идёт речь — о дуге или о её длине.

а) $AB = \frac{\pi}{2}$, значит, $AM = MB = \frac{\pi}{4}$.

б) $CD = \frac{\pi}{2}$, значит, $CK = KP = PD = \frac{\pi}{6}$.

в) $AK = AC + CK = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$;

$BP = BC + CP = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

Сформулируем определение числовой окружности, которым мы будем пользоваться в нашем курсе. Начальной точкой будем считать точку A — правый конец горизонтального диаметра (см. рис. 3).

Определение. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку единичной окружности (см. рис. 3) по следующему правилу.
1) Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A; $A = A(0)$.
2) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении *против часовой стрелки* (положительное направление обхода окружности), пройдём по окружности расстояние AM, равное t. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.
3) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении *по часовой стрелке* (отрицательное направление обхода окружности), пройдём по окружности расстояние AM, равное $|t|$. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.
Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть **числовой окружностью.**

Пример 2 Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

а) $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, 8\pi$;

б) $-\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{7\pi}{4}$.

Решение. а) Точки, соответствующие заданным числам, мы найдём на рисунке 4. Смотрите: числу 0 соответствует точка A, числу $\frac{\pi}{4}$ — точка M — середина первой четверти, числу $\frac{\pi}{2}$ — точка B, числу π — точка C, числу $\frac{3\pi}{2}$ — точка D, числам 2π и 8π соответствует точка A, поскольку 2π — это один полный обход окружности, возвращаемся в начальную точку; 8π — это четыре полных обхода окружности, возвращаемся в начальную точку.

Осталось разобраться с числами $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$.

Числу $\frac{7\pi}{6}$ соответствует точка K, поскольку, как мы видели в примере 1, $AK = \frac{7\pi}{6}$.

$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = AC + CK + KP = AP$; значит, числу $\frac{4\pi}{3}$ соответствует точка P.

б) Все заданные числа — отрицательные, значит, двигаться по окружности, выходя из точки A, будем в отрицательном направлении, т. е. по часовой стрелке.

Число $-\frac{\pi}{2}$. Надо выйти из точки A и пройти по часовой стрелке путь длиной $\frac{\pi}{2}$. Но $\frac{\pi}{2}$ — длина четверти окружности, значит, попадаем в точку D.

Число $-\frac{2\pi}{3}$. Надо выйти из точки A и пройти по часовой стрелке путь длиной $\frac{2\pi}{3}$. Но $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$. Значит, после точки D надо ещё пройти путь $\frac{\pi}{6}$ — попадаем в точку P.

Число $-\frac{7\pi}{4}$. Можно рассуждать, например, так: $-\frac{7\pi}{4} = -2\pi + \frac{\pi}{4}$; числу -2π соответствует точка A, значит, надо выйти из точки A

и пройти против часовой стрелки путь длиной $\frac{\pi}{4}$. Попадаем в точку M.

Обратите внимание, что в некоторые из точек, отмеченных на рисунке 4, мы при решении примера попадали не один раз. Например, точка A соответствовала числам 0, 2π, 8π, точка M — числам $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, точка P — числам $\frac{4\pi}{3}$ и $-\frac{2\pi}{3}$.

Вообще, справедливо следующее утверждение:

> Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то точка M соответствует и любому числу вида $t + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

В самом деле, 2π — длина числовой (единичной) окружности, а целое число n равно числу полных обходов окружности в ту или иную сторону. Если мы находимся в точке $M(t)$, то, выполнив ещё n полных обходов окружности в ту или иную сторону, мы снова окажемся в точке $M(t)$.

Таким образом, справедливо соотношение

$$M(t) = M(t + 2\pi n),\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

Например, на рисунке 4 точка M соответствует числу $\frac{\pi}{4}$, значит, она соответствует любому числу вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; точка C соответствует числу π, значит, она соответствует любому числу вида $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и т. д.

В формуле (1) вместо n можно использовать и другие буквы (обычно латинского алфавита: k, m и т. д.). Более того, в дальнейшем мы, ради краткости, часто будем опускать в формуле (1) указания $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, ..., но, конечно, всегда будем иметь их в виду.

Нам очень пригодятся два макета числовой окружности:

первый макет — каждая из четырёх четвертей числовой окружности разделена на две равные части, и около каждой из имеющихся восьми точек записано её «имя» (рис. 5);

Макет № 1

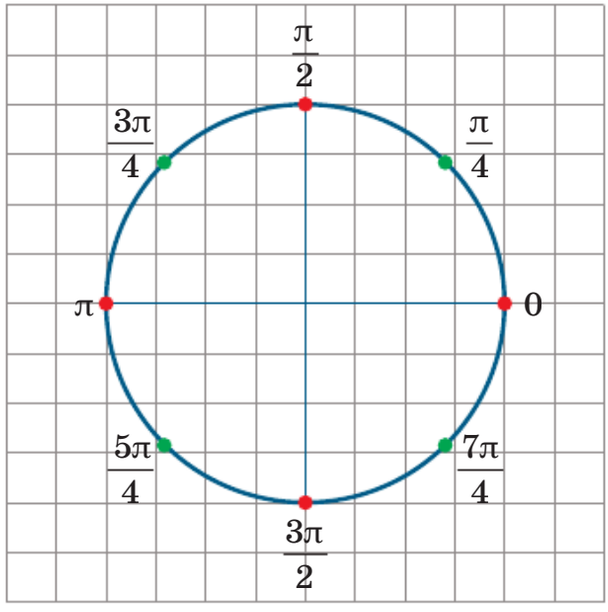


Рис. 5

Макет № 2

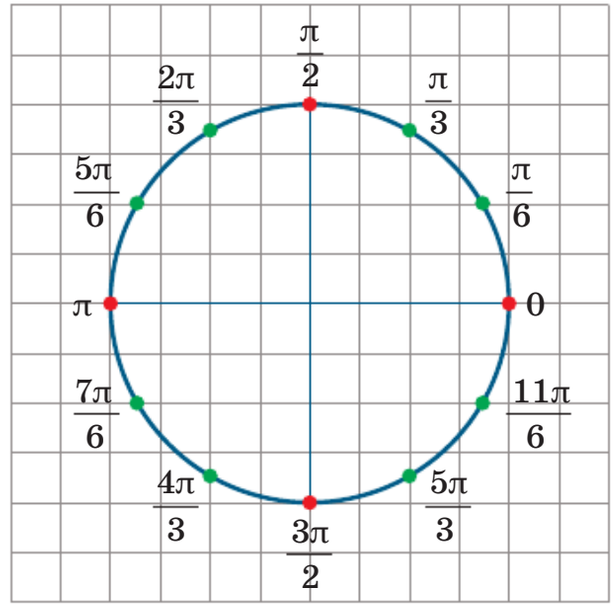


Рис. 6

второй макет — каждая из четырёх четвертей числовой окружности разделена на три равные части, и около каждой из имеющихся двенадцати точек записано её «имя» (рис. 6).

На этих макетах указаны лишь «главные имена» точек — числа, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$, т. е. числа, соответствующие точкам числовой окружности при первом её обходе в положительном направлении. Если же совершить первый обход окружности в отрицательном направлении, то на первом макете имена у точек будут $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$ и т. д., а на втором макете имена у точек будут $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{2\pi}{3}$ и т. д.

Подчеркнём ещё раз, что у каждой точки, отмеченной на первом или втором макете, бесконечно много имён: не только $\frac{\pi}{4}$, но и $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; не только $\frac{2\pi}{3}$, но и $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ и т. д.

Пример 3 Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

а) $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{37\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$; б) $\frac{37\pi}{6}$, $-\frac{29\pi}{3}$.

Решение. а) $\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$. Значит, числу $\frac{11\pi}{4}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{3\pi}{4}$, — середина второй четверти (см. макет № 1).

$\frac{37\pi}{4} = 8\pi + \frac{5\pi}{4}$. Значит, числу $\frac{37\pi}{4}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{4}$, — середина третьей четверти (см. макет № 1).

$-\frac{17\pi}{4} = -6\pi + \frac{7\pi}{4}$. Значит, числу $-\frac{17\pi}{4}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{7\pi}{4}$, — середина четвёртой четверти (см. макет № 1).

б) $\frac{37\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6}$. Значит, числу $\frac{37\pi}{6}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{\pi}{6}$, — точка первой четверти (см. макет № 2).

$-\frac{29\pi}{3} = -10\pi + \frac{\pi}{3}$. Значит, числу $-\frac{29\pi}{3}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{\pi}{3}$, — точка первой четверти (см. макет № 2).

Вы наверняка заметили, что во всех разобранных примерах мы говорили о числах, выраженных некоторыми долями числа π. Ведь если мы делим на равные части окружность, длина которой равна 2π, или её четверть, длина которой равна $\frac{\pi}{2}$, то получаются дуги, длина каждой из которых выражается долями числа π. Но единичную окружность мы рассматриваем как числовую окружность, значит, на ней должно найтись место и числам, не выраженным в долях π, например числам 1, 2, 5, -3, $-2{,}5$ и т. д. В следующем примере мы покажем, как рассуждают в подобных случаях.

Пример 4 Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 6; б) 15, $-7{,}5$.

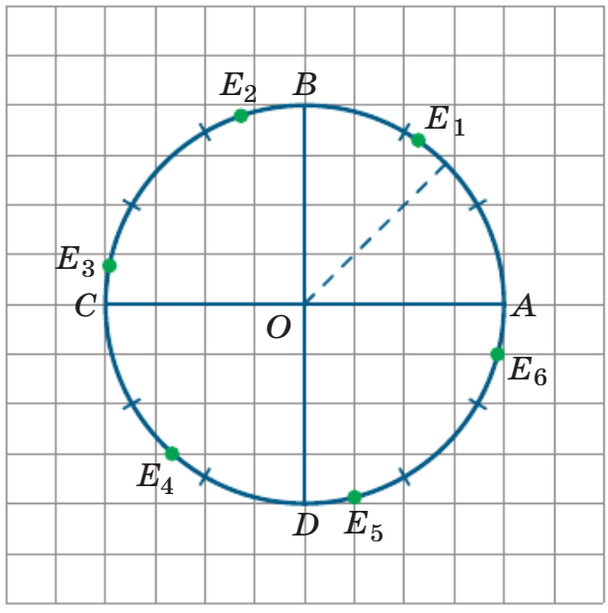


Рис. 7

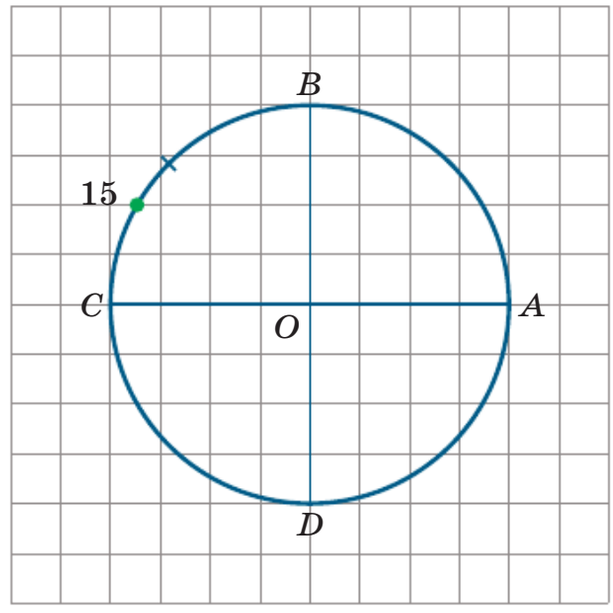


Рис. 8

Решение. а) Сделаем прикидку для числа 1:

$$\pi \approx 3{,}14; \quad \frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14}{4} \approx 0{,}785; \quad \frac{\pi}{3} \approx \frac{3{,}14}{3} \approx 1{,}047;$$

$$0{,}785 < 1 < 1{,}047; \quad \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}.$$

Значит, точка 1 располагается на числовой окружности в первой четверти между точками $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, поближе к точке $\frac{\pi}{3}$ — это точка E_1 на рисунке 7.

На том же рисунке отмечены точки E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, соответствующие числам 2, 3, 4, 5, 6. Для ориентировки каждая из четвертей окружности разделена (чёрточками) на три равные части.

б) Сделаем прикидку для числа 15:

$$4\pi < 15 < 5\pi; \quad 4\pi \approx 3{,}14 \cdot 4 \approx 12{,}56; \quad 15 = 12{,}56 + 2{,}44;$$

$$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57 < 2{,}44 < \pi \approx 3{,}14.$$

Таким образом, точка 15 примерно та же, что точка 2,44, а точка 2,44 располагается во второй четверти между $\frac{\pi}{2}$ и π. От точки $\frac{\pi}{2}$ точка 2,44 удалена на расстояние (по окружности), примерно равное $2{,}44 - 1{,}57 = 0{,}87$, а от точки π — на расстояние, примерно рав-

ное $3{,}14 - 2{,}44 = 0{,}7$. Таким образом, точка 2,44 (а значит, и точка 15) находится во второй четверти ближе к точке π. На рисунке 8 показано положение точки 15, причём для ориентировки отмечена середина второй четверти.

Осталось разобраться с числом $-7{,}5$. Выходим из точки A, движемся по окружности по часовой стрелке; нам нужно пройти путь длиной 7,5. Пройдём всю окружность — это примерно 6,28, остаётся 1,22. Поскольку длина дуги DA равна $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, то точка M находится в четвёртой четверти и отстоит от точки D примерно на 0,35.

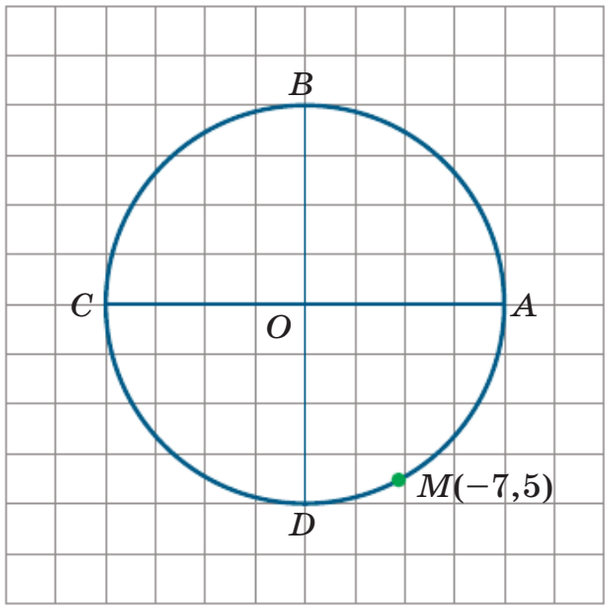


Рис. 9

Пример 5 На числовой окружности отметить точки $t = \frac{\pi n}{2}$ и $t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и объединить их одной формулой.

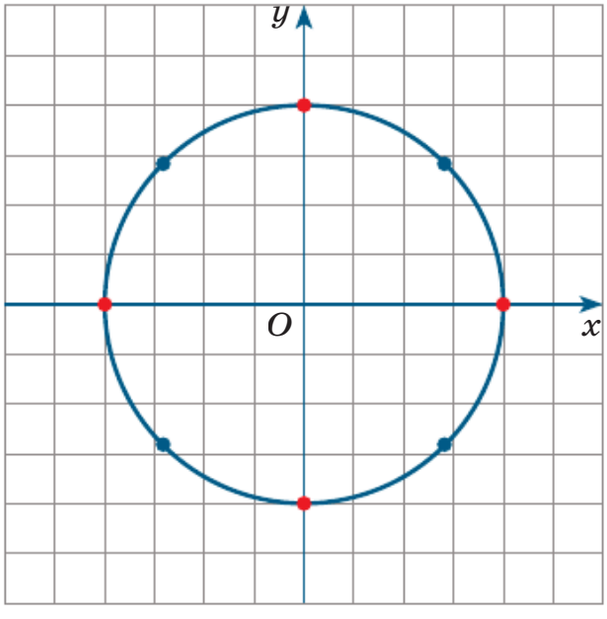


Рис. 10

Решение. Формуле $t = \frac{\pi n}{2}$ соответствуют 4 точки числовой окружности — концы горизонтального и вертикального диаметров. Формуле $t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ также соответствуют 4 точки числовой окружности — середины дуг всех четвертей. Отметим эти точки на общей числовой окружности (рис. 10). Формула, объединяющая все эти 8 точек, такова:

$$t = \frac{\pi n}{8},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Упражнения

1.1. а) Первая четверть числовой окружности разделена на три равные части точками M и N, считая от A, а вторая — точкой K пополам. Найдите, чему равны длины дуг AM, AN, AK, BK, MK, CN.
б) Вторая четверть числовой окружности разделена на три равные части точками M и N, считая от B, а третья — на две равные части точкой K. Вычислите длину дуги: BM, AN, MK, BK, MD, CN.

1.2. а) Вторая четверть числовой окружности разделена точкой T в соотношении 2 : 3, считая от B. Вычислите длину дуги: AT, BT, CT, DT.
б) Четвёртая четверть числовой окружности разделена точкой H в соотношении 5 : 1, считая от B. Вычислите длину дуги: AH, BH, CH, DH.

Укажите на числовой окружности точку, которая соответствует данному числу.

1.3. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $-\frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{2\pi}{3}$.

1.4. а) $-\frac{29\pi}{6}$; б) $-\frac{27\pi}{4}$; в) $\frac{26\pi}{3}$; г) $\frac{31\pi}{6}$.

1.5. а) $\frac{4\pi}{9}$; в) $-\frac{7\pi}{12}$; д) $\frac{22\pi}{7}$;
б) $-\frac{5\pi}{12}$; г) $\frac{4\pi}{7}$; е) $\frac{29\pi}{9}$.

ИКТ **1.6.** а) 3; б) 2; в) 5,5; г) $-4{,}5$; д) -7; е) 9.

1.7. Опишите взаимное расположение точек, соответствующих числам, заданным на числовой окружности:

а) t и $-t$; в) t и $t + 2\pi$; д) t и $t - 2\pi$;

б) t и $t + \pi$; г) $t + \pi$ и $t - \pi$; е) t и $-t + 2\pi$.

Запишите формулой все числа, которым на числовой окружности соответствует точка P.

1.8. а) $P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; б) $P\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; в) $P\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$; г) $P\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

1.9. а) $P\left(\frac{19\pi}{9}\right)$; б) $P(3)$; в) $P\left(\frac{23\pi}{11}\right)$; г) $P(-2)$.

1.10. Запишите одной формулой все числа, которым на числовой окружности соответствуют данные точки:

а) $N\left(\frac{\pi}{3}\right)$ и $M\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $K\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ и $P\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $E_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $E_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $E_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ и $E_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)$;

г) $N\left(\frac{\pi}{5}\right)$ и $M\left(-\frac{\pi}{5}\right)$;

д) $T\left(\frac{\pi}{8}\right)$ и $R\left(\frac{9\pi}{8}\right)$;

е) $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$ и $D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Выясните, какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая данному числу.

1.11. а) $\frac{27\pi}{4}$; б) $\frac{31\pi}{3}$; в) $-\frac{37\pi}{6}$; г) $-\frac{33\pi}{4}$.

ИКТ **1.12.** а) 6; б) 9; в) -18; г) 7; д) -11; е) 25.

1.13. а) 100; б) -300; в) 160; г) -260.

1.14. На числовой окружности отметьте указанные точки и объедините их одной формулой:

а) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$;

б) $t = \frac{\pi}{4} + \pi n$ и $t = \frac{3\pi}{4} + \pi n$;

в) $t = \pi + 2\pi n$ и $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$;

г) $t = \frac{\pi n}{2}$, $t = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$ и $t = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$.

В следующих задачах рассмотрено движение минутной и часовой стрелок на часах с круговым циферблатом[1].

1.15. Сколько полных оборотов сделает минутная стрелка за время:

а) с 12:00 до 13:00;
б) с 13:00 до 15:00;
в) с 17:00 до 24:00;
г) с 19:00 сегодня до 8:00 завтра;
д) с 23:00 сегодня до 12:00 послезавтра;
е) с 17:00 30 декабря до 7:00 2 января?

1.16. По числу n полных оборотов минутной стрелки и началу a отсчёта времени найдите конец b отсчёта или по концу b отсчёта найдите начало a отсчёта времени:

а) $a = 12{:}15$, $n = 5$, $b = ?$;
б) $a = 13{:}30$, $n = 10$, $b = ?$;
в) $a = 14{:}45$, $n = 15$, $b = ?$;
г) $b = 8{:}05$, $n = 5$, $a = ?$;
д) $b = 9{:}10$, $n = 25$, $a = ?$;
е) $b = 10{:}15$, $n = 40$, $a = ?$.

1.17. На сколько градусов повернётся минутная стрелка за время:

а) с 12:00 до 12:15;
б) с 15:00 до 15:30;
в) с 8:40 до 9:05;
г) с 9:10 до 10:05;
д) с 11:35 до 12:40;
е) с 23:59 до 00:11?

1.18. На сколько градусов повернётся часовая стрелка за время:

а) с 12:00 до 13:00;
б) с 14:00 до 19:00;
в) с 15:30 до 23:00;
г) с 17:45 сегодня до 7:00 завтра;
д) с 8:15 сегодня до 6:00 завтра;
е) с 9:20 сегодня до 20:10 послезавтра?

1.19. Найдите величину угла (в градусах и в радианах) между минутной и часовой стрелками:

а) в 12:00;
б) в 13:00;
в) в 14:30;
г) в 15:30;
д) в 16:45;
е) в 19:10.

[1] Все показания часов относятся к одному и тому же (сегодняшнему) дню, если специально не оговорено противное. Все часы идут правильно, стрелки движутся равномерно, без скачков.

1.20. В 12:00 совпадают направления часовой и минутной стрелок. Пусть t — время на часах, когда впервые после 12:00 совпадут направления стрелок.
1) Проверьте, что:
а) $t > 13$ ч 00 мин;
б) $t > 13$ ч 05 мин;
в) $t < 13$ ч 06 мин.
2) Найдите:
г) t;
д) время второго после 12:00 совпадения;
е) количество совпадений за сутки от 00:00 (включая) до 24:00 (не включая).

1.21. На часах 20:00.
1) Через сколько минут часовая и минутная стрелки совпадут по направлению:
а) в первый раз;
б) во второй раз;
в) в четвёртый раз?
2) Через сколько минут часовая и минутная стрелки будут противоположны:
г) в первый раз;
д) в третий раз;
е) в четвёртый раз?

Упражнения для повторения

1.22. а) Замените знак $*$ любой возможной цифрой так, чтобы число 584 3$*$0 нацело делилось: 1) на 18; 2) на 12; 3) на 45; 4) на 30. Найдите все возможные варианты.
б) Замените знак $*$ любой возможной цифрой так, чтобы число 7 526 $*$40 нацело делилось: 1) на 12; 2) на 15; 3) на 60; 4) на 36. Найдите все возможные варианты.

1.23. а) В десятиэтажном доме два подъезда. На каждом этаже каждого подъезда 8 квартир. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира под номером 93?
б) В шестнадцатиэтажном доме три подъезда. На каждом этаже каждого подъезда 6 квартир. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира под номером 135?

1.24. Найдите все натуральные значения n, при которых значение данного выражения является натуральным числом:

а) $\dfrac{7n+4}{n}$; в) $\dfrac{n^2+5n+2}{n}$; д) $\dfrac{3n^2+9n+6}{3n}$;

б) $\dfrac{5n-9}{n}$; г) $\dfrac{n^2-6n+8}{n}$; е) $\dfrac{4n^2-8n+16}{4n}$.

1.25. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, \text{ если } -6 \leqslant x < -1, \\ (x-1)^2 + 2, \text{ если } -1 \leqslant x < 2, \\ \dfrac{1}{2}x + 2, \text{ если } 2 \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$$

а) Постройте график функции $y = f(x)$.
б) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции.
в) Найдите все точки с целочисленными координатами, принадлежащие графику функции $y = f(x)$.
г) Найдите все значения параметра p, при которых графики функций $y = f(x)$ и $y = p$ имеют две точки пересечения.

§ 2. Числовая окружность на координатной плоскости

Расположим числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат xOy так, как показано на рисунке 10: центр окружности совмещён с началом координат, а её радиус равен единице измерения. Каждая точка числовой окружности имеет в системе xOy свои координаты. Всюду в этом и в следующем параграфах, говоря о числовой окружности, мы будем предполагать, что она расположена в системе координат xOy так, как сказано выше.

Обсудим, как находить декартовы координаты точек числовой окружности. Числу $t = 0$ соответствует точка A (рис. 11) с координатами (1; 0). Удобна следующая запись:

$A(0) = A(1;\ 0)$; она означает, что точка $A(0)$ имеет соответствующие координаты в прямоугольной системе координат xOy. И в дальнейшем будем придерживаться подобного способа записи: если напи-

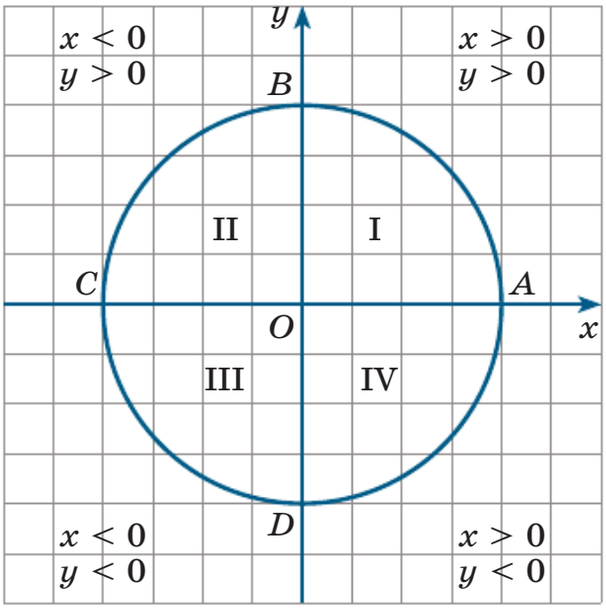


Рис. 11

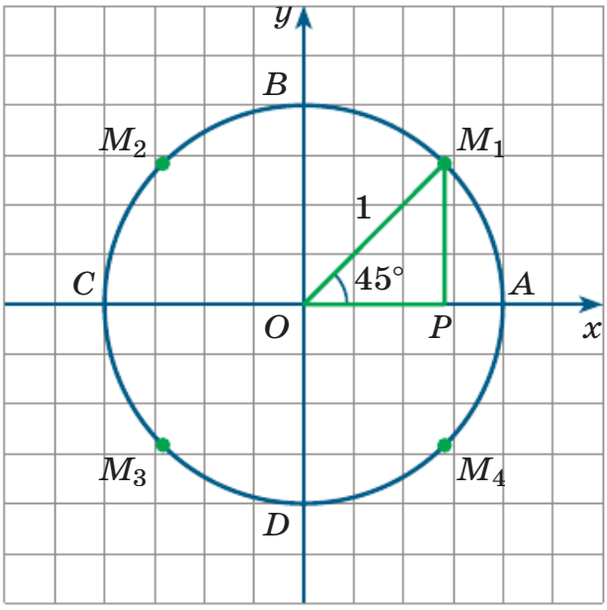


Рис. 12

сано $M(t)$, то это значит, что точка M числовой окружности соответствует числу t; если написано $M(x; y)$, то это значит, что числа x и y являются соответственно абсциссой и ординатой точки M. Таким образом, $(x; y)$ — декартовы координаты точки M, а t — «криволинейная» координата точки M на числовой окружности.

Для точек B, C и D (см. рис. 11) получаем:

$$B\left(\frac{\pi}{2}\right) = B(0; 1), \quad C(\pi) = C(-1; 0), \quad D\left(\frac{3\pi}{2}\right) = D(0; -1).$$

Найдём координаты середин первой, второй, третьей и четвёртой четвертей числовой окружности (рис. 12).

Точка $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ — середина первой четверти. Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим треугольник OM_1P (см. рис. 12). Так как дуга AM_1 составляет половину дуги AB, то $\angle POM_1 = 45°$. Значит, OM_1P — равнобедренный прямоугольный треугольник; $OP = M_1P$, т. е. у точки M_1 абсцисса и ордината равны: $x = y$. Кроме того, координаты точки $M_1(x; y)$ удовлетворяют уравнению числовой окружности $x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, для нахождения координат точки M_1 нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подставив x вместо y во второе уравнение системы, получим:

$$x^2 + x^2 = 1; \quad x^2 = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(мы учли, что абсцисса точки M_1 положительна). А так как $y = x$, то и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак, $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Рассмотрим точку $M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ — середину второй четверти (см. рис. 12). Рассуждая, как и выше (для точки M_1), получим для модуля абсциссы и модуля ординаты этой точки те же значения $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$, что и для точки $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку во второй четверти $x < 0$, а $y > 0$, делаем вывод:

$$M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ — середины третьей четверти — имеем:

$$M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ — середины четвёртой четверти — имеем:

$$M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right) = M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Теперь посмотрим, как обстоит дело с точками, делящими каждую четверть числовой окружности на три равные части. Возьмём точку $P_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$ и рассмотрим прямоугольный треугольник OP_1P (рис. 13). Гипотенуза $OP_1 = 1$, угол POP_1 равен 30° (треть прямого угла AOB).

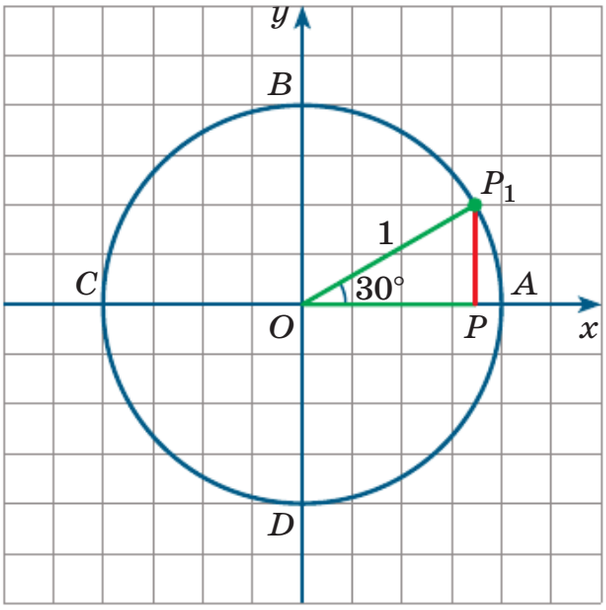


Рис. 13

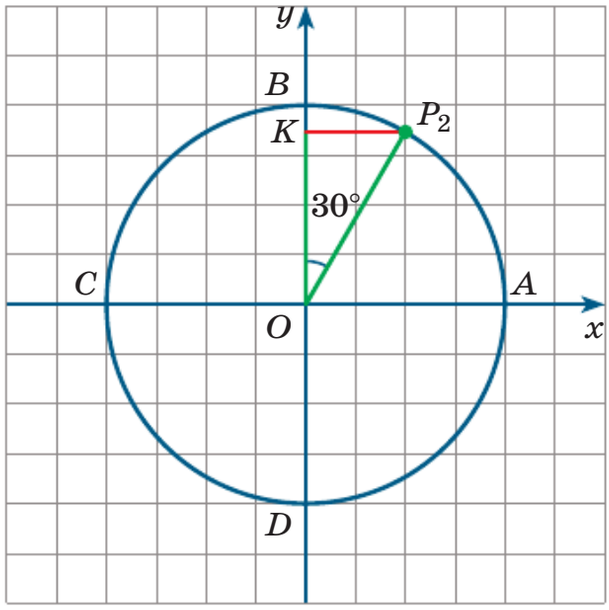


Рис. 14

Как известно, катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы. Значит, $P_1P = \frac{1}{2}$.

Ординату точки P_1 мы нашли: $y = \frac{1}{2}$.

Далее, по теореме Пифагора имеем:

$$OP^2 + PP_1^2 = OP_1^2; \quad OP^2 + \frac{1}{4} = 1; \quad OP^2 = \frac{3}{4};$$

$$OP = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, мы нашли абсциссу точки P_1: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом,

$$P_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

А у точки $P_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (рис. 14) наоборот: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е.

$$P_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

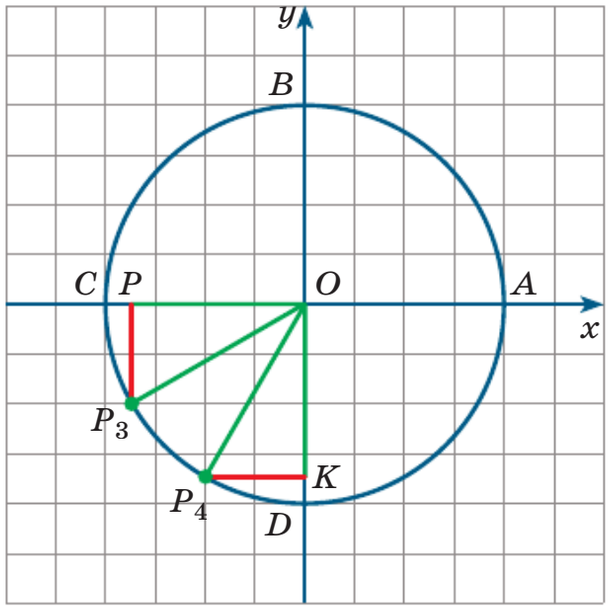


Рис. 15

Те же самые значения (с точностью до знака), т. е. $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, будут координатами точек, делящих остальные четверти числовой окружности на три равные части.

Возьмём для примера точки $P_3\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $P_4\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, делящие третью четверть на три равные части (рис. 15). Отрезок OP характеризует абсциссу точки P_3, а отрезок PP_3 — ординату. Отрезок OP больше отрезка PP_3, значит, длины отрезков таковы: $OP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $PP_3 = \frac{1}{2}$. Но P_3 — точка третьей четверти, где $x < 0$, $y < 0$. Значит, $P_3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. А для точки P_4 координаты изменят порядок: $P_4\left(\frac{4\pi}{3}\right) = P_4\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 1 Найти координаты точек числовой окружности:

а) $K(28\pi)$; в) $M\left(\frac{13\pi}{2}\right)$; д) $P\left(\frac{19\pi}{6}\right)$;

б) $L(-19\pi)$; г) $N\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$; е) $Q\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

Решение. Во всех заданиях воспользуемся утверждением, полученным в § 1: числам t и $t + 2\pi n$ ($n \in \boldsymbol{Z}$) соответствует одна и та же точка числовой окружности.

а) $28\pi = 0 + 2\pi \cdot 14$. Значит, числу 28π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0, — это точка $A(1; 0)$; точка K совпадает с точкой A. Итак, $K(28\pi) = K(1; 0)$.

б) $-19\pi = \pi - 20\pi = \pi + 2\pi \cdot (-10)$. Значит, числу -19π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π, — это точка $C(-1;\ 0)$; точка L совпадает с точкой C. Итак, $L(-19\pi) = L(-1;\ 0)$.

в) $\dfrac{13\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 6\pi = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 3$. Значит, числу $\dfrac{13\pi}{2}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\dfrac{\pi}{2}$, — это точка $B(0;\ 1)$; точка M совпадает с точкой B. Итак,

$$M\left(\frac{13\pi}{2}\right) = M(0;\ 1).$$

г) $-\dfrac{17\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4} - 6\pi = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot (-3)$. Значит, числу $-\dfrac{17\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\dfrac{7\pi}{4}$. Координаты точки $\dfrac{7\pi}{4}$ — середины четвёртой четверти (см. макет № 1 на с. 10) — таковы: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Итак,

$$N\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = N\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

д) $\dfrac{19\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi$. Значит, числу $\dfrac{19\pi}{6}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\dfrac{7\pi}{6}$. Координаты точки $\dfrac{7\pi}{6}$ — она принадлежит третьей четверти (см. макет № 2 на с. 10) — таковы: $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ -\dfrac{1}{2}\right)$. Итак,

$$P\left(\frac{19\pi}{6}\right) = P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right).$$

е) $-\dfrac{7\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} - 2\pi$. Значит, числу $-\dfrac{7\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $-\dfrac{\pi}{3}$. Координаты точки $-\dfrac{\pi}{3}$ —

она принадлежит четвёртой четверти (см. макет № 2 на с. 10 — это та же точка, что соответствует на макете числу $\frac{5\pi}{3}$) — таковы: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Итак,

$$Q\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = Q\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ: а) $K(1;\ 0)$; б) $L(-1;\ 0)$; в) $M(0;\ 1)$; г) $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; д) $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; е) $Q\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 2 Найти знаки декартовых координат точки $M(40)$.

Решение. Подберём число вида $2\pi n$, не превосходящее 40 и наиболее близкое к нему. Это $12\pi \approx 37{,}68$; $12\pi < 40 < 14\pi$. Далее, $40 = 37{,}68 + 2{,}32 \approx 12\pi + 2{,}32$. Значит, точка 40 совпадает с точкой 2,32, которая находится во второй четверти, поскольку $\frac{\pi}{2} < 2{,}32 < \pi$. Итак, точка 40 расположена во второй четверти, а потому для неё $x < 0$, $y > 0$.

Ответ: $x < 0$, $y > 0$.

Пример 3 Каким числам t соответствуют точки числовой окружности: а) с абсциссой $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) с ординатой $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$?

Решение. а) Прямая $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 16). Точка M соответствует числу $\frac{\pi}{6}$, а точка P — числу $\frac{11\pi}{6}$ (см. макет № 2 на с. 10). Значит, точка M соответствует всем числам вида $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, а точка P — всем числам вида $\frac{11\pi}{6} + 2\pi n$. Итак, получили два множества чисел: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, t = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$.

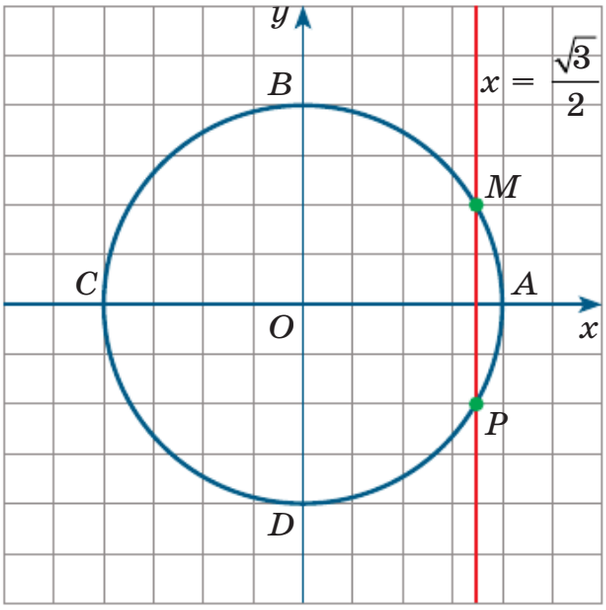


Рис. 16

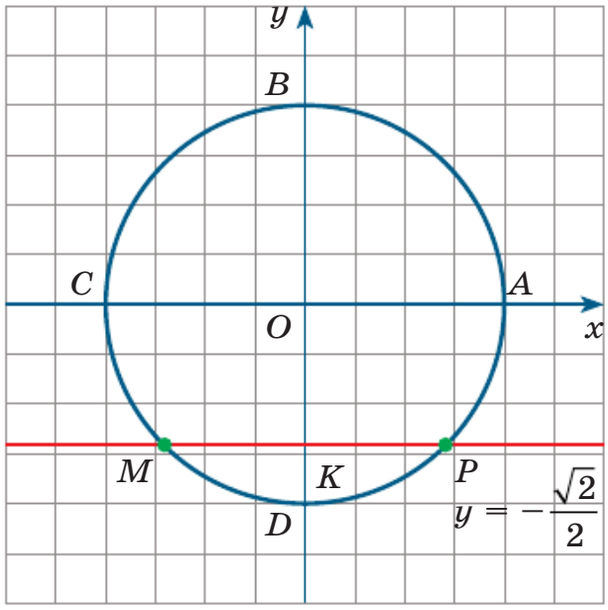


Рис. 17

Обратим ваше внимание на следующее обстоятельство. Мы присвоили точке P имя $\frac{11\pi}{6}$, как на макете № 2. Но удачнее было бы присвоить этой точке имя $-\frac{\pi}{6}$, тогда две формулы $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ можно объединить в одну: $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$.

б) Прямая $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 17). Точка M соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, а точка P — числу $\frac{7\pi}{4}$ (см. макет № 1 на с. 10). Значит, точка M соответствует всем числам вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, а точка P — всем числам вида $\frac{7\pi}{4} + 2\pi n$. Итак, получили два множества чисел:

$$t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ t = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n.$$

Ответ: а) $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, t = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

Для данной точки числовой окружности найдите декартовы координаты.

2.1. а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{3\pi}{2}$; д) $\frac{5\pi}{3}$; е) $\frac{7\pi}{6}$.

2.2. а) $-\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{3\pi}{4}$; в) $-\pi$; г) $-\frac{\pi}{4}$; д) $-\frac{\pi}{2}$; е) $-\frac{5\pi}{6}$.

2.3. а) $\frac{17\pi}{6}$; б) $-\frac{33\pi}{4}$; в) $\frac{25\pi}{6}$; г) $-\frac{35\pi}{3}$.

2.4. Найдите наименьшее положительное число, которому на числовой окружности соответствует точка M с заданными координатами в декартовой системе координат:

а) $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; д) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

б) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; г) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; е) $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.5. Найдите наибольшее отрицательное число, которому на числовой окружности соответствует точка M с заданными координатами в декартовой системе координат:

а) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; в) $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.6. Найдите на числовой окружности точки с данной абсциссой и запишите, каким числам t они соответствуют:

а) $x = 0$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $x = -\frac{1}{2}$.

2.7. Найдите на числовой окружности точки с данной ординатой и запишите, каким числам t они соответствуют:

а) $y = -1$; б) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $y = -\frac{1}{2}$.

Укажите знаки абсциссы и ординаты данной точки числовой окружности.

2.8. а) $\frac{3\pi}{7}$; б) $-\frac{2\pi}{9}$; в) $\frac{23\pi}{4}$; г) $-\frac{33\pi}{8}$.

2.9. а) 2; б) 3; в) -4; г) -6; д) 7; е) -8.

ИКТ **2.10.** а) 24; б) 32; в) -45; г) -51; д) 35; е) -86.

На числовой окружности укажите точку P, координаты которой удовлетворяют данным условиям, и запишите все числа, которым соответствует эта точка.

2.11. а) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}, x < 0$; в) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}, x > 0$;

б) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x < 0$; г) $y = -\frac{1}{2}, x > 0$.

2.12. а) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y < 0$; в) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y > 0$;

б) $x = -\frac{1}{2}, y < 0$; г) $x = -\frac{1}{2}, y > 0$.

2.13. Сколько на числовой окружности точек, у которых либо абсцисса, либо ордината равна:
а) 0; б) 1; в) 0 или -1; г) 0,5; д) $-0{,}2$ или 0,9; е) 0,6 или 0,8?

Упражнения для повторения

2.14. Используя каждую из цифр 0; 2; 4; 6 не более одного раза, составьте все возможные числа, которые кратны числу:
а) 3; б) 6; в) 9; г) 5; д) 4; е) 12.

2.15. а) Докажите, что значение выражения $7^7 - 7^5$ делится на 12.
б) Докажите, что значение выражения $23^{11} + 23^{10}$ делится на 6.

2.16. Разложите число на простые множители. Ответ запишите в виде произведения степеней простых множителей:

а) 54 000; в) 1 157 625; д) 157 300;
б) 32 400; г) 99 225; е) 2 556 125.

2.17. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -(x+4)^2 + 5, \text{ если } -7 \leqslant x < -2, \\ \dfrac{3}{x-2} + 2, \text{ если } -2 \leqslant x < 1, \\ x - 3, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

а) Постройте график функции $y = f(x)$.
б) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-5; 0]$.
в) Решите неравенство $f(x) > 1$.
г) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет единственное решение.

§ 3. Дуги числовой окружности на координатной плоскости

Вы знаете, что промежутки числовой прямой можно задавать аналитически с помощью двойных неравенств. Так, аналитической моделью отрезка $[3; 5]$ служит двойное неравенство $3 \leqslant x \leqslant 5$; аналитической моделью интервала $(-4; 0)$ — двойное неравенство $-4 < x < 0$. На окружности роль отрезков или интервалов играют, соответственно, замкнутые или открытые дуги. *Замкнутая дуга* — это дуга, концы которой включаются в рассмотрение; *открытая дуга* — это дуга, концы которой не включаются в рассмотрение.

Как для отрезков и интервалов, начальную и конечную точки дуги будем изображать закрашенными или незакрашенными кружочками; направление движения по дуге — *против часовой стрелки* (положительное направление обхода окружности).

Дуги числовой окружности можно задавать аналитически с помощью двойных неравенств. Рассмотрим замкнутую дугу KM, где точка K соответствует числам вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, а точка M — числам вида

$\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$ (рис. 18). Точки дуги KM соответствуют числам t, для которых

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

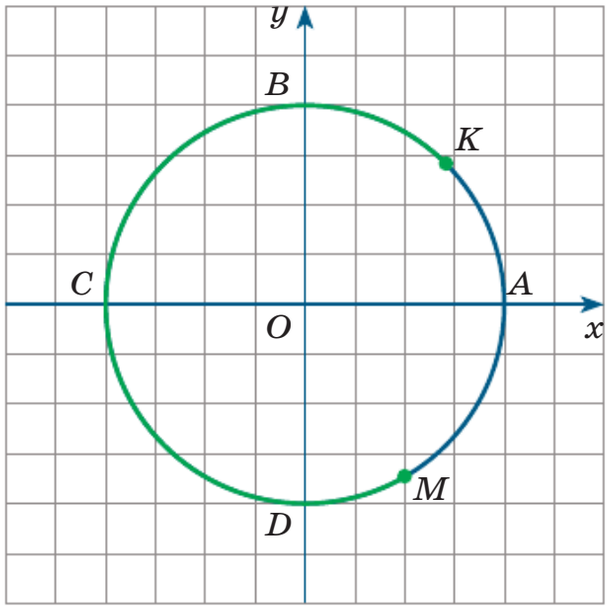


Рис. 18

А теперь составим аналитическую модель для дуги MK. Точка $A(0)$ находится внутри дуги MK, поэтому к началу дуги — к точке M — мы движемся от точки $A(0)$ *в отрицательном направлении*. Значит, главное имя точки M не $\frac{5\pi}{3}$, как было у дуги KM, а $-\frac{\pi}{3}$.

Вывод: точки дуги MK соответствуют числам t, для которых

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример Какие числа соответствуют точкам $(x;\ y)$ на числовой окружности, для которых:

а) $x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $y \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $y > -\frac{\sqrt{2}}{2}$?

Решение. а) Прямая $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 19). Неравенству $x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ соответствуют точки замкнутой дуги PM на рисунке 19. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и с концом в точке M. Начальная точка соответ-

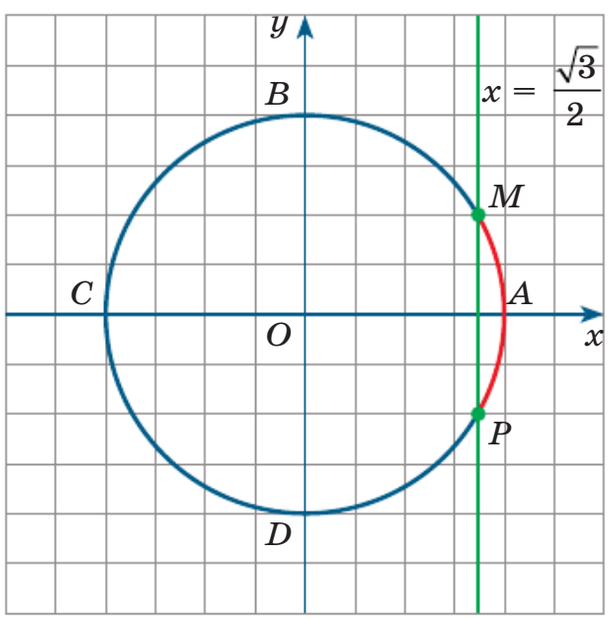


Рис. 19

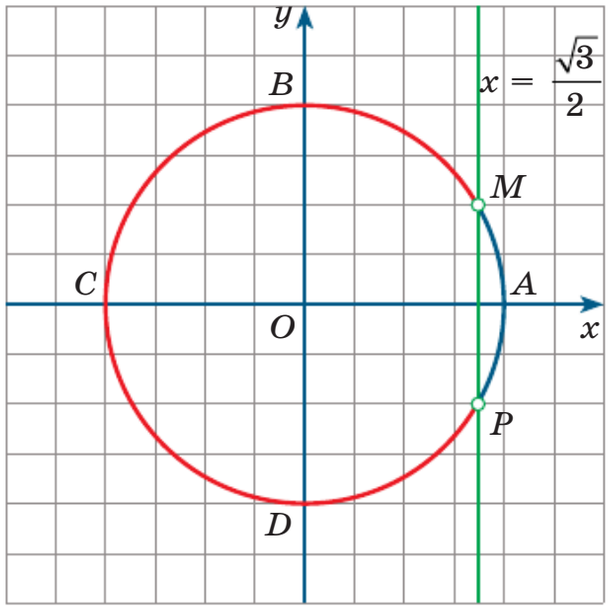


Рис. 20

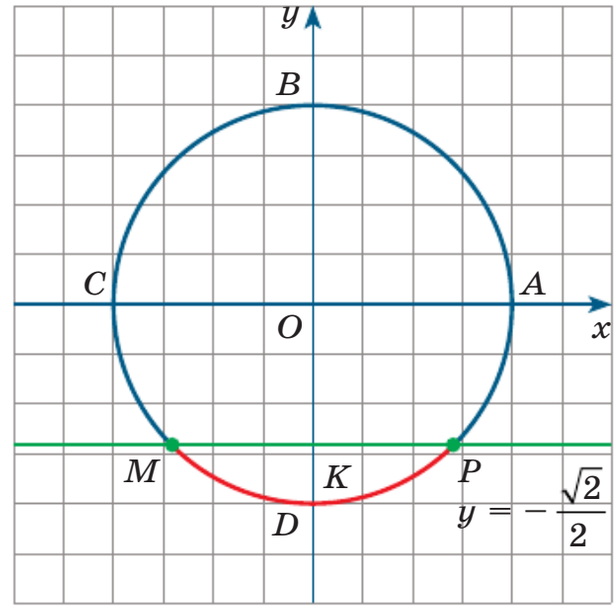


Рис. 21

ствует числам вида $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, конечная — числам вида $\frac{\pi}{6}+2\pi n$ (см. макет № 2 на с. 10). Аналитическая модель замкнутой дуги PM такова:

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Неравенству $x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP на рисунке 20. Дуга MP — это дуга с началом в точке M и с концом в точке P. Начальная точка соответствует числам вида $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, конечная — числам вида $\frac{11\pi}{6}+2\pi n$. Аналитическая модель открытой дуги MP такова:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi n < t < \frac{11\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

в) Прямая $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 21). Неравенству $y \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки замкнутой дуги MP на рисунке 21; M — начальная точка, P — конечная точка

дуги. Точка M соответствует числам вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, точка P — числам вида $\frac{7\pi}{4} + 2\pi n$ (см. макет № 1 на с. 10). Итак, имеем:

$$\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

г) Неравенству $y > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги PM на рисунке 22; P — начальная точка, M — конечная точка дуги. Точка P соответствует числам вида $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, точка M — числам вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$. Итак, имеем:

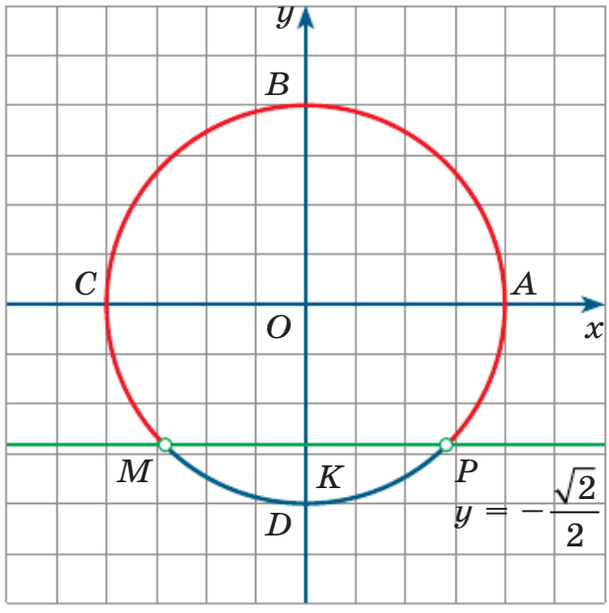


Рис. 22

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Упражнения

3.1. Изобразите на числовой окружности дугу:

а) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; в) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$; г) $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$.

3.2. Точка P — середина первой четверти числовой окружности $ABCD$. Составьте аналитическую запись замкнутой дуги:

а) AP; б) PA; в) PC; г) DP.

3.3. Точка P — середина второй четверти числовой окружности $ABCD$. Составьте аналитическую запись открытой дуги:

а) AP; б) PC; в) DP; г) PD.

3.4. Точка P — середина первой четверти числовой окружности $ABCD$, третья четверть которой разделена на три равные части точками N и M, считая от C. Составьте аналитическую запись открытой дуги:

а) PN; в) NA; д) NM;
б) MP; г) NP; е) AM.

3.5. Изобразите дугу числовой окружности, абсциссы точек которой удовлетворяют данному неравенству, и запишите с помощью двойного неравенства, каким числам t эти точки соответствуют:

а) $x < 0$; в) $x > \frac{1}{2}$; д) $x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $x > 0$; г) $x < \frac{1}{2}$; е) $x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.6. Изобразите дугу числовой окружности, ординаты точек которой удовлетворяют данному неравенству, и запишите с помощью двойного неравенства, каким числам t эти точки соответствуют:

а) $y > 0$; в) $y < \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $y < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $y < 0$; г) $y < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $y > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.7. Запишите с помощью двойного неравенства, каким числам t соответствует дуга NM числовой окружности, изображённая на указанном рисунке:

а) рис. 23; в) рис. 25; д) рис. 27;
б) рис. 24; г) рис. 26; е) рис. 28.

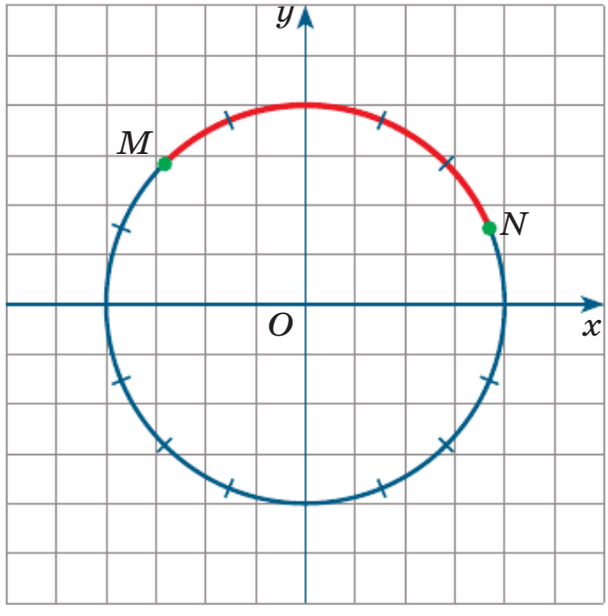


Рис. 23

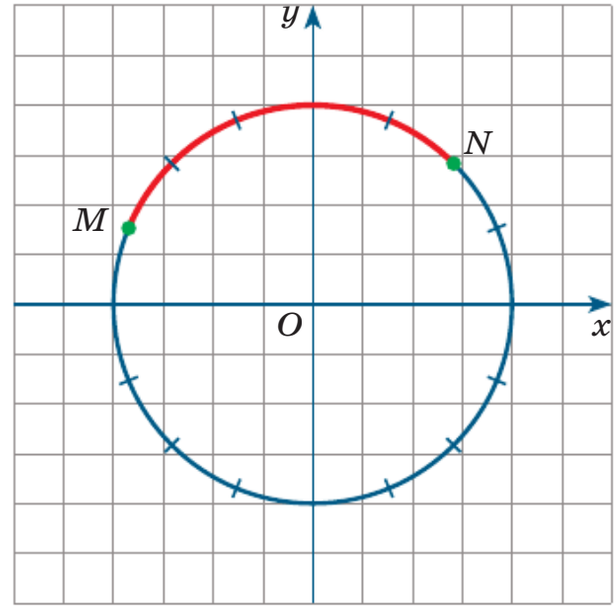


Рис. 24

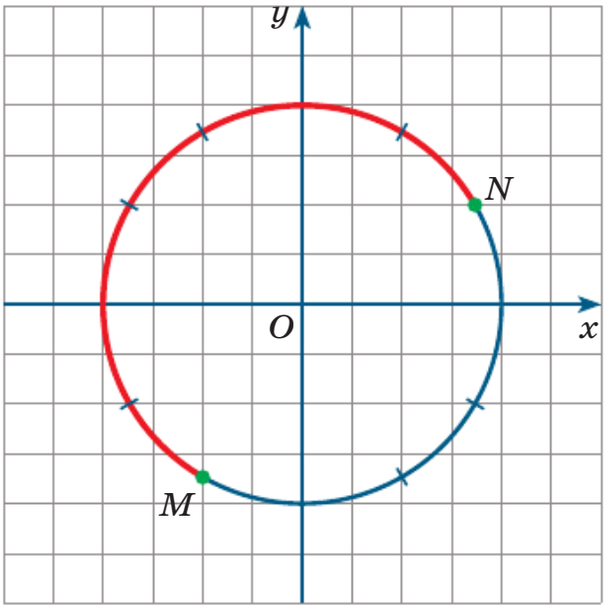


Рис. 25

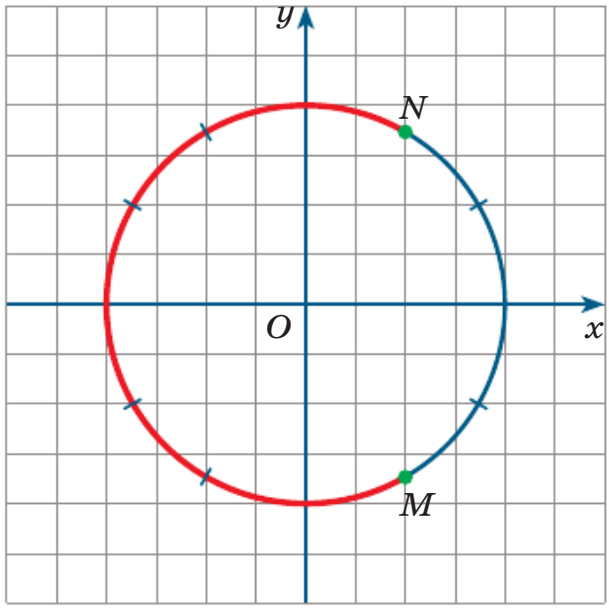


Рис. 26

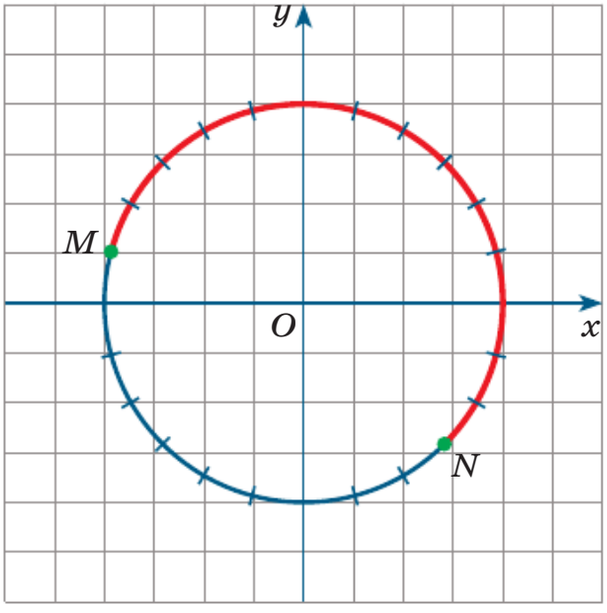


Рис. 27

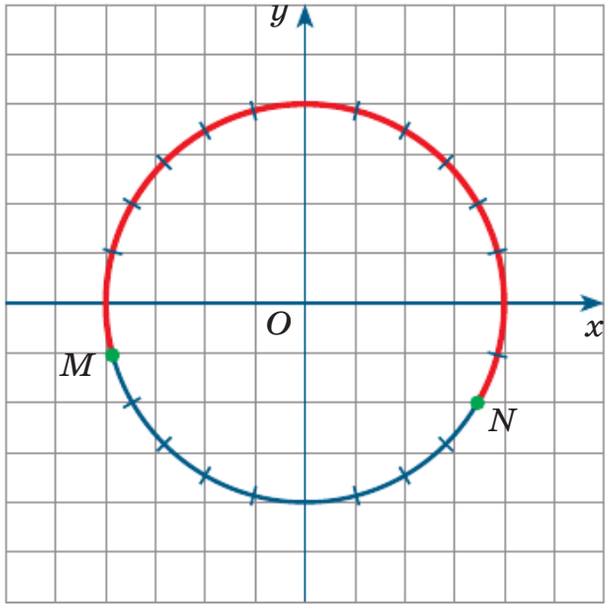


Рис. 28

3.8. На числовой окружности отметьте дуги, для всех точек которых и абсцисса, и ордината:

а) положительны;
б) неотрицательны;
в) больше 0,5;
г) не меньше 0,7;
д) не больше −0,4;
е) больше 0,8.

3.9. На числовой окружности отметьте дуги, для всех точек которых или абсцисса, или ордината:

а) положительна;
б) неотрицательна;
в) больше 0,5;
г) не меньше 0,7;
д) не больше $-0{,}4$;
е) больше 0,8.

3.10. Найдите на числовой окружности все точки, координаты которых удовлетворяют системе неравенств, и запишите с помощью двойного неравенства, каким числам t они соответствуют:

а) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ y \geqslant \dfrac{1}{2}; \end{cases}$
д) $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$
е) $\begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{2}, \\ y \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Упражнения для повторения

3.11. а) Докажите, что значение выражения $43^2 - 22^2$ делится на 39.
б) Докажите, что значение выражения $57^2 - 42^2$ делится на 55.

3.12. В числе 56 3*2 замените символ * такой цифрой, чтобы полученное число при делении:

а) на 9 давало остаток 2;
б) на 3 давало остаток 1;
в) на 4 давало остаток 2;
г) на 5 давало остаток 4.

3.13. а) Составьте квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, между корнями которого заключено 75 натуральных чисел.
б) Составьте квадратный трёхчлен с рациональными коэффициентами, между корнями которого заключено 52 целых числа, хотя бы одно из которых отрицательное.

3.14. а) Найдите все значения параметра p, при которых один из корней уравнения $x^2 - 3x - p^2 - 2 = 0$ больше другого на 7.
б) Найдите все значения параметра p, при которых один из корней уравнения $2x^2 - (3p - 5)x + 3p = 0$ равен p.

§ 4. Понятия косинуса и синуса числа

Определение. Если точка M числовой окружности на координатной плоскости xOy соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом числа t** и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют **синусом числа t** и обозначают $\sin t$.
Итак (рис. 29),

если $M(t) = M(x; y)$, то
$x = \cos t$, $y = \sin t$.

Из определения косинуса и синуса сразу получается целый ряд важных соотношений.

1) Поскольку для абсциссы и ординаты любой точки числовой окружности выполняются неравенства $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, то для любого числа t:

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1.$$

2) Поскольку числам t, $t + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, соответствует одна и та же точка числовой окружности, то:

$$\cos(t + 2\pi n) = \cos t,$$
$$\sin(t + 2\pi n) = \sin t.$$

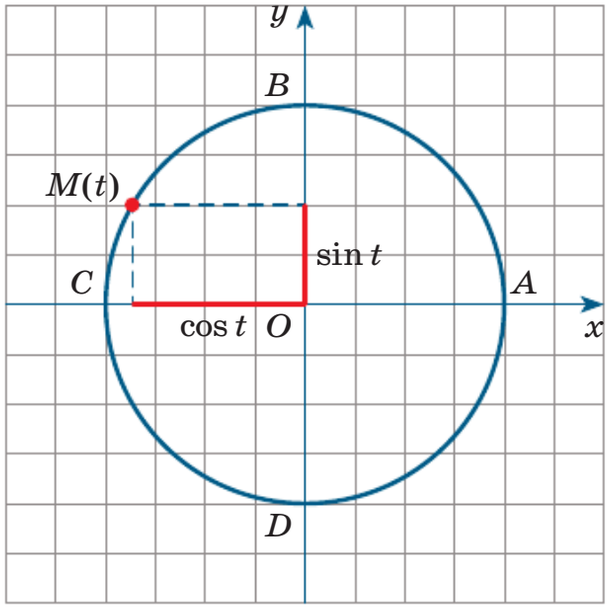


Рис. 29

3) Поскольку $x > 0$, $y > 0$ в первой четверти; $x < 0$, $y > 0$ во второй четверти; $x < 0$, $y < 0$ в третьей четверти; $x > 0$, $y < 0$ в четвёртой четверти, то можно указать знаки косинуса и синуса по четвертям числовой окружности — они представлены на рисунке 30.

4) Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $-t$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно оси абсцисс (рис. 31). У точек M и P одна и та же абсцисса, а это значит, что $\cos(-t) = \cos t$. У точек M и P равные по модулю, но противоположные по знаку ординаты, а это значит, что $\sin(-t) = -\sin t$. Итак, для любого числа t

$$\cos(-t) = \cos t,$$
$$\sin(-t) = -\sin t.$$

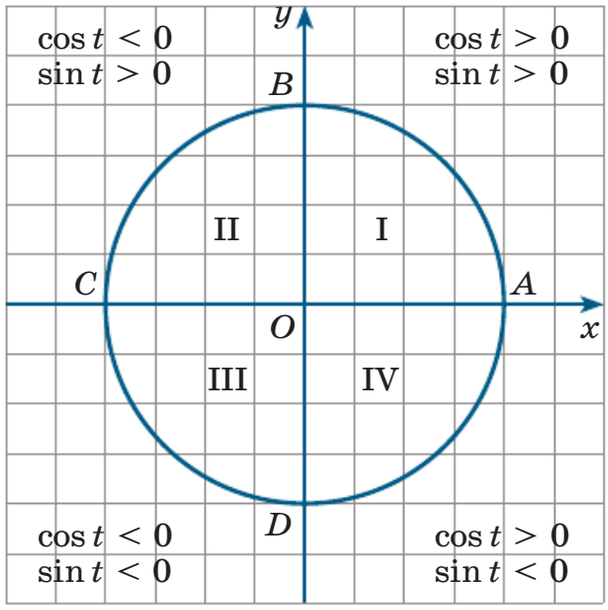


Рис. 30

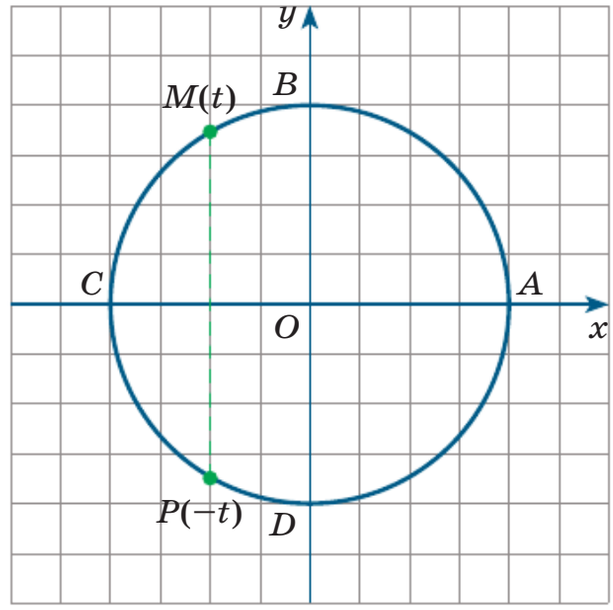


Рис. 31

5) В § 2 мы подробно обсудили, как вычислять координаты всех точек, отмеченных на макетах № 1 и № 2 (см. с. 10). Составим соответствующие таблицы для значений $\cos t$ и $\sin t$.

Таблица 1

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Таблица 2

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Пример 1 Вычислить $\cos t$ и $\sin t$, если:

а) $t = 28\pi$; в) $t = \frac{13\pi}{2}$; д) $t = \frac{19\pi}{6}$;

б) $t = -19\pi$; г) $t = -\frac{17\pi}{4}$; е) $t = -\frac{7\pi}{3}$.

Решение. Во всех заданиях воспользуемся тем, что числам t и $t + 2\pi n$ ($n \in \boldsymbol{Z}$) соответствует одна и та же точка числовой окружности.

а) $28\pi = 0 + 2\pi \cdot 14$. Значит, числу 28π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0, — это точка $A(1; 0)$. Значит,

$$\cos 28\pi = 1, \quad \sin 28\pi = 0.$$

б) $-19\pi = \pi - 20\pi = \pi + 2\pi \cdot (-10)$. Значит, числу -19π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π, — это точка $C(-1; 0)$. Значит,

$$\cos(-19\pi) = -1, \quad \sin(-19\pi) = 0.$$

в) $\frac{13\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 3$. Значит, числу $\frac{13\pi}{2}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{\pi}{2}$, — это точка $B(0; 1)$. Значит,

$$\cos\frac{13\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{13\pi}{2} = 1.$$

г) $-\frac{17\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} - 6\pi = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot (-3)$. Значит, числу $-\frac{17\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{7\pi}{4}$, а потому (см. таблицу 1)

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

д) $\frac{19\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2\pi$. Значит, числу $\frac{19\pi}{6}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{7\pi}{6}$, а потому (см. таблицу 2)

$$\cos\frac{19\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{19\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

е) А здесь мы покажем, как выгодно воспользоваться соотношениями, полученными выше в пунктах 2 и 4. Смотрите:

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sin\frac{7\pi}{3} = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 2 Определить знак числа:
а) $\cos 15$; б) $\sin(-7{,}5)$.

Решение. а) $\cos 15$ — это абсцисса точки, которая на числовой окружности соответствует числу 15. В § 1 в примере 4 «б» мы установили, что числу 15 соответствует точка числовой окружности из второй четверти, её абсцисса отрицательна. Значит, $\cos 15 < 0$.

б) $\sin(-7{,}5)$ — это ордината точки, которая на числовой окружности соответствует числу $-7{,}5$. В § 1 в примере 4 «б» мы установили, что числу $-7{,}5$ соответствует точка числовой окружности из четвёртой четверти, её ордината отрицательна. Значит, $\sin(-7{,}5) < 0$.

Ответ: а) $\cos 15 < 0$; б) $\sin(-7{,}5) < 0$.

Пример 3 Решить уравнение:
а) $\cos t = 0$; б) $\cos t = 1$; в) $\cos t = -1$.

Решение. а) Косинус — абсцисса точки t на числовой окружности, значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой 0 и записать, каким числам t они соответствуют.

Абсциссу 0 имеют точки B и D (см. рис. 31), они соответствуют числам $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (точка B) и $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ (точка D). Обобщая, это можно записать так: точки B и D соответствуют числам вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 0$ имеют вид $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

б) Абсциссу 1 имеет точка A числовой окружности (см. рис. 31), она соответствует числам $0 + 2\pi n$, т. е. $2\pi n$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 1$ имеют вид $t = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

в) Абсциссу -1 имеет точка C числовой окружности (см. рис. 31), она соответствует числам $\pi + 2\pi n$.

Итак, решения уравнения $\cos t = -1$ имеют вид $t = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4 Решить уравнение:
а) $\sin t = 0$; б) $\sin t = 1$; в) $\sin t = -1$.

Решение. а) Синус — ордината точки t на числовой окружности, значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой 0 и записать, каким числам t они соответствуют.

Ординату 0 имеют точки A и C (см. рис. 31), они соответствуют числам $0 + 2\pi n$, т. е. $2\pi n$ (точка A) и $\pi + 2\pi n$ (точка C). Обобщая, это можно записать так: точки A и C соответствуют числам вида πn.

Итак, решения уравнения $\sin t = 0$ имеют вид $t = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

б) Ординату 1 имеет точка B числовой окружности (см. рис. 31), она соответствует числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Итак, решения уравнения $\sin t = 1$ имеют вид $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

в) Ординату -1 имеет точка D числовой окружности (см. рис. 31), она соответствует числам вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Итак, решения уравнения $\sin t = 1$ имеют вид $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 5 Решить уравнение: а) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности, т. е. нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в § 2 (см. пример 3 «а»): $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$.

б) $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности, т. е. нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в § 2 (см. пример 3 «б»): $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $t = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$.

Ответ: а) $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $t = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6 Решить неравенство:

а) $\cos t \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin t \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности, т. е. нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссами $x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в § 3 (см. пример «а»):

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссами $x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в § 3 (см. пример «б»):

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

в) $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности, т. е. нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатами $y \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в § 3 (см. пример «в»):

$$\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

г) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатами $y > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в § 3 (см. пример «г»):

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 7 Расположить в порядке возрастания числа $\sin 10$, $\cos 12$, $\sin 14$, $\cos 16$.

Решение. Отметим на числовой окружности точки 10, 12, 14, 16. Имеем:

$10 \approx 3\pi + 0{,}58$; это точка третьей четверти;

$12 \approx 4\pi - 0{,}56$; это точка четвёртой четверти;

$14 \approx 4\pi + 1{,}44$; это точка первой четверти;

$16 \approx 5\pi + 0{,}3$; это точка третьей четверти.

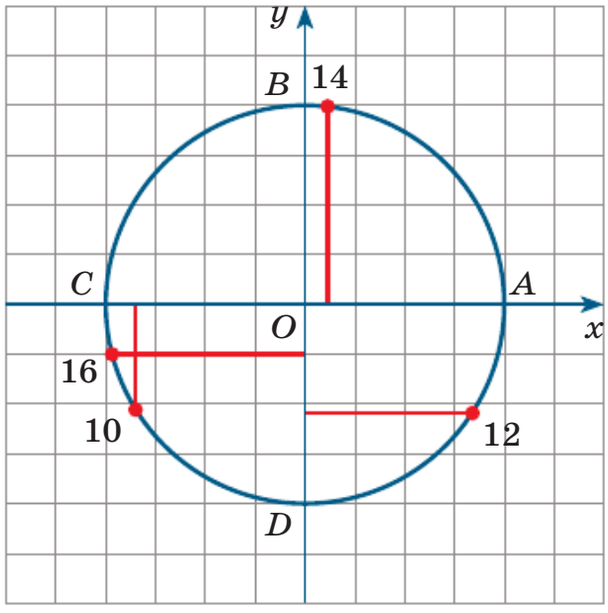


Рис. 32

На рисунке 32 схематично изображены эти точки на числовой окружности и проведены отрезки, изображающие заданные в условии четыре числа.

Заметим, что $\cos 16 < 0$ и $\sin 10 < 0$, при этом $\cos 16 < \sin 10$. Далее, $\cos 12 > 0$ и $\sin 14 > 0$, при этом точка 12 отстоит от точки A примерно на 0,56, а точка 14 отстоит от точки B примерно на 0,13. В самом деле,

$$14 \approx 4\pi + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1{,}44\right) \approx \frac{9\pi}{2} - (1{,}57 - 1{,}44) = \frac{9\pi}{2} - 0{,}13.$$

Значит, точка 12 находится от точки A дальше, чем точка 14 от точки B. Отсюда следует, что $\cos 12 < \sin 14$. Значит, заданные числа располагаются в порядке возрастания следующим образом: $\cos 16$, $\sin 10$, $\cos 12$, $\sin 14$.

Пример 8 Решить уравнение $x^2 + 2x \sin xy + 1 = 0$.

Решение. Положим $\sin xy = a$ и решим уравнение $x^2 + 2ax + 1 = 0$; получим: $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Поскольку $a = \sin xy$, т. е. $|a| \leqslant 1$, выражение $\sqrt{a^2 - 1}$ будет иметь смысл лишь при $a^2 = 1$, т. е. при $a = 1$ или при $a = -1$. Если $a = 1$, то $x = -1$; если $a = -1$, то $x = 1$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin xy = 1, \\ x = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin xy = -1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Решим первую систему. Подставив $x = -1$ в первое уравнение системы, получим $\sin y = -1$, т. е. $y = -\frac{\pi}{2} + \pi n$. Решим вторую систему. Подставив $x = 1$ в первое уравнение системы, получим $\sin y = -1$, т. е. $y = -\frac{\pi}{2} + \pi n$.

Ответ: $\begin{cases} x = \pm 1, \\ y = -\frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Упражнения

Найдите синус и косинус заданного числа t.

4.1. а) $t = 0$; б) $t = \frac{3\pi}{2}$; в) $t = 3\pi$; г) $t = \frac{11\pi}{2}$.

4.2. а) $t = -\pi$; б) $t = -\frac{3\pi}{2}$; в) $t = -4\pi$; г) $t = -\frac{17\pi}{2}$.

4.3. а) $t = \frac{\pi}{3}$; б) $t = -\frac{\pi}{3}$; в) $t = \frac{2\pi}{3}$; г) $t = -\frac{2\pi}{3}$.

4.4. а) $t = \frac{5\pi}{6}$; б) $t = -\frac{5\pi}{6}$; в) $t = \frac{7\pi}{6}$; г) $t = -\frac{7\pi}{6}$.

4.5. а) $t = \frac{3\pi}{4}$; б) $t = -\frac{3\pi}{4}$; в) $t = \frac{5\pi}{4}$; г) $t = -\frac{5\pi}{4}$.

4.6. а) $t = \frac{26\pi}{3}$; б) $t = -\frac{38\pi}{3}$; в) $t = \frac{43\pi}{6}$; г) $t = -\frac{47\pi}{6}$.

Найдите значение выражения.

4.7. а) $\cos\frac{\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{6}$; в) $\cos\frac{\pi}{3} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\frac{\pi}{4}$;

б) $\cos\frac{\pi}{3} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\frac{\pi}{4}$.

4.8. а) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\cos 0\cdot\sin\frac{\pi}{2}$;

б) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}$;

в) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{5\pi}{4}$;

г) $\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\pi$.

4.9. Найдите значение выражений и сравните их:

а) $\cos^2 t-\sin^2 t$ и $\cos 2t$, если $t=\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos^2 t+\sin^2 t$, если $t=\frac{\pi}{3}$, и $\cos^2 t+\sin^2 t$, если $t=\frac{5\pi}{6}$;

в) $\sin^2\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}$ и $\cos t$, если $t=\frac{2\pi}{3}$;

г) $\cos^2 t+\sin^2 t$, если $t=\frac{\pi}{4}$, и $\cos^2 t+\sin^2 t$, если $t=\frac{3\pi}{4}$.

4.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $3\cos t$; в) $-\sin 2t$;

б) $5\sin t+2$; г) $4-2\cos t$.

Решите уравнение.

4.11. а) $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\cos t=2$;

б) $\sin t=-\frac{1}{2}$; г) $\cos t=\sqrt{2}$; е) $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.12. а) $12\cos t=\sqrt{108}$; г) $\sqrt{32}\sin t=8$;

б) $\sqrt{50}\sin t=5$; д) $6\cos t=\sqrt{27}$;

в) $\sqrt{18}\cos t+3=0$; е) $10\sin t+\sqrt{75}=0$.

4.13. а) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}-\sqrt{2}\cos t=0$;

б) $|\sin t|=1$;

в) $\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t=\sin^2 3+\cos^2 3$;

д) $|\cos t|=1$;

е) $\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.14. а) $(2t-5)|\sin t|=\sin t$;

б) $(t^2-3t+3)\frac{|\sin t|}{\sin t}=1$.

4.15. При каких значениях t не определено выражение:

а) $\frac{\cos t-1}{\sin t}$;

б) $\frac{4-\cos^2 t}{2\cos t-\sqrt{3}}$;

в) $\frac{4\sin t-3}{\cos t}$;

г) $\frac{\sin^2 t+5}{\sqrt{2}\sin t+1}$?

4.16. Имеет ли смысл заданное выражение:

а) $\sqrt{\sin 9{,}8\pi}$;

б) $\sqrt{\cos(-12{,}3\pi)}$;

в) $\sqrt{-\sin 11{,}2\pi}$;

г) $\sqrt{\cos 9{,}8\pi}$;

д) $\sqrt{\sin(-15{,}2\pi)}$;

е) $\sqrt{-\cos 10{,}1\pi}$?

Определите знак заданного числа.

4.17. а) $\cos\frac{5\pi}{9}$;

б) $\sin\frac{3\pi}{7}$;

в) $\sin\frac{13\pi}{7}$;

г) $\cos\left(-\frac{7\pi}{9}\right)$;

д) $\sin\left(-\frac{7\pi}{11}\right)$;

е) $\cos\frac{18\pi}{8}$.

4.18. а) $\cos 3$;

б) $\sin 4$;

в) $\sin\frac{8\pi}{7}\cdot\sin 6$;

г) $\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\cdot\cos 5$;

д) $\sin(-5)\cdot\cos 7$;

е) $\cos(-6)\cdot\sin 10$.

4.19. а) $\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}$;

б) $\cos 2{,}2-\cos 2{,}4$;

в) $\sin\frac{3\pi}{8}-\sin\frac{5\pi}{8}$;

г) $\cos\frac{5\pi}{9}-\cos\frac{7\pi}{9}$;

д) $\sin 1{,}3-\sin 1{,}2$;

е) $\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{13\pi}{8}$.

4.20. Сравните числа:

а) $\sin\frac{9\pi}{10}$ и $\sin\frac{5\pi}{6}$;

б) $\cos 2$ и $\sin 2$;

в) $\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$;

г) $\cos\frac{\pi}{9}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$;

д) $\cos 1$ и $\sin 1$;

е) $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$ и $\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$.

ИКТ **4.21.** Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$; $\cos\frac{\pi}{9}$; $\cos\frac{4\pi}{11}$; $\cos\frac{2\pi}{3}$; $\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$; $\cos\frac{\pi}{2}$;

б) $\sin 3$; $\sin 4$; $\sin 6$; $\sin 7$;

в) $\sin 2$; $\sin 3$; $\cos 4$; $\cos 5$;

г) $\sin\frac{8\pi}{7}$; $\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$; $\sin\frac{7\pi}{9}$; $\sin\frac{5\pi}{11}$; $\sin\frac{2\pi}{3}$; $\sin(-5\pi)$;

д) $\cos 3$; $\cos 4$; $\cos 6$; $\cos 7$;

е) $\cos 2$; $\cos 3$; $\sin 4$; $\sin 5$.

4.22. Вычислите:

а) $\cos^2(2{,}5+2\pi)+\sin^2 2{,}5+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}+6\pi\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}-10\pi\right)+\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{3}$.

4.23. Докажите равенство:

а) $\sin 4+\sin(-4)+3\cos 6-3\cos(-6)=0$;

б) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}+4\cos\frac{2\pi}{7}-4\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right)=0$.

Решите неравенство.

4.24. а) $\cos t\geqslant 0$; в) $\sin t<1$; д) $\sin t\leqslant 0$;

б) $\sin t\geqslant 0$; г) $\cos t>-1$; е) $\cos t\leqslant 0$.

4.25. а) $\cos t\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos t\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos t<-\frac{1}{2}$; г) $\cos t>-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.26. а) $\sin t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.27. а) $0 < \sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\frac{1}{2} \leqslant \sin t \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos t < 0$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos t \leqslant \frac{1}{2}$.

4.28. а) $\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3t\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 4t\right) \geqslant -\frac{1}{2}$; г) $\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$.

4.29. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \sin t > \frac{1}{2}, \\ \cos t > -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos t > -\frac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin t < \frac{1}{2}, \\ \cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin t > -\frac{1}{2}, \\ \cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

4.30. Известно, что $x_n = \cos\frac{\pi n}{13}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Найдите количество различных отрицательных чисел среди x_n, если:

а) $1 \leqslant n \leqslant 10$; г) $10 \leqslant n \leqslant 33$;
б) $1 \leqslant n \leqslant 20$; д) $-5 \leqslant n \leqslant 15$;
в) $9 \leqslant n \leqslant 33$; е) $-25 \leqslant n \leqslant -5$.

4.31. Известно, что $y_n = \sin\frac{\pi n}{14}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Найдите количество различных неотрицательных чисел среди y_n, если:

а) $1 \leqslant n \leqslant 10$; г) $13 \leqslant n \leqslant 33$;
б) $1 \leqslant n \leqslant 20$; д) $40 \leqslant n \leqslant 60$;
в) $7 \leqslant n \leqslant 28$; е) $-20 \leqslant n \leqslant 5$.

4.32. Найдите наибольшее целое решение n неравенства:

а) $\cos n > 0$, если $0 \leqslant n \leqslant 5$;

б) $\cos n > 0$, если $0 \leqslant n \leqslant 10$;

в) $\cos n > 0$, если $0 \leqslant n \leqslant 20$;

г) $\sin n < 0$, если $0 \leqslant n \leqslant 9$;

д) $\sin n < 0$, если $0 \leqslant n \leqslant 12$;

е) $\sin n < 0$, если $0 \leqslant n \leqslant 20$.

4.33. Решите уравнение:

а) $4x^2 + \cos^2 \dfrac{17\pi x}{2} = 4x^3 - x^4$;

б) $x^6 - 6x^5 + 9x^4 + \sin^4 \pi x = 0$.

4.34. Вычислите:

а) $\sqrt{\sin^2 3 + \sin^2 1 - 2\sin 3 \sin 1} + \sqrt{\sin^2 3 + 1 + 2\sin 3} - \\ - \sqrt{\sin^2 1 + \dfrac{1}{4} - \sin 1}$;

б) $\sqrt{\cos^2 8 + \cos^2 9 - 2\cos 8 \cos 9} - \sqrt{\cos^2 9 - \cos 9 + \dfrac{1}{4}} + \\ + \sqrt{\cos^2 8 + 1 - 2\cos 8}$.

4.35. Решите уравнение $4x^2 + 1 = 4x \cos 2xy$.

Упражнения для повторения

4.36. Вычеркните одну цифру в числе 574 627 так, чтобы получилось наименьшее число, кратное числу: а) 3; б) 9.

4.37. Составьте формулу натурального числа, которое:

а) при делении на 4 даёт в остатке 3;

б) при делении на 5 даёт в остатке 2;

в) при делении на 6 даёт в остатке 1;

г) при делении на 7 даёт в остатке 6.

4.38. а) Какой процент всех трёхзначных чисел составляют числа, являющиеся квадратами натуральных чисел?

б) Какой процент всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, составляют кубы натуральных чисел?

4.39. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{(\sqrt{3} + 1)^{-1}}$;

в) $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{(3 - \sqrt{5})^{-1}}$;

б) $\dfrac{(7 - 4\sqrt{3})^{-1}}{7 + 4\sqrt{3}}$;

г) $\dfrac{(2\sqrt{2} + 3)^{-1}}{2\sqrt{2} - 3}$.

§ 5. Понятия тангенса и котангенса числа

Определение. Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют **тангенсом числа t** и обозначают $\operatorname{tg} t$. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют **котангенсом числа t** и обозначают $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Тангенс числа t определён, только если $\cos t \neq 0$, т. е. $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (см. пример 3 «а» в § 4).

Котангенс числа t определён, только если $\sin t \neq 0$, т. е. $t \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (см. пример 4 «а» в § 4).

Синус и косинус имеют одинаковые знаки в первой и третьей четвертях числовой окружности, поэтому в первой и третьей четвертях тангенс и котангенс положительны; синус и косинус имеют разные знаки во второй и четвёртой четвертях числовой окружности, поэтому во второй и четвёртой четвертях тангенс и котангенс отрицательны (рис. 33).

Составим таблицу основных значений тангенса и котангенса.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Отметим некоторые свойства тангенса и котангенса.

Свойство 1. Для любого допустимого значения t справедливы равенства:

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t; \quad \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.$$

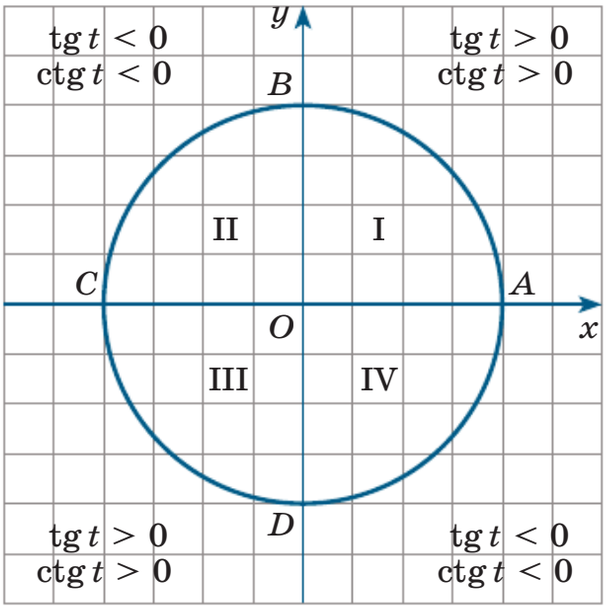


Рис. 33

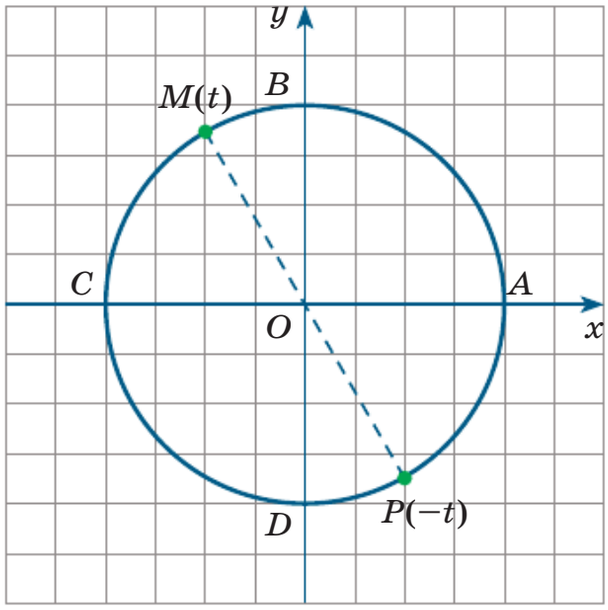


Рис. 34

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Свойство 2. Для любого допустимого значения t справедливы равенства:

$$\operatorname{tg}(t + \pi n) = \operatorname{tg} t, \quad \operatorname{ctg}(t + \pi n) = \operatorname{ctg} t;\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Доказательство осуществим в три шага.

1. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $t + \pi$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно центра окружности — начала координат (рис. 34).

У таких точек абсциссы равны по модулю, но противоположны по знаку; то же можно сказать про ординаты точек. Это значит, что

$$\cos(t + \pi) = -\cos t,$$
$$\sin(t + \pi) = -\sin t.$$

2. $\operatorname{tg}(t+\pi)=\dfrac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)}=\dfrac{-\sin t}{-\cos t}=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\operatorname{tg} t.$

Итак, $\operatorname{tg}(t+\pi)=\operatorname{tg} t$.

Аналогично доказывается, что $\operatorname{ctg}(t+\pi)=\operatorname{ctg} t$.

3. Выполняются и такие равенства:

$$\operatorname{tg}(t+2\pi)=\operatorname{tg} t,$$
$$\operatorname{tg}(t-\pi)=\operatorname{tg} t,$$
$$\operatorname{ctg}(t+2\pi)=\operatorname{ctg} t \text{ и т. д.}$$

Обобщая, получаем соотношения

$$\operatorname{tg}(t+\pi n)=\operatorname{tg} t;$$
$$\operatorname{ctg}(t+\pi n)=\operatorname{ctg} t.$$

Пример Вычислить:

а) $\operatorname{tg}\dfrac{47\pi}{4}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right)$.

Решение. Воспользуемся доказанными выше свойствами 1 и 2 и таблицей значений тангенса и котангенса.

а) $\operatorname{tg}\dfrac{47\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{48\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}+12\pi\right)=\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=-1.$

б) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right)=-\operatorname{ctg}\dfrac{16\pi}{3}=-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{3}+5\pi\right)=-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Упражнения

Найдите тангенс и котангенс заданного числа t.

5.1. а) $t=0$; б) $t=\dfrac{3\pi}{2}$; в) $t=-3\pi$; г) $t=-4\pi$.

5.2. а) $t=-\dfrac{\pi}{3}$; б) $t=\dfrac{2\pi}{3}$; в) $t=-\dfrac{2\pi}{3}$; г) $t=-\dfrac{5\pi}{6}$.

5.3. а) $t=\dfrac{3\pi}{4}$; б) $t=-\dfrac{3\pi}{4}$; в) $t=\dfrac{5\pi}{4}$; г) $t=-\dfrac{5\pi}{4}$.

5.4. а) $t = \dfrac{33\pi}{4}$; в) $t = \dfrac{26\pi}{3}$; д) $t = \dfrac{43\pi}{6}$;

б) $t = -\dfrac{23\pi}{4}$; г) $t = -\dfrac{38\pi}{3}$; е) $t = -\dfrac{47\pi}{6}$.

Найдите значение выражения.

5.5. а) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3} - \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}$;

б) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$.

5.6. а) $4\operatorname{tg}2{,}5 \cdot \operatorname{ctg}2{,}5$; в) $5\operatorname{tg}6{,}1 \cdot \operatorname{ctg}6{,}1$;

б) $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\dfrac{13\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{25\pi}{6}$; г) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{13\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{19\pi}{3}$.

5.7. а) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{3}$; в) $2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{2\pi}{3} + 2\operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin^2\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{4}$; г) $\operatorname{tg}^2\dfrac{5\pi}{6} + \cos\dfrac{2\pi}{3} + \operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{4}$.

5.8. Определите знак числа:

а) $\sin\dfrac{7\pi}{12} - \operatorname{tg}\dfrac{23\pi}{24}$;

б) $\cos 1 - \operatorname{ctg}3$;

в) $\cos 1 \cdot \sin(-2) \cdot \operatorname{ctg}3 \cdot \operatorname{tg}(-4)$;

г) $\operatorname{ctg}\dfrac{27\pi}{16} + \cos\dfrac{16\pi}{15}$;

д) $\operatorname{tg}5 + \sin 6$;

е) $\operatorname{tg}2 \cdot \cos(-3) \cdot \operatorname{ctg}(-5) \cdot \sin 2$.

5.9. Докажите тождество:

а) $\cos t \cdot \operatorname{tg} t = \sin t$; г) $\sin t \cdot \operatorname{ctg} t = \cos t$;

б) $\dfrac{\cos t}{\operatorname{ctg} t} = \sin t$; д) $\dfrac{\sin t}{\operatorname{tg}\, t} = \cos t$;

в) $\dfrac{\sin t}{\operatorname{ctg} t} + \cos t = \dfrac{1}{\cos t}$; е) $\dfrac{\cos t}{\operatorname{tg}\, t} + \sin t = \dfrac{1}{\sin t}$.

Решите уравнение.

5.10. а) $\operatorname{ctg} t - \sqrt{3} = 0$;
г) $\operatorname{tg} t - \sqrt{3} = 0$;

б) $\operatorname{ctg} t + \sqrt{3} = 0$;
д) $\operatorname{tg} t - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$;

в) $3\operatorname{tg} t + \sqrt{3} = 0$;
е) $3\operatorname{ctg} t + \sqrt{3} = 0$.

5.11. а) $\operatorname{tg} t = 0$;
в) $\operatorname{ctg} t = 1$;
д) $\operatorname{tg} t = -1$;

б) $\operatorname{ctg} t = -1$;
г) $\operatorname{tg} t = 1$;
е) $\operatorname{ctg} t = 0$.

5.12. а) $3\operatorname{ctg} t = \sqrt{27}$;
в) $4\operatorname{tg} t = \sqrt{48}$;

б) $\sqrt{75}\operatorname{tg} t = 5$;
г) $\sqrt{147}\operatorname{ctg} t = 7$.

5.13. Решите неравенство:

а) $3\operatorname{ctg} 2 \cdot (2x - 8) \geqslant 0$;

б) $\operatorname{tg}(-3) \cdot \cos 1 \cdot (3x^2 - 75) < 0$;

в) $\operatorname{ctg} 3 \cdot \left(x^2 - 9\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18} \cdot \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{18}\right) \leqslant 0$;

г) $5\operatorname{tg} 2 \cdot \left(\frac{1}{7}x - 3\right) < 0$;

д) $\operatorname{ctg}(-5) \cdot \sin 2 \cdot (5x^2 - 180) \geqslant 0$;

е) $\operatorname{tg} 1 \cdot \left(4x^2 - 25\operatorname{tg}\frac{4\pi}{11} \cdot \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{11}\right) \geqslant 0$.

5.14. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\operatorname{tg} 1$, 1, $\cos 1$, $\sin 1$;
б) $\frac{1}{2}$, $\sin\frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}$.

5.15. Решите уравнение:

$$\left(\sqrt{7} + \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)\left(\sqrt{7} - \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right) = x^2 - 2x + 8.$$

Упражнения для повторения

5.16. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

а) $2^7 \cdot 3^9 \cdot 5^{12}$ и $2^9 \cdot 3^7 \cdot 7^{10}$;

б) $6^8 \cdot 9^{11} \cdot 15^{10}$ и $12^5 \cdot 10^7 \cdot 18^3$;

в) $2 \cdot 7^n \cdot 11^2$ и $7^{n+2} \cdot 11$;
г) $3^{10} \cdot 5^5 \cdot 11^{10}$ и $3^9 \cdot 5^{12} \cdot 13^{12}$;
д) $12^6 \cdot 18^8 \cdot 25^7$ и $15^9 \cdot 20^5 \cdot 125^2$;
е) $3 \cdot 8^{2n}$ и $2 \cdot 8^{n^2}$.

5.17. Решите уравнение:
а) $12x^2 - 4x - 5 = 0$;
б) $34x^2 - 27x - 61 = 0$;
в) $4x^4 + 7x^2 - 36 = 0$;
г) $24x^2 + x - 3 = 0$;
д) $27x^2 + 37x - 64 = 0$;
е) $25x^4 + 16x^2 - 9 = 0$.

5.18. Упростите выражение:
а) $\dfrac{x^{-3} \cdot (2x^2y)^9}{4x^{-4} \cdot (2xy^3)^3}$;
б) $\dfrac{6y^{-5} \cdot (3^{-1}x^3y^4)^5}{(3y)^{-2} \cdot (4x^4y^5)^2}$;
в) $\dfrac{5x^6y \cdot (15x^{-2}y^{-3})^6}{(3x^{-3}y^{-5})^3 \cdot 10x^2}$;
г) $\dfrac{(3x^3y^4)^{-3} \cdot 4x^5}{9x^6(2x^{-2}y^3)^3}$;
д) $\dfrac{x^{-5} \cdot (5x^2y^3)^6}{(2xy^3)^3 \cdot 4x^{-4}}$;
е) $\dfrac{(3x^4y^2)^{-2} \cdot (2xy)^4}{12x^{-5}(6x^{-2}y^3)^3}$.

5.19. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если:
а) $A(-6; 5)$, $B(2; -3)$;
б) $A(6; 1)$; $B(-2; 5)$.

§ 6. Соотношения между тригонометрическими функциями

В § 4 мы узнали, что каждому действительному числу t по определённому правилу поставлены в соответствие числа $\cos t$ и $\sin t$; это две новые функции: *косинус* и *синус* числового аргумента. В § 5 мы узнали, что для любого *допустимого* значения t можно вычислить $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$. Значит, получаем ещё две новые функции: *тангенс* и *котангенс* числового аргумента. Эти четыре функции ($s = \sin t$, $s = \cos t$, $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$) называют *тригонометрическими функциями числового аргумента.*

Установим простейшие соотношения между этими функциями. Первое из них — соотношение между косинусом и синусом — называют его *основным тригонометрическим тождеством.* Формула выглядит так:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1. \qquad (1)$$

Докажем формулу (1). Пусть точка $M(x; y)$ числовой окружности соответствует числу t. Тогда $x = \cos t$, $y = \sin t$ и $x^2 + y^2 = 1$, так как числовая окружность — это окружность радиусом 1 и с центром в начале координат. Поэтому $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Нетрудно получить соотношение, связывающее $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$. Смотрите:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t},$$

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = 1.$$

Эти рассуждения справедливы при условии, что $\cos t \neq 0$, $\sin t \neq 0$. Последние два соотношения означают, что нельзя брать такие значения аргумента t: $0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi$ и т. д. Обобщая, можно сказать так: «Соотношения $\cos t \neq 0$, $\sin t \neq 0$ выполняются при $t \neq \frac{\pi n}{2}$». Итак,

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \quad t \neq \frac{\pi n}{2};\ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{2}$$

Пример 1 Упростить выражение:
а) $1 + \operatorname{tg}^2 t$; б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t$.

Решение.

а) $1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$;

б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$.

Мы получили ещё две важные формулы:

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},\ t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{3}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t},\ t \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{4}$$

Формулы (1)—(4) используются, например, в тех случаях, когда при заданном значении какой-либо тригонометрической функции

требуется вычислить значения других тригонометрических функций того же аргумента.

Пример 2 Известно, что $\sin t = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Вычислить $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Воспользуемся формулой $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Из неё следует, что

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Итак, $\cos^2 t = \frac{16}{25}$, откуда следует, что либо $\cos t = \frac{4}{5}$, либо $\cos t = -\frac{4}{5}$. По условию аргументу t соответствует точка второй четверти числовой окружности, а в этой четверти $\cos t < 0$. Поэтому из указанных двух возможностей выбираем вторую: $\cos t = -\frac{4}{5}$.

Теперь вычислим соответствующие значения тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} t = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} t = -\frac{4}{3}$.

Пример 3 Известно, что $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Вычислить $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Воспользуемся формулой $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Из неё следует, что

$$\cos^2 t = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{144}{25}} = \frac{25}{169}.$$

Итак, $\cos^2 t = \frac{25}{169}$, откуда следует, что либо $\cos t = \frac{5}{13}$, либо $\cos t = -\frac{5}{13}$. По условию аргументу t соответствует точка четвёртой четверти числовой окружности, а в этой четверти $\cos t > 0$. Поэтому из указанных двух возможностей выбираем первую: $\cos t = \frac{5}{13}$.

Теперь вычислим соответствующие значения синуса и котангенса. Из соотношения $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ следует, что

$$\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = -\frac{12}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{12}{13}.$$

И, наконец, $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{5}{12}$.

Ответ: $\sin t = -\frac{12}{13}$, $\cos t = \frac{5}{13}$, $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$.

Пример 4 Доказать неравенство $0 < \operatorname{tg} \frac{17}{7} + \cos^{-2} \frac{17}{7} < 1$.

Решение. Пусть $\operatorname{tg} \frac{17}{7} = x$. Поскольку $\cos^2 t = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$, то $\cos^{-2} \frac{17}{7} = 1 + x^2$, и речь идёт о решении двойного неравенства $0 < x + 1 + x^2 < 1$. Левое неравенство выполняется для всех x, поскольку у квадратного трёхчлена $x + 1 + x^2$ отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент.

Рассмотрим правое неравенство $x + 1 + x^2 < 1$, т. е. $x(x + 1) < 0$. Нужно доказать, что оно справедливо для $x = \operatorname{tg} \frac{17}{7}$.

Число $\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}$ принадлежит второй четверти числовой окружности, значит, $x = \operatorname{tg} \frac{17}{7} < 0$. Осталось доказать, что $x + 1 > 0$, т. е. $\operatorname{tg} \frac{17}{7} > -1$. А для этого достаточно убедиться в том, что $\frac{17}{7} > \frac{3\pi}{4}$.

Имеем: $\frac{17}{7} \approx 2{,}43$; $\frac{3\pi}{4} \approx 2{,}37$; $\frac{17}{7} > \frac{3\pi}{4}$. Вывод: интересующее нас неравенство доказано.

Упражнения

6.1. Упростите выражение.

а) $\frac{1}{\sin^2 t} - 1$;

б) $\frac{1-\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{1+\sin t}$;

в) $\frac{1}{\cos^2 t} - 1$;

г) $\frac{\sin t}{1-\cos t} - \frac{1+\cos t}{\sin t}$.

6.2. а) $1 + \operatorname{ctg}^2 t \cdot (\cos^2 t - 1)$;

б) $\cos^2 t - (\operatorname{ctg}^2 t + 1) \cdot \sin^2 t$;

в) $\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) - \operatorname{ctg}^2 t$;

г) $\frac{\sin^2 t - 1}{1 - \cos^2 t} - \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t$.

6.3. Докажите тождество.

а) $\frac{(\sin t + \cos t)^2 - 1}{\operatorname{ctg} t - \sin t \cdot \cos t} = 2\operatorname{tg}^2 t$;

б) $\sin^3 t \cdot (1 + \operatorname{ctg} t) + \cos^3 t \cdot (1 + \operatorname{tg} t) = \sin t + \cos t$;

в) $\frac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} + \sin^2 t = 1$;

г) $\frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t} = \sin t \cos t$;

д) $\frac{\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t - \sin^2 t}{\cos^2 t - 1} = -\frac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t}$;

е) $\frac{1 + \operatorname{ctg} t}{1 + \operatorname{tg} t} \cdot \operatorname{ctg} t + 1 = \frac{1}{\sin^2 t}$.

6.4. а) $\frac{1 - 2\sin t \cos t}{(\sin t - \cos t)^2} = 1$;

б) $\sin t - \frac{\cos^2 t}{1 - \sin t} = -1$;

в) $\frac{(\sin 2t + \cos 2t)^2}{3 + 6\sin 2t \cos 2t} = \frac{1}{3}$;

г) $\frac{1 + 2\sin t \cos t}{(\sin t + \cos t)^2} = 1$;

д) $\sin t + \frac{\cos^2 t}{1 + \sin t} = 1$;

е) $\frac{(2\sin 3t - 2\cos 3t)^2}{2 - 4\sin 3t \cos 3t} = 2$.

6.5. Докажите, что при всех допустимых значениях t заданное выражение принимает одно и то же значение:

а) $\dfrac{\sin^4 t - \cos^4 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}$;

б) $\sin^4 t - \cos^4 t + 2\cos^2 t$;

в) $\dfrac{2 - \sin^2 t - \cos^2 t}{3\sin^2 t + 3\cos^2 t}$;

г) $\dfrac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} \cdot \operatorname{ctg}^2 t$.

По заданному значению данной тригонометрической функции найдите значения остальных тригонометрических функций.

6.6. а) $\cos t = \dfrac{4}{5}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$;

б) $\sin t = -\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$;

в) $\sin t = 0{,}8$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

г) $\cos t = 0{,}6$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < 0$.

6.7. а) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{4}{3}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg} t = -\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

в) $\operatorname{tg} t = -\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$;

г) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{7}{24}$, $-\pi < t < -\dfrac{\pi}{2}$.

6.8. а) Дано: $\cos t = \dfrac{21}{29}$, $\dfrac{19\pi}{2} < t < 10\pi$. Вычислите $\cos(-t) - \sin(-t)$.

б) Дано: $\sin t = -\dfrac{15}{17}$, $13\pi < t < \dfrac{27\pi}{2}$. Вычислите $\cos(-t) + \sin(-t)$.

6.9. а) Дано: $\sin(t + 6\pi) = \dfrac{7}{25}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$. Вычислите $\operatorname{tg}(\pi - t)$.

б) Дано: $\cos(t + 4\pi) = -\dfrac{15}{17}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$. Вычислите $\operatorname{ctg}(\pi - t)$.

6.10. а) Дано: $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t = -1{,}4$. Вычислите $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$.
б) Дано: $\sin t \cdot \cos t = 1{,}24$. Вычислите $\sin^4 t + \cos^4 t$.

6.11. а) Дано: $\operatorname{tg} t + \dfrac{1}{\operatorname{tg} t} = \dfrac{169}{60}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

Вычислите $\sin t - \cos t$.

б) Дано: $\operatorname{ctg} t + \dfrac{1}{\operatorname{ctg} t} = \dfrac{289}{120}$, $4\pi < t < \dfrac{9\pi}{2}$.

Вычислите $\sin t + \cos t$.

6.12. Решите уравнение:

а) $\frac{\cos x}{\sin x} + 1 = \cos^2 x + \sin^2 x$;

б) $\sin x - \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \cos\frac{3\pi}{2}$;

в) $\operatorname{tg} x \cdot \sin\pi + 2\cos x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

г) $\frac{\sin x}{\cos x} + 2 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

6.13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $s = f(t)$, если:

а) $f(t) = 1 - (\sin^2 t - \cos^2 t)$;
б) $f(t) = 2\sin^2 t + 2\cos^2 t + \cos t$;
в) $f(t) = \sin^2 t \cdot \operatorname{ctg}^2 t + 3\sin^2 t - 1$;
г) $f(t) = 1 - \sin t \cdot \cos t \cdot \operatorname{ctg} t$;
д) $f(t) = -3\cos^2 t - 3\sin^2 t + \sin t$;
е) $f(t) = 1 - \cos^2 t \cdot \operatorname{tg}^2 t + 2\sin^2 t$.

ИКТ **6.14.** Постройте график функции:

а) $y = x^2 - \left(\sin^2\frac{2}{x} + \cos^2\frac{2}{x}\right)$;

б) $y = 2x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

в) $y = \frac{4}{x} - \left(\sin^2\sqrt{x+4} + \cos^2\sqrt{x+4}\right)$;

г) $y = 0{,}5(x-2)^2 + \sin^2\frac{1}{x} + \cos^2\frac{1}{x}$;

д) $y = -3x + 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

е) $y = \frac{3}{x-2} + \left(\sin^2\sqrt{x+1} + \cos^2\sqrt{x+1}\right)$.

6.15. Докажите неравенство:

а) $1 < \sin^2 1{,}2 + 0{,}5\cos 1{,}2 < 1\frac{1}{16}$; б) $-1 < \operatorname{ctg} 4 + \frac{1}{\sin^2 4} < 1$.

6.16. Постройте график функции:

а) $y = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x$;
б) $y = (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\sin^2 x$;

в) $y = \dfrac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x}$;

г) $y = \dfrac{\cos^2 2x + \sin^2 2x}{(1 + \operatorname{ctg}^2 x)\sin^2 x}$;

д) $y = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x - (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\sin^2 x$;

е) $y = \dfrac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x - (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\sin^2 x}$.

Упражнения для повторения

6.17. а) Расположите в порядке возрастания числа $-\dfrac{22}{7}$; $-\pi$; $-\sqrt{10}$; $-3{,}(12)$.

б) Расположите в порядке убывания числа $\dfrac{11}{7}$; $\dfrac{\pi}{2}$; $1{,}(57)$.

6.18. а) Последний раз 29 февраля выпало на понедельник. На какой день недели выпадет это число в следующий раз?

б) В 2016 году Миша отмечал день рождения в среду 1 июня. Через сколько лет Миша будет опять отмечать свой день рождения в среду?

6.19. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x - 25}{x + 12\sqrt{x} + 36} \cdot \dfrac{4\sqrt{x} + 24}{3\sqrt{x} + 15}$;

б) $\left(2 + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \dfrac{5a + 5\sqrt{a}}{18\sqrt{a} + 12}$;

в) $\left(\dfrac{3}{x - \sqrt{y}} + \dfrac{3}{x + \sqrt{y}}\right) : \dfrac{x}{x^2 - y}$;

г) $\dfrac{2\sqrt{x} - 4\sqrt{y}}{5 - \sqrt{x}} : \dfrac{4y - 4\sqrt{xy} + x}{2\sqrt{x} - 10}$.

6.20. Решите уравнение:

а) $(x^2 + 2x)^2 - 11(x^2 + 2x) + 24 = 0$;

б) $(x - 2)^2 (x^2 - 4x) = 5$;

в) $(x^2 + 1)^2 - 15(x^2 + 1) + 50 = 0$;

г) $(x - 3)^2 (x^2 - 6x + 7) = 8$.

§ 7. Тригонометрические функции углового аргумента

Из курса геометрии вы знаете, что в прямоугольном треугольнике синус (косинус) острого *угла* — это отношение противолежащего (прилежащего) катета к гипотенузе. Мы же в предыдущих параграфах всё время говорили о тригонометрических функциях *числа*. Как это взаимосвязано, расскажем в настоящем параграфе.

Возьмём угол с градусной мерой α° и расположим его в модели «числовая окружность на координатной плоскости» так, как показано на рисунке 35: вершину угла совместим с центром окружности (с началом системы координат), а одну сторону угла совместим с положительным лучом оси абсцисс. Точку пересечения второй стороны угла с окружностью обозначим буквой M. Итак, задав угол α°, мы нашли соответствующую ему точку M числовой окружности. У точки M две координаты: абсцисса — *косинус угла* α°, ордината — *синус угла* α°. Причём угол α° может быть любым, не обязательно в пределах от 0° до 90°.

Обозначим длину дуги AM (см. рис. 35) буквой t. Заметим, что число t составляет такую же часть от длины окружности, т. е. от числа 2π, какую угол α° составляет от развёрнутого угла 360°. Это значит, что

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{t}{2\pi};$$

$$t = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha^\circ = \sin t = \sin\frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ};$$

$$\cos\alpha^\circ = \cos t = \cos\frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}.$$

Например,

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi\cdot 45^\circ}{180^\circ} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 180^\circ = \cos\frac{\pi\cdot 180^\circ}{180^\circ} = \cos\pi = -1.$$

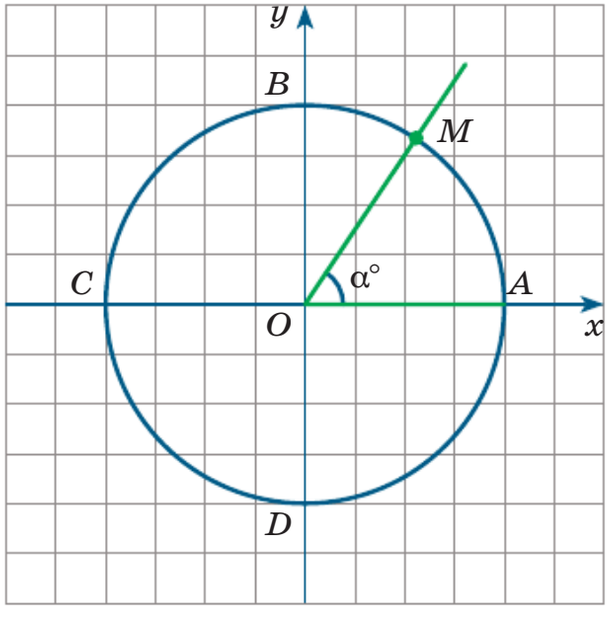


Рис. 35

Говорят, что 45° — это *градусная мера угла*, а $\frac{\pi}{4}$ — *радианная мера* того же угла: $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ рад. Аналогично $180^\circ = \pi$ рад. Вообще

$$\alpha^\circ = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ} \text{ рад.}$$

В частности,

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.}$$

Отсюда, в свою очередь, получаем:

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ.$$

Например,

$$75^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 75 = \frac{5\pi}{12} \text{ рад;}$$

$$\frac{5\pi}{6} \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150^\circ.$$

Угол в 1 радиан — это центральный угол единичной окружности, опирающийся на дугу длиной 1. Говоря о функции $s = \sin t$ (или о любой другой тригонометрической функции), мы можем считать независимую переменную t числовым аргументом, как это было в предыдущих параграфах, но можем считать её и мерой угла, т. е. угловым аргументом. В основном мы будем говорить о функциях числового аргумента.

Вернёмся к тому, что было сказано в начале этого параграфа, — к вопросу о взаимосвязи геометрического и аналитического подходов к определению тригонометрических функций.

Теорема. Если a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC (рис. 36), то выполняются следующие равенства:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

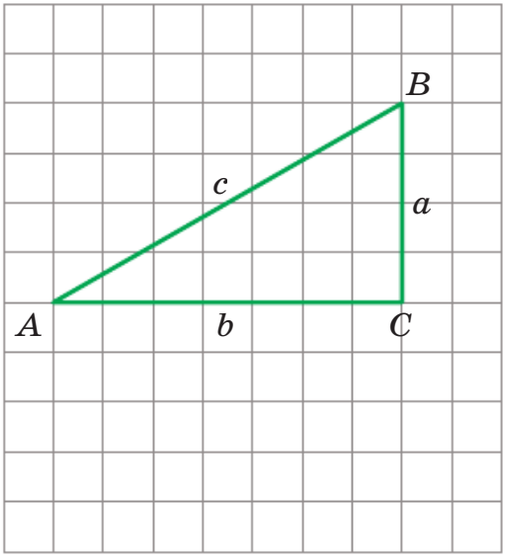


Рис. 36

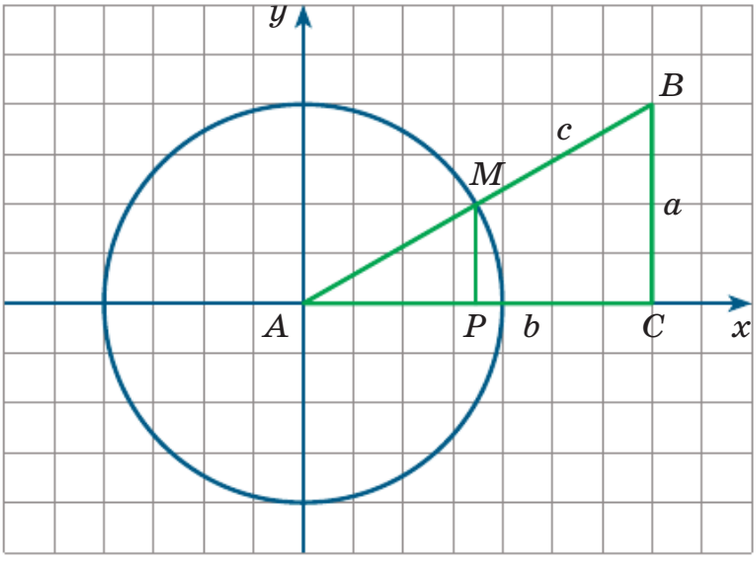


Рис. 37

Доказательство. Совместим прямоугольный треугольник ABC с числовой окружностью так, как показано на рисунке 37: вершину A поместим в центр O окружности, катет AC «пустим» по положительному направлению оси абсцисс.

Точку пересечения прямой AB с окружностью обозначим буквой M. Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую AC. Заметим, что AP и MP — абсцисса и ордината точки M, т. е. $AP = \cos A$, $MP = \sin A$. Учтём также, что $AM = 1$ и что $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Так как треугольники AMP и ABC подобны, то

$$\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC},$$

т. е.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c} = \frac{\cos A}{b}.$$

Из пропорции $\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c}$ получаем: $\sin A = \frac{a}{c}$.

Из пропорции $\frac{\cos A}{b} = \frac{1}{c}$ получаем: $\cos A = \frac{b}{c}$.

Далее, $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$; $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$.

Упражнения

Выразите в радианах.

7.1. а) 225°; в) 240°; д) 300°;
б) 315°; г) 210°; е) 330°.

7.2. а) 930°; в) 1485°; д) 1395°;
б) 1320°; г) 840°; е) 1050°.

Выразите в градусах.

7.3. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{3\pi}{4}$; е) $\frac{5\pi}{6}$.

7.4. а) $\frac{7\pi}{8}$; б) $\frac{8\pi}{9}$; в) $\frac{7\pi}{12}$; г) $\frac{5\pi}{12}$; д) $\frac{23\pi}{18}$; е) $\frac{25\pi}{18}$.

Найдите значения тригонометрических функций заданного угла.

7.5. а) 180°; в) 270°; д) 720°;
б) 90°; г) 360°; е) 540°.

7.6. а) 30°; в) 45°; д) 120°;
б) 60°; г) 135°; е) 150°.

7.7. Расположите числа в порядке возрастания:
а) $\cos 50°$, $\cos 80°$, $\cos 110°$, $\cos 140°$;
б) $\sin 50°$, $\sin 80°$, $\sin 110°$, $\sin 140°$.

7.8. Найдите значение выражения:
а) $\cos 45° \cdot \sin 45° + \cos 30° - \operatorname{tg} 45°$;
б) $\sin 45° - \cos 135° + \cos 180°$;
в) $\cos(-45°) + \sin^2 60° + \operatorname{ctg} 135°$;
г) $\sin 60° \cdot \operatorname{tg} 60° + \cos 60° + \sin 30°$.

7.9. Найдите наименьшее натуральное решение n неравенства ($n°$ — угол в n градусов):
а) $\cos n° < 0$;
б) $\cos n° < 0$ при $100 \leqslant n$;
в) $\sin n° > 0$ при $100 \leqslant n$;
г) $\sin n° > 0$ при $1000 \leqslant n$;
д) $\operatorname{tg} n° > 1$ при $50 \leqslant n$;
е) $\operatorname{ctg} n° < -1$.

Упражнения для повторения

7.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на заданном промежутке:
а) $f(x) = x^3 + 1$, $x \in [-8; 1]$;

б) $f(x) = -(x+1)^2 - 2$, $x \in [-3; 0)$;

в) $f(x) = \dfrac{4}{x-4} + 3$, $x \in (4; 5]$;

г) $f(x) = x^3 - 2$, $x \in [-1; 8]$;

д) $f(x) = -(x-2)^2 + 4$, $x \in (3; 5]$;

е) $f(x) = -\dfrac{3}{x+3} - 1$, $x \in [-4; 3)$.

7.11. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение:
а) $(p-3)x^2 - (2p-1)x + p + 3 = 0$ имеет действительные корни;
б) $(p-1)x^2 - (2p+5)x + p + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

7.12. Решите неравенство:
а) $(x+2)^2(x^2 - 7x + 10) \leqslant 0$;
б) $(x-2)^2(x^2 - x - 12) \geqslant 0$;
в) $(5x-1)^2(21x^2 - 10x + 1) = 0$;
г) $(x-5)^2(x^2 + 2x - 3) \leqslant 0$;
д) $(x+1)^2(x^2 + 2x - 15) \geqslant 0$;
е) $(4x+1)^2(18x^2 + 9x + 1) < 0$.

7.13. Составляют квадратичную функцию $y = ax^2 + c$: сначала наудачу выбирают старший коэффициент $a \in \{-1; 1; 2\}$, затем свободный коэффициент $c \in \{-3; 1; 5\}$. После этого строят соответствующую параболу.
а) Сколько всего будет таких парабол?
б) Сколько среди них парабол, не пересекающих ось Ox?
в) Какова вероятность того, что у построенной параболы ветви направлены вниз?
г) Какова вероятность того, что парабола пройдёт через точку $K(2; 5)$?

§ 8. Периодические функции

Определение. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют **периодической**, если существует такое отличное от нуля число $\boldsymbol{T}$, что для любого $x \in X$ выполняется двойное равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T). \qquad (1)$$

Число T, удовлетворяющее соотношению (1), называют **периодом функции.**

Из этого определения следует, что если функция с периодом T определена в точке x, то она определена и в точках $x + T$, $x - T$.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$, $x \in X$, имеет период T, то любое число, кратное T (т. е. число вида nT, $n \in \boldsymbol{Z}$), также является её периодом.

Доказательство. Докажем, что $2T$ — период функции. Поскольку $f(x) = f(x + T)$, то

$$f(x) = f(x + T) = f((x + T) + T) = f(x + 2T).$$

Поскольку $f(x) = f(x - T)$, то

$$f(x) = f(x - T) = f((x - T) - T) = f(x - 2T).$$

Таким образом, для любого $x \in X$ выполняется соотношение $f(x - 2T) = f(x) = f(x + 2T)$, что, согласно определению, означает, что $2T$ — период функции $y = f(x)$, $x \in X$.

Аналогично можно доказать, что

$$f(x - 3T) = f(x) = f(x + 3T),$$
$$f(x - 4T) = f(x) = f(x + 4T)$$

и вообще

$$f(x - nT) = f(x) = f(x + nT).$$

Таким образом, nT, $n \in \boldsymbol{Z}$, — период функции, что и требовалось доказать.

Из теоремы следует, что периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Если среди положительных периодов периодической функции есть наименьший, то его называют *основным периодом*. Все остальные периоды кратны основному периоду.

Если T — основной период функции $y = f(x)$, то для построения её графика достаточно построить ветвь графика на одном из промежутков длины T, а затем выполнить параллельный перенос этой ветви вдоль оси Ox вправо и влево на T, $2T$, $3T$, ... Чаще всего в качестве такого промежутка длины T выбирают промежуток с концами в точках 0, T или $-\frac{T}{2}$, $\frac{T}{2}$.

Пример 1 Построить график периодической функции $y = f(x)$, про которую известно следующее: $f(x) = \sqrt{x}$, если $x \in [0; 4)$, и $T = 4$ — основной период функции.

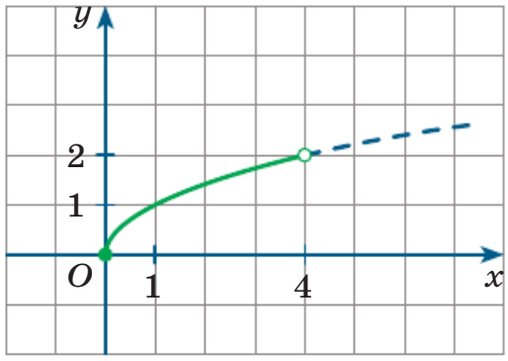


Рис. 38

Решение. Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и выделим его часть на полуинтервале $[0; 4)$ (рис. 38). Чтобы построить весь график, нужно взять часть графика, выделенную на рисунке 38, и осуществить её параллельный перенос вдоль оси Ox вправо и влево на T, $2T$, $3T$, ..., т. е. на 4, 8, 12, ... График функции изображён на рисунке 39.

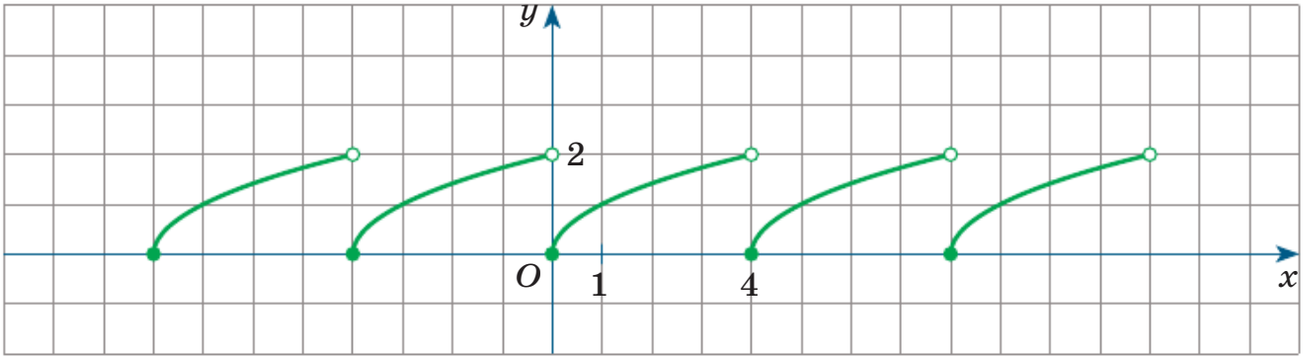


Рис. 39

Теорема 2. Если T — период функции $y = f(x)$ и $n > 0$, то $\dfrac{T}{n}$ — период функции $y = f(nx)$.

Доказательство. Положим $g(x) = f(nx)$ и вычислим значение функции $y = g(x)$ в точке $x + \dfrac{T}{n}$:

$$g\left(x + \frac{T}{n}\right) = f\left(n\left(x + \frac{T}{n}\right)\right) = f(nx + T) = f(nx) = g(x).$$

Аналогично доказывается, что

$$g\left(x - \frac{T}{n}\right) = f(nx) = g(x).$$

Итак, $g\left(x-\frac{T}{n}\right)=g(x)=g\left(x+\frac{T}{n}\right)$, а это, согласно определению, и означает, что $\frac{T}{n}$ — период функции $y=g(x)$, т. е. функции $y=f(nx)$. Теорема доказана.

Следствие. Если T — основной период функции $y=f(x)$, то $\frac{T}{n}$ — основной период функции $y=f(nx)$.

Теорема 3. Функции $s=\cos t$, $s=\sin t$ являются периодическими, причём основной период обеих функций равен 2π.

Доказательство. Поскольку числам $t-2\pi$, t, $t+2\pi$ соответствует одна и та же точка числовой окружности, то справедливы соотношения

$$\cos(t-2\pi)=\cos t=\cos(t+2\pi);$$
$$\sin(t-2\pi)=\sin t=\sin(t+2\pi).$$

Это по определению означает, что функции $s=\cos t$, $s=\sin t$ являются периодическими и 2π — период и той, и другой функции. Осталось доказать, что это основной период.

Рассмотрим функцию $s=\cos t$. Мы знаем, что $\cos 0=1$. При каком наименьшем положительном числе T будет выполняться равенство $\cos(0+T)=1$? Ответ достаточно очевиден: при $T=2\pi$, ведь нужно полностью обойти окружность в положительном направлении (т. е. пройти путь длиной 2π), чтобы снова попасть в точку с абсциссой 1. Значит, у функции нет положительного периода меньше 2π.

Рассмотрим функцию $s=\sin t$. Мы знаем, что $\sin\frac{\pi}{2}=1$. При каком наименьшем положительном числе T будет выполняться равенство $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=1$? Нужно полностью обойти окружность в положительном направлении, чтобы снова попасть в точку с ординатой 1. Значит, у функции нет положительного периода меньше 2π.

Тем самым доказано, что 2π — основной период функций $s=\cos t$, $s=\sin t$.

Теорема 4. Функции $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$ являются периодическими, причём основной период обеих функций равен π.

Доказательство. В § 5 мы установили, что

$$\operatorname{tg}(t - \pi) = \operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(t + \pi),$$
$$\operatorname{ctg}(t - \pi) = \operatorname{ctg} t = \operatorname{ctg}(t + \pi).$$

Это по определению означает, что функции $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$ являются периодическими и π — период и той, и другой функции. Функция $s = \operatorname{tg} t$ определена при $t \neq \frac{\pi n}{2}$, т. е. она не определена в точках $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ и т. д., последовательно отличающихся друг от друга на π. Значит, у функции нет положительного периода меньше π. Так же обстоит дело с функцией $s = \operatorname{ctg} t$.

Тем самым доказано, что π — основной период функций $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$.

Пример 2 Найти основной период функции:

а) $s = \cos 2t$; б) $s = \sin \frac{t}{3}$; в) $s = \operatorname{tg} \frac{2t}{5}$.

Решение. а) Основной период функции $s = \cos t$ равен 2π, значит, по следствию из теоремы 2 основной период функции $s = \cos 2t$ равен $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

б) Основной период функции $s = \sin t$ равен 2π, значит, основной период функции $s = \sin \frac{t}{3}$ равен $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

в) Основной период функции $s = \operatorname{tg} t$ равен π, значит, основной период функции $s = \operatorname{tg} \frac{2t}{5}$ равен $\frac{\pi}{\frac{2}{5}} = \frac{5\pi}{2}$.

В основном мы будем работать с периодическими тригонометрическими функциями. Но встречаются и любопытные периодические функции, не являющиеся тригонометрическими. Расскажем об одной из них.

Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех действительных чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие наибольшее из всех целых чисел, которые не превосходят x. Иными словами, функция $y = f(x)$ определяется следующими условиями:

1) $f(x)$ — целое число;

2) $f(x) \leqslant x$ (поскольку по условию $f(x)$ не превосходит x);

3) $f(x) + 1 > x$ (поскольку по условию $f(x)$ — *наибольшее* целое число, не превосходящее x, значит, $f(x) + 1$ уже больше, чем x).

Эту функцию называют *целой частью числа*; для целой части числа x используют обозначение $[x]$.

Приведём несколько примеров нахождения целой части числа.

1. $[3{,}5106] = 3$. В самом деле, во-первых, 3 — целое число, во-вторых, $3 \leqslant 3{,}5106$, в-третьих, следующее целое число 4 уже больше, чем 3,5106. Как видите, мы проверили выполнимость всех трёх условий словесного задания функции.

2. $[23] = 23$. Проверяем: во-первых, 23 — целое число; во-вторых, $23 \leqslant 23$; в-третьих, следующее за числом 23 целое число 24 уже больше, чем 23. Так что число 23 удовлетворяет всем указанным выше трём условиям.

3. $[-1{,}17] = -2$. Проверяем: во-первых, -2 — целое число; во-вторых, $-2 \leqslant -1{,}17$; в-третьих, следующее за числом -2 целое число -1 уже больше, чем -2. Так что число -2 удовлетворяет всем указанным выше трём условиям.

А теперь рассмотрим функцию $y = x - [x]$, её называют *дробной частью числа* x и обозначают так: $y = \{x\}$. Например,

$$\{3{,}5106\} = 0{,}5106, \quad \{23\} = 0,$$
$$\{-1{,}17\} = -1{,}17 - (-2) = 0{,}83.$$

Функция $y = \{x\}$ обладает следующим свойством: для любого числа x выполняется соотношение $\{x - n\} = \{x\} = \{x + n\}$, где n — любое целое число. Например,

$$\{3{,}5106\} = \{7{,}5106\} = \{1{,}5106\} = 0{,}5106;$$
$$\{23\} = \{24\} = \{22\} = 0;$$
$$\{-1{,}17\} = 0{,}83,$$
$$\{-2{,}17\} = -2{,}17 - (-3) = 0{,}83,$$
$$\{-2{,}17 + 5\} = \{2{,}83\} = 0{,}83.$$

Значит, функция $y = \{x\}$ является периодической, причём периодом функции служит любое целое число, отличное от нуля. График функции изображён на рисунке 40. Он наглядно иллюстрирует тот факт, что у функции $y = \{x\}$ есть основной период, который равен 1.

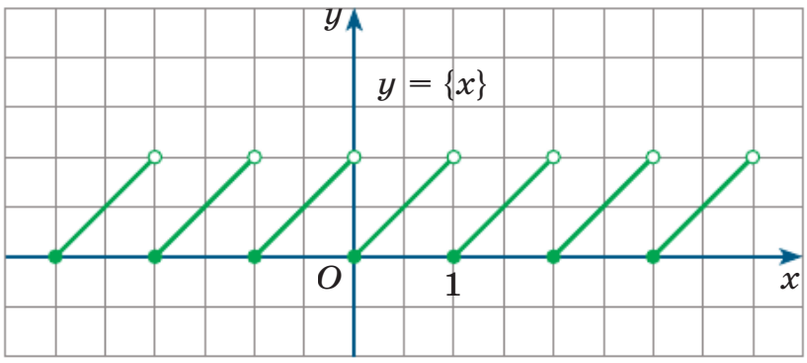


Рис. 40

У всех периодических функций, о которых шла речь в настоящем параграфе, был основной период. Возникает вопрос: «Всегда ли у периодической функции есть основной период?» Не всегда, приведём соответствующий пример.

Рассмотрим функцию $y = d(x)$, где

$$d(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Эту функцию называют *функцией Дирихле* в честь немецкого математика П. Дирихле (1805—1859). Любое рациональное число является периодом этой функции (подумайте почему). Но среди положительных рациональных чисел нет наименьшего числа, так что и основного периода у функции Дирихле нет.

Упражнения

8.1. Функция $y = f(x)$ — периодическая с периодом $T = 3$, при этом $f(0) = 3$. Найдите, если возможно:

а) $f(6)$; в) $f(-21)$; д) $f(18)$;
б) $f(10)$; г) $f(24)$; е) $f(-15)$.

8.2. Функция $y = f(x)$ — периодическая с периодом $T = 4$. Известно, что на промежутке $[-1; 3)$ функция задаётся правилом $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$.

а) Постройте график функции $y = f(x)$ на всей числовой прямой.
б) Найдите $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(7)$.
в) Найдите, при каких значениях x $f(x) = -1$, $f(x) = 1$.
г) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

8.3. Функция $y = f(x)$ — периодическая с периодом $T = 5$. Известно, что на промежутке $(1; 6]$ функция задаётся правилом $f(x) = \dfrac{5}{x-1} - 2$.

а) Постройте график функции $y = f(x)$ на всей числовой прямой.
б) Найдите $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(6)$, $f(12)$.
в) Найдите, при каких значениях x $f(x) = -2$, $f(x) = 1$.
г) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

8.4. Докажите:
а) если 2 — период функции $y = f(x)$, то 4 — также период данной функции;
б) если 5 — период функции $y = f(x)$, то 5 — период функции $y = -3f(2 - x) + 25$;
в) если 3 — период функции $y = f(x)$, то 6 — также период данной функции;
г) если 9 — период функции $y = f(x)$, то 9 — период функции $y = f(x + 2) - 1$.

8.5. Функция $y = f(x)$ — периодическая с периодом $T = 3$. Известно, что на промежутке $[0; 3)$ функция задаётся правилом $f(x) = x^2 - 3$. Решите:
а) уравнение $f(x) = -2$;
б) неравенство $f(x) > 1$;
в) уравнение $f(x) = 1$;
г) неравенство $f(x) < -2$.

8.6. а) Докажите, что 4π является периодом функции $y = \cos\dfrac{x}{2}$.

б) Докажите, что $\dfrac{2\pi}{3}$ является периодом функции $y = \sin 3x$.

8.7. а) Докажите, что 2π является периодом функции $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

б) Докажите, что $\dfrac{\pi}{6}$ является периодом функции $y = \operatorname{ctg} 6x$.

Найдите основной период данной функции.

8.8. а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos 3x$.

8.9. а) $y = \operatorname{ctg} 4x$; б) $y = \operatorname{tg} 3x$.

8.10. а) $y = \sin\dfrac{2x}{3}$; б) $y = \cos\dfrac{x}{3}$.

8.11. а) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{3x}{4}$; б) $y = \operatorname{tg}\dfrac{5x}{6}$.

Упражнения для повторения

8.12. а) Тетрадь стоит 15 р. В конце учебного года магазин сделал на тетради скидку 12 %. Какое наибольшее количество тетрадей можно купить на 200 р.?

б) Шариковая ручка стоит 65 р. Перед началом учебного года магазин поднял цены на канцелярские товары на 10 %. Какое наибольшее количество ручек можно купить на 500 р.?

8.13. а) Сумма цифр двузначного числа равна 13. Если к заданному числу прибавить 45, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

б) Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 34. Если из этого числа вычесть 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

8.14. Решите неравенство:

а) $(x-2)\left(x-\sqrt[3]{5}\right)^2 \geqslant 0$;

б) $\dfrac{x^2-7x+12}{\left(x-\sqrt[3]{60}\right)^2} \leqslant 0$;

в) $(x+4)\left(x+\sqrt[3]{63}\right)^2 \leqslant 0$;

г) $\dfrac{\left(x-\sqrt[3]{150}\right)^2}{x^2-11x+30} \geqslant 0$.

8.15. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } 0 \leqslant x. \end{cases}$$

а) Постройте график функции $y = f(x)$.

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-3; 1]$.

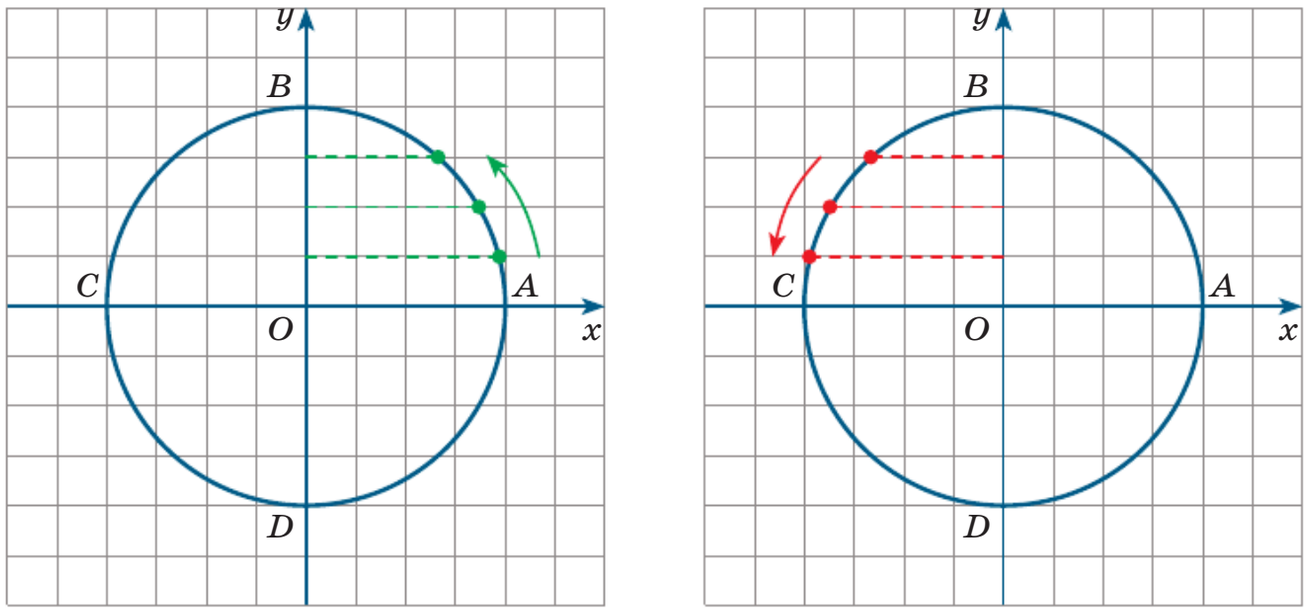
в) При каких значениях параметра p уравнение $f(x) = p$ имеет два корня?

г) Решите неравенство $f(x) > 0$.

§ 9. Свойства и график функции $y = \cos x$

В § 6 вы познакомились с функцией $s = \cos t$. Вернёмся к более привычным обозначениям: $y = \cos x$. Отметим свойства этой функции.

1. Область определения функции: $(-\infty; +\infty)$.



а *б*

Рис. 41

2. $y = \cos x$ — чётная функция. Это следует из доказанной в § 4 формулы $\cos(-x) = \cos x$.

3. $y = \cos x$ — периодическая функция с основным периодом 2π. Это мы установили в предыдущем параграфе.

4. Функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$. Это следует из того, что при движении точки по первой четверти числовой окружности $\left(\text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$ абсцисса постепенно уменьшается от 1 до 0 (рис. 41, *а*), а при движении точки по второй четверти числовой окружности $\left(\text{от } \frac{\pi}{2} \text{ до } \pi\right)$ абсцисса постепенно уменьшается от 0 до -1 (рис. 41, *б*).

5. Функция $y = \cos x$ ограничена и снизу, и сверху. Это следует из того, что для любого x справедливо неравенство $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

6. $y_{\text{наим}} = -1$; $y_{\text{наиб}} = 1$.

7. Функция непрерывна на $(-\infty; +\infty)$.

8. Область значений функции: $[-1; 1]$.

Построим график функции в декартовой прямоугольной системе координат xOy. При этом обычно в тетрадях в клеточку на оси абсцисс полагают, что 6 клеточек — это число π, а на оси ординат пользуются традиционным масштабом: 1 — это 2 клеточки. Составим таблицу значений функции $y = \cos x$.

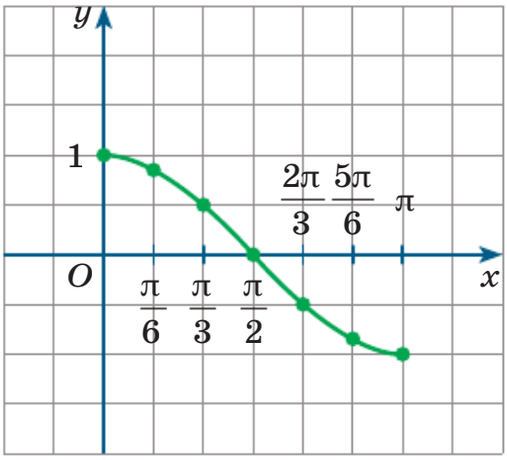


Рис. 42

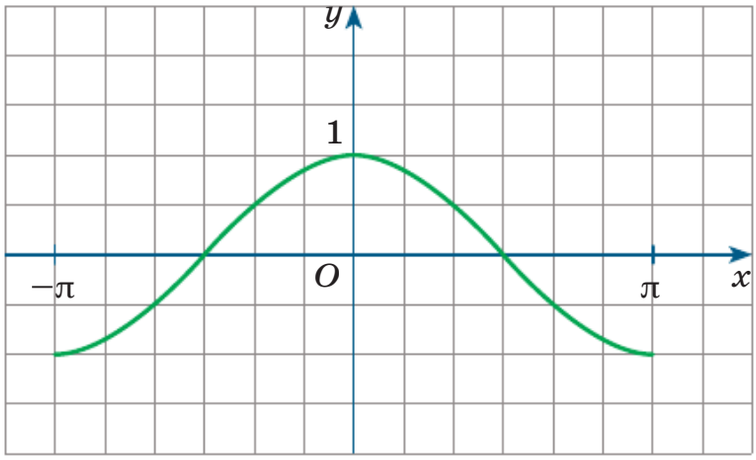


Рис. 43

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Отметим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией. Это — график функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ (рис. 42).

Поскольку $y = \cos x$ — чётная функция, добавим к построенному графику линию, симметричную ему относительно оси ординат. Получим график функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 43).

И, наконец, воспользовавшись периодичностью функции, построим весь график (рис. 44).

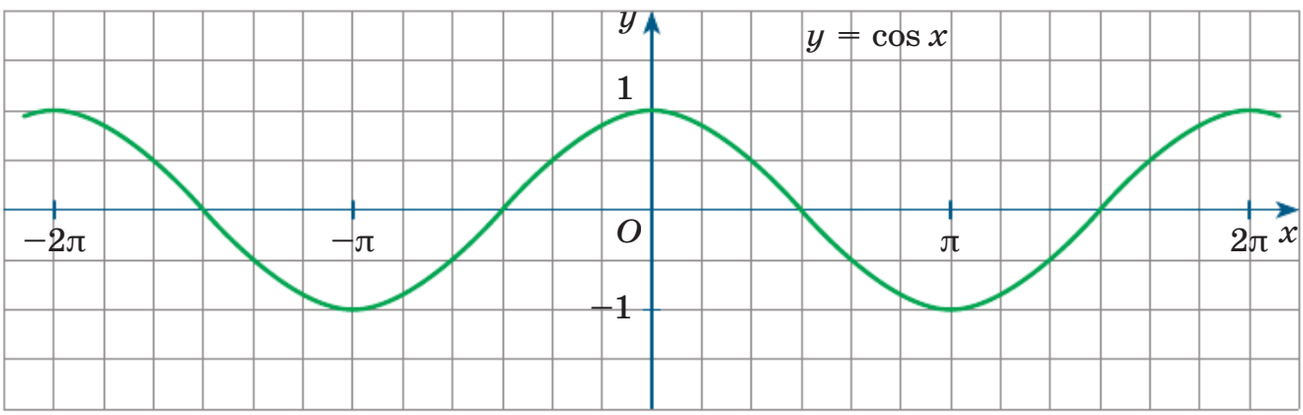


Рис. 44

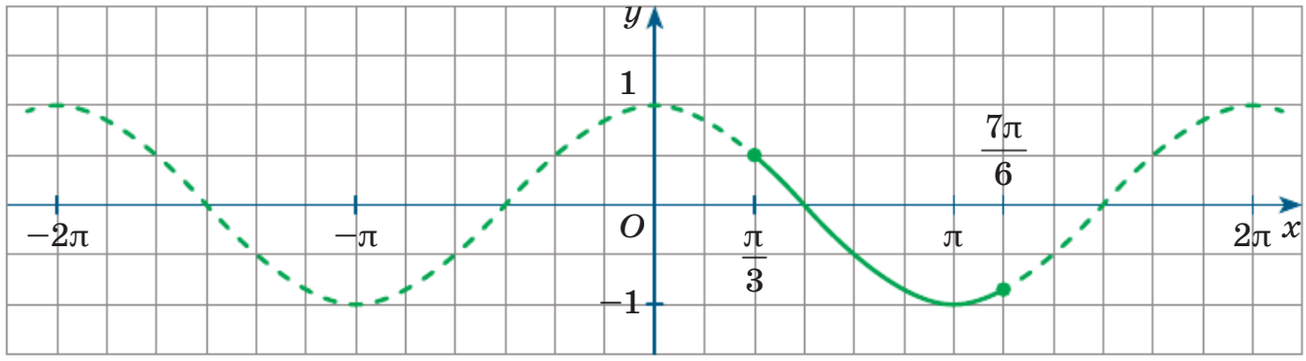


Рис. 45

Пример 1 Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos x$ на заданном промежутке: а) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$; б) $(5; 12)$.

Решение. а) Построим график функции $y = \cos x$ и выделим его часть на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$ (рис. 45). Видим, что $y_{\text{наим}} = -1$ (достигается в точке $x = \pi$), а $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}\left(\text{достигается в точке } x = \frac{\pi}{3}\right)$.

б) В этом случае график функции $y = \cos x$ строить не нужно. Вы знаете, что основной период функции $y = \cos x$ равен 2π. Значит, на любом отрезке длины 2π функция принимает все свои значения от -1 до 1. Отрезок длины 2π целиком содержится в интервале $(5; 12)$, длина которого равна 7, что больше, чем $2\pi \approx 6{,}28$. Значит, и на интервале $(5; 12)$ функция $y = \cos x$ принимает все свои значения от -1 до 1. Вывод: $y_{\text{наим}} = -1$, $y_{\text{наиб}} = 1$.

Ответ: а) $-1; \frac{1}{2}$; б) $-1; 1$.

Пример 2 Построить график функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Из курса алгебры 8 класса вам известно, как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x + l)$. Напомним: нужно сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|l|$ единиц масштаба влево, если $l > 0$, и вправо, если $l < 0$. Сдвинув график функции $y = \cos x$ (см. рис. 44) на $\frac{\pi}{2}$ (на три клеточки) вправо, получим график функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 46).

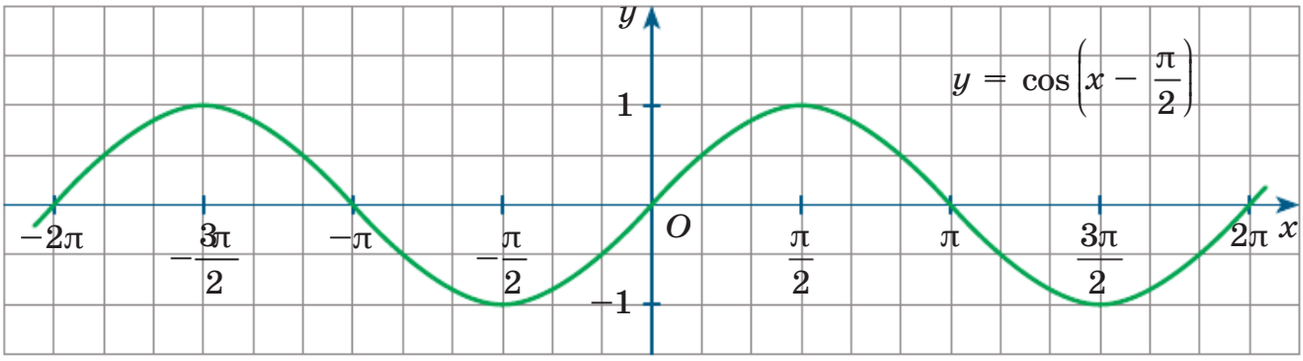


Рис. 46

Пример 3 Решить уравнение:
а) $\cos x = 2x - \pi$; б) $\cos x = x^2 + 1$.

Решение. а) Построим график функции $y = \cos x$. В той же системе координат построим график линейной функции $y = 2x - \pi$. Это прямая, проходящая через точки $(0; -\pi)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Графики изображены на рисунке 47, они пересекаются в точке $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Значит, уравнение $\cos x = 2x - \pi$ имеет единственный корень $x = \frac{\pi}{2}$ — это абсцисса точки $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

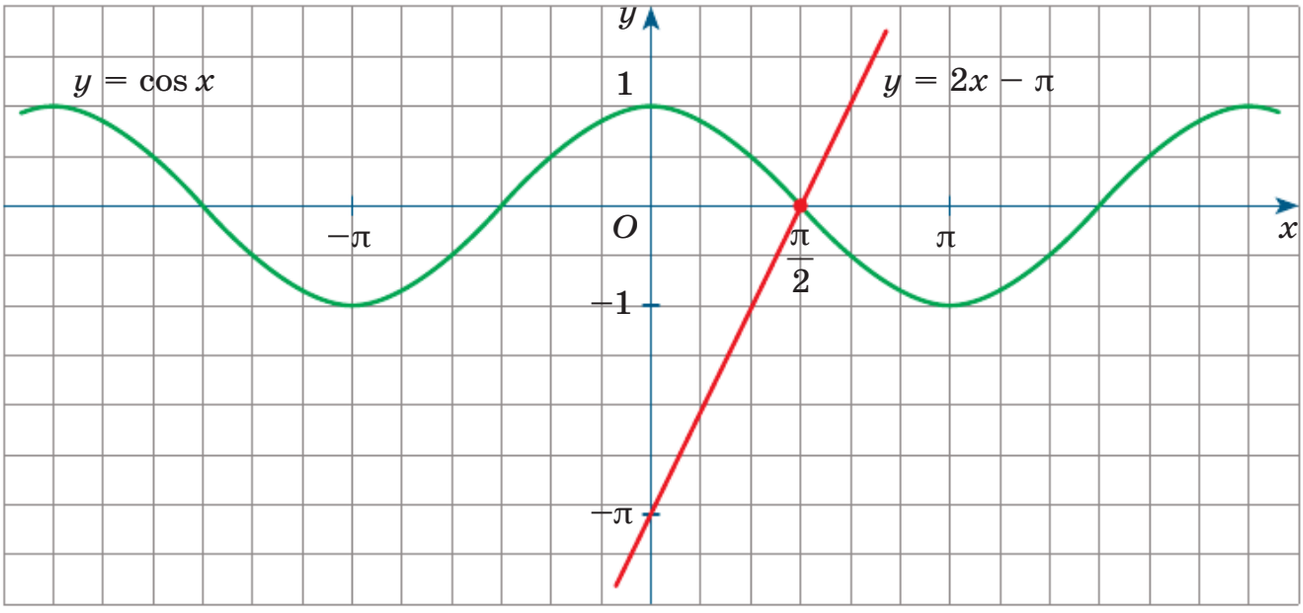


Рис. 47

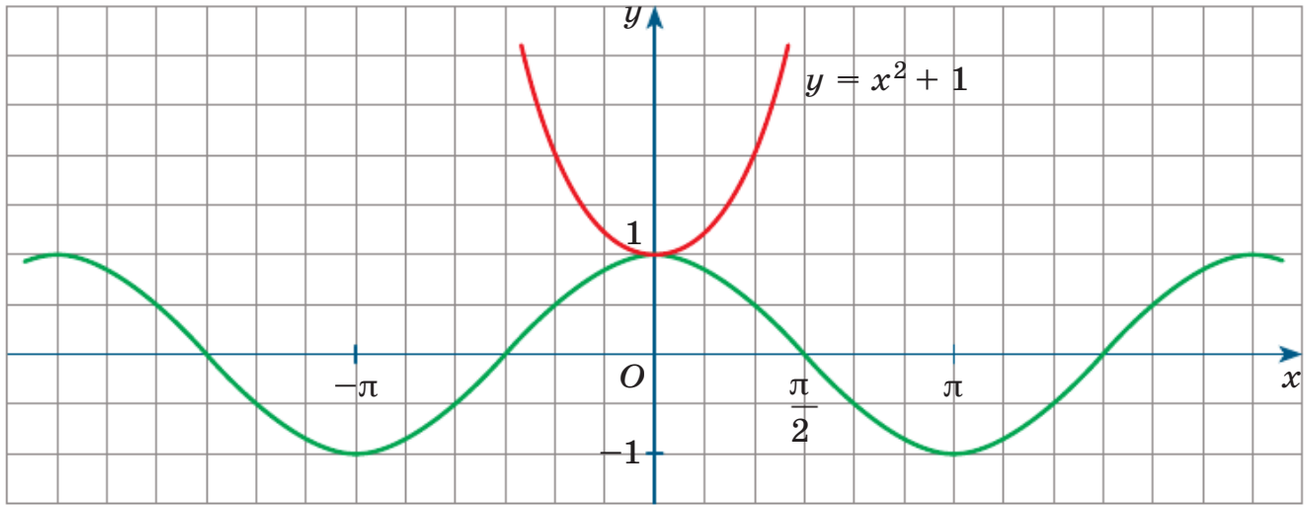


Рис. 48

б) Построим график функции $y = \cos x$. В той же системе координат построим параболу — график функции $y = x^2 + 1$. Графики изображены на рисунке 48, они имеют одну общую точку (0; 1). Значит, уравнение $\cos x = x^2 + 1$ имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0.

Упражнения

9.1. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \cos x$. Найдите:

а) $f(-x)$; в) $f(x - 2)$; д) $f(x) + 3$;

б) $f(-2x)$; г) $f(x + 3)$; е) $f(x) - 2$.

9.2. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$. Вычислите:

а) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; б) $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)$; г) $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

9.3. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Найдите:

а) $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; в) $f(\pi - x)$; д) $f(x) - f(-x)$;

б) $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; г) $f(x - \pi)$; е) $f(x + \pi) - f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$.

9.4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos x$ на заданном промежутке:

а) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$; в) $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; д) $(-3; 4]$;

б) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$; е) $[-1; 10)$.

Постройте график функции.

9.5. а) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$; г) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

9.6. а) $y = \cos x + 2$; в) $y = \cos x - 2$;
б) $y = \cos x - 1$; г) $y = \cos x + 3$.

9.7. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$; в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1{,}5$;

б) $y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 2{,}5$; г) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$.

9.8. Постройте график функции $y = \cos x + 1$. По графику найдите:
а) область значений функции;
б) нули функции;
в) промежутки знакопостоянства.

Решите уравнение.

ИКТ **9.9.** а) $\cos x = x + 1$; г) $\cos x = 1 - x$;
б) $\cos x = -3x + 1$; д) $\cos x = 2x + 1$;
в) $\cos x = |x| - \frac{\pi}{2}$; е) $\cos x = -|x| + 1$.

ИКТ **9.10.** а) $\cos x = \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}$; г) $\cos x = \sqrt{x} + 1$;
б) $\cos x = x^2 + 1$; д) $\cos x = (x - \pi)^2 - 1$;
в) $\cos x = x^3 + 1$; е) $\cos x = -x^3 + 1$.

9.11. Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x < 0, \\ x + 1, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, \text{ если } x < 0, \\ \cos x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x < 0, \\ -2x + 1, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2, \text{ если } x < 0, \\ \cos x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

9.12. Докажите, что функция $y = f(x)$ является чётной, если:

а) $f(x) = x^2 + \cos x$;
б) $f(x) = |x| \cdot \cos x$;
в) $f(x) = \dfrac{\cos x^2}{x^2 - 1}$;
г) $f(x) = |x| - \cos x$;
д) $f(x) = (x^2 + 3) \cdot \cos x$;
е) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{\cos x^3}$.

9.13. Докажите, что функция $y = f(x)$ является нечётной, если:

а) $f(x) = x^3 + x \cdot \cos x$;
б) $f(x) = x^5 \cdot \cos x$;
в) $f(x) = \dfrac{\cos x^3}{x^3 - x}$;
г) $f(x) = 2x^5 - x \cdot \cos x$;
д) $f(x) = -x^9 \cdot \cos x$;
е) $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3}{\cos x}$.

9.14. Составьте возможное задание функции $y = f(x)$, график которой изображён на указанном рисунке:

а) рис. 49;
б) рис. 50;
в) рис. 51;
г) рис. 52.

ИКТ **9.15.** Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = x^2 - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x - \pi| - y = \dfrac{\pi}{2}, \\ y = \cos x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{x}, \\ y = \cos x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = x^2 - 2x - 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = \cos x, \\ \left|x + \dfrac{\pi}{2}\right| - y = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = \dfrac{2}{x}? \end{cases}$

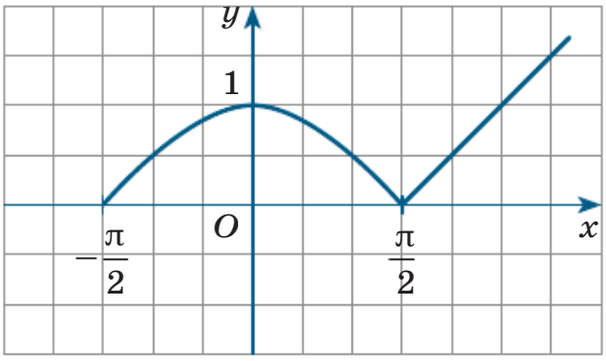


Рис. 49

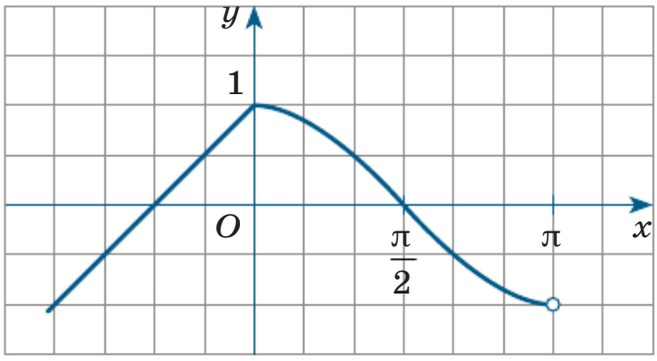


Рис. 50

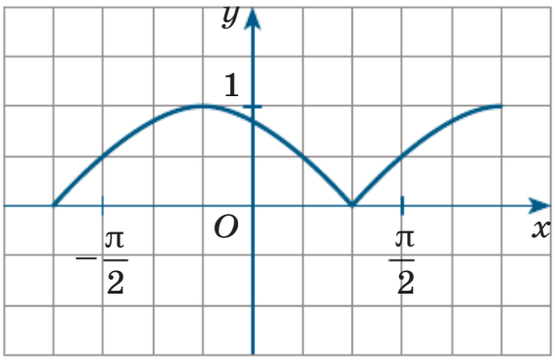


Рис. 51

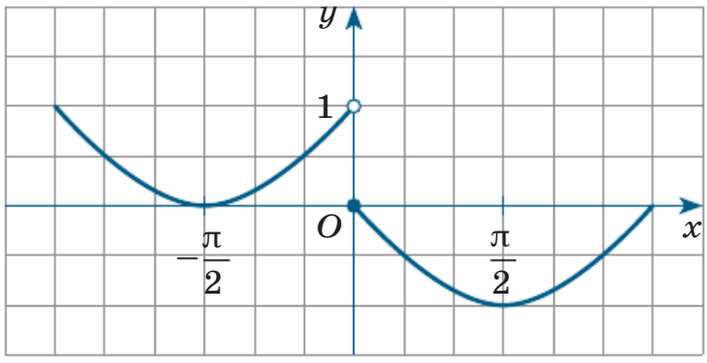


Рис. 52

Решите неравенство.

9.16. а) $\cos x \geqslant -|x + \pi| - 1$; б) $\cos x \geqslant (x - 2\pi)^2 + 1$.

9.17. а) $\cos x \cdot \sqrt{9 - x^2} \leqslant 0$; б) $\cos x \cdot \sqrt{14 + 5x - x^2} \geqslant 0$.

9.18. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{\cos x}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 11x + 10}}{\cos 3x}$;

б) $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{\cos 2x}$; г) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 5x^2 + 6x}}{\cos x}$.

9.19. Докажите, что функция $y = \cos x$:

а) возрастает на интервале $(10; 12)$;

б) убывает на отрезке $[-6; -3{,}5]$;

в) достигает своих наименьшего и наибольшего значений на интервале $\left(17; \sqrt{500}\right)$;

г) не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений на интервале $(7; 9)$.

9.20. Постройте график функции:

а) $y = |\cos x|$;

б) $y = \cos\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$;

в) $y = \left|\cos x - \frac{1}{2}\right|$;

г) $y = \cos|x|$.

Упражнения для повторения

9.21. а) Поезд Москва — Самара отправляется в 17:38, а прибывает в 09:47 на следующий день (время местное). Сколько времени поезд находится в пути, если в Самаре местное время на 1 ч больше, чем в Москве?

б) Поезд Москва — Оренбург отправляется в 17:16, а прибывает в 20:25 на следующий день (время местное). Сколько времени поезд находится в пути, если в Оренбурге местное время на 2 ч больше, чем в Москве?

9.22. а) К 30%-ному раствору соли добавили 100 г воды и получили 10%-ный раствор. Найдите массу первоначального раствора соли.

б) Какое количество воды необходимо добавить к 1 л 36%-ного раствора соли, чтобы получить 24%-ный раствор?

9.23. Найдите целочисленные решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} -2 \leqslant 3x + 1 \leqslant 13, \\ x + 15 \geqslant 5x + 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 4x - 3 \leqslant 0, \\ 2(x - 3) + 22 > 5x + 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -17 \leqslant 4x + 3 \leqslant 11, \\ 2 - 2x \leqslant 4x + 20; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - 6x + 1 \leqslant 0, \\ 3(2 - x) + 10 > 2x + 11. \end{cases}$

9.24. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ 3x + 5y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y^2 - xy = 12, \\ 4x + y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17, \\ 2x + 7y = -4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{12}{x^2y^2} - \frac{4}{xy} = 1, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

§ 10. Свойства и график функции $y = \sin x$

В § 6 вы познакомились с функцией $s = \sin t$. Вернёмся к более привычным обозначениям: $y = \sin x$. Отметим свойства этой функции.

1. Область определения функции: $(-\infty; +\infty)$.

2. $y = \sin x$ — нечётная функция. Это следует из доказанной в § 4 формулы $\sin(-x) = -\sin x$.

3. $y = \sin x$ — периодическая функция с основным периодом 2π. Это мы установили в § 8.

4. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Это следует из того, что при движении точки по первой четверти числовой окружности $\left(\text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$ ордината постепенно увеличивается от 0 до 1, а при движении точки по второй четверти числовой окружности от $\frac{\pi}{2}$ до π ордината постепенно уменьшается от 1 до 0 (рис. 53).

5. Функция $y = \sin x$ ограничена и снизу, и сверху. Это следует из того, что для любого x справедливо неравенство $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

6. $y_{\text{наим}} = -1$, $y_{\text{наиб}} = 1$.

7. Функция непрерывна на $(-\infty; \infty)$.

8. Область значений функции: $[-1; 1]$.

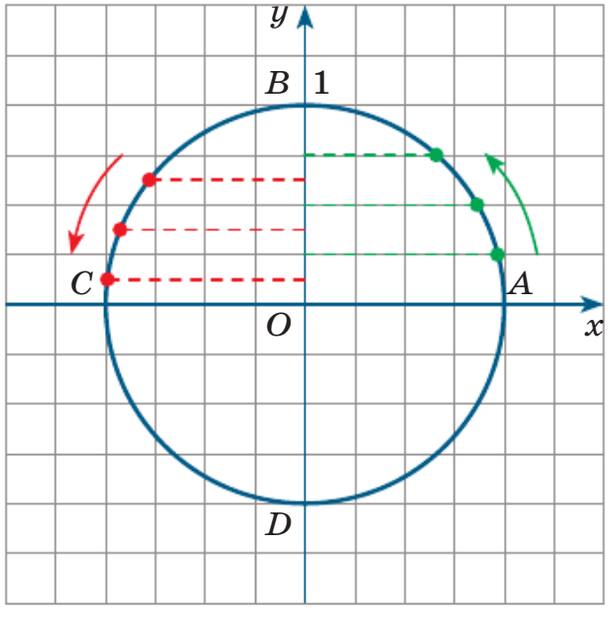


Рис. 53

В предыдущем параграфе мы договорились, что в дальнейшем, говоря о тригонометрических функциях $s = \cos t$, $s = \sin t$, мы будем использовать обозначения $y = \cos x$, $y = \sin x$. Но если для рассуждений нам нужно будет использовать числовую окружность, аргумент по-прежнему будем обозначать буквой t. Вот и сейчас воспользуемся числовой окружностью, чтобы обосновать формулу,

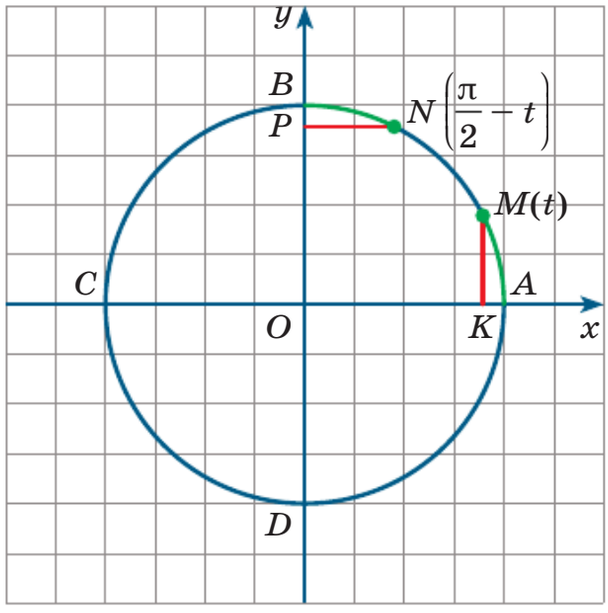


Рис. 54

которая нам понадобится для быстрого построения графика функции $y = \sin x$.

Рассмотрим числовую окружность, в первой четверти которой отмечены точки $M(t)$, $N\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ (рис. 54).

Дуги AM и NB равны (длина каждой из них равна t), соответственно, равны отрезки MK и NP. А теперь смотрите: MK — ордината точки M, т. е. $\sin t$; NP — абсцисса точки N, т. е. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$. Таким образом,

$$\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right). \qquad (1)$$

Мы доказали эту формулу для любого числа t, заключённого в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$. На самом деле, она верна для любого действительного числа t, но в этом мы сможем убедиться позднее, в главе 3. Учтём ещё, что $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$, и вместо t в формуле (1) запишем x. В итоге формула (1) примет вид

$$\sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

В предыдущем параграфе в примере 2 мы построили график функции $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Это и есть график функции $y = \sin x$ (рис. 55).

График функции $y = \sin x$ называют *синусоидой*. Часть графика на отрезке $[0; 2\pi]$ называют *волной* (то же относится к частям синусоиды на отрезках $[2\pi; 4\pi]$, $[-2\pi; 0]$ и т. д.). Часть графика на отрезке $[0; \pi]$ называют *полуволной* (то же относится к частям синусоиды на отрезках $[\pi; 2\pi]$, $[-\pi; 0]$ и т. д.).

Обратите внимание на то, что из начала координат синусоида выходит как бы под углом 45° к положительному направлению оси

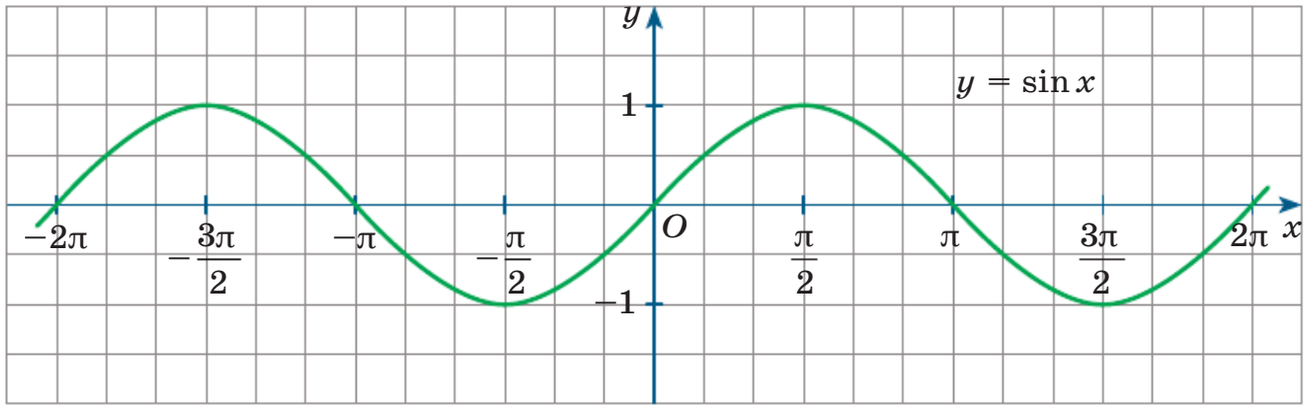


Рис. 55

абсцисс. О том, почему это так, вы узнаете в курсе математики 11 класса.

График функции $y = \cos x$ тоже называют синусоидой.

Пример 1 Построить график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

Решение. В курсе алгебры 8 класса мы сформулировали алгоритм построения графика функции $y = f(x + l) + m$, если известен график функции $y = f(x)$. Нужно:

1) перейти к вспомогательной системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые $x = -l$, $y = m$, т. е. выбрав в качестве начала новой системы координат точку $(-l; m)$;

2) к новой системе координат «привязать» график функции $y = f(x)$.

Воспользуемся этим алгоритмом.

1) Перейдём к вспомогательной системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые $x = -\frac{\pi}{3}$ (две клеточки), $y = -2$ (четыре клеточки), т. е. выбрав в качестве начала новой системы координат точку $\left(-\frac{\pi}{3}; -2\right)$.

2) К новой системе координат «привяжем» синусоиду $y = \sin x$ (рис. 56 на с. 86).

Пример 2 Решить уравнение:

а) $\sin x = 2x + \pi - 1$; б) $\sin x = -x^3$.

Решение. а) Построим график функции $y = \sin x$. В той же системе координат построим график линейной функции $y = 2x + \pi - 1$. Это

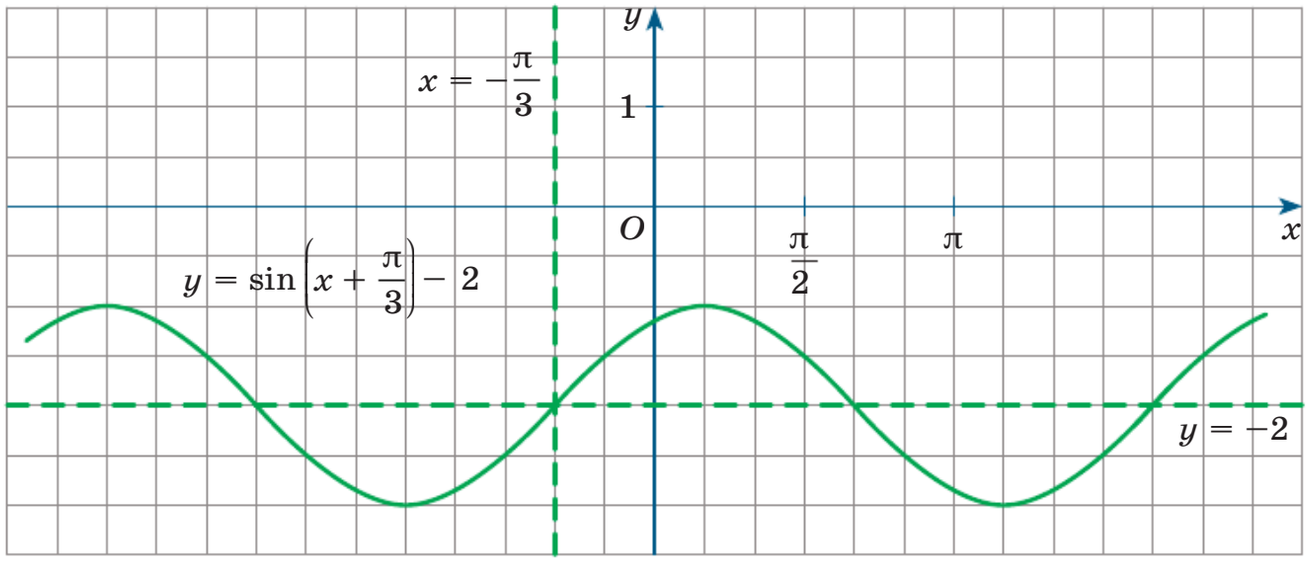


Рис. 56

прямая, проходящая через точки $(0;\ \pi - 1)$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ -1\right)$. Графики изображены на рисунке 57, они пересекаются в точке $\left(-\frac{\pi}{2};\ -1\right)$. Значит, уравнение $\sin x = 2x + \pi - 1$ имеет единственный корень $x = -\frac{\pi}{2}$ — это абсцисса точки $\left(-\frac{\pi}{2};\ -1\right)$.

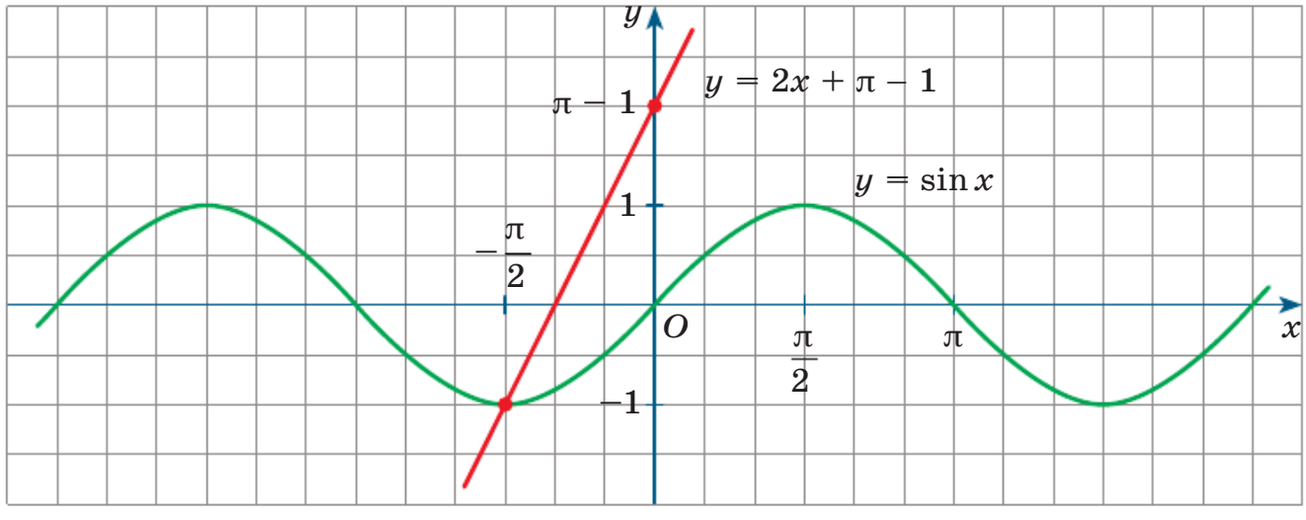


Рис. 57

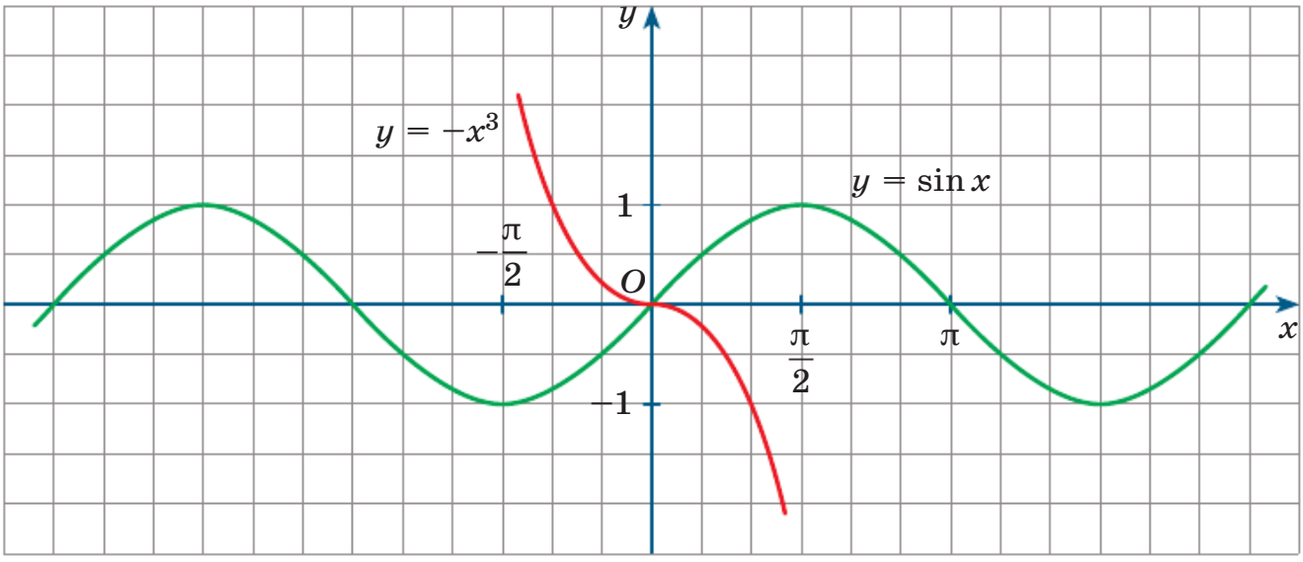


Рис. 58

б) Построим график функции $y = \sin x$. В той же системе координат построим кубическую параболу — график функции $y = -x^3$. Графики изображены на рисунке 58, они пересекаются в точке (0; 0). Значит, уравнение $\sin x = -x^3$ имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}$; б) 0.

Упражнения

10.1. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Принадлежит ли графику функции точка:

а) $\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{1}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; д) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$; г) $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; е) $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$?

10.2. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sin x$. Найдите:

а) $f(-x)$; в) $f(x - 3)$; д) $f(x) + 2$;

б) $f(-2x)$; г) $f(x + 2)$; е) $f(x) - 3$.

10.3. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$. Найдите:

а) $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; в) $f(\pi - x)$; д) $f(x) - f(-x)$;

б) $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; г) $f(x - \pi)$; е) $f(x + 2\pi) - f(-x)$.

10.4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin x$ на заданном промежутке:

а) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$; д) $(-2; 5]$;

б) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$; г) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$; е) $[-3; 7)$.

Постройте график функции.

10.5. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

10.6. а) $y = \sin x + 3$; в) $y = \sin x - 1{,}5$;
б) $y = \sin x - 0{,}5$; г) $y = \sin x + 2$.

10.7. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$; в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$;

б) $y = \sin(x + \pi) - 3$; г) $y = \sin(x - \pi) + 3{,}5$.

ИКТ **10.8.** Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = x^2 - 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = x^2 - 4x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \left|x - \frac{\pi}{2}\right| - y = 2, \\ y = \sin x; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = \sin x, \\ \left|x + \frac{3\pi}{2}\right| - y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ y = \sin x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = -\frac{3}{x}? \end{cases}$

ИКТ **10.9.** Решите уравнение:

а) $\sin x = -x$;

б) $\sin x = \sqrt{x}$;

в) $\sin x = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| + 1$;

г) $\sin x = x$;

д) $\sin x = \sqrt{x - \pi}$;

е) $\sin x = -\left|x + \frac{\pi}{2}\right| - 1$.

Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$.

10.10. а) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x < 0, \\ x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x + \pi, \text{ если } x < -\pi, \\ \sin x, \text{ если } -\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2}, \\ \sqrt{x - \frac{3\pi}{2}} - 1, \text{ если } x \geqslant \frac{3\pi}{2}; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

10.11. а) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x < 0, \\ \cos x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x < -\pi, \\ \sin x, \text{ если } -\pi \leqslant x < \pi, \\ \sqrt{x - \pi}, \text{ если } x \geqslant \pi; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x < -\pi, \\ \cos x, \text{ если } -\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2}, \\ \sqrt{x - \frac{3\pi}{2}}, \text{ если } x \geqslant \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

10.12. Докажите, что функция $y = f(x)$ является чётной, если:

а) $f(x) = x^2 + x \cdot \sin x$;
б) $f(x) = |x| \cdot \sin x^2$;
в) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3 + x \cdot \cos x}$;
г) $f(x) = |x| - x \cdot \sin x$;
д) $f(x) = (x^3 + x) \cdot \sin x$;
е) $f(x) = \dfrac{x^3 \cdot \cos x}{\sin x + x}$.

10.13. Докажите, что функция $y = f(x)$ является нечётной, если:

а) $f(x) = x^3 + \sin x$;
б) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$;
в) $f(x) = \dfrac{\sin x^3}{x^2 - \cos x}$;
г) $f(x) = 5x^3 - \sin x$;
д) $f(x) = -x^4 \cdot \sin x$;
е) $f(x) = \dfrac{x^4 \cdot \cos x - x^2}{\sin x}$.

10.14. Составьте возможное задание функции $y = f(x)$, график которой изображён на указанном рисунке:

а) рис. 59;
б) рис. 60;
в) рис. 61;
г) рис. 62.

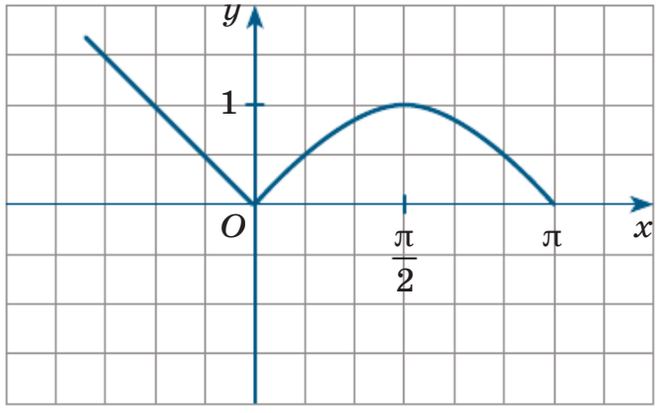


Рис. 59

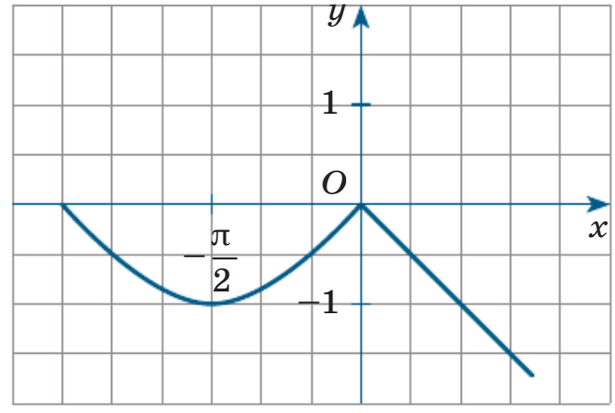


Рис. 60

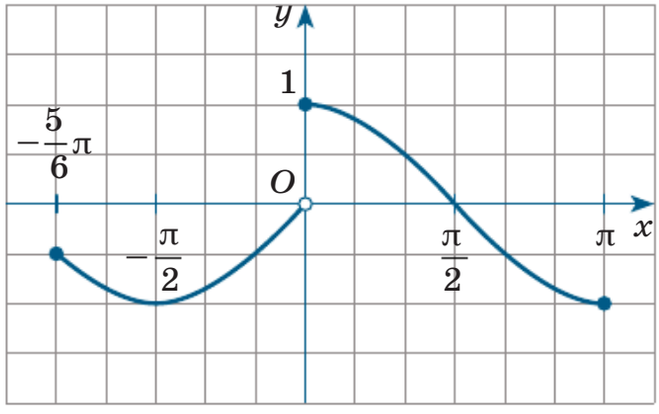


Рис. 61

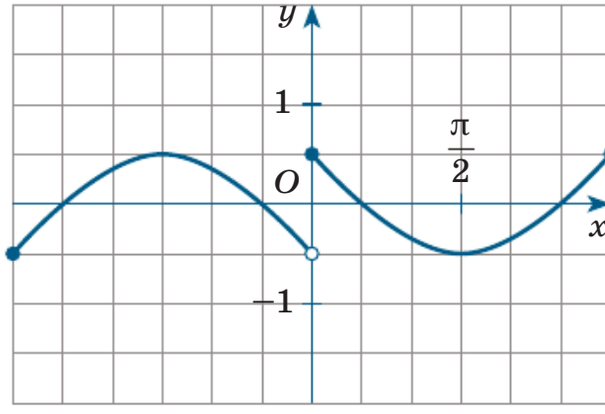


Рис. 62

10.15. а) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 3x^2 - 2x - 3$. Докажите, что $f(\cos x) = -2\cos x - 3\sin^2 x$.
б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 5 + 3x - 5x^2$. Докажите, что $f(\cos x) = 3\cos x + 5\sin^2 x$.

10.16. Докажите тождество:
а) $\sin^2(x - 14\pi) = 1 - \cos^2(10\pi - x)$;
б) $\cos^2(x + 12\pi) = 1 - \sin^2(24\pi - x)$.

10.17. Решите неравенство:
а) $\sin x \cdot \sqrt{16 - x^2} \leqslant 0$; б) $\sin x \cdot \sqrt{16 + 6x - x^2} \leqslant 0$.

10.18. Найдите область определения функции:
а) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sin x}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 8x + 7}}{\sin 3x}$;
б) $y = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{\sin 2x}$; г) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 + 9x^2 + 18x}}{\sin x}$.

10.19. Найдите область значений функции:
а) $y = 2\sin x - \sqrt{\cos^2 x - 1}$;
б) $y = 5\cos 2x + \sqrt{\sin^2 \dfrac{x}{2} - 1}$;
в) $y = \sin x + \cos 2x + \sqrt{3\sin^2 x - 4}$;
г) $y = \sin x + \cos x + 2\sqrt{2\cos^2 2x - 2}$.

10.20. Докажите, что функция $y = \sin x$:
а) возрастает на отрезке $[-7; -4{,}9]$;
б) убывает на интервале $(8; 10{,}1)$;
в) достигает своих наименьшего и наибольшего значений на интервале $\left(\sqrt[3]{10}; \sqrt{85}\right)$;
г) не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений на интервале $(-5; -4)$.

10.21. Постройте график функции.
а) $y = |\sin x|$; в) $y = \left|\sin x + \dfrac{1}{2}\right|$;
б) $y = \sin\left|x - \dfrac{\pi}{3}\right|$; г) $y = \sin|x|$.

10.22. а) $y = \dfrac{\cos x}{\cos x}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x}$; д) $y = \dfrac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$;

б) $y = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x}$; г) $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$; е) $y = \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$.

10.23. а) $y = \dfrac{\sin^3 x}{1 - \cos^2 x}$; б) $y = \sin x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

Упражнения для повторения

10.24. Найдите натуральные решения неравенства:

а) $(x^2 - 11x + 30)(x - 6) \leqslant 0$; в) $(x^2 - 10x + 16)(x - 8) \leqslant 0$;

б) $\dfrac{9x - x^2 - 14}{x - 7} \geqslant 0$; г) $\dfrac{14x - x^2 - 45}{x - 9} \geqslant 0$.

10.25. Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{3x - x^2 + 1} = -2$; в) $\sqrt[3]{7 - 3x} = 4$;

б) $\sqrt[3]{2x^2 + 7x + 23} = 3$; г) $\sqrt[6]{2x^2 - 3x - 11} = 3$.

10.26. а) Автомобиль выезжает из пункта A в пункт B и, доехав до B, сразу же возвращается обратно в пункт A. Через 3 ч после выезда автомобиль находился на расстоянии 50 км от B, а ещё через 1 ч — в 80 км от пункта A. Найдите скорость автомобиля, если известно, что на весь путь было потрачено менее 5 ч.

б) Из пункта A в одном и том же направлении вышли два лыжника, причём второй стартовал на 6 мин позже первого и догнал первого в 3 км от старта. Дойдя до отметки 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого в 4,6 км от старта. Найдите скорость лыжников.

10.27. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = |x^2 - x - 2| + |x - 2|$.

а) Постройте график функции $y = f(x)$.

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $[-2; 1]$.

в) Найдите все значения x, при которых график функции $y = f(x)$ находится не выше прямой $y = -2x + 4$.

г) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет более двух решений.

§ 11. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = kf(x)$

На рисунке 63 изображена полуокружность с центром в начале координат и радиусом 3. Уравнение такой окружности, напомним, $x^2 + y^2 = 9$, а уравнение её верхней полуокружности, изображённой на рисунке 63, $y = \sqrt{9 - x^2}$. Попробуем, опираясь на рисунок 63, построить графики функций $y = 2\sqrt{9 - x^2}$, $y = 3\sqrt{9 - x^2}$, $y = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

Ординаты точек графика функции $y = 2\sqrt{9 - x^2}$ вдвое больше ординат соответствующих точек графика функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ (на рисунке 64 изображены оба графика). Говорят так: «График функции $y = 2\sqrt{9 - x^2}$ получен из графика функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ растяжением от оси Ox с коэффициентом 2». Обратите внимание: точки пересечения графика функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ с осью Ox, т. е. точки, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{9 - x^2} = 0$, остались на месте. А на рисунках 65 и 66 построены графики функций $y = 3\sqrt{9 - x^2}$, $y = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

Вообще, *график функции* $y = kf(x)$, *где* $k > 0$, *получается растяжением графика функции* $y = f(x)$ *от оси* Ox *с коэффициентом* k. Правда, если $k < 1$, то предпочитают говорить не о растяжении с коэффициентом k, а о *сжатии к оси* Ox *с коэффициентом* $\frac{1}{k}$. Так, мож-

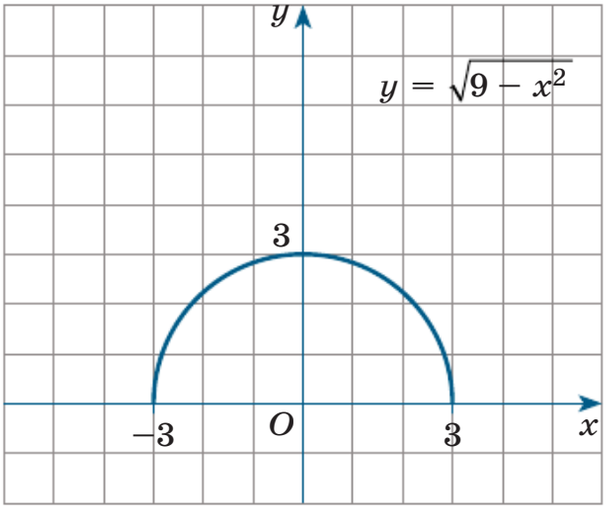


Рис. 63

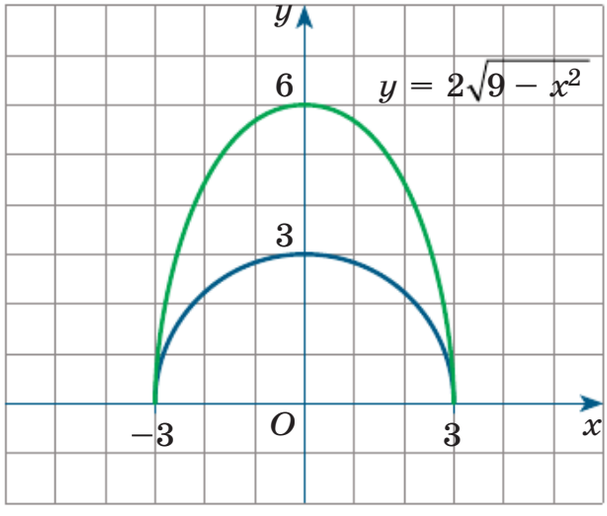


Рис. 64

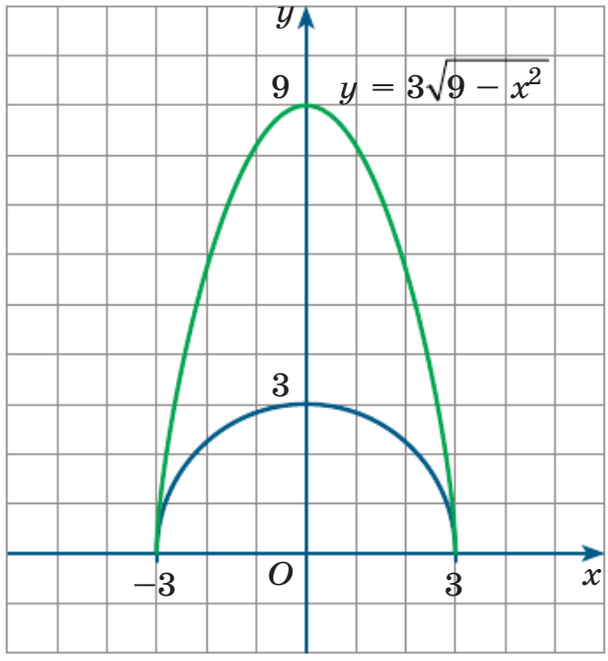


Рис. 65

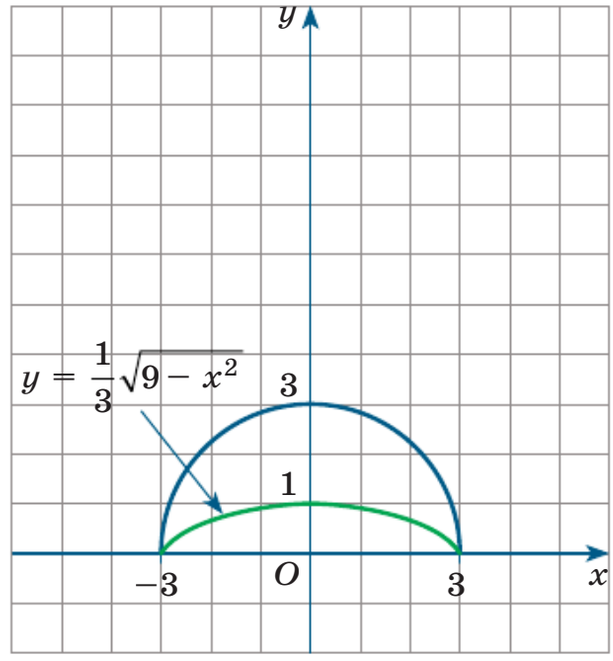


Рис. 66

но сказать, что график функции $y = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$ получен растяжением графика функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ от оси Ox с коэффициентом $\frac{1}{3}$, но можно сказать, что график функции $y = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$ получен сжатием графика функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ к оси Ox с коэффициентом 3.

А как будет обстоять дело при $k < 0$? Вам известно, что графики функций $y = f(x)$, $y = -f(x)$ симметричны относительно оси Ox, мы много раз пользовались этим в курсе алгебры 7—9 классов. Как построить, например, график функции $y = -2\sqrt{9 - x^2}$? Достаточно построить сначала график функции $y = 2\sqrt{9 - x^2}$ (он изображён на рисунке 64), а затем подвергнуть его преобразованию симметрии относительно оси Ox. График функции $y = -2\sqrt{9 - x^2}$ изображён на рисунке 67.

Пример 1 Построить график функции:

а) $y = -2\sin x$; б) $y = 1{,}5\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. На практике обычно, выполняя сжатие или растяжение графика функции $y = \sin x$ или $y = \cos x$, сначала работают с одной

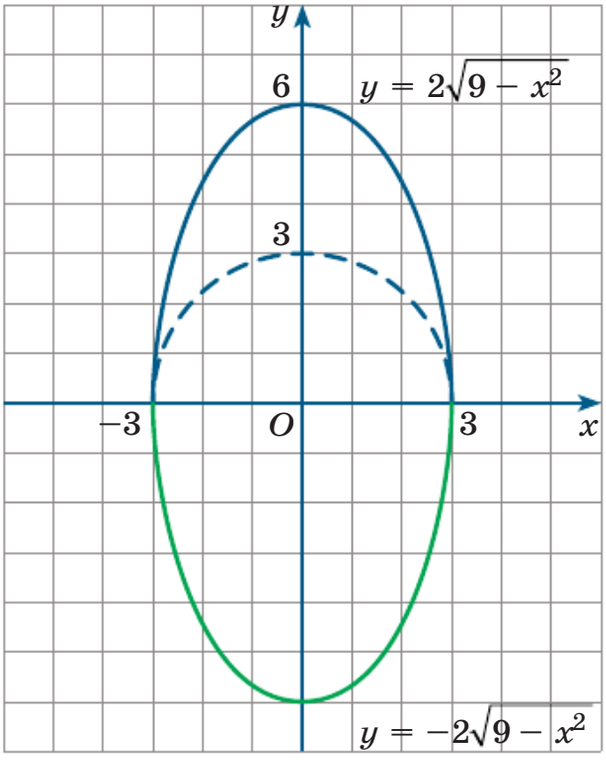


Рис. 67

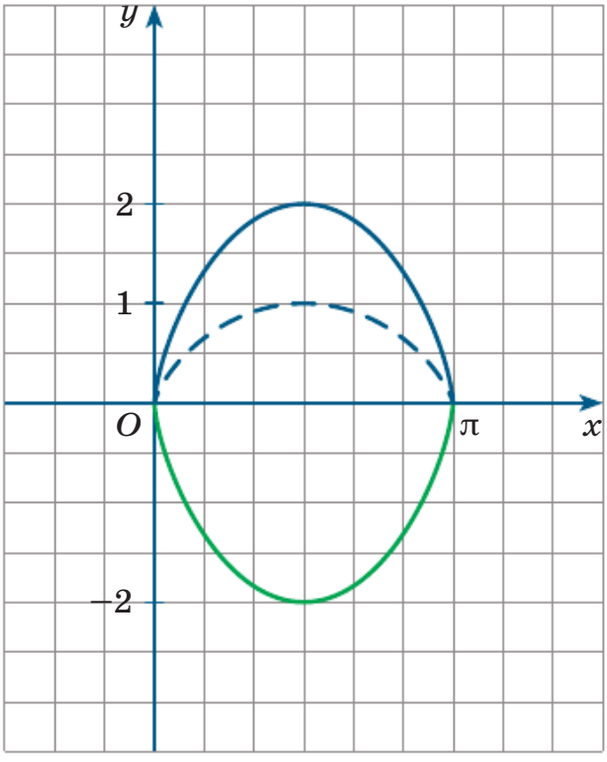


Рис. 68

полуволной синусоиды, а потом достраивают весь график. И напомним о нашей договорённости: в тетрадях в клеточку по оси абсцисс мы считаем, что π — это 6 клеточек, а по оси ординат 1 — это 2 клеточки.

а) Построим одну полуволну графика функции $y = \sin x$ (пунктирная линия на рисунке 68) и осуществим её растяжение от оси Ox с коэффициентом 2. Получим одну полуволну графика функции $y = 2\sin x$ (синяя линия на рисунке 68). Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 2\sin x$ преобразованию симметрии относительно оси Ox; получим полуволну графика функции $y = -2\sin x$ (зелёная линия на рисунке 68). Опираясь на эту полуволну, достраиваем весь график функции $y = -2\sin x$ (рис. 69 на с. 96).

б) Построим одну полуволну графика функции $y = \cos x$ (пунктирная линия на рисунке 70). Сдвинув её вправо вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{3}$ (две клеточки), получим полуволну графика функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ (синяя линия на рисунке 70). Осуществим растяжение этой полуволны от оси Ox с коэффициентом 1,5. Получим одну полуволну графика

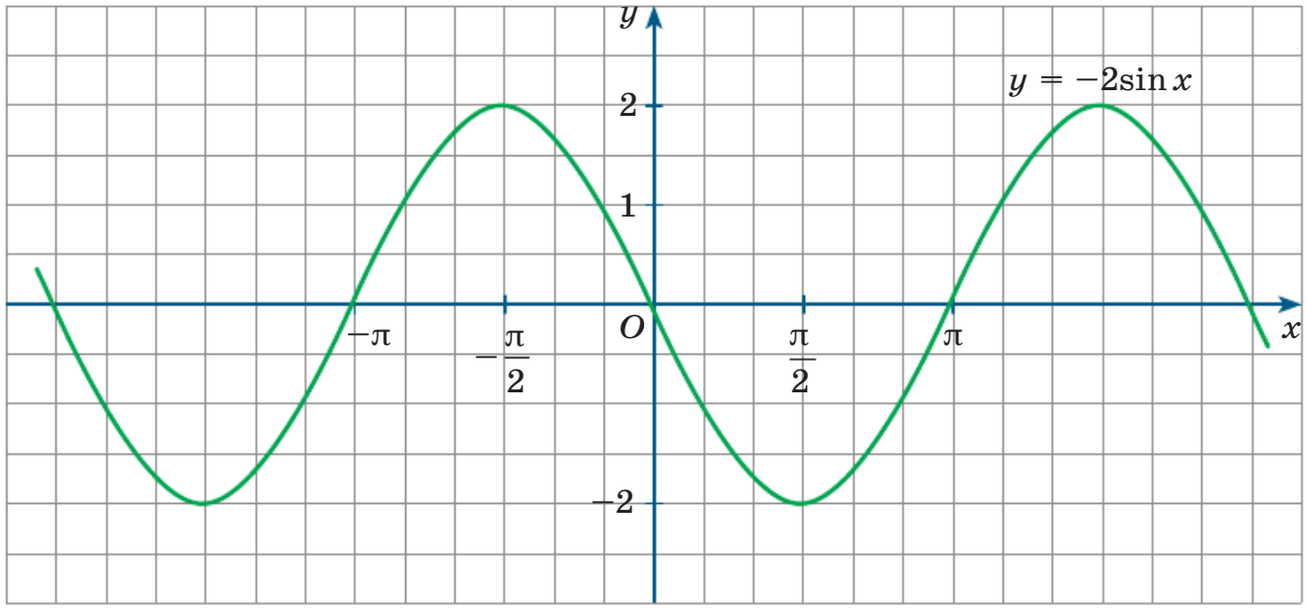


Рис. 69

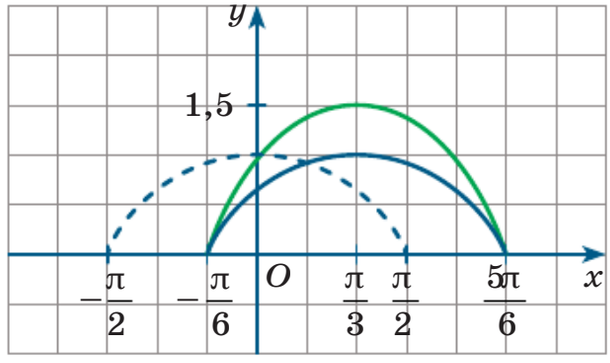


Рис. 70

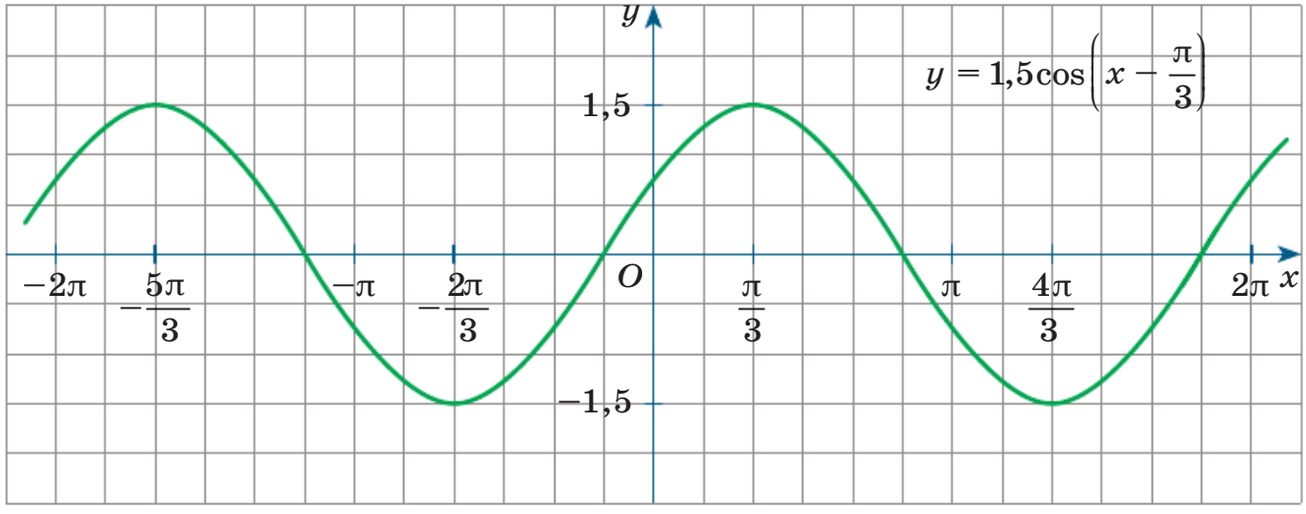


Рис. 71

функции $y = 1{,}5\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ (зелёная линия на рисунке 70). Опираясь на эту полуволну, достраиваем весь график функции $y = 1{,}5\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ (рис. 71).

Упражнения

Постройте в одной системе координат графики заданных функций.

ИКТ 11.1. а) $y = (x + 1)^2$ и $y = 2(x + 1)^2$;
б) $y = |x - 2|$ и $y = -3|x - 2|$;
в) $y = \sqrt{x + 1}$ и $y = 4\sqrt{x + 1}$;
г) $y = (x - 2)^2$ и $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$;
д) $y = |x + 1|$ и $y = -\frac{1}{3}|x + 1|$;
е) $y = \sqrt{x + 1}$ и $y = 2\sqrt{x + 1}$.

ИКТ 11.2. а) $y = \sin x$ и $y = 2\sin x$;
б) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ и $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;
в) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ и $y = -3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
г) $y = \cos x$ и $y = 3\cos x$;
д) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ и $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
е) $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ и $y = -2\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

11.3. Запишите уравнение кривой $y = k\sqrt{a^2 - x^2}$, график которой изображён на с. 98 на указанном рисунке:
а) рис. 72;
б) рис. 73;
в) рис. 74;
г) рис. 75.

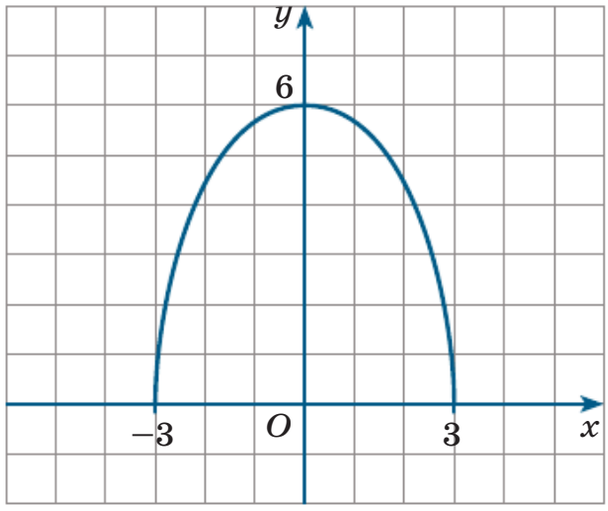


Рис. 72

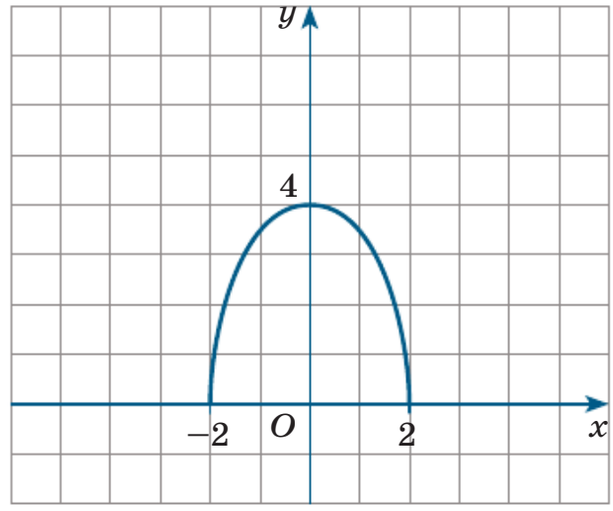


Рис. 73

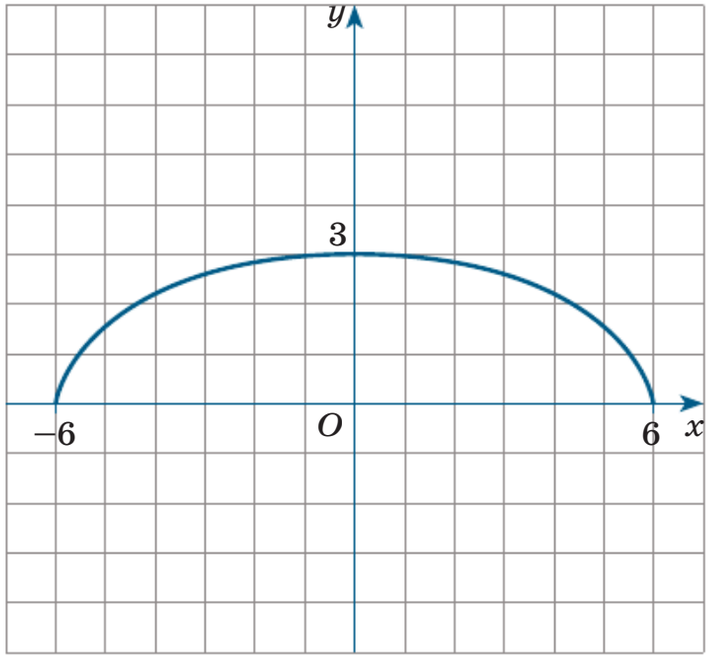


Рис. 74

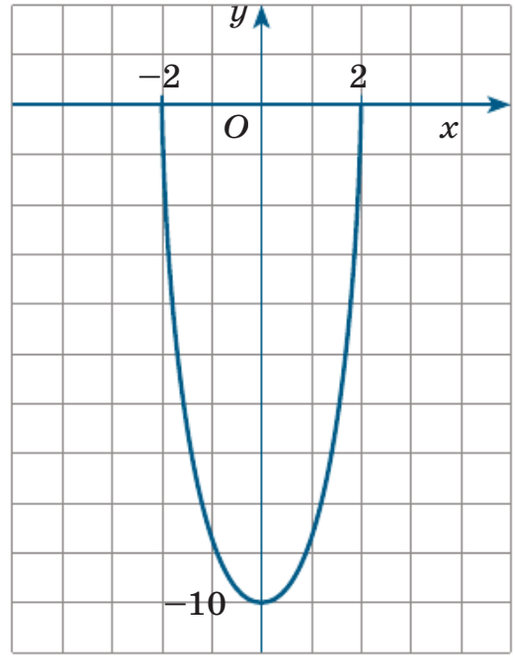


Рис. 75

11.4. График какой функции получится, если:
а) параболу $y = x^2$ растянуть от оси Ox с коэффициентом 4,5 и перенести на 2,5 единицы вправо вдоль оси Ox;
б) график функции $y = \cos x$ растянуть от оси Ox с коэффициентом 5 и перенести на 3 единицы влево вдоль оси Ox;
в) график функции $y = \sin x$ растянуть от оси Ox с коэффициентом 1,5 и перенести на $\frac{\pi}{12}$ единиц вправо вдоль оси Ox;

г) гиперболу $y = \frac{1}{x}$ растянуть от оси Ox с коэффициентом 2,5 и перенести на 6,3 единицы влево вдоль оси Ox;
д) график функции $y = \cos x$ растянуть от оси Ox с коэффициентом -7 и перенести на 1 единицу вправо вдоль оси Ox;
е) график функции $y = \sin x$ растянуть от оси Ox с коэффициентом $-5{,}1$ и перенести на $\frac{7\pi}{12}$ единиц влево вдоль оси Ox?

11.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 2\cos x + 1$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$;

б) $y = -\frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$ на луче $[0; +\infty)$;

в) $y = 3{,}5\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 4$ на интервале $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$;

г) $y = 0{,}5\sin x - 2$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

11.6. График какой функции изображён на указанном рисунке (ответ запишите в виде $y = k\sin(x + l)$ или $y = k\cos(x + l)$):
а) рис. 76;
б) рис. 77;
в) рис. 78;
г) рис. 79?

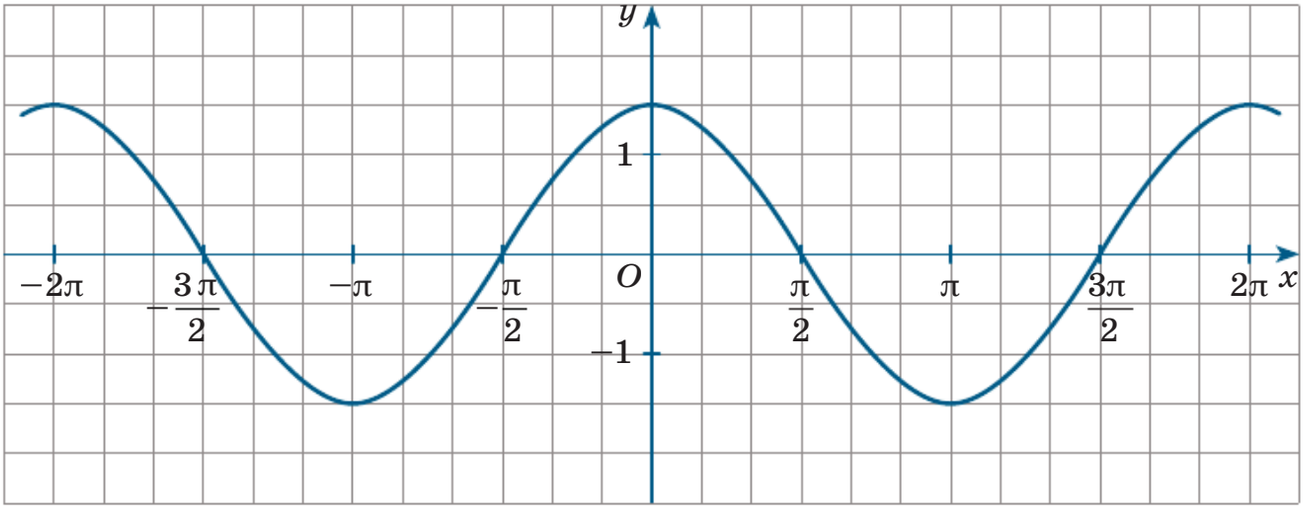


Рис. 76

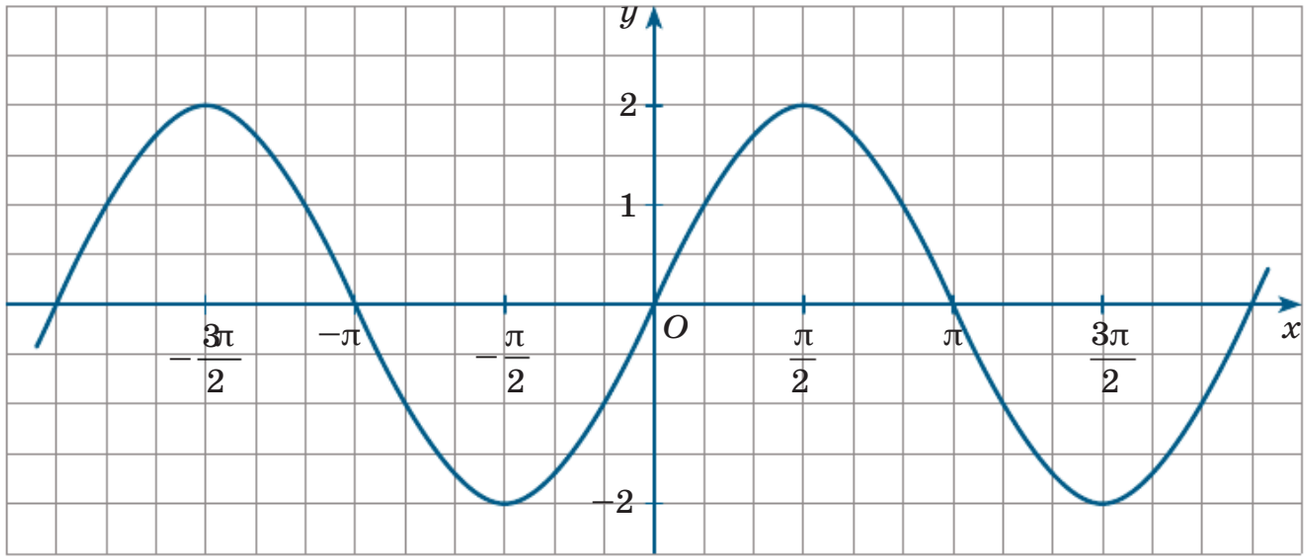


Рис. 77

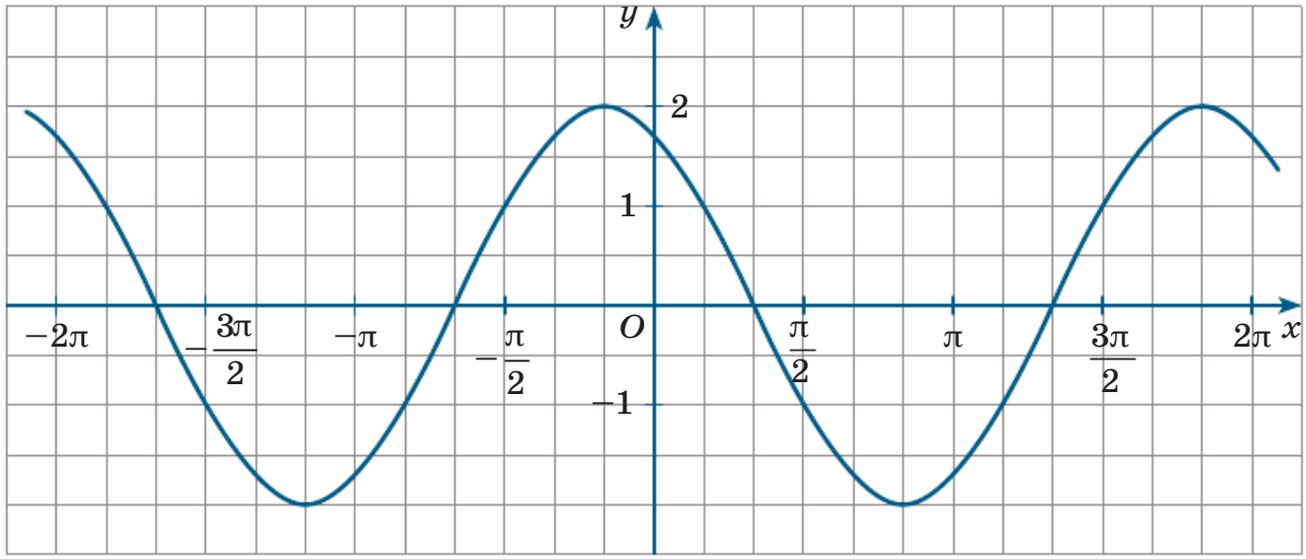


Рис. 78

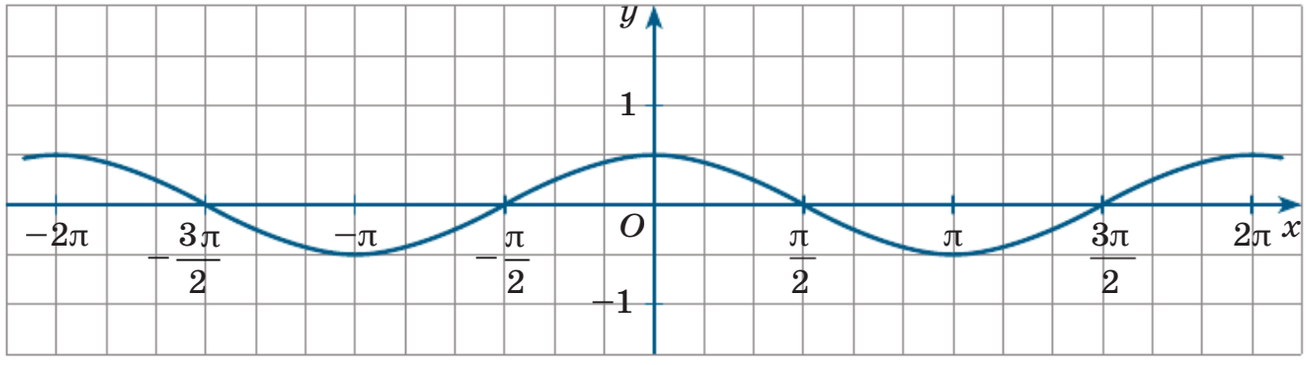


Рис. 79

Постройте и прочитайте график данной функции.

11.7. $y = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant 0, \\ -4\sin x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

11.8. $y = \begin{cases} -3\cos x, \text{ если } x < 0, \\ 2(x-1)^2, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

ИКТ **11.9.** Решите уравнение:

а) $2\sin x = 3\sqrt{x - \pi}$;

б) $\frac{1}{3}\cos x = 5(x - \pi)^2 - \frac{1}{3}$;

в) $3\sin x = -2x^3$;

г) $\frac{1}{2}\cos x = 2\sqrt{x} + 0{,}5$;

д) $4\sin x = 3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 4$;

е) $-2\cos x = -|x| + \frac{\pi}{2}$.

11.10. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = \frac{7}{3}\cos(x-1), \\ y = 3(x+\pi)^2 - 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = -1{,}5\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \\ y = \frac{4}{x-2} + 1{,}5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = 1{,}5\cos x + 0{,}5, \\ y = 1{,}5\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 0{,}5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}\sin(x+2), \\ y = 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - 1{,}5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = -3{,}5\cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right), \\ y = -\frac{3}{x+1} - 2{,}5; \end{cases}$

е) $\begin{cases} y = 2\cos x - 1, \\ y = 0{,}7\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3{,}5? \end{cases}$

ИКТ **11.11.** Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{2|x|}{x} \cdot \sin x$;

б) $y = 4 \cdot \dfrac{x - 2\pi}{|2\pi - x|} \cdot \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

в) $y = -\dfrac{x + \dfrac{2\pi}{3}}{2\left|x + \dfrac{2\pi}{3}\right|} \cdot \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

г) $y = \dfrac{3|\pi - x|}{x - \pi} \cdot \cos x$;

д) $y = \dfrac{-4x}{|x|} \cdot \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

е) $y = \dfrac{\left|x - \dfrac{\pi}{3}\right|}{1{,}5\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)} \cdot \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Упражнения для повторения

11.12. а) Один сплав содержит 50 % цинка, а другой — 65 % цинка. После переплавки получили 1 кг 50 г нового сплава с 60%-ным содержанием цинка. Найдите массу первого сплава.
б) Первый сплав массой 900 г и содержанием алюминия 35 % сплавили со вторым сплавом, содержащим 60 % алюминия. В результате получили новый сплав с 50%-ным содержанием алюминия. Какова масса второго сплава?

11.13. а) В арифметической прогрессии шестой член больше четвёртого на 12, а их сумма равна 62. Найдите сумму первых восьми членов прогрессии.
б) В арифметической прогрессии седьмой член больше третьего на 18, а их сумма равна −4. Найдите сумму первых десяти членов прогрессии.

11.14. Решите уравнение:

а) $7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 9$;

б) $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 8\left(x - \dfrac{2}{x}\right) + 4$.

11.15. На книжной полке стоят учебники: 3 по алгебре, 2 по геометрии и 5 по физике. Наудачу взяли 3 учебника. Найдите вероятность события:
а) взяты 3 учебника по алгебре;
б) взяты 2 учебника по алгебре и 1 по геометрии;
в) взяты 3 учебника по физике;
г) среди взятых учебников хотя бы один — учебник по алгебре.

§ 12. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(mx)$

На рисунке 80 изображён график функции $y = x^3$, $x \in [0; +\infty)$. Нам понадобится небольшая таблица 1 значений этой функции.

Таблица 1

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0	1	$\frac{27}{8}$	8

Теперь построим график функции $y = (2x)^3$, $x \in [0; +\infty)$. Заметим, что если для функции $y = x^3$ ввести обозначение $y = f(x)$, то $y = (2x)^3$ — это $y = f(2x)$. Составим таблицу 2 значений функции $y = f(2x)$, причём так, чтобы вторая строка таблицы совпадала со второй строкой таблицы 1. Что тогда будет в первой строке? Смотрите: $(2x)^3 = 0$ при $x = 0$; $(2x)^3 = 1$ при $x = \frac{1}{2}$; $(2x)^3 = \frac{27}{8}$ при $x = \frac{3}{4}$; $(2x)^3 = 8$ при $x = 1$. Вот как выглядит таблица 2.

Таблица 2

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	0	1	$\frac{27}{8}$	8

Как видите, ординаты в таблицах 1 и 2 одинаковы, а абсциссы в таблице 2 в 2 раза меньше соответствующих абсцисс из таблицы 1.

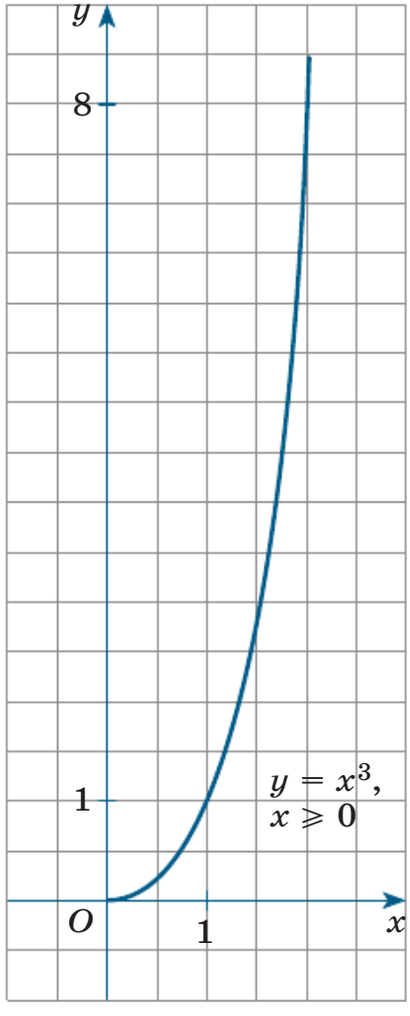


Рис. 80

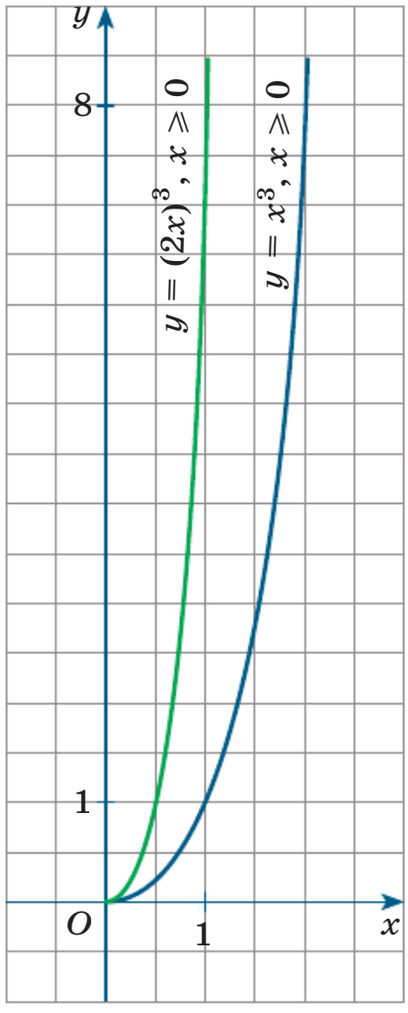


Рис. 81

На рисунке 81 построены графики обеих функций: и $y = f(x)$, и $y = f(2x)$. Обратите внимание: при конкретной ординате абсцисса соответствующей точки графика функции $y = f(2x)$ *в 2 раза меньше* абсциссы соответствующей точки графика функции $y = f(x)$.

Такое преобразование называют *сжатием к оси ординат с коэффициентом* 2.

Вообще *график функции* $y = f(mx)$, где $m > 1$, *получается из графика функции* $y = f(x)$ *с помощью сжатия к оси* Oy *с коэффициентом* m. Отметим, что при этом преобразовании остаётся на месте точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Oy.

Теперь построим график функции $y = \left(\frac{1}{3}x\right)^3$, $x \in [0; +\infty)$. Заметим, что если для функции $y = x^3$ ввести обозначение $y = f(x)$, то $y = \left(\frac{1}{3}x\right)^3$ — это $y = f\left(\frac{1}{3}x\right)$. Составим таблицу 3 значений функции $y = f\left(\frac{1}{3}x\right)$, причём так, чтобы вторая строка таблицы совпадала со второй строкой таблицы 1. Что тогда будет в первой строке? Смотрите: $\left(\frac{1}{3}x\right)^3 = 0$ при $x = 0$; $\left(\frac{1}{3}x\right)^3 = 1$ при $x = 3$; $\left(\frac{1}{3}x\right)^3 = \frac{27}{8}$ при $x = \frac{9}{2}$; $\left(\frac{1}{3}x\right)^3 = 8$ при $x = 6$. Вот как выглядит таблица 3.

Таблица 3

x	0	3	$\frac{9}{2}$	6
y	0	1	$\frac{27}{8}$	8

Как видите, ординаты в таблицах 1 и 3 одинаковы, а абсциссы в таблице 3 в 3 раза больше соответствующих абсцисс из таблицы 1.

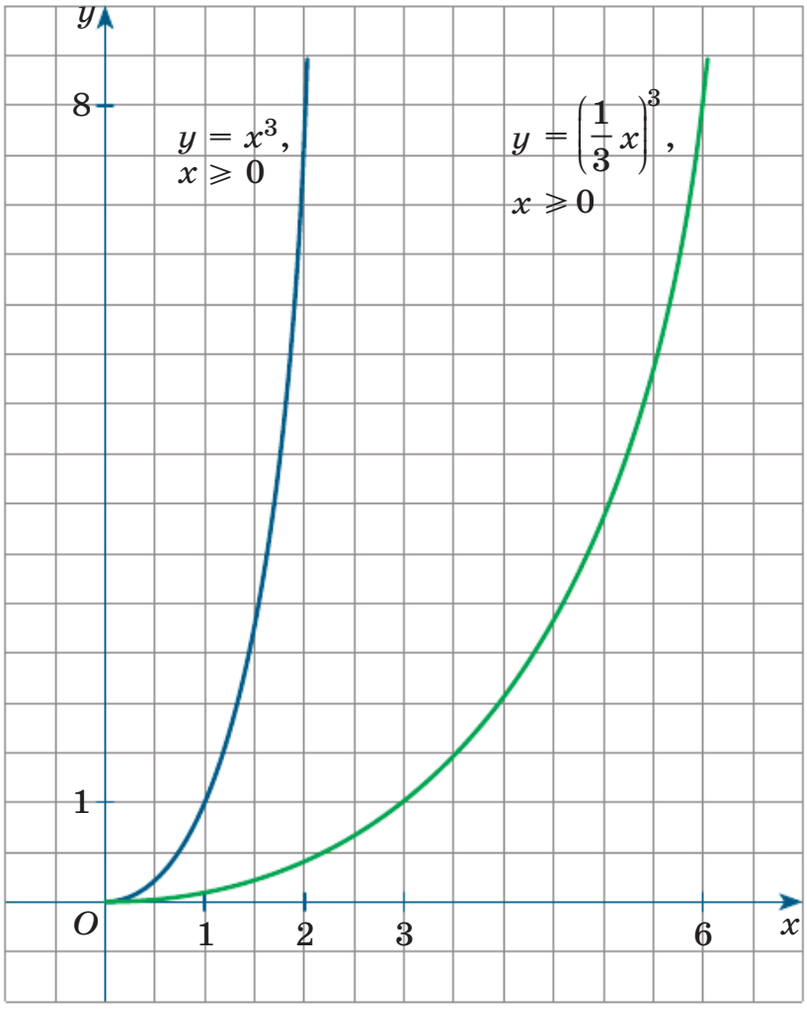


Рис. 82

На рисунке 82 построены графики обеих функций: и $y = f(x)$, и $y = f\left(\frac{1}{3}x\right)$. Обратите внимание: при конкретной ординате абсцисса соответствующей точки графика функции $y = f\left(\frac{1}{3}x\right)$ *в 3 раза больше* абсциссы соответствующей точки графика функции $y = f(x)$.

Такое преобразование называют *растяжением от оси ординат с коэффициентом* 3.

Вообще *график функции* $y = f(mx)$, где $0 < m < 1$, *получается из графика функции* $y = f(x)$ *с помощью растяжения от оси Oy с коэффициентом* $\frac{1}{m}$ (впрочем, используют и другую формулировку: сжатие с коэффициентом m).

А как обстоит дело в случае, когда $m < 0$? Пусть для начала $m = -1$.

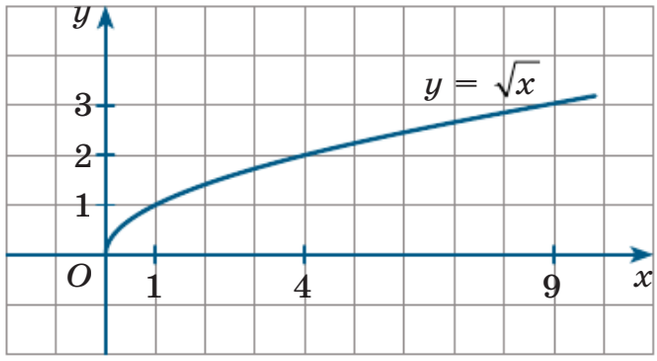


Рис. 83

На рисунке 83 изображён график функции $y = \sqrt{x}$. Нам понадобится небольшая таблица 4 значений функции.

Таблица 4

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Теперь построим график функции $y = \sqrt{-x}$. Заметим, что если для функции $y = \sqrt{x}$ ввести обозначение $y = f(x)$, то $y = \sqrt{-x}$ — это $y = f(-x)$. Составим таблицу 5 значений функции $y = \sqrt{-x}$, причём так, чтобы вторая строка таблицы совпадала со второй строкой таблицы 4. Что тогда будет в первой строке? Смотрите: $\sqrt{-x} = 0$ при $x = 0$; $\sqrt{-x} = 1$ при $x = -1$; $\sqrt{-x} = 2$ при $x = -4$; $\sqrt{-x} = 3$ при $x = -9$. Вот как выглядит таблица 5.

Таблица 5

x	0	-1	-4	-9
y	0	1	2	3

На рисунке 84 построены графики обеих функций: и $y = f(x)$, и $y = f(-x)$. Обратите внимание: они симметричны относительно оси ординат.

Вообще *график функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси Oy.*

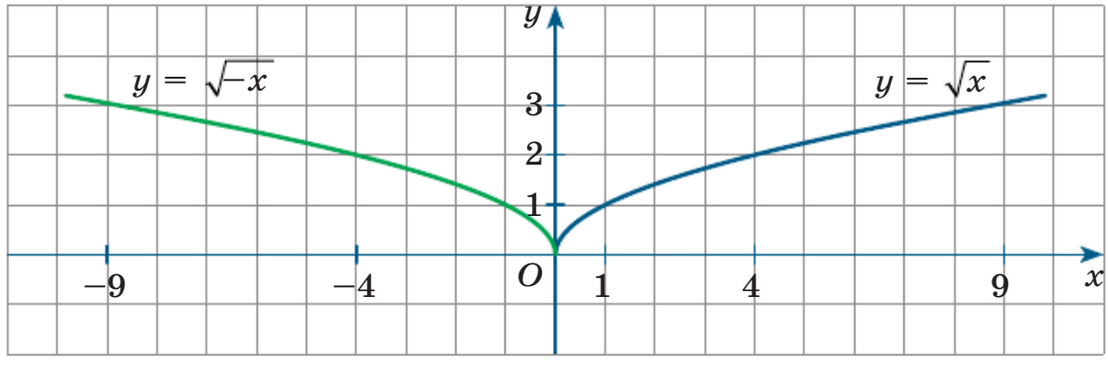


Рис. 84

Советуем вам учесть следующее обстоятельство: если речь идёт о построении графика функции $y = f(-x)$, то сначала проверьте, является ли функция $y = f(x)$ чётной или нечётной. Если $y = f(x)$ — чётная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то график функции $y = f(-x)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Если $y = f(x)$ — нечётная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то вместо графика функции $y = f(-x)$ можно строить график функции $y = -f(x)$.

Осталось выяснить, как обстоит дело для произвольного отрицательного коэффициента m. При $m < 0$ справедливо равенство $f(mx) = f(-|m|x)$. Значит, речь идёт о построении графика функции $y = f(-|m|x)$. Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его сжатие к оси Oy с коэффициентом $|m|$;

3) сжатый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси Oy.

Пример Построить график функции $y = -3\cos(-2x)$.

Решение. Прежде всего заметим, что $\cos(-2x) = \cos 2x$, так что можно говорить о построении графика функции $y = -3\cos 2x$.

1) Построим полуволну графика функции $y = \cos x$ (пунктирная линия на рисунке 85).

2) Осуществим растяжение этой полуволны от оси Ox с коэффициентом 3; получим одну полуволну графика функции $y = 3\cos x$ (синяя линия на рисунке 85).

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 3\cos x$ преобразованию симметрии относительно оси Ox; получим полуволну графика функции $y = -3\cos x$ (зелёная линия на рисунке 85).

4) Осуществим для полуволны графика функции $y = -3\cos x$ сжатие к оси Oy с коэффициентом 2; получим полуволну графика функции $y = -3\cos 2x$ (красная линия на рисунке 85).

5) С помощью полученной полуволны построим весь график (рис. 86 на с. 108).

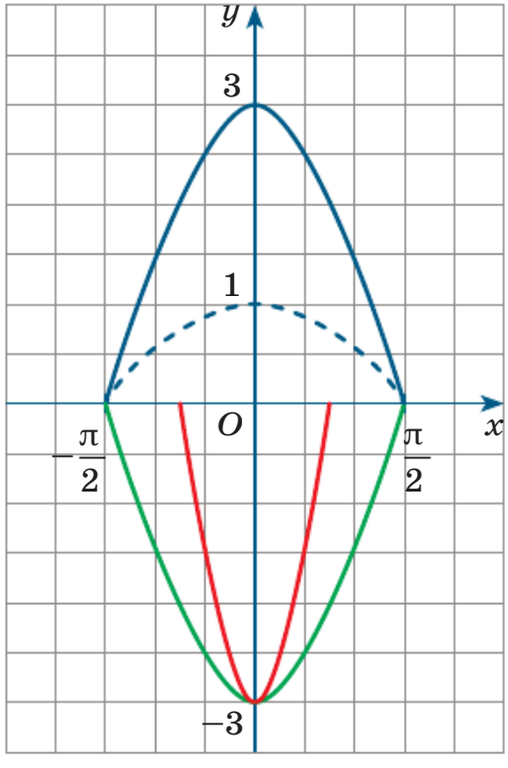


Рис. 85

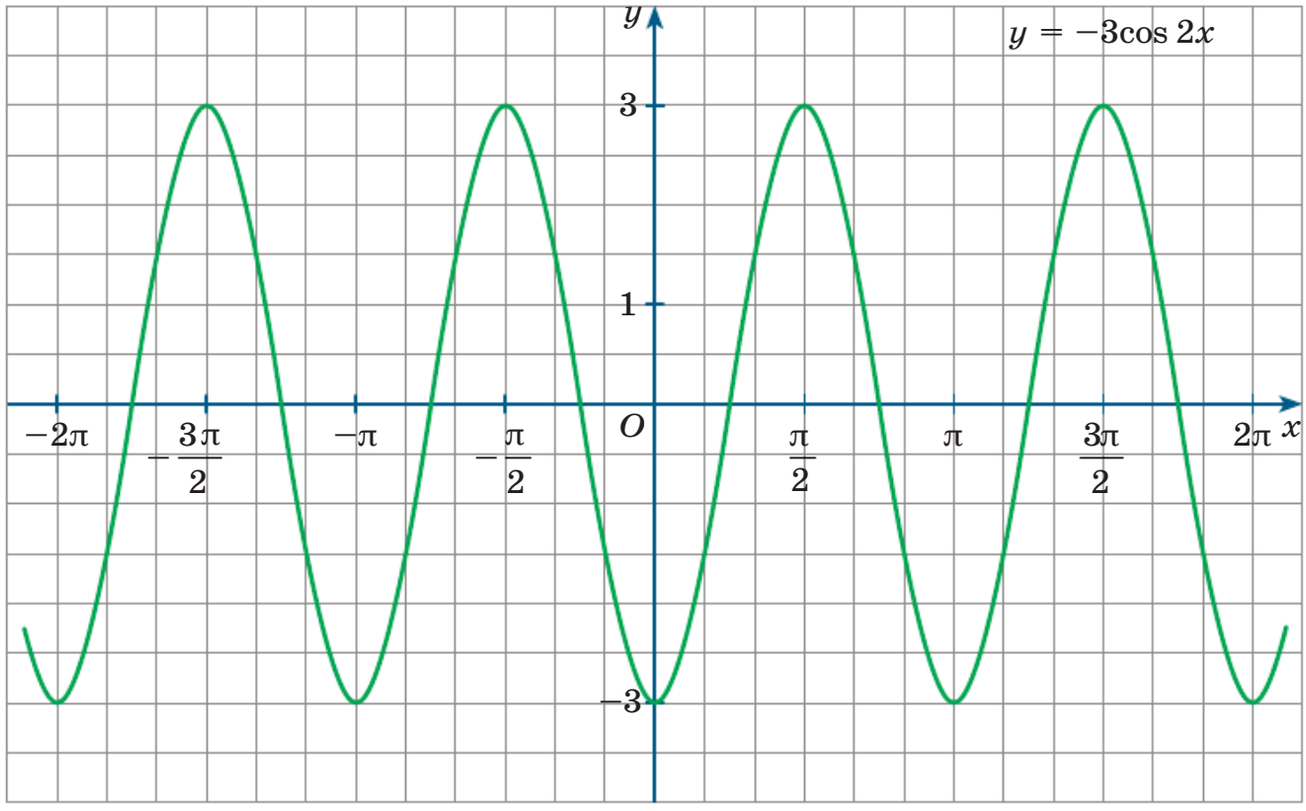


Рис. 86

Упражнения

12.1. График какой функции получится, если:
а) параболу $y = x^2$ сжать к оси Oy с коэффициентом 1,7;
б) график функции $y = \cos x$ растянуть от оси Oy с коэффициентом $\frac{1}{5}$;
в) график функции $y = \sin x$ сжать от оси Oy с коэффициентом $-5{,}3$;
г) гиперболу $y = \frac{3}{x}$ растянуть от оси Oy с коэффициентом 0,6;
д) график функции $y = \cos x$ сжать от оси Oy с коэффициентом $-3{,}9$;
е) график функции $y = \sin x$ растянуть от оси Oy с коэффициентом $\frac{2}{7}$?

Постройте в одной системе координат графики данных функций.

ИКТ 12.2. а) $y = (x - 1)^2$ и $y = (2x - 1)^2$;

б) $y = |x + 2|$ и $y = |3x + 2|$;

в) $y = \sqrt{x + 1}$ и $y = \sqrt{4x + 1}$;

г) $y = (x + 1)^2$ и $y = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$;

д) $y = |x - 2|$ и $y = \left|\frac{1}{3}x - 2\right|$;

е) $y = \sqrt{x - 1}$ и $y = \sqrt{2x - 1}$.

ИКТ 12.3. а) $y = \cos x$ и $y = \cos 3x$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ и $y = \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ и $y = \cos\left(-3x + \frac{3\pi}{4}\right)$;

г) $y = \sin x$ и $y = \sin 3x$;

д) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ и $y = \cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$;

е) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ и $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

12.4. График какой функции — вида $y = \sin(mx + l)$ или $y = \cos(mx + l)$ изображён на указанном рисунке:

а) рис. 87; в) рис. 89; д) рис. 91;

б) рис. 88; г) рис. 90; е) рис. 92?

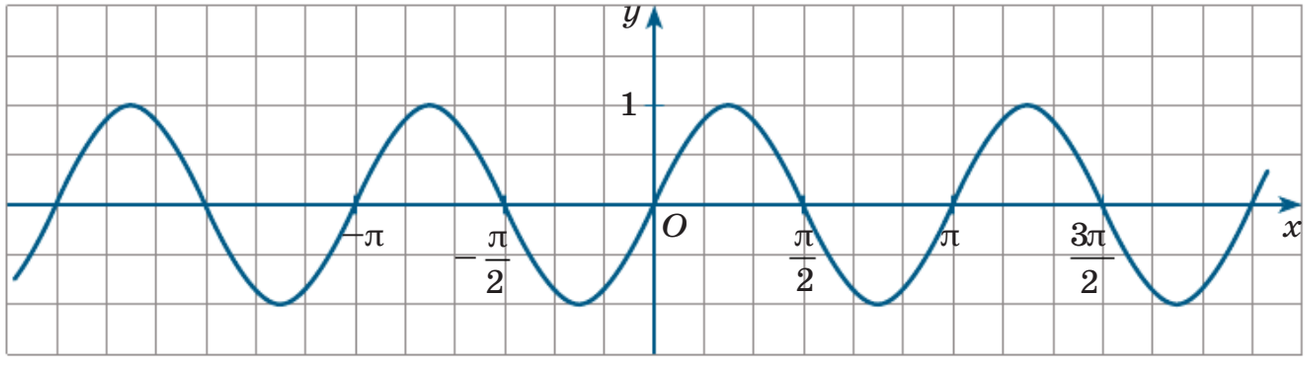


Рис. 87

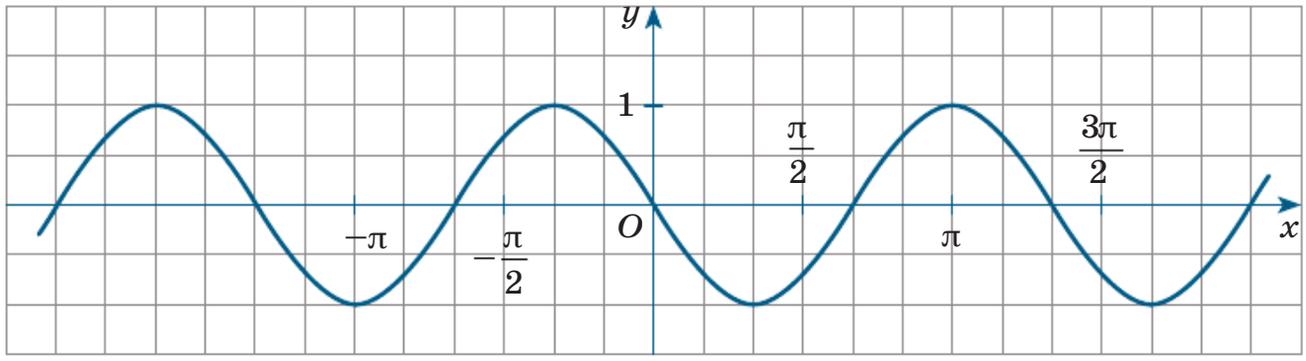


Рис. 88

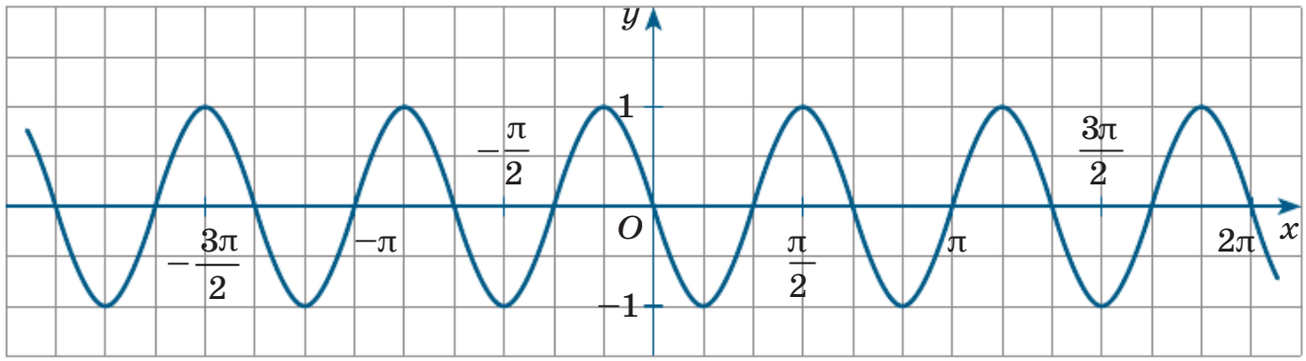


Рис. 89

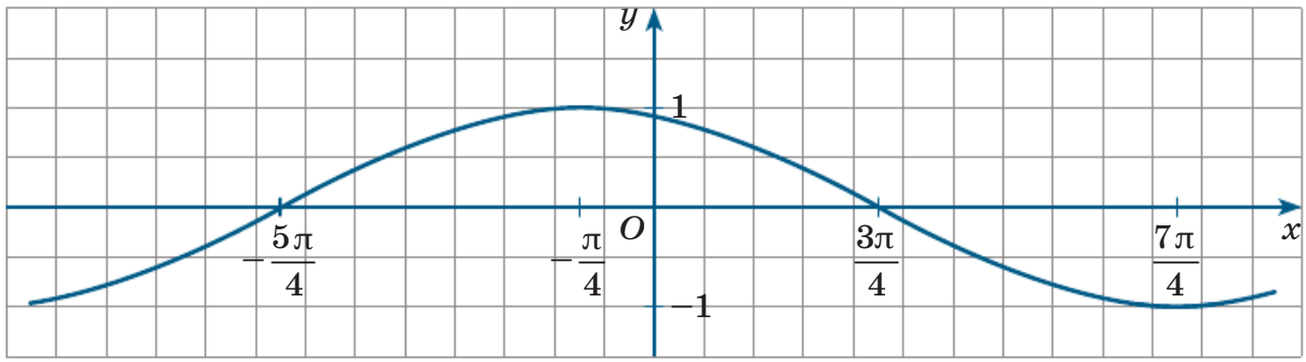


Рис. 90

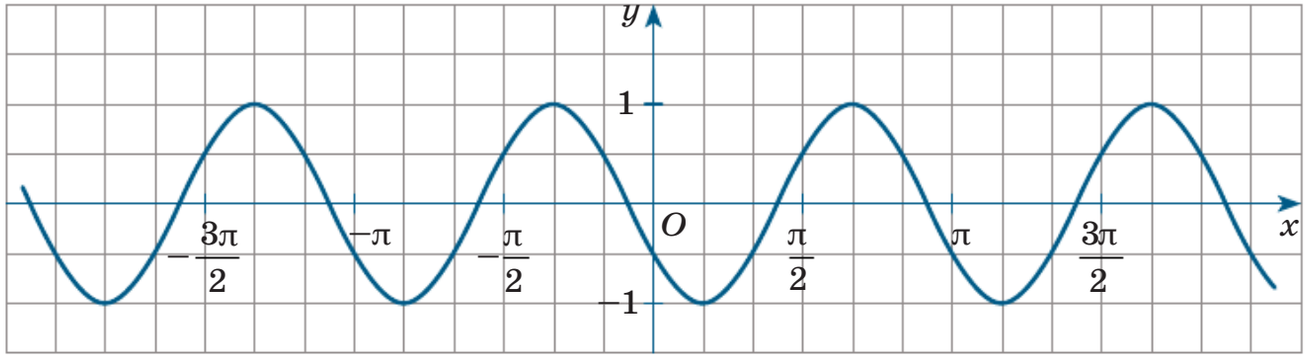


Рис. 91

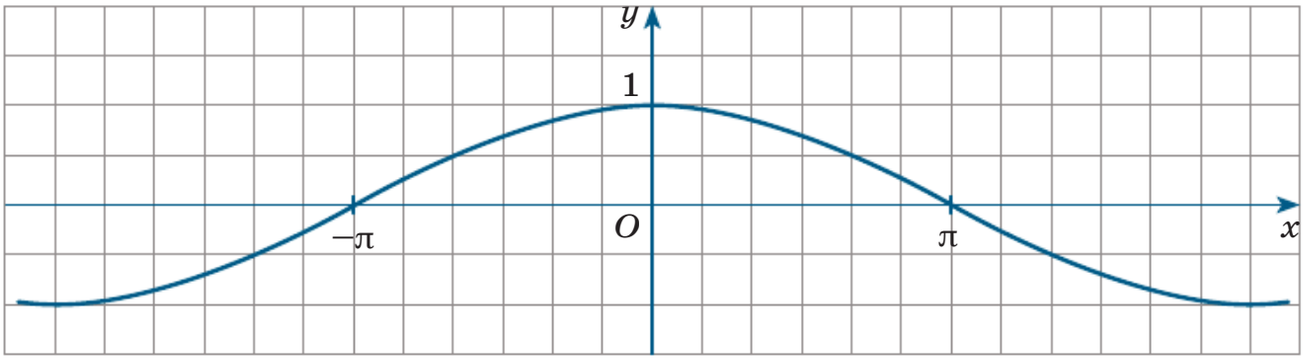


Рис. 92

12.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \cos 2x + 1$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$;

б) $y = \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$ на луче $[-2; +\infty)$;

в) $y = 2\cos\left(-3x + \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}5$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$;

г) $y = \sin 0{,}5x - 2{,}5$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$;

д) $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$ на интервале $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right)$;

е) $y = 3\sin\left(-\frac{2}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$ на луче $(-\infty; 3]$.

ИКТ **12.6.** Решите уравнение.

а) $\sin\frac{3x}{2} = \sqrt{x - \frac{\pi}{3}} + 1$;

б) $2\cos 3x + 1 = \frac{1}{3}x^2 + 3$;

в) $-\frac{2}{3}\sin\frac{x}{2} = (x + \pi)^3 + \frac{2}{3}$;

г) $\cos\frac{4x}{3} = 2\sqrt{x - \frac{3\pi}{8}}$;

д) $-3\sin 2x - 2 = 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 + 1$;

е) $1{,}5\cos\frac{2x}{3} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)^3$.

12.7. а) $2\sin\dfrac{x-\pi}{2} = -3\cos 2x + 5$;

б) $1{,}5\sin 3x = -2\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) + 3{,}5$.

ИКТ **12.8.** Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = \cos\dfrac{5x}{2}, \\ y = 2(x-\pi)^2 - 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = \sin\left(-\dfrac{5}{3}x\right), \\ y = (2x)^2 - 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = -2\sin 1{,}5x, \\ y = \dfrac{1}{2x}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = -3\cos 4x, \\ y = -\dfrac{1}{3x} - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \cos 1{,}5x + 2, \\ y = 1{,}5\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right); \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = \sin 2x - 3, \\ y = \cos\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right)? \end{cases}$

Постройте и прочитайте график данной функции.

12.9. $y = \begin{cases} -(x+\pi)^2, \text{ если } x \leqslant -\pi, \\ \sin 2x, \text{ если } -\pi < x < \pi, \\ (x-\pi)^2, \text{ если } x \geqslant \pi. \end{cases}$

12.10. $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x+\pi}, \text{ если } x \leqslant -\pi, \\ \cos(-0{,}5x), \text{ если } -\pi < x < \pi, \\ -\sqrt[3]{x-\pi}, \text{ если } x \geqslant \pi. \end{cases}$

Постройте график данной функции.

12.11. а) $y = \cos \pi x$; в) $y = 3\cos\left(-\dfrac{2\pi x}{3}\right)$;

б) $y = -2\sin\dfrac{\pi x}{2}$; г) $y = -3\sin(-\pi x)$.

12.12. а) $y = \dfrac{x}{|x|} \cdot \sin(0{,}4x)$; б) $y = 2 \cdot \dfrac{x-\pi}{|x-\pi|} \cdot \cos 3x$;

в) $y = \dfrac{x - \dfrac{\pi}{2}}{\left|\dfrac{\pi}{2} - x\right|} \cdot \cos(0{,}25x)$; г) $y = -2\dfrac{|x|}{x} \cdot \sin 2x$;

12.13. а) $y = \cos(x - |x|)$; в) $y = \sin\dfrac{2|x| - x}{2}$;

б) $y = \sin(x + 2|x|)$; г) $y = \cos\dfrac{x + 3|x|}{2}$.

12.14. Решите уравнение:

а) $3\sin\dfrac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 4$; в) $2\cos\pi x - 6 = x^2 - 4x$;

б) $3\cos\dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{27}{4}x - 3$; г) $|6x - 5| = 4\sin\dfrac{\pi x}{3}$.

Упражнения для повторения

12.15. а) В конце года банк начисляет 4 % к сумме вклада. Какую сумму получит вкладчик через 3 года, положив 25 000 р.?

б) Клиент положил в банк 30 000 р. с ежеквартальным начислением 3 % сроком на полтора года. Какая сумма по вкладу будет им получена в конце срока? Ответ округлите до рублей.

12.16. а) Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 162. Известно, что второе число больше первого в 3 раза. Найдите эти числа.

б) Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма первых двух чисел равна 70, а сумма второго и третьего равна 102. Найдите эти числа.

12.17. Найдите значение выражения:

а) $\left(4\sqrt{5} - \sqrt{65} - 4\sqrt{3} + \sqrt{39}\right)\left(4\sqrt{5} + \sqrt{65} + 4\sqrt{3} + \sqrt{39}\right)$;

б) $\left(2\sqrt{30} + \sqrt{10} + 5\sqrt{3} + 4\right)\left(2\sqrt{30} + \sqrt{10} - 5\sqrt{3} - 4\right)$.

12.18. Решите уравнение:

а) $\sqrt{\dfrac{4}{6x - 50}} = \dfrac{1}{7}$; в) $\sqrt{\dfrac{2}{3x - 13}} = \dfrac{1}{11}$;

б) $\sqrt{\dfrac{3}{2x^2 - 95}} = \dfrac{1}{9}$; г) $\sqrt{\dfrac{8}{x^2 - 31}} = \dfrac{2}{5}$.

§ 13*. График гармонического колебания

Тригонометрические функции используются для описания колебательных процессов. Один из наиболее важных процессов такого рода описывается формулой $s = A\sin(\omega t + \alpha)$. Эту формулу называют *законом* (или *уравнением*) *гармонических колебаний*. Если, например, груз, висящий на пружине, вывести из положения равновесия, то он начнёт совершать вертикальные колебания. Закон движения центра масс груза (при отсутствии сопротивления окружающей среды) выражается указанной выше формулой. В ней t — время, а s — отклонение центра масс груза от положения равновесия.

В уравнении гармонических колебаний $s = A\sin(\omega t + \alpha)$ все величины — A, ω, α — имеют определённый физический смысл: A (или $-A$, если $A < 0$) — амплитуда колебаний (максимальное отклонение от положения равновесия); ω — частота колебаний; α — начальная фаза колебаний.

Пример Построить в прямоугольной системе координат график гармонического колебания, у которого амплитуда равна 3, частота колебаний равна 2, начальная фаза колебаний равна $\frac{\pi}{3}$.

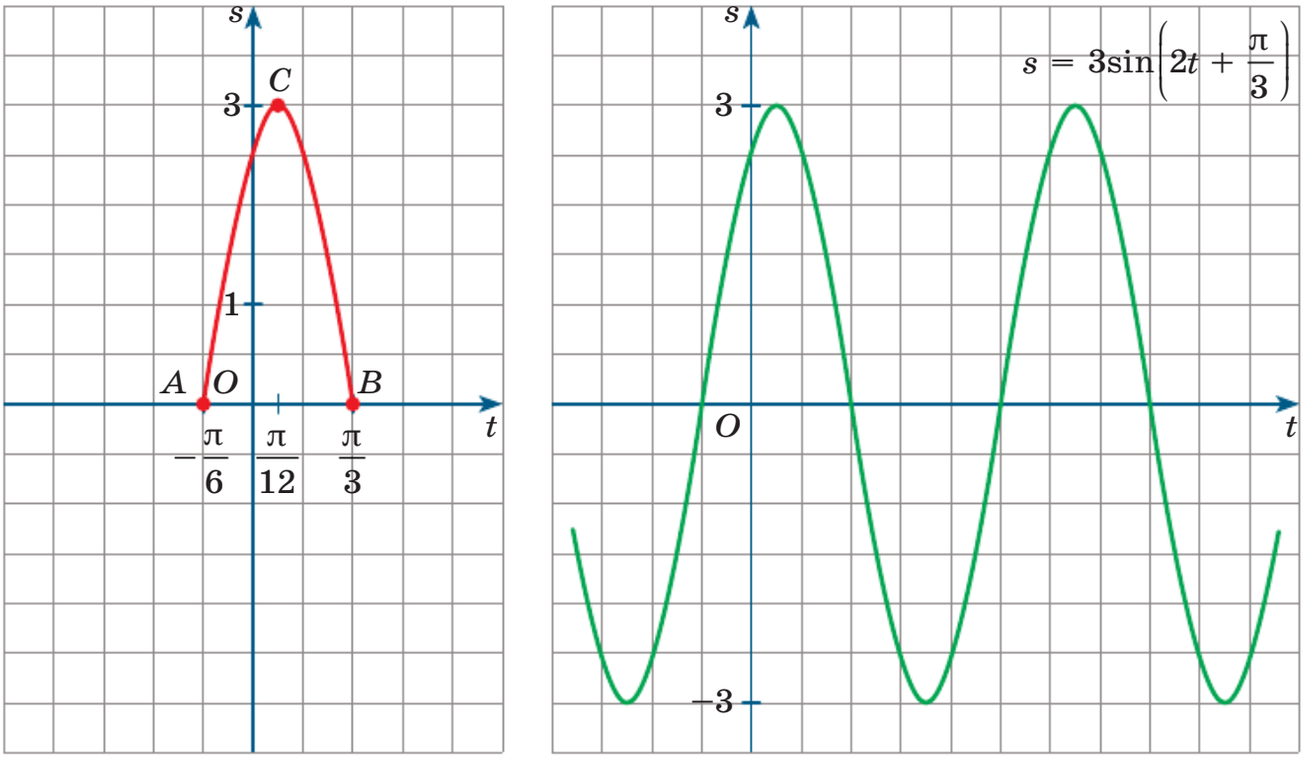
Решение. Речь идёт о построении графика функции $s = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Для этого, как следует из предыдущих параграфов, над полуволной синусоиды $s = \sin t$ нужно в системе координат sOt осуществить три преобразования: растяжение от оси абсцисс, сжатие к оси ординат, параллельный перенос вдоль оси абсцисс, — а затем построить весь график. Но на практике указанную полуволну строят по-другому. Сначала решим уравнение $3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$:

$$2t + \frac{\pi}{3} = \pi n; \quad 2t = -\frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$t = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Дадим параметру n два соседних значения 0 и 1. При $n = 0$ получаем: $t_1 = -\frac{\pi}{6}$; при $n = 1$ получаем: $t_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$. Точки $A\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$



а *б*

Рис. 93

и $B\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$ служат концами одной полуволны искомого графика. Серединой отрезка $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ является точка $\frac{\pi}{12}$ — среднее арифметическое (полусумма) чисел — $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$. Найдём значение заданной функции в точке $\frac{\pi}{12}$:

$$s = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Точка $C\left(\frac{\pi}{12}; 3\right)$ — верхняя точка искомой полуволны. По трём точкам — A, B и C — строим сначала полуволну искомого графика (рис. 93, *а*), а затем и весь график (рис. 93, *б*).

Упражнения

13.1. Подберите коэффициенты A, ω и α так, чтобы на указанном рисунке был изображён график гармонического колебания:
а) рис. 94; б) рис. 95; в) рис. 96; г) рис. 97.

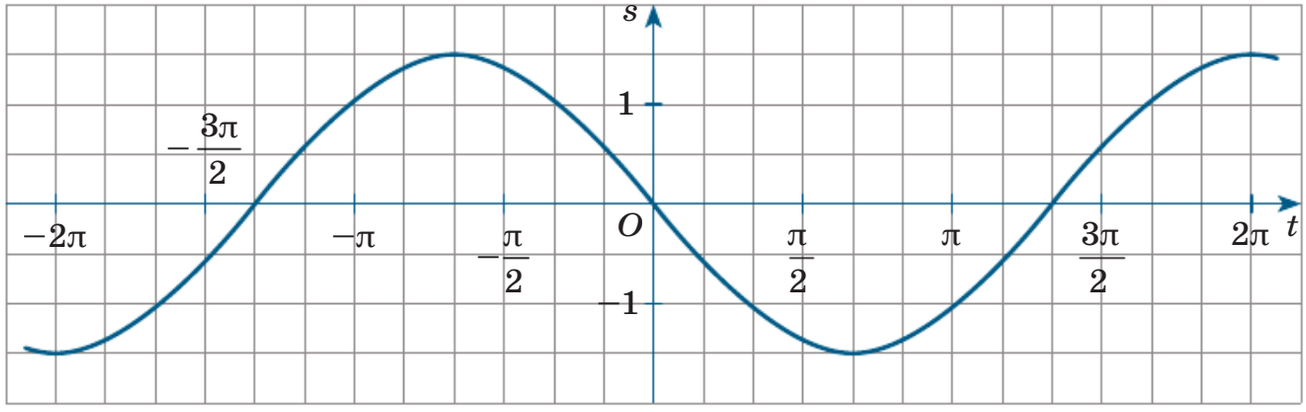


Рис. 94

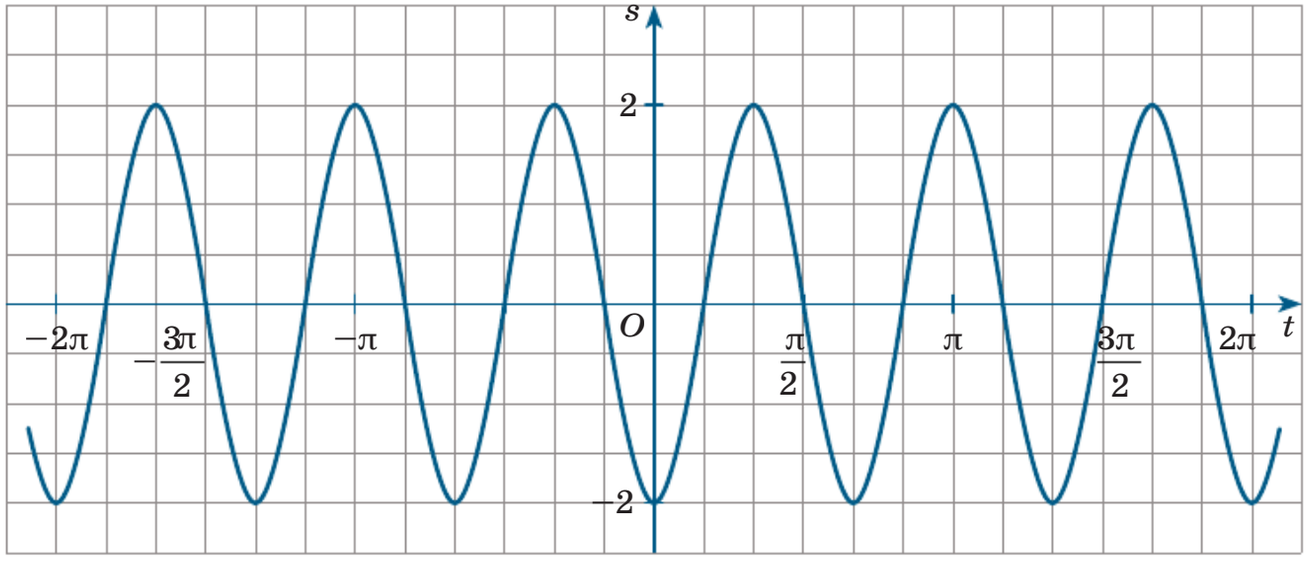


Рис. 95

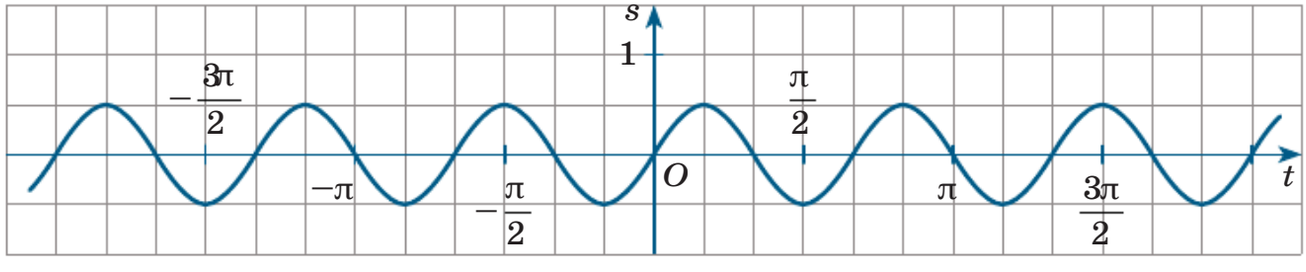


Рис. 96

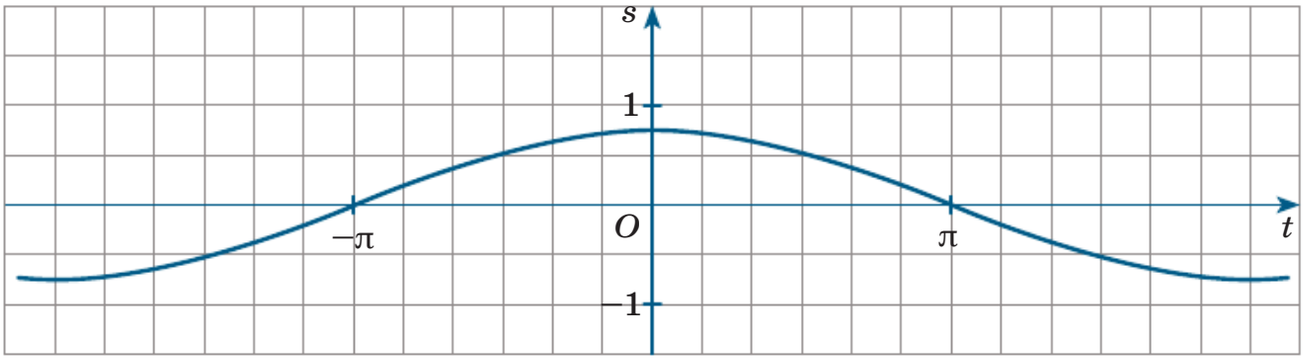


Рис. 97

Постройте график гармонического колебания.

ИКТ 13.2. а) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; в) $y = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y = -3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

ИКТ 13.3. а) $y = \sin 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; в) $y = \sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y = \cos\frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

ИКТ 13.4. а) $y = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $y = 2\cos(3x + \pi)$; г) $y = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Упражнения для повторения

13.5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{3}{4x+13} - \frac{1}{y} = 0, \\ 7x + 12y = 29; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{8}{191 - 35y} = 0, \\ 11x + 13y = 43; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 3y = 318, \\ \frac{y}{x} = 0{,}(13); \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 6y = 24, \\ \frac{y}{x} = 0{,}1(5). \end{cases}$

13.6. Разложите на множители:
а) $(x^2 - x - 3xy + 3y)^2 - (3xy - x + 3y - 9y^2)^2$;
б) $(2x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 2y^3)^2 - 9x^2y^2(x - y)^2$.

13.7. а) Расстояние от базы отдыха до посёлка равно 16 км. Велосипедист проехал это расстояние туда и обратно без остановок за 3 ч 20 мин, снизив на обратном пути скорость на 4 км/ч. С какой скоростью двигался велосипедист в сторону посёлка?
б) Турист проплыл на лодке по реке из города A в город B и обратно за 7 ч. Найдите скорость течения реки, если известно, что турист проплывал 2 км против течения реки за то же время, что и 5 км по течению, а расстояние между городами 20 км.

13.8. Найдите область определения функции:
а) $y = \sqrt{x^2 - x - 56} + \sqrt{x + 7}$;
б) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 56}{x + 7}}$;
в) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 40} - \sqrt{10 - 2x}$;
г) $y = \sqrt{\dfrac{10 - 3x}{x^2 + 3x - 40}}$.

§ 14. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

О функции $y = \operatorname{tg} x$ мы говорили в § 5 и 8, где узнали некоторые свойства этой функции; они помогут нам в построении её графика.

1. Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Это свойство означает, что на графике функции $y = \operatorname{tg} x$ нет точки, принадлежащей прямой $x = \dfrac{\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \dfrac{3\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = -\dfrac{\pi}{2}$, и т. д. Эти прямые проведены пунктиром на рисунке 98.

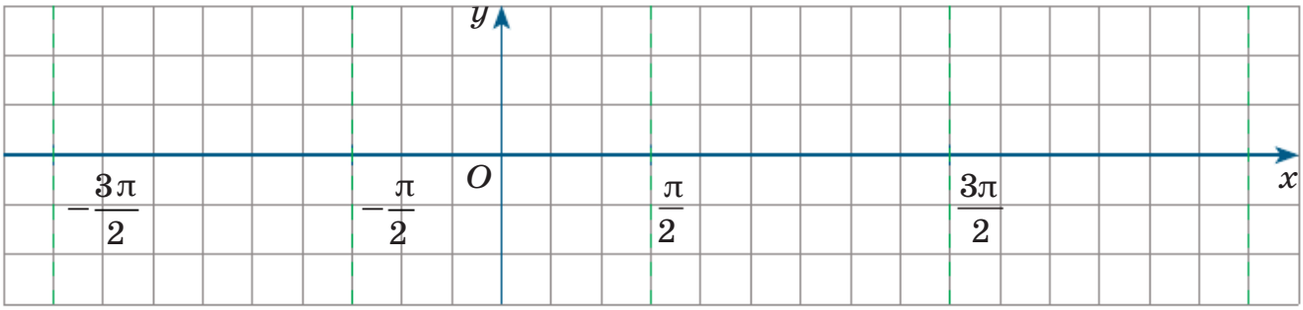


Рис. 98

Значит, график функции $y = \operatorname{tg} x$ состоит из бесконечного множества ветвей: одна — в полосе между прямыми $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, другая — в полосе между прямыми $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ и т. д.

2. $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая функция с основным периодом π. Это мы доказали в § 8.

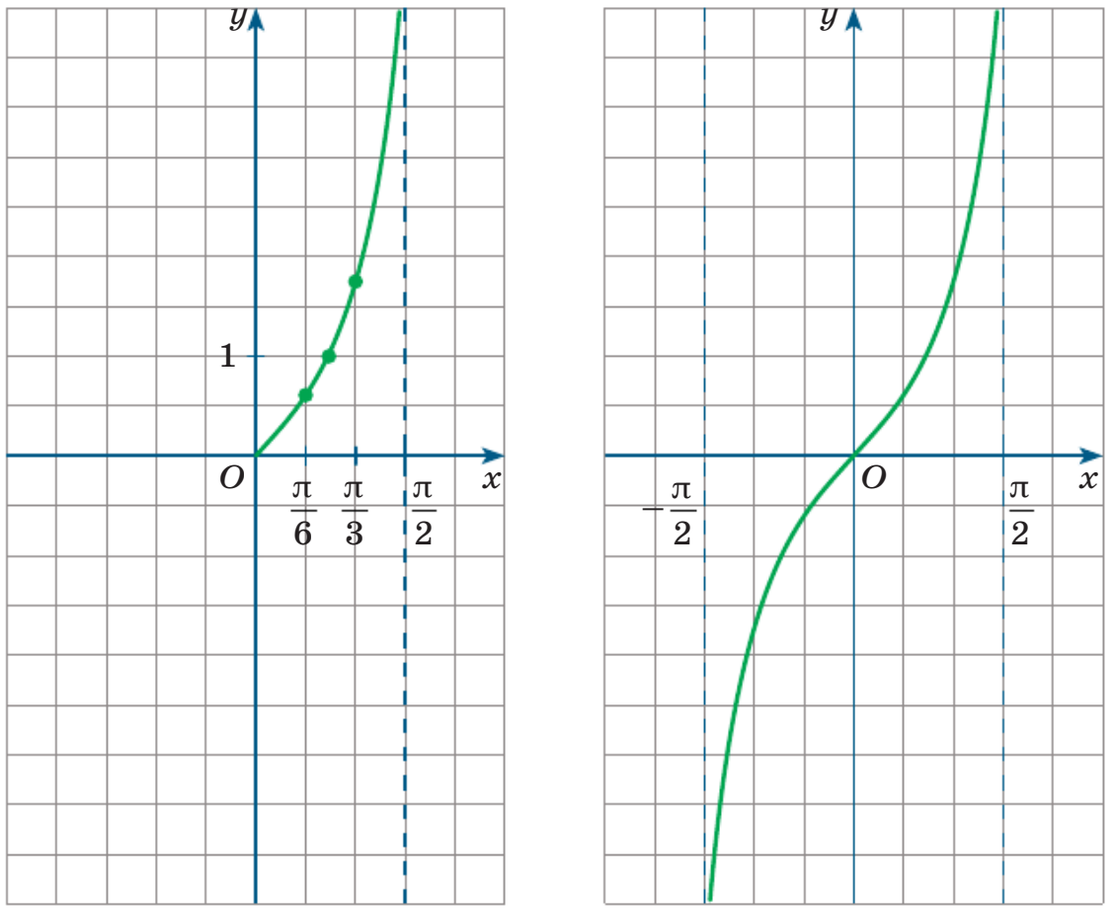
Значит, если мы построим ветвь графика в полосе между прямыми $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, то затем нужно будет сдвинуть построенную ветвь по оси Ox вправо и влево на π, 2π, 3π и т. д.

3. $y = \operatorname{tg} x$ — нечётная функция. Это следует из доказанного в § 5 соотношения $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат. Значит, достаточно построить часть графика на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, а затем воспользоваться указанной симметрией и построить часть графика на полуинтервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Приступим к построению графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Составим таблицу значений функции.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



а *б*

Рис. 99

Отметим точки

$$(0;\,0),\ \left(\frac{\pi}{6};\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(\frac{\pi}{4};\,1\right),\ \left(\frac{\pi}{3};\,\sqrt{3}\right)$$

на координатной плоскости и проведём через них плавную кривую (рис. 99, *а*). Добавим линию, симметричную построенной кривой относительно начала координат (рис. 99, *б*). Воспользовавшись периодичностью, достроим график до конца (рис. 100).

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*. Ту её часть, которая изображена на рисунке 99, *б*, обычно называют *главной ветвью* тангенсоиды.

Обратите внимание на то, что из начала координат главная ветвь тангенсоиды выходит как бы под углом 45° к положительному направлению оси абсцисс. О том, почему это так, вы узнаете в курсе математики 11 класса.

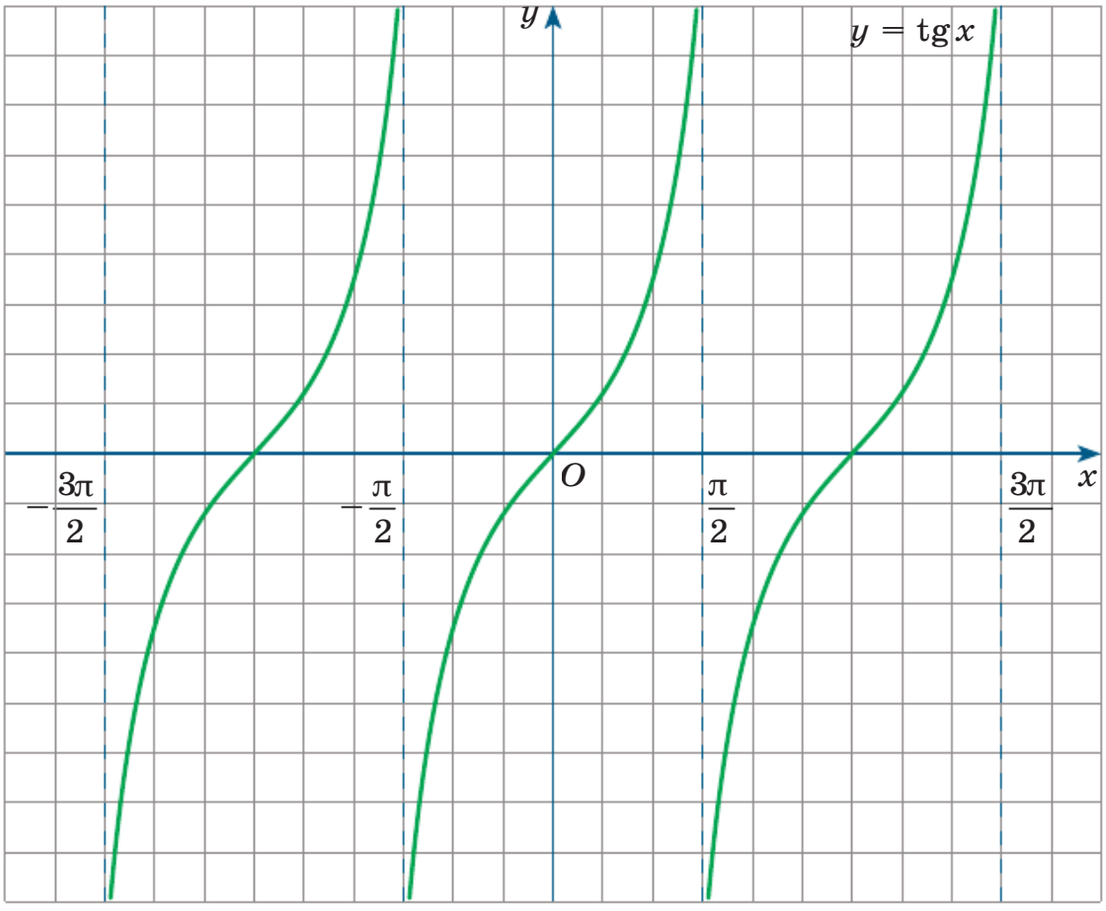


Рис. 100

4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Вообще функция возрастает на любом интервале вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \boldsymbol{Z}.$$

5. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена ни сверху, ни снизу.

6. У функции $y = \operatorname{tg} x$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

7. Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Вообще функция непрерывна на любом интервале вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \boldsymbol{Z}.$$

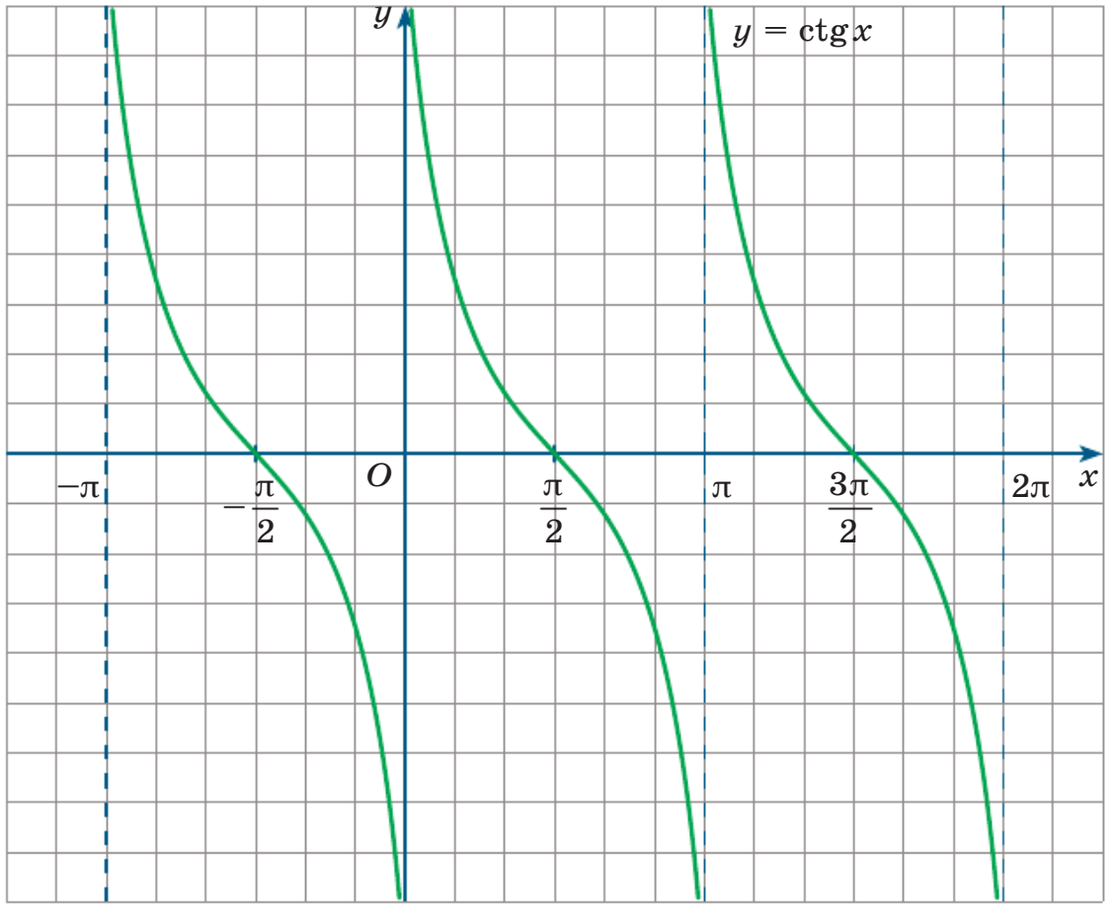


Рис. 101

В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ функция претерпевает разрыв.

Каждая прямая вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ служит вертикальной асимптотой графика.

8. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Рассуждая аналогично, можно построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 101).

Пример 1 Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 1$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ — тангенсоиду и $y = 1$ — прямую, параллельную оси Ox. Они имеют бесконечно много точек пересечения (рис. 102), причём абсциссы этих точек отличаются друг от друга на πn. На главной вет-

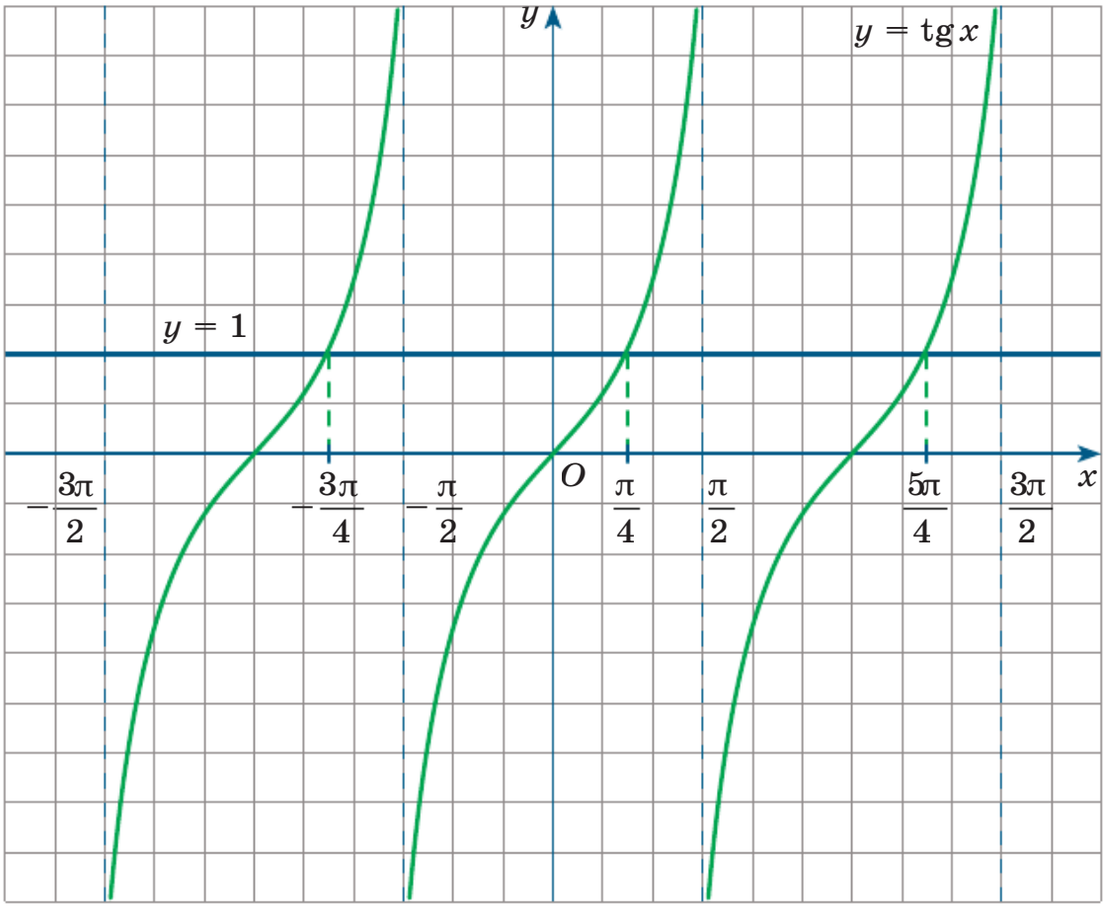


Рис. 102

ви абсцисса соответствующей точки равна $\frac{\pi}{4}$, это один корень уравнения, а все решения описываются формулой $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2 Решить неравенство $-1 \leqslant \operatorname{tg}\frac{x}{2} \leqslant \sqrt{3}$.

Решение. Построим график функции $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Для этого осуществим растяжение обычной тангенсоиды от оси ординат с коэффициентом 2. График изображён на рисунке 103 (с. 124).

Построим прямые $y = -1$, $y = \sqrt{3}$ и посмотрим, для каких значений аргумента главная ветвь тангенсоиды заключена внутри полосы, образованной построенными прямыми.

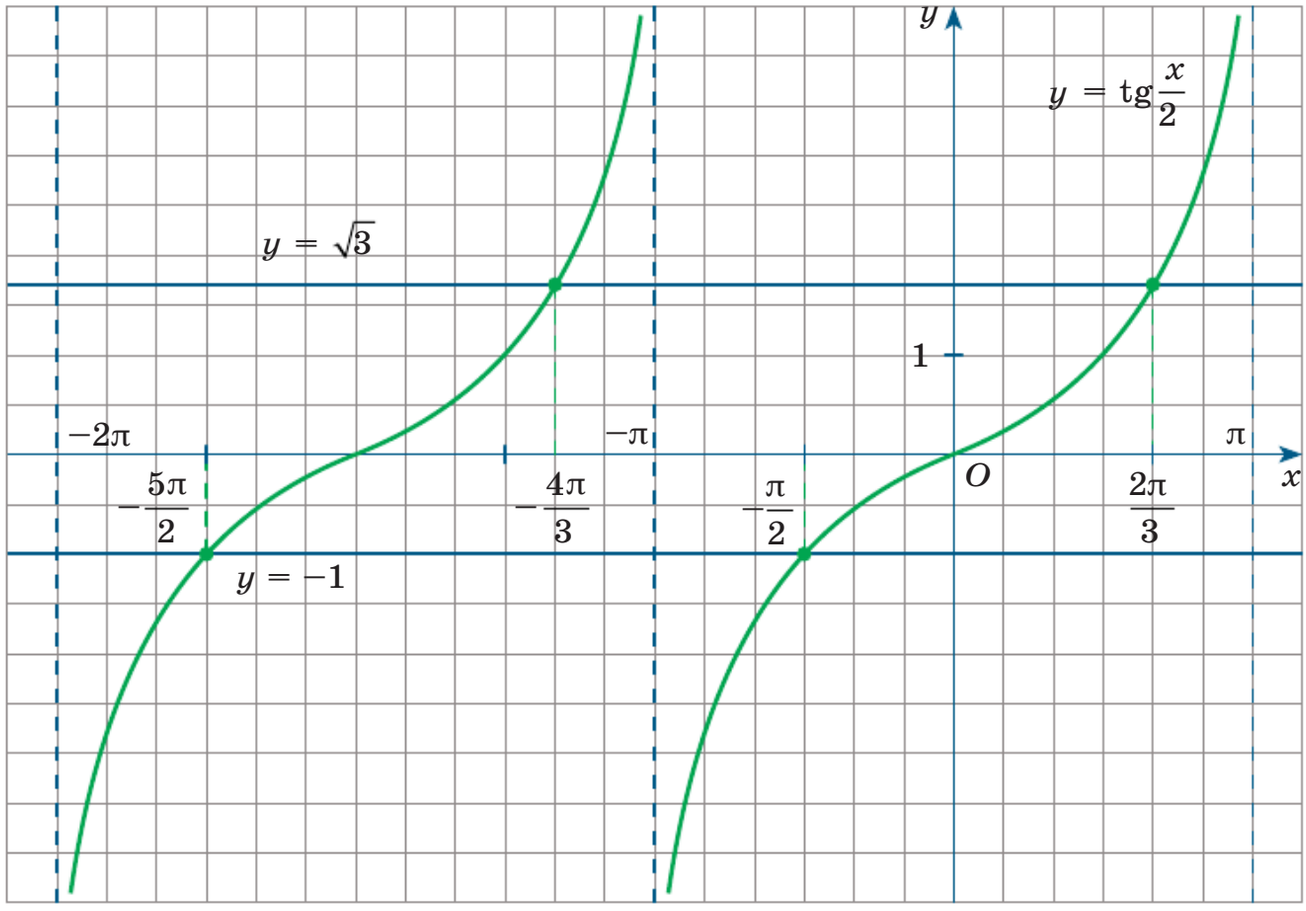


Рис. 103

Из уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$ находим: $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{2}$. Из уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$ находим: $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$. Значит, для главной ветви тангенсоиды получаем: $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$. А окончательный ответ таков: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

14.1. Решите графически уравнение:

а) $\operatorname{tg} x = 1$; в) $\operatorname{ctg} x = 0$; д) $\operatorname{tg} x = -1$;

б) $\operatorname{ctg} x = -1$; г) $\operatorname{tg} x = 0$; е) $\operatorname{ctg} x = 1$.

14.2. Решите графически неравенство:

а) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$; в) $\operatorname{ctg} x < 1$; д) $\operatorname{ctg} x \leqslant 0$;

б) $\operatorname{tg} x \leqslant 0$; г) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$; е) $\operatorname{tg} x > -1$.

14.3. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на чётность, если:

а) $f(x) = x^2 + \operatorname{tg} x$; г) $f(x) = |x| - \operatorname{ctg} x$;

б) $f(x) = |x| \cdot \operatorname{ctg} x$; д) $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{tg} x}$;

в) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^4 - x^2}$; е) $f(x) = \dfrac{x^4 - 4}{\operatorname{ctg}^2 x}$.

14.4. Найдите область определения функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$; г) $f(x) = \operatorname{ctg}(-4x)$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; д) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

в) $f(x) = 3\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; е) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Постройте график функции.

ИКТ **14.5.** а) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) - 1$; г) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1$; д) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 2$;

в) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) - 1{,}5$; е) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2{,}5$.

ИКТ **14.6.** а) $y = -\operatorname{ctg} x$; в) $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg} x$; д) $y = 2 - 1{,}5\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

б) $y = -2\operatorname{tg} x$; г) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$; е) $y = 3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3} - 0{,}5$.

14.7. а) Известно, что $\operatorname{ctg}(5\pi - x) = \dfrac{4}{5}$. Найдите $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

б) Известно, что $\operatorname{tg}(7\pi - x) = -\dfrac{4}{9}$. Найдите $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

14.8. Определите знак разности:

а) $\operatorname{tg} 300^\circ - \operatorname{tg} 301^\circ$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{7} - \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$;

в) $\operatorname{tg} 2{,}001 - \operatorname{tg} 2$;

г) $\operatorname{ctg} 197^\circ - \operatorname{ctg} 195^\circ$;

д) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} - \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$;

е) $\operatorname{ctg}(-3) - \operatorname{ctg}(-3{,}001)$.

14.9. а) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \operatorname{tg} x$. Докажите, что верно равенство

$$f(2x + 4\pi) + f(7\pi - 2x) = 0.$$

б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 2$. Докажите, что верно равенство

$$f(\operatorname{tg} x) - 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

14.10. Решите неравенство:

а) $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \operatorname{tg} 2x \leqslant 1$;

б) $-1 \leqslant \operatorname{ctg}\frac{x}{3} \leqslant 0$;

в) $-1 \leqslant \operatorname{tg}\frac{x}{3} \leqslant 0$;

г) $-1 \leqslant \operatorname{ctg} 2x \leqslant \sqrt{3}$.

14.11. Найдите область определения функции:

а) $y = \operatorname{tg} x\sqrt{x^2 - 9x + 8}$;

б) $y = \operatorname{ctg} 2x\sqrt{16 - x^4}$;

в) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\sqrt{81 - 4x^2}$;

г) $y = \operatorname{ctg} x\sqrt{x^3 - 25x^2}$.

Постройте график функции.

14.12. а) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$;

б) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x}$;

в) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

г) $y = \operatorname{tg} x \cdot |\operatorname{ctg} x|$.

14.13. а) $y = 3\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

б) $y = \sin^2(\operatorname{tg} x) + \cos^2(\operatorname{tg} x)$;

в) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(\sin x) \cdot \operatorname{ctg}(\sin x)$;

г) $y = \sqrt{x} - 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

д) $y = \sin^2(\operatorname{tg} x) + \cos^2(\operatorname{tg} x)$;

е) $y = 2\operatorname{tg}(\cos x) \cdot \operatorname{ctg}(\cos x)$.

Упражнения для повторения

14.14. а) Два экскаватора, работая одновременно, выполнят некоторый объём работ за 3 ч 45 мин. Один экскаватор, работая отдельно, может выполнить этот объём работ на 4 ч быстрее, чем другой. Сколько времени требуется каждому экскаватору в отдельности для выполнения того же объёма работ?
б) Две бригады, работая вместе, могут выполнить задание за 8 ч. Первая бригада, работая одна, могла бы выполнить задание на 12 ч быстрее, чем одна вторая бригада. За сколько часов могла бы выполнить задание первая бригада, если бы она работала одна?

14.15. Найдите значения параметров p и q, если x_1 и x_2 — корни уравнения $4x - x^2 - p = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $36x - x^2 - q = 0$ и числа x_1, x_2, x_3 и x_4 образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

14.16. Найдите значения параметров p и q, если x_1 и x_2 — корни уравнения $3x - x^2 - p = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $12x - x^2 - q = 0$ и числа x_1, x_2, x_3 и x_4 образуют геометрическую прогрессию с положительными членами.

14.17. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} = 2$;

б) $4x^{-1} + x + 4 = 0$;

в) $2x^{-1} + 1 - 7x^{-2} = 0$;

г) $\frac{6}{x^2} - \frac{1}{x} = 5$;

д) $9x^{-1} + x - 6 = 0$;

е) $x - 4 = 8x^{-1}$.

Итак, в главе 1

Изучили две новые математические модели: числовая окружность и числовая окружность на координатной плоскости.

Познакомились с понятиями тригонометрических функций числового и углового аргумента.

Изучили новое свойство функций — периодичность.

Научились строить графики функций $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; изучили свойства этих функций.

Выяснили, как, зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций $y = kf(x)$, $y = f(mx)$.

Вопросы

1. Что такое числовая окружность? Чему равна длина числовой окружности, длина её полуокружности, длина её четверти?
2. Каким уравнением задаётся числовая окружность, расположенная в координатной плоскости xOy?
3. Сформулируйте определение косинуса и синуса числа.
4. Сформулируйте определение тангенса и котангенса числа.
5. Запишите основное тригонометрическое тождество.
6. Что такое угол в 1 радиан? Сколько градусов (примерно) составляет угол в 1 радиан?
7. Как градусную меру дуги (центрального угла) перевести в радианную и обратно?
8. Какую функцию называют периодической? Что такое период функции, основной период функции?
9. Чему равен основной период функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$?
10. Чему равен основной период функции: $y = \sin kx$, $y = \cos kx$, $y = \operatorname{tg} kx$, $y = \operatorname{ctg} kx$?
11. Как называют графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$? Перечислите свойства этих функций.
12. Как называют графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$? Перечислите свойства этих функций.

13. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = kf(x)$?

14. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(mx)$?

Тест

1. Укажите значения t, соответствующие координатам точки $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

а) $\frac{3\pi}{4}$ б) $\frac{15\pi}{4}$ в) $-\frac{\pi}{4}$ г) $-\frac{5\pi}{4}$

2. Найдите значение выражения $\cos(-\pi) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.

3. Установите соответствие между радианной и градусной мерами дуги числовой окружности.

А. $\frac{13\pi}{6}$ Б. $\frac{11\pi}{4}$ В. $\frac{5\pi}{2}$

1) 495° 2) 390° 3) 450°

4. Зная, что $\cos t = 0{,}96$ и $-\frac{\pi}{2} < t < 0$, найдите $\sin t$.

5. Расположите числа $\cos 2$, $\cos 5$, $\cos 3$, $\cos 4$ в порядке возрастания.

а) $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 2$, $\cos 5$ в) $\cos 5$, $\cos 4$, $\cos 3$, $\cos 2$

б) $\cos 5$, $\cos 2$, $\cos 4$, $\cos 3$ г) $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 5$

6. Решите уравнение $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) $\pm\frac{5\pi}{6} + \pi n$ в) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

б) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ г) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

7. Найдите период функции $y = 3\sin\frac{\pi x}{2}$.

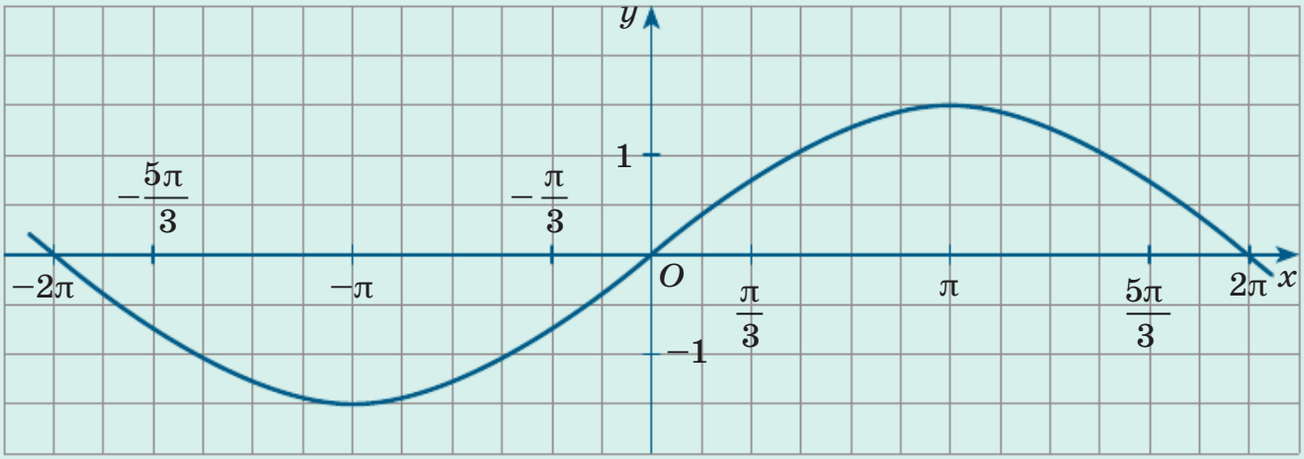


Рис. 104

8. Укажите формулу, которая задаёт график функции, изображённый на рисунке 104.

а) $y = \sin 2x$ б) $y = \cos\frac{x}{2}$ в) $y = 2\sin x$ г) $y = 1{,}5\sin\frac{x}{2}$

9. Найдите область значений функции $y = 3\cos x + 2$.

10. Решите неравенство $(\sqrt{3} - 2)\operatorname{tg} x \geqslant 2 - \sqrt{3}$.

Из истории математики

Тригонометрия в истории науки возникла значительно раньше тригонометрических функций в том виде, как сейчас мы их рассматриваем. Появление тригонометрии было обусловлено в первую очередь необходимостью вычислений в астрономии и географии. Движение Солнца и Луны, смена времён года, расчёт морских и наземных путей передвижения, составление календарей, подсчёт точного времени, определение размеров недоступных объектов — вот лишь небольшой перечень конкретных задач, приводящих к накоплению сведений о числовых функциях углов.

Основной интерес представляла пространственная, сферическая тригонометрия, а не более простой случай плоской тригонометрии. Ещё в Древнем Вавилоне (XX—XV вв. до н. э.) сведения о значениях тех или иных функций угла собирались и хранились в виде клинописных таблиц. Именно с тех пор мы традиционно измеряем углы в градусах, минутах и секундах, т. е. используем шестидесятеричную систему счисления древних вавилонян. Хранение тригонометрических сведений в виде таблиц — ещё одна традиция, идущая с тех времён. Пожалуй, вплоть до эпохи 1970-х гг., до повсеместного использования электронных калькуляторов и компьютерных программ, использование тригонометрических таблиц («таблицы Брадиса») входило в перечень основных учебных навыков выпускников отечественных общеобразовательных школ.

В Древней Греции своеобразным итогом результатов по тригонометрии стали 13 книг «Математической системы» Клавдия Птолемея (первая половина II в. н. э.), которые известны под кратким названием «Альмагест». В ней изложена *геоцентрическая*[1] теория видимых движений планет и звёзд, представлена «тригонометрия хорд» как базовая вычислительная составляющая астрономии, приведены полные тригонометрические таблицы, составленные для углов, меняющихся с шагом в полградуса. Несколько ранее в трудах Гиппарха встречаются аналогичные таблицы для углов, кратных одной двенадцатой доли прямого угла, т. е. 7,5 градуса.

В Древней Индии и на арабском Востоке версии тригонометрии хорд предлагались в большом числе работ различных учёных: «Пу-

[1] *Геоцентрическая* теория основана на том, что Земля — центр Вселенной.

лиса-сиддханта», «Панча-сиддхантике» и «Сиддханта-широмани» в Индии (V—XII вв.), «Книга о часовом инструменте, называемом солнечными часами», «Книга о науке звёзд», «Канон Масуда», «Собрание правил науки астрономии» в странах ислама (ок. X в.). Индийцы, например, стали регулярно использовать тень, которую отбрасывает вертикальный шест *гномон*, что позже привело их к тангенсам и котангенсам, которые первоначально как раз и назвали «тенями».

Индийские учёные IV—VI вв. н. э. для хорды, стягивающей дугу окружности, использовали термин «джива» (в переводе с санскрита — «тетива лука»). Позже арабские астрономы преобразовали его сначала в «джиба», а потом в «джайб» (*впадина*) (не было различения «и» и «й»). Позже, в Европе XII в. н. э. этот арабский термин без прямой связи с окружностями, углами и хордами перевели на латынь буквально, как *впадина* (словом *sinus*). В свою очередь, «косинус» (*cosinus*) — это дополнение, *complement*, синуса. Вообще, арабские математики X—XII вв. н. э. вычисляли синусы и тангенсы углов с поразительной точностью; например, синус половины градуса — верно до восьмого десятичного знака. Использовали они и окружность единичного радиуса, т. е. то, что мы стали называть «числовая окружность».

Отделение тригонометрии от астрономии в виде отдельного раздела науки традиционно связывают с трактатом персидского астронома Насир ад-Дина ат-Туси (1201—1274), жившего и работавшего на территории нынешнего Азербайджана. В его «Трактате о фигуре секущих» (1260 г.) в книге III были введены синусы, косинусы, доказана плоская теорема синусов, а в книге V решены разнообразные задачи сферической тригонометрии. Переводы этого трактата ат-Туси оказали решающее влияние на развитие математики и, в частности, тригонометрии в средневековой Европе. Он стал базой для первых европейских учебников по тригонометрии, например для «Пяти книг о треугольниках всех видов» (1464 г.) немецкого астронома Иоганна Мюллера (Региомонтана).

Существенное влияние на развитие тригонометрии оказали работы польского астронома Николая Коперника (1473—1543), и в особенности его основной труд «О вращениях небесных сфер», в котором была представлена *гелиоцентрическая* система мира.

Системы плоской и пространственной тригонометрии в 1579 г. изложил Франсуа Виет (1540—1603) во второй части своего «Математического канона», а также в «Восьмой книге ответов на различные математические вопросы» (1593 г.). Отметим, что Виет, как правило,

обходился в своём изложении без чертежей, поясняющих геометрическую сторону дела.

В дальнейшем математики XVII—XVIII вв. самым широким способом использовали тригонометрию для решения разнообразных математических и естественно-научных задач. Всё же основным для тригонометрии вкладом явились результаты Леонарда Эйлера (1707—1783), который ввёл и закрепил принятые доныне обозначения тригонометрических функций, расширил область их определения до всей числовой прямой и, более того, до комплексной плоскости. Пожалуй, после работ Эйлера тригонометрия как самостоятельная наука уже полностью сложилась и в дальнейшем использовалась или в учебных целях, или как технический аппарат, область применений и приложений которого оказалась практически необозримой. Всюду, где в естествознании приходится иметь дело с периодическими колебаниями или процессами, появляются и используются тригонометрические функции: от акустики и теории музыки до, скажем, геодезии и компьютерной графики.

В заключение несколько слов о терминологии. Само слово «тригонометрия» получается из двух греческих слов: τρίγονο (*треугольник*) и μετρειν (*измерять*). Впрочем, ровно в таком виде его стали использовать с конца XVI в., после появления учебника немецкого богослова Бартоломея Питискуса (1561—1613) с таким названием. Всем привычная константа $\pi \approx 3{,}14159\ldots$ хотя и происходит от греческих περιφερια — *периферия*, окружность, и περίμετρος — *периметр*, вовсе не есть наследие древнегреческой математики. Это обозначение для отношения площади круга к квадрату его диаметра стали использовать примерно с 1706 г. после сочинений английского математика Уильяма Джонса (1675—1749). Это число иррационально, более того, оно *трансцендентно*, т. е. не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. В частности, отсюда следует невозможность построения циркулем и линейкой квадрата той же площади, что и заданный круг (проблема «квадратуры круга», известная, как минимум, с III в. до н. э.). Трансцендентность π была доказана лишь в 1882 г. (Карл фон Линдеман, 1852—1939).



Омский государственный университет
им. Ф. М. Достоевского.
Омск

§ 15. Понятие обратной функции

§ 16. Функция $y = \arcsin x$

§ 17. Функция $y = \arccos x$

§ 18. Функция $y = \operatorname{arctg} x$

§ 19. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$

§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

§ 21. Решение уравнения $\sin x = a$

§ 22. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

§ 23. Методы решения тригонометрических уравнений

§ 24. Однородные тригонометрические уравнения

Глава 2

Обратные тригонометрические функции. Решение тригонометрических уравнений

§ 15. Понятие обратной функции

На рисунке 105 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Он наглядно характеризует следующие свойства функции:

1) область определения функции — отрезок $[a; b]$, $D(f) = [a; b]$;

2) область значений функции — отрезок $[c; d]$, $E(f) = [c; d]$;

3) функция $y = f(x)$ — возрастающая;

4) функция $y = f(x)$ — непрерывная.

Обратите внимание на следующее обстоятельство: как обычно, каждому значению x из области определения функции соответствует единственное значение y, но в данном случае можно пойти и в обратном направлении: задав конкретное значение функции из области её значений, найти соответствующее ему *единственное* значение аргумента (рис. 106). В подобных случаях говорят, что функция *обратима*. В частности, *любая монотонная функция обратима*. График, построенный на рисунке 105, даёт наглядное подтверждение этому факту.

А вот примеры необратимых функций: $y = x^2$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Определение. Пусть $y = f(x)$, $x \in X$, — обратимая функция и $E(f) = Y$. Поставим в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$ (т. е. единственный корень уравнения $f(x) = y$ относительно переменной x). Тогда получим функцию, которая определена на Y, а X — её область значений. Эту функцию называют **обратной функцией** (по отношению к функции $y = f(x)$, $x \in X$).

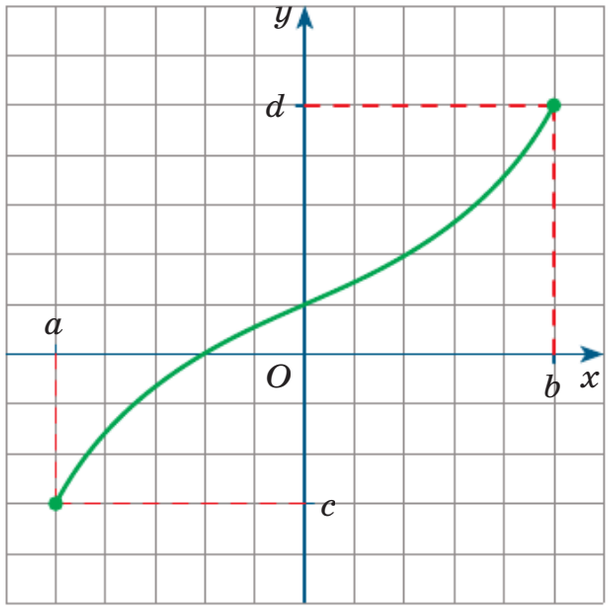


Рис. 105

Функция $y = f(x)$. Каждому $x \in D(f)$ соответствует единственное значение $y \in E(f)$

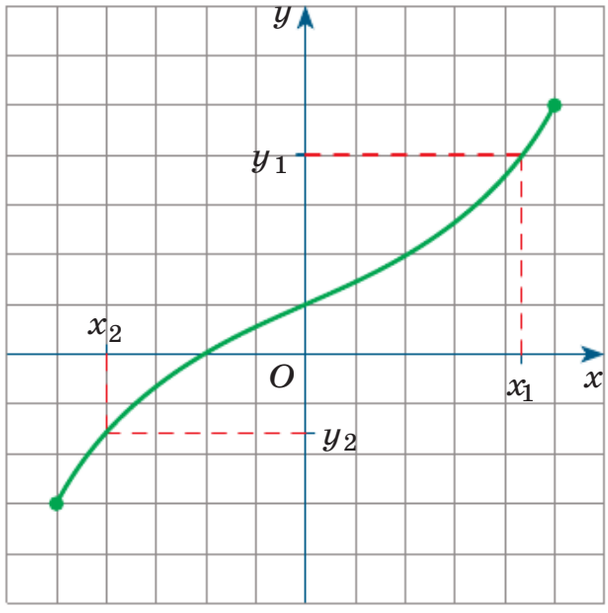


Рис. 106

Обратимая функция $y = f(x)$. Каждое значение $y \in E(f)$ соответствует единственному $x \in D(f)$

Обратную функцию обозначим так: $x = g(y)$, $y \in Y$. Чтобы найти $g(y)$, надо из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y. Например, для функции $y = 2x - 5$ обратная функция имеет вид $x = \dfrac{y+5}{2}$.

Пример 1 Найти функцию, обратную данной:

а) $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$; б) $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$; в) $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in [0; 8]$.

Решение. а) Функция $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$, — её график изображён на рисунке 107 — монотонна (возрастающая), а значит, обратима, при этом $y \in [0; +\infty)$. Из уравнения $y = x^2$ следует, что либо $x = \sqrt{y}$, либо $x = -\sqrt{y}$. По условию $x \in [0; +\infty)$, т. е. $x \geqslant 0$, значит, из указанных двух возможностей $\left(x = \sqrt{y} \text{ либо } x = -\sqrt{y}\right)$ выбираем первую: $x = \sqrt{y}$. Значит, обратной для заданной функции является функция $x = \sqrt{y}$, $y \in [0; +\infty)$. Впрочем, можно обойтись без записи $y \in [0; +\infty)$, поскольку луч $[0; +\infty)$ — *естественная* область определения функции $x = \sqrt{y}$.

б) Функция $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$, — её график изображён на рисунке 108 — монотонна (убывающая), а значит, обратима, при этом $y \in [0; +\infty)$. Из уравнения $y = x^2$ следует, что либо $x = \sqrt{y}$, либо

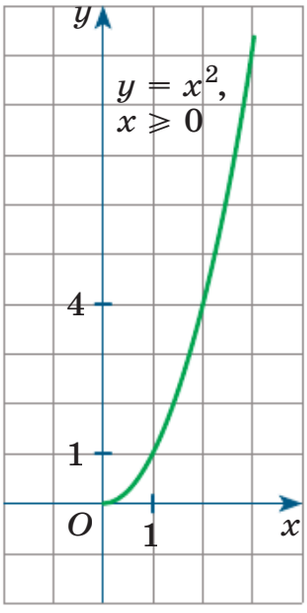


Рис. 107

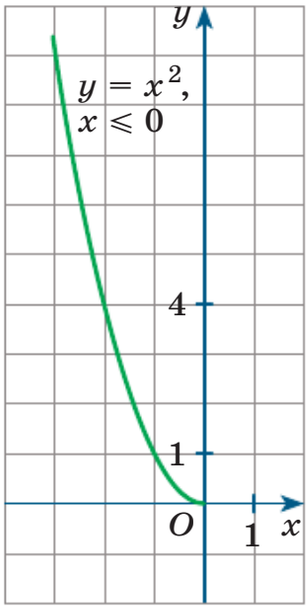


Рис. 108

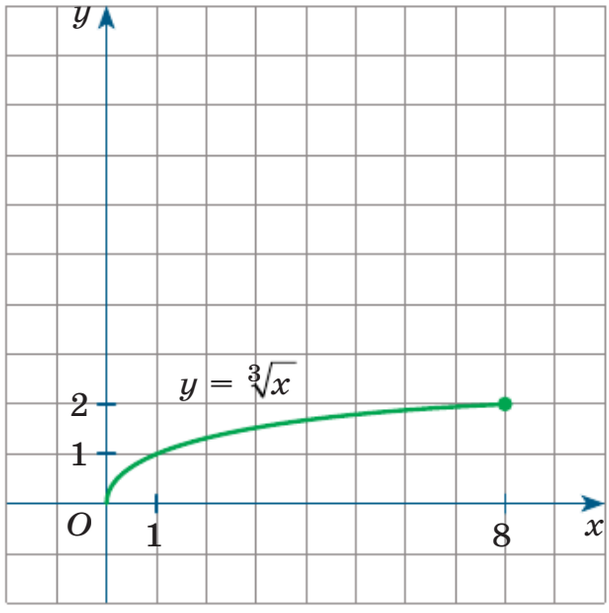


Рис. 109

$x = -\sqrt{y}$. По условию $x \in (-\infty;\ 0]$, т. е. $x \leqslant 0$, значит, из указанных двух возможностей $\left(x = \sqrt{y}\ \text{либо}\ x = -\sqrt{y}\right)$ выбираем вторую: $x = -\sqrt{y}$.

в) Функция $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in [0;\ 8]$, — её график изображён на рисунке 109 — монотонна (возрастающая), а значит, обратима, при этом $y \in [0;\ 2]$. Из уравнения $y = \sqrt[3]{x}$ следует, что $x = y^3$. Значит, обратной для заданной функции является функция $x = y^3$, $y \in [0;\ 2]$.

Соответствия $y = f(x)$, $x \in X$, и $x = g(y)$, $y \in Y$, выражают одну и ту же взаимосвязь между переменными x и y. Поэтому графики функций $y = f(x)$, $x \in X$, и $x = g(y)$, $y \in Y$, представляют собой одно и то же множество точек координатной плоскости xOy. Но на практике аргумент обратной функции обозначают более привычной буквой x, а значение функции — буквой y, т. е. вместо $x = g(y)$, $y \in Y$, пишут $y = g(x)$, $x \in Y$. Такая замена равносильна тому, что оси абсцисс и ординат меняются местами, а это произойдёт, если координатную плоскость xOy подвергнуть преобразованию осевой симметрии относительно прямой $y = x$. Именно соответствие $y = g(x)$, $x \in Y$, обычно считают записью функции, обратной по отношению к функции $y = f(x)$, $x \in X$.

Итак, *чтобы получить график функции* $y = g(x)$, $x \in Y$, *обратной по отношению к функции* $y = f(x)$, $x \in X$, *нужно график функции* $y = f(x)$, $x \in X$, *отобразить симметрично относительно прямой* $y = x$ (рис. 110).

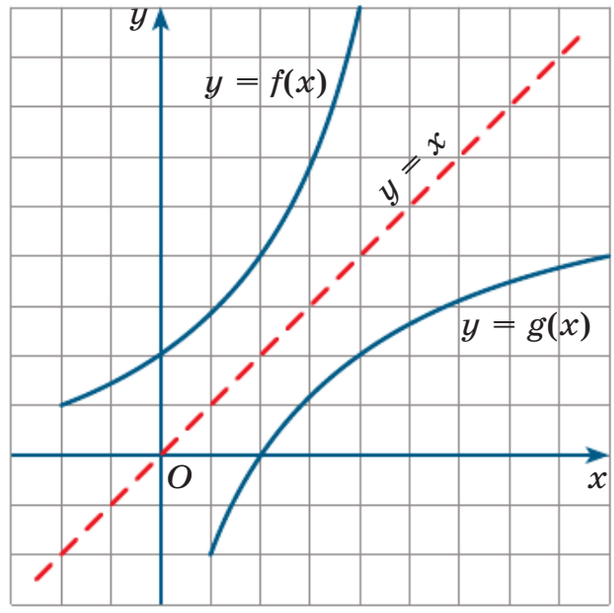


Рис. 110

Пример 2 Построить график функции, обратной данной:
а) $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$; б) $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$; в) $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in [0; 8]$.

Решение. а) В примере 1 «а» мы видели, что в данном случае $x = \sqrt{y}$. Поменяв переменные местами, получим стандартную запись обратной функции: $y = \sqrt{x}$. На рисунке 111 изображены графики функций $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$, и $y = \sqrt{x}$, они симметричны относительно прямой $y = x$.

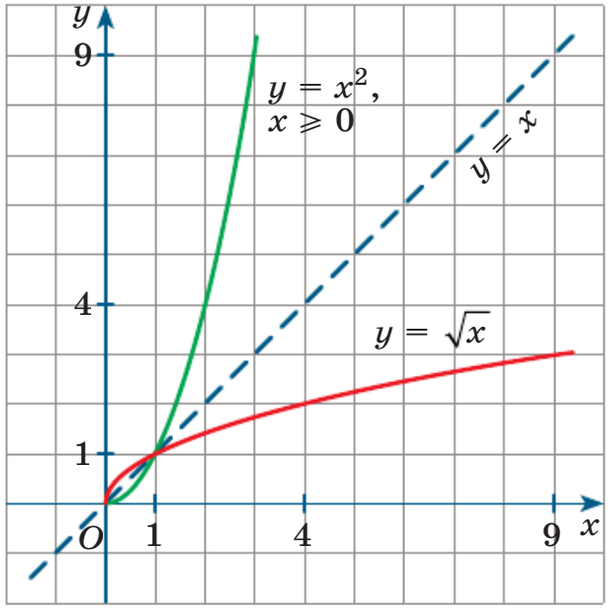


Рис. 111

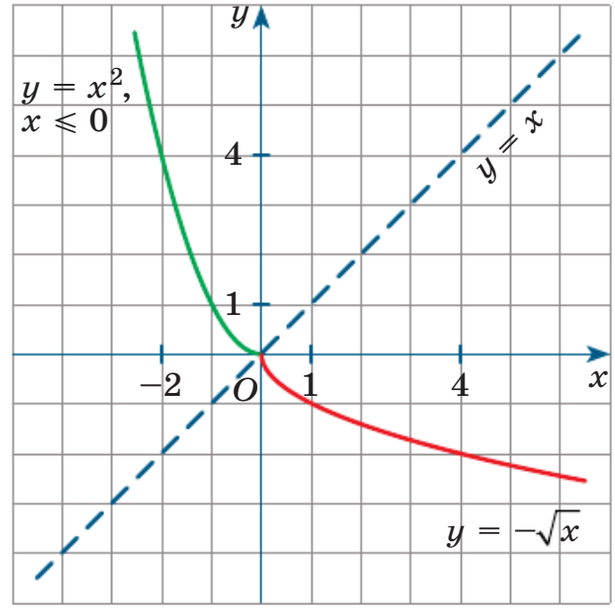


Рис. 112

б) В примере 1 «б» мы видели, что в данном случае $x = -\sqrt{y}$. Поменяв переменные местами, получим стандартную запись обратной функции: $y = -\sqrt{x}$. На рисунке 112 изображены графики функций $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$, и $y = -\sqrt{x}$, они симметричны относительно прямой $y = x$.

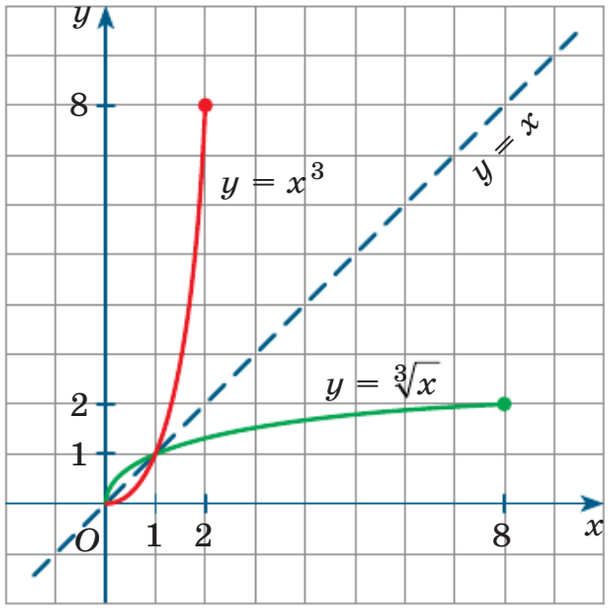


Рис. 113

в) В примере 1 «в» мы видели, что в данном случае $x = y^3$, $y \in [0; 2]$. Поменяв переменные местами, получим стандартную запись обратной функции: $y = x^3$, $x \in [0; 2]$. На рисунке 113 изображены графики функций $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in [0; 8]$, и $y = x^3$, $x \in [0; 2]$, они симметричны относительно прямой $y = x$.

Упражнения

Из данного равенства выразите переменную x через переменную y.

15.1. а) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \sqrt{x + 2}$; д) $y = 1 + \sqrt[3]{x}$;
б) $y = \sqrt{-x}$; г) $y = \sqrt{x} - 2$; е) $y = \sqrt[3]{1 - x}$.

15.2. а) $y = (x - 1)^2$, $x \geqslant 1$; г) $y = \dfrac{2}{x^2} - 2$, $x < 0$;

б) $y = x^2 + 2$, $x < 0$; д) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \geqslant 0$;

в) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $x \geqslant 0$; е) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$, $x < 0$.

15.3. Существует ли функция, обратная для данной функции $y = f(x)$, если функция $y = f(x)$:
а) чётная; г) непериодическая;
б) нечётная; д) имеет три нуля;
в) периодическая; е) не имеет нулей?

15.4. Являются ли взаимно обратными функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, если:

а) $f(x) = 5x + 3$, $g(x) = 0{,}2x - 0{,}6$;

б) $f(x) = \frac{4}{x} - 1$, $g(x) = \frac{4}{x - 1}$;

в) $f(x) = (2 - x)^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x} - 2$;

г) $f(x) = \frac{1}{6}x - 7$, $g(x) = 6x + 7$;

д) $f(x) = \frac{2}{x + 1}$, $g(x) = \frac{2}{x} - 1$;

е) $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$, $g(x) = x^3 - 2$?

15.5. Найдите функцию, обратную данной функции:

а) $y = 3x - 2$; в) $y = \frac{2}{x} - 1$; д) $y = \sqrt{x - 4}$;

б) $y = 3 - 4x$; г) $y = \frac{4}{x - 3}$; е) $y = 3 - \sqrt[3]{x}$.

15.6. Найдите функцию, обратную данной, и постройте графики обеих функций:

а) $y = -x^2$, $x \geqslant 0$; в) $y = \sqrt{x + 1}$; д) $y = 1 - x^3$;

б) $y = (x - 1)^2$, $x < 1$; г) $y = \sqrt{2x - 1}$; е) $y = x^3 + 2$.

Выясните, является ли данная функция обратимой, и если является, то задайте обратную функцию. Постройте на одном чертеже график данной функции и график обратной функции.

15.7. а) $y = x^2 + 4x - 8$, $x \in [-3; 0]$;

б) $y = -x^2 + 2x + 6$, $x \in [3; +\infty)$;

в) $y = x^2 + 4x - 8$, $x \in (-\infty; -2]$;

г) $y = -x^2 + 2x + 6$, $x \in [0; 3]$.

15.8. а) $y = \begin{cases} 2x + 1, & x \geqslant 0, \\ 1 - x^2, & x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \geqslant 0, \\ -2x^3, & x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geqslant 1, \\ x, & x < 1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} x^3 - 1, & x \geqslant 1, \\ 4x - 4, & x < 1. \end{cases}$

15.9. а) $y = 2x + |x|$;
б) $y = 3x + 4|x|$;
в) $y = x|x| + 1$;
г) $y = x + \frac{1}{2}|x|$;
д) $y = x^3 + 2|x|^3$;
е) $y = 2 - x|x|$.

Упражнения для повторения

15.10. Решите уравнение:
а) $12x^2 + 17x - 14 = 0$;
б) $\frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} = 2$;
в) $\sqrt{x^2 - 15} = x - 3$;
г) $-24x^2 + 38x - 15 = 0$;
д) $\frac{6}{x^2} - \frac{1}{x} = 5$;
е) $\sqrt{x^2 - 3} = 5 - x$.

15.11. Постройте график функции и прочитайте его:
а) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x < 0, \\ \cos x, & \text{если } x \geqslant 0; \end{cases}$
б) $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{если } x < -\pi, \\ \sin x, & \text{если } -\pi \leqslant x < \pi, \\ \sqrt{x - \pi}, & \text{если } x \geqslant \pi. \end{cases}$

15.12. Постройте график функции $y = \operatorname{tg} 2x$. С помощью графика решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = 1$.

15.13. а) В 9:00 катер вышел из пункта A в пункт B, расположенный в 54 км от пункта A. Пробыв 1,5 ч в пункте B, катер отправился назад и вернулся в пункт A в 18:00 того же дня. Найдите скорость течения реки, если известно, что собственная скорость катера равна 15 км/ч.
б) В 8:00 катер вышел из пункта N в пункт M, расположенный в 60 км от пункта N. Пробыв 3 ч в пункте M, катер отправился назад и вернулся в пункт N в 19:00 того же дня. Найдите собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки равна 4 км/ч.

§ 16. Функция $y = \arcsin x$

Рассмотрим функцию $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 114). Она монотонна (возрастает), значит, обратима; для неё существует обратная функция, её обозначают $x = \arcsin y$.

Поменяв, как принято, x и y местами, пишут: $y = \arcsin x$.

Итак, $\boldsymbol{y = \arcsin x}$ (читают: *арксинус* x) — это функция, обратная по отношению к функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

График функции $y = \arcsin x$ получается из графика функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 115).

Какую информацию о функции $y = \arcsin x$ мы можем получить, анализируя её график (см. рис. 115)? Во-первых, область определения функции — отрезок $[-1; 1]$, а область значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Во-вторых, функция непрерывна и возрастает на отрезке $[-1; 1]$. В-третьих, график функции симметричен относительно начала координат, а потому $y = \arcsin x$ — нечётная функция, т. е. для неё выполняется соотношение

$$\boldsymbol{\arcsin(-x) = -\arcsin x.} \qquad (1)$$

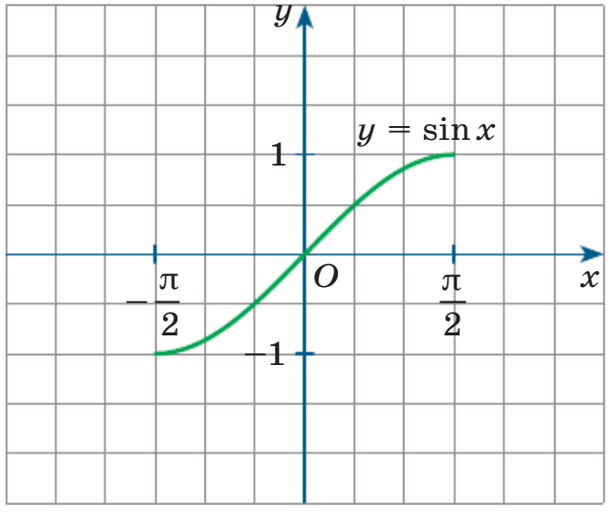


Рис. 114

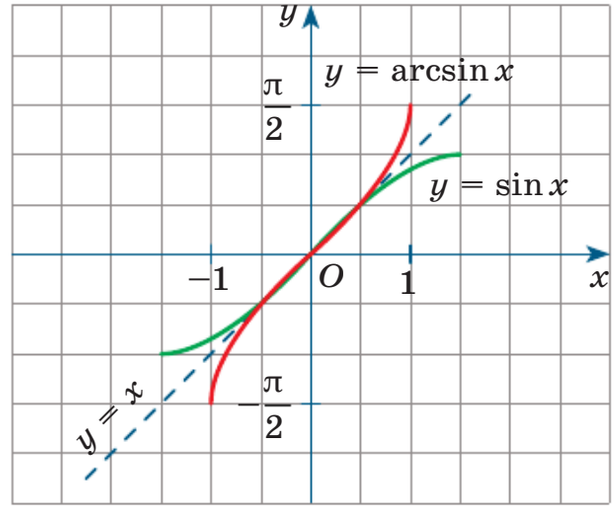


Рис. 115

Из сказанного выше следует, что записи $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, выражают одну и ту же взаимосвязь между x и y. Подставив в равенство $x = \sin y$ вместо y выражение $\arcsin x$, получим: $x = \sin(\arcsin x)$.

Итак, для любого $x \in [-1; 1]$ имеем:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Соотношения (2) дают возможность определить, что такое *арксинус* конкретного числа.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то $\arcsin a$ — это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Итак,

$$\text{если } |a| \leqslant 1, \text{ то } \arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

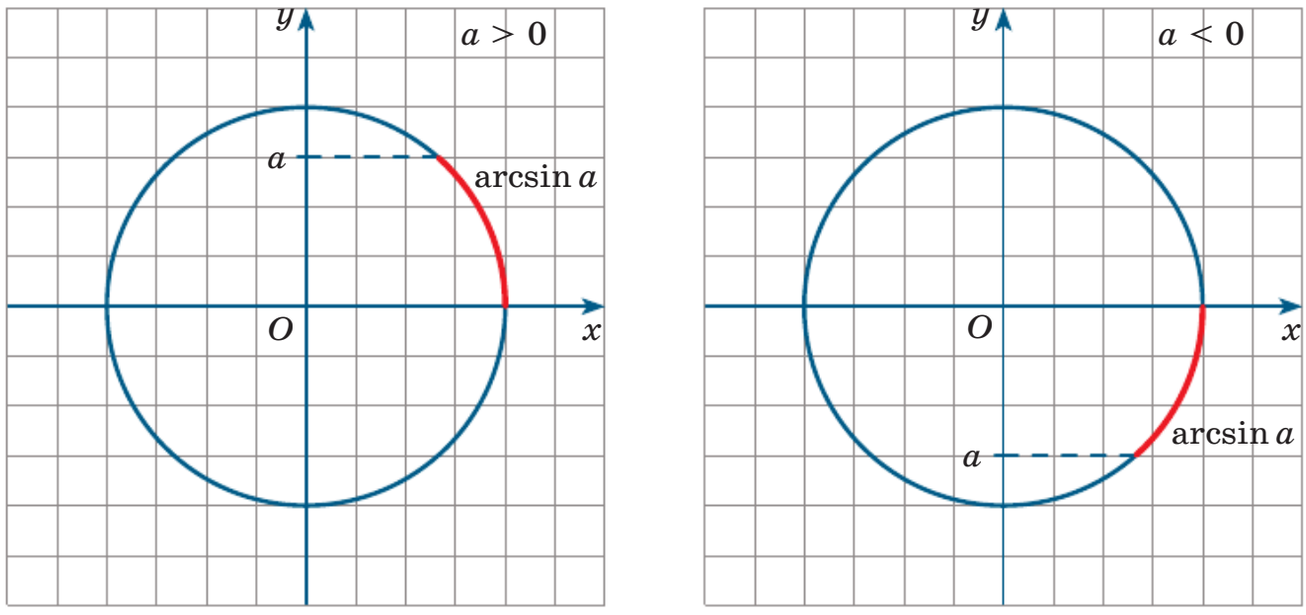
Геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 116, *а*, *б*. Эта иллюстрация в какой-то степени объясняет термин «арксинус»: *arcus* — по-латыни *дуга* (сравните со словом *арка*).

Пример 1 Вычислить:

а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin 1$; в) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. а) Пусть $\arcsin 0 = t$. Тогда $\sin t = 0$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\sin 0 = 0$ и $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin 0 = 0$.

б) Пусть $\arcsin 1 = t$. Тогда $\sin t = 1$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ и $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.



а *б*

Рис. 116

в) Пусть $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = t$. Тогда $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{3}$, поскольку $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Итак, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Ответ: а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{3}$.

В примере 1 показано, как вычислять значения арксинуса. Полезной в дальнейшем будет следующая таблица.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Пример 2 Вычислить:

а) $\sin(\arcsin 0{,}7)$;

б) $\cos(\arcsin 0{,}7)$;

в) $\cos(\arcsin(-0{,}7))$;

г) $\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Решение. а) Выше мы отметили, что для любого $x \in [-1; 1]$ имеет место тождество $\sin(\arcsin x) = x$. Значит, $\sin(\arcsin 0{,}7) = 0{,}7$.

б) Положим $x = \arcsin 0{,}7$, тогда $\sin x = 0{,}7$, $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Далее имеем:

$$\cos(\arcsin 0{,}7) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - 0{,}7^2} = \sqrt{0{,}51}.$$

в) Воспользуемся тем, что $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, и тем, что $\cos(-t) = \cos t$. Тогда

$$\cos(\arcsin(-0{,}7)) = \cos(-\arcsin 0{,}7) = \cos(\arcsin 0{,}7) = \sqrt{0{,}51}.$$

г) Положим $x = \arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$. Тогда $\sin x = \sin\dfrac{5\pi}{12}$, причём $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Поскольку $\dfrac{5\pi}{12} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, делаем вывод, что $x = \dfrac{5\pi}{12}$.

Ответ: а) 0,7; б) $\sqrt{0{,}51}$; в) $\sqrt{0{,}51}$; г) $\dfrac{5\pi}{12}$.

Пример 3 Построить график функции:

а) $y = -2\arcsin x$;

б) $y = |\arcsin(x - 2)| - \dfrac{\pi}{3}$;

в) $y = \arcsin|x + 1|$.

Решение. а) Построив график функции $y = \arcsin x$ (пунктирная линия на рисунке 117) и осуществив его растяжение от оси Ox с коэффициентом 2, получим график функции $y = 2\arcsin x$ (синяя линия на рисунке 117). Отобразив график функции $y = 2\arcsin x$ симметрично относительно оси абсцисс, получим требуемый график (зелёная линия на рисунке 117).

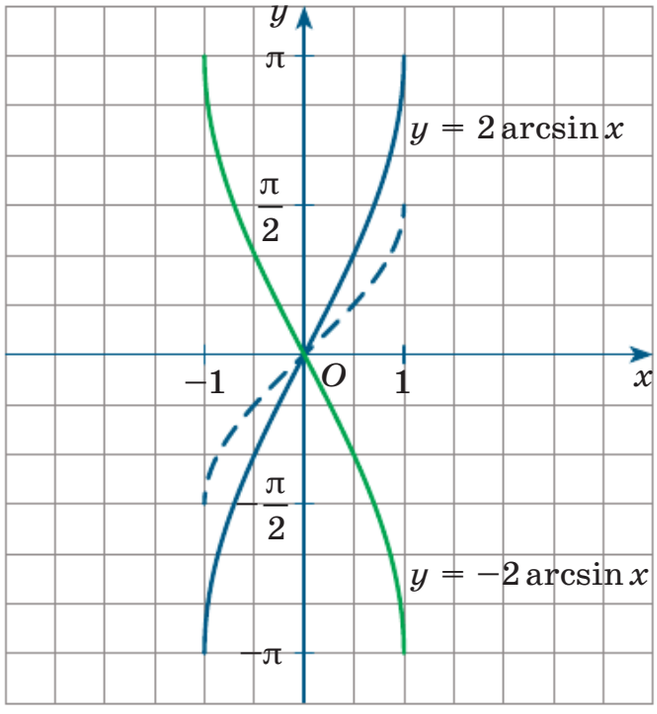
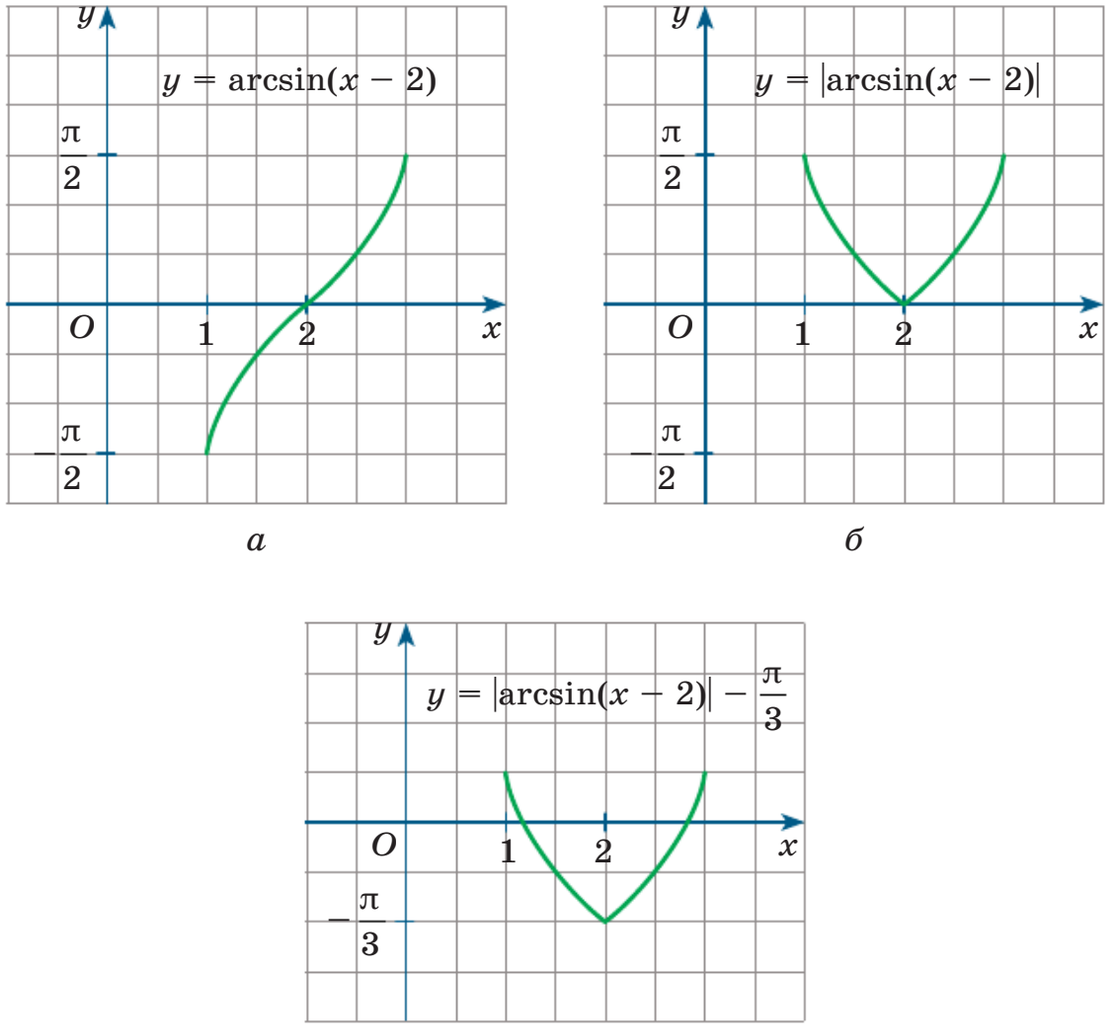


Рис. 117



а *б* *в*

Рис. 118

б) Построение осуществим в три этапа. Сначала построим график функции $y = \arcsin(x - 2)$ (рис. 118, *а*). Далее построим график функции $y = |\arcsin(x - 2)|$; для этого сохраним ветвь построенного графика, которая расположена выше оси абсцисс, а ту ветвь, которая расположена ниже оси абсцисс, отобразим симметрично относительно этой оси (рис. 118, *б*). И, наконец, опустим построенный на рисунке 118, *б* график вниз на $\frac{\pi}{3}$ единиц (2 клеточки). На рисунке 118, *в* изображён график функции $y = |\arcsin(x - 2)| - \frac{\pi}{3}$.

в) Учтём, во-первых, что здесь $|x + 1| \leqslant 1$, т. е. $-2 \leqslant x \leqslant 0$. Далее, поскольку $|x + 1| = x + 1$, если $x \geqslant -1$, и $|x + 1| = -(x + 1)$, если

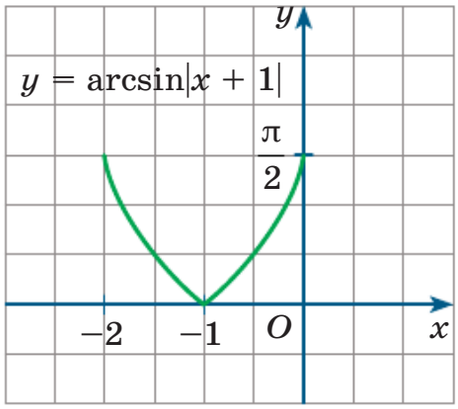


Рис. 119

$x \leqslant -1$, то получается, что речь идёт о построении графика кусочной функции

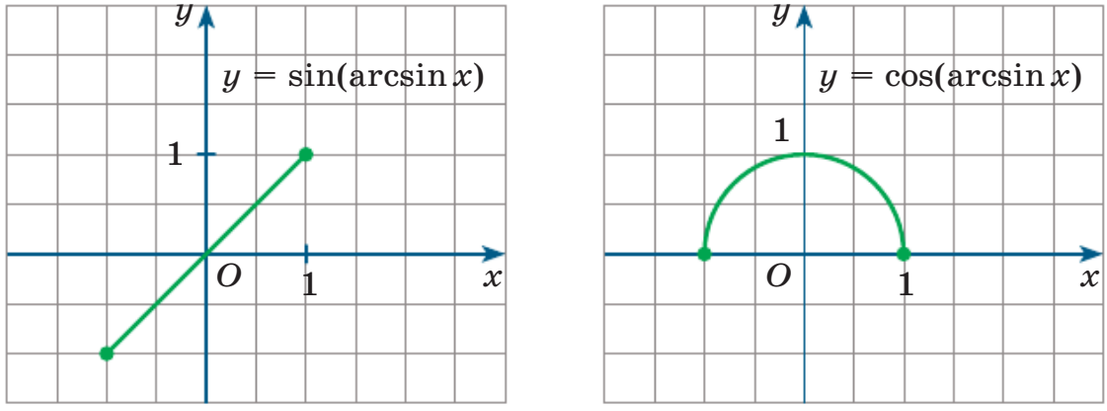
$$y = \begin{cases} \arcsin(x+1), & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -\arcsin(x+1), & -2 \leqslant x < -1. \end{cases}$$

График изображён на рисунке 119.

Пример 4* Построить график функции:
а) $y = \sin(\arcsin x)$; б) $y = \cos(\arcsin x)$.

Решение. а) Если $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то $\sin(\arcsin x) = x$. Значит, речь идёт о построении графика функции $y = x$, $x \in [-1; 1]$. График функции изображён на рисунке 120, *а*.

б) Заметим прежде всего, что, поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, справедливо неравенство $\cos(\arcsin x) \geqslant 0$.



а *б*

Рис. 120

Имеем:

$$y^2 = \cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2;\ y = \sqrt{1 - x^2}.$$

График функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ — полуокружность — изображён на рисунке 120, *б*.

Пример 5* Решить уравнение $3\arcsin x + \pi x - \pi = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $3\arcsin x = \pi(1 - x)$. Заметим, что функция $y = 3\arcsin x$ возрастающая, тогда как функция $y = \pi(1 - x)$ — убывающая. Значит, если у уравнения $3\arcsin x = \pi(1 - x)$ есть корень, то только один, и остаётся лишь его подобрать. Таким корнем служит число $\frac{1}{2}$.

Проверяйте: $3\arcsin\frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2};\ \pi\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 6* Решить неравенство $-0{,}2 < \sin t < 0{,}5$.

Решение. Построим математическую модель «Числовая окружность на координатной плоскости», проведём прямые $y = -0{,}2$ и $y = 0{,}5$, они пересекают окружность в точках K, L, M, N (рис. 121).

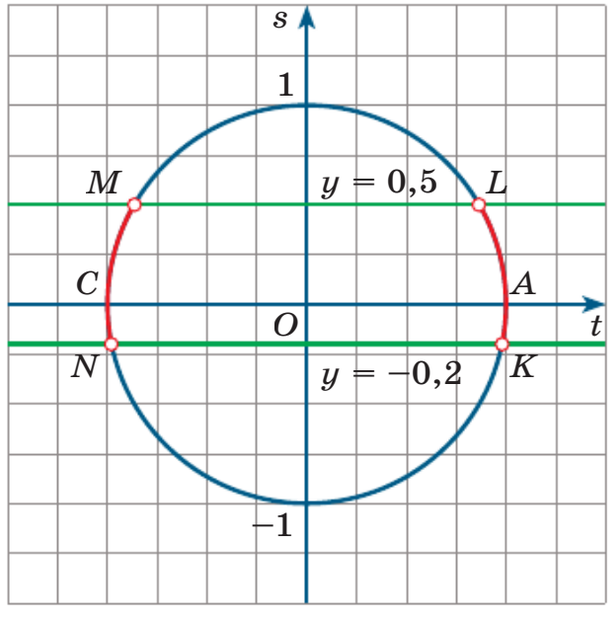


Рис. 121

Геометрическое решение данного неравенства — открытые дуги KL и MN. Точка L соответствует числу $\frac{\pi}{6}$, точка M — числу $\frac{5\pi}{6}$, точка K — числу $\arcsin(-0{,}2)$. Осталось разобраться с точкой N. Рассуждаем так: длина дуги AN равна $\pi + l$, где l — длина дуги CN. Поскольку дуги CN и AK равны, то $CN = \arccos 0{,}2$. Итак, точка N соответствует числу $\pi + \arcsin 0{,}2$. Теперь мы в состоянии записать решение данного неравенства:

$$-\arcsin 0{,}2 + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \pi + \arcsin 0{,}2 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\arcsin 0{,}2 + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \pi + \arcsin 0{,}2 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Упражнения

Вычислите.

16.1. а) $\arcsin 1$; в) $\arcsin \frac{1}{2}$; д) $\arcsin(-1)$;

б) $\arcsin 0$; г) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

16.2. а) $\cos(\arcsin 1)$; в) $\cos\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $\operatorname{tg}(\arcsin 0)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

16.3. а) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{7}\right)$; в) $\sin(\arcsin(-0{,}27))$;

б) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{7}\right)$; г) $\cos(\arcsin(-0{,}27))$.

16.4. а) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{8}\right)$; в) $\arcsin(\cos \pi)$; д) $\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

б) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{12}\right)$; г) $\arcsin\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)$; е) $\arcsin\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

16.5. Найдите область определения функции:

а) $y = \arcsin x$;
б) $y = \arcsin 0{,}5x$;
в) $y = \arcsin(3 - 2x)$;
г) $y = \arcsin(3x + 1)$;
д) $y = \arcsin(x^2 - 1)$;
е) $y = \arcsin(x^2 - 3)$.

16.6. Выясните, имеет ли смысл данное выражение:

а) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$;
б) $\arcsin 1{,}5$;
в) $\arcsin\frac{\pi}{3}$;
г) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;
д) $\arcsin\left(3 - \sqrt{20}\right)$;
е) $\arcsin\left(4 - \sqrt{20}\right)$.

16.7. Найдите область значений функции:

а) $y = 0{,}5\arcsin x$;
б) $y = -2\arcsin x$;
в) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{3}$;
г) $y = \pi - \arcsin x$;
д) $y = 2\arcsin(x - 1)$;
е) $y = -0{,}5\arcsin(x + 1)$.

16.8. Исследуйте на чётность функцию:

а) $y = \sin x + \arcsin x$;
б) $y = \cos x + \arcsin x$;
в) $y = \cos x + x\arcsin x$;
г) $y = \arcsin x^2 + \sin^2 x$;
д) $y = \arcsin x \cdot \operatorname{tg} x$;
е) $y = x - \arcsin x$.

Постройте график функции.

16.9. а) $y = \arcsin x$;
б) $y = -\arcsin x$;
в) $y = \arcsin(-x)$;
г) $y = -\arcsin(-x)$;
д) $y = \arcsin 2x$;
е) $y = -2\arcsin x$.

ИКТ **16.10.** а) $y = \arcsin x - \frac{\pi}{6}$;
б) $y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$;
в) $y = \arcsin(x + 1)$;
г) $y = \arcsin(x - 2) + \frac{\pi}{3}$;
д) $y = \arcsin\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$;
е) $y = -2\arcsin\left(\frac{x}{3} - 1\right)$.

16.11. а) $y = 2|\arcsin x| - \arcsin x$;
б) $y = \arcsin x + |\arcsin x + |\arcsin x||$;
в) $y = \left|\arcsin x - \frac{\pi}{3}\right|$;
г) $y = -\arcsin|x - 0{,}5|$.

16.12. Решите уравнение:
а) $4\arcsin^2 2x + \pi \arcsin 2x = 0$;
б) $12\arcsin^2 x - 4\pi \arcsin x - \pi^2 = 0$.

16.13. Постройте и прочитайте график функции

$$y = \begin{cases} \sqrt{x-1} + \dfrac{\pi}{2}, & x \geqslant 1, \\ \arcsin x, & -1 < x < 1, \\ \dfrac{\pi x}{2}, & x \leqslant -1. \end{cases}$$

16.14. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = p$ при различных значениях параметра p, если $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2, & x \geqslant 2, \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2 < x < 2, \\ -2x - 5, & x \leqslant -2? \end{cases}$

16.15. Вычислите:
а) $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$;
в) $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{12}{13}\right)\right)$;
б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$;
г) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\dfrac{7}{25}\right)$.

16.16. Решите уравнение:
а) $\dfrac{2}{\pi}\arcsin x = 5 - 4x$;
б) $\arcsin x = 3 - 2x - \dfrac{12}{\pi}x$.

Решите неравенство.

16.17. а) $8\arcsin^2 x + 2\pi \arcsin x - \pi^2 < 0$;
б) $18\arcsin^2 x + 3\pi \arcsin x \geqslant \pi^2$.

16.18. а) $\sin t < 0{,}4$;
в) $\sin t \geqslant \dfrac{2}{3}$;
б) $\sin t \geqslant -0{,}7$;
г) $\sin t < -\dfrac{1}{7}$.

16.19. а) $\dfrac{1}{3} < \sin t \leqslant \dfrac{6}{7}$;
б) $-\dfrac{6}{7} \leqslant \sin t < \dfrac{1}{3}$.

Упражнения для повторения

16.20. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t - 1} + \operatorname{tg}^2 t$;

б) $(\sin^2 3t + \cos^2 3t) + \operatorname{ctg}^2 t$;

в) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t}$;

г) $\dfrac{1 - \sin^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} - 1$;

д) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha - \sin^2 2\alpha$;

е) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} + 1$.

16.21. Найдите основной период функции:

а) $y = \cos\dfrac{2x}{3}$;

б) $y = \operatorname{tg}\dfrac{3x}{4}$;

в) $y = \sin\dfrac{4x}{5}$;

г) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{5x}{6}$.

16.22. Решите неравенство:

а) $x^2 - x - 20 > 0$;

б) $-x^2 + 2x + 15 \geqslant 0$;

в) $x^2 < 81$;

г) $x^2 > x$;

д) $\dfrac{2x - 3}{4 - x} \geqslant 0$;

е) $\dfrac{3 - x}{x} \leqslant 0$.

16.23. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 3, & \text{если } -6 \leqslant x < -1, \\ \dfrac{3}{x+2} - 5, & \text{если } -1 \leqslant x < 1, \\ 2x - 6, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

а) Постройте график функции $y = f(x)$.
б) Прочитайте график функции $y = f(x)$.
в) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $f(x) = p$ имеет единственное решение.
г) Найдите все значения x, для которых график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой $y = x - 1$.

§ 17. Функция $y = \arccos x$

Рассмотрим функцию $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ (рис. 122). Она монотонна (убывает), значит, обратима; для неё существует обратная функция, её обозначают $x = \arccos y$. Поменяв, как принято, x и y местами, пишут: $y = \arccos x$.

Итак, $\boldsymbol{y = \arccos x}$ (читают: *арккосинус* x) — это функция, обратная по отношению к функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

График функции $y = \arccos x$ получается из графика функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 123).

Какую информацию о функции $y = \arccos x$ мы можем получить, анализируя её график (см. рис. 123)? Во-первых, область определения функции — отрезок $[-1; 1]$, а область значений — отрезок $[0; \pi]$. Во-вторых, функция непрерывна и убывает на отрезке $[-1; 1]$. В-третьих, график функции не обладает симметрией ни относительно начала координат, ни относительно оси ординат, а потому $y = \arccos x$ — функция общего вида (ни чётная, ни нечётная).

Из сказанного выше следует, что записи $y = \arccos x$ и $x = \cos y$, $y \in [0; \pi]$, выражают одну и ту же взаимосвязь между x и y. Подставив в равенство $x = \cos y$ вместо y выражение $\arccos x$, получим: $x = \cos(\arccos x)$. Следовательно, для любого $x \in [-1; 1]$ имеем:

$$\cos(\arccos x) = x, \quad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi. \qquad (1)$$

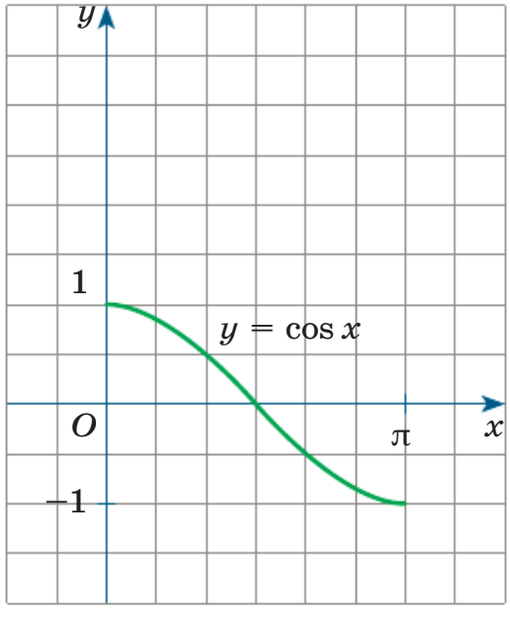


Рис. 122

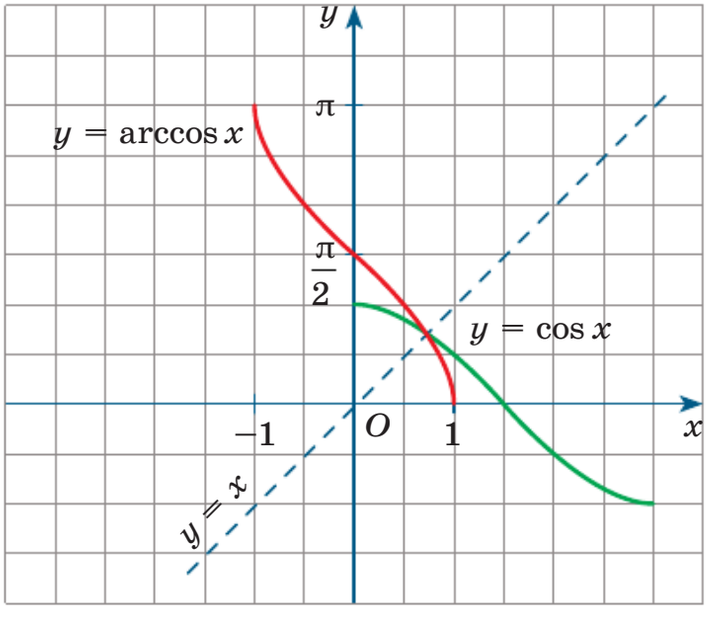


Рис. 123

Соотношения (1) дают возможность определить, что такое *арккосинус* конкретного числа.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то $\arccos a$ — это такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Итак,

$$\text{если } |a| \leqslant 1, \text{ то } \arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = a, \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 124, *а*, *б*.

Теорема. Для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \qquad (2)$$

Доказательство. Будем считать для определённости, что $a > 0$. Отметим $\arccos a$ на числовой окружности — это длина дуги AM; отметим $\arccos(-a)$ на числовой окружности — это длина дуги AP (рис. 125).

Дуги AM и PC симметричны относительно вертикального диаметра окружности, значит, длины этих дуг равны. Получаем:

$$\arccos a + \arccos(-a) = AM + AP = PC + AP = AC = \pi.$$

Итак, $\arccos a + \arccos(-a) = \pi$, откуда следует требуемое равенство

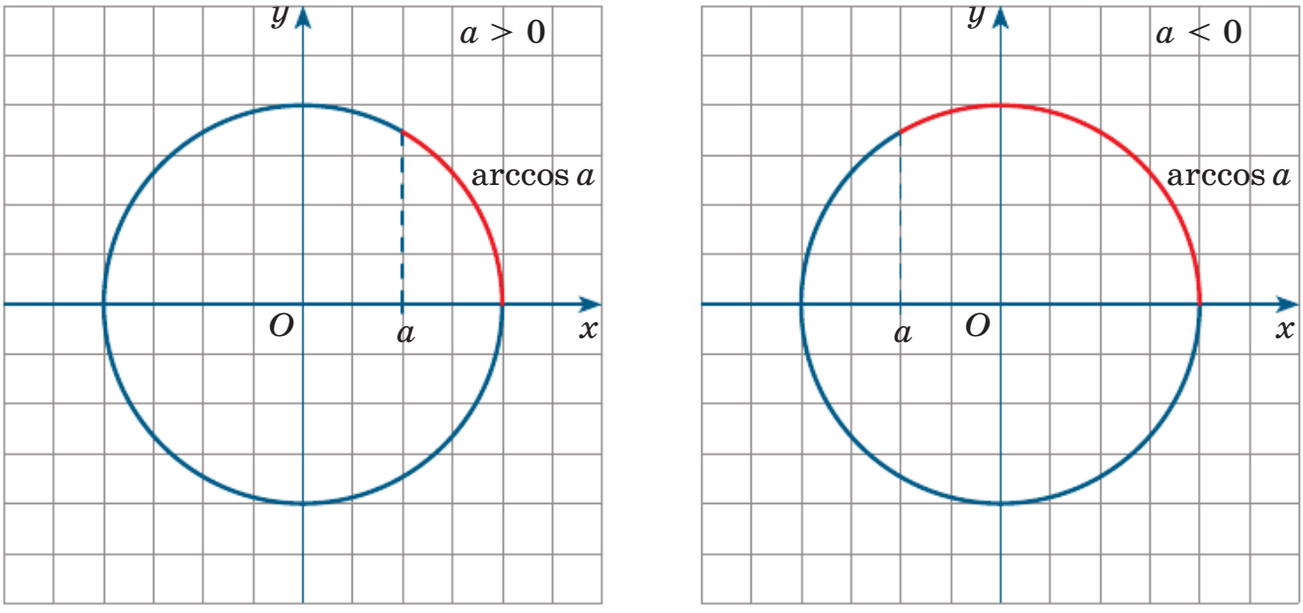
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Пример 1 Вычислить:

а) $\arccos 0$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. а) Пусть $\arccos 0 = t$. Тогда $\cos t = 0$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

б) Пусть $\arccos 1 = t$. Тогда $\cos t = 1$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\cos 0 = 1$ и $0 \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos 1 = 0$.



а *б*

Рис. 124

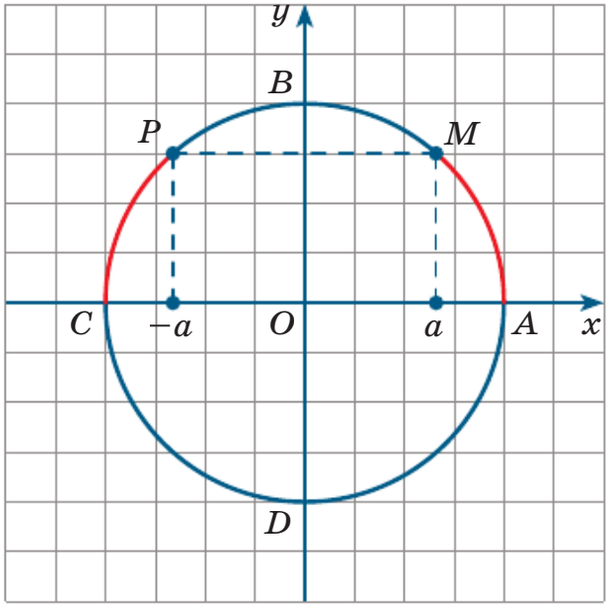


Рис. 125

в) Пусть $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = t$. Тогда $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

г) Здесь мы воспользуемся доказанной теоремой:

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{5\pi}{6}$.

В примере 1 показано, как вычислять значения арккосинуса. Весьма полезной в дальнейшем будет следующая таблица.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

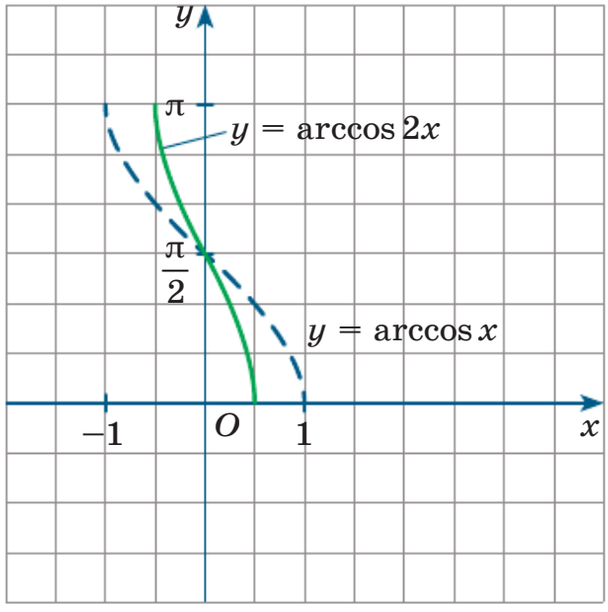


Рис. 126

Пример 2 Построить график функции $y = \arccos 2x$.

Решение. Построив график функции $y = \arccos x$ и осуществив его сжатие к оси Oy с коэффициентом 2, получим график функции $y = \arccos 2x$ (рис. 126).

Пример 3* Доказать тождество:

а) $\arccos\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\arccos\sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$, если $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

Решение. а) На отрезке $[0; 1]$ и $\arccos\sqrt{1-x^2}$, и $\arcsin x$ принимают все значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$. На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \cos t$ монотонна, т. е. из равенства $\cos t_1 = \cos t_2$ следует равенство $t_1 = t_2$. Воспользовавшись этим утверждением, возьмём косинус от обеих частей доказываемого тождества. Имеем:

$$\cos\left(\arccos\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2}; \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{(см. § 16)}.$$

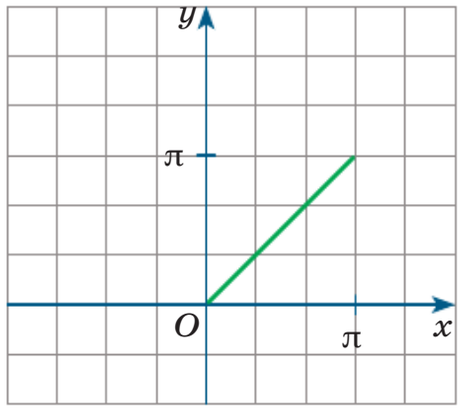
Получилось одно и то же выражение, значит, проверяемое тождество доказано.

б) Здесь рассуждаем так же, как в пункте «а», но следует учесть, что на отрезке $[-1; 0]$ $\arccos\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, а $\arcsin x \leqslant 0$, поэтому сделана поправка на знак правой части тождества. ■

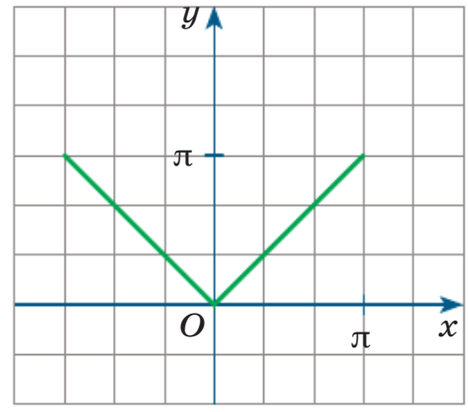
Пример 4* Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

Решение. Функция $y = \cos x$ — чётная и периодическая с основным периодом 2π. Значит, можно действовать так: построить график функции на отрезке $[0; \pi]$, отразить его симметрично относительно оси ординат — получим график функции на отрезке $[-\pi; \pi]$, длина которого равна основному периоду; и остаётся лишь воспользоваться периодичностью функции. Приступим.

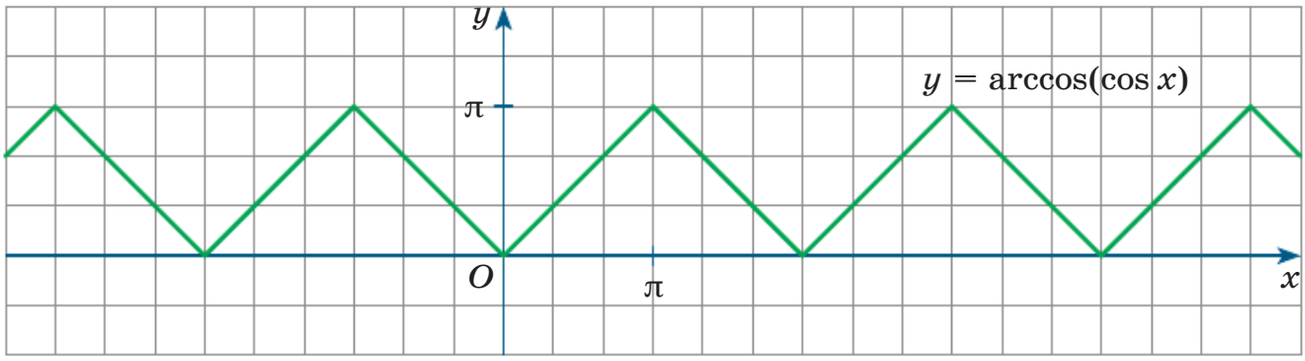
На отрезке $[0; \pi]$ имеем: $\arccos(\cos x) = x$, значит, речь идёт о построении графика функции $y = x$, $x \in [0; \pi]$; этот график построен на рисунке 127, *а*. Воспользовавшись отмеченной выше симметрией, по-



а



б



в

Рис. 127

строим график функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 127, *б*). И, наконец, воспользовавшись периодичностью заданной функции, построим требуемый график (рис. 127, *в*).

Упражнения

Вычислите.

17.1. а) $\arccos 0 - \arccos(-1)$; в) $\arccos\frac{1}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos 1 + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-1)$.

17.2. а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

б) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\operatorname{tg}(\arccos(-1))$.

17.3. а) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)$; в) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$; д) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\arccos(\cos 1)$; г) $\arccos(\sin\pi)$; е) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

17.4. Докажите тождество:
а) $\sin(\arccos x + \arccos(-x)) = 0$;
б) $\cos(\arcsin x + \arcsin(-x)) = 1$.

17.5. Найдите область определения функции:
а) $y = \arccos x$; г) $y = \arccos(x + 1)$;
б) $y = \arccos(-x)$; д) $y = \arccos(2x - 1)$;
в) $y = \arccos 0{,}5x$; е) $y = \arccos(3 - 2x)$.

17.6. Выясните, имеет ли смысл выражение:
а) $\arccos\sqrt{3}$; в) $\arccos\frac{1}{3}$; д) $\arccos\frac{\pi}{2}$;

б) $\arccos 0{,}3$; г) $\arccos\left(-\sqrt{2}\right)$; е) $\arccos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$.

17.7. Найдите область значений функции:

а) $y = 3\arccos x$;

б) $y = 0{,}5\arccos x$;

в) $y = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$;

г) $y = \pi - \arccos x$;

д) $y = 2\arccos x + \frac{\pi}{3}$;

е) $y = \frac{\pi}{4} - 1{,}5\arccos x$.

17.8. Исследуйте на чётность функцию:

а) $y = \arccos x^2$;

б) $y = \arccos(1 - x^2)$;

в) $y = \frac{\arccos x^4}{x^3}$;

г) $y = \arccos|x| + \frac{\pi}{2}$;

д) $y = -x\arccos|x|$;

е) $y = \frac{2x^3}{\arccos x}$.

Постройте график функции.

17.9. а) $y = \arccos(x - 1)$;

б) $y = \arccos x - \frac{\pi}{2}$;

в) $y = \arccos(x - 2) + \frac{\pi}{6}$;

г) $y = \arccos(x + 1) - \frac{\pi}{3}$.

ИКТ **17.10.** а) $y = 3\arccos 2x$;

б) $y = -2\arccos 0{,}5x$;

в) $y = \arccos\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}$;

г) $y = -3\arccos\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$.

17.11. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} \arccos(x + 1) - \frac{\pi}{2}, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \arcsin(x - 1), \text{ если } 0 < x \leqslant 2; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \arccos\frac{x}{2}, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2\arcsin x, \text{ если } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

Постройте график функции.

ИКТ **17.12.** а) $y = \left|\arccos x - \frac{2\pi}{3}\right|$;

б) $y = \left|2\arccos x - \frac{\pi}{2}\right|$;

в) $y = 2\arccos(|x| - 1)$;

г) $y = -\arccos|x - 1|$.

17.13. а) $y = \arccos x + \arccos(-x)$;

б) $y = \arccos\dfrac{1}{x} + \arccos\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.

17.14. Решите уравнение:

а) $6\arccos x - 2\pi x - \pi = 0$;

б) $\arcsin x + \arccos(1 - x) = \arcsin(-x)$.

17.15. Докажите тождество:

а) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1 - x^2}$, если $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

17.16. Вычислите:

а) $\sin\left(\arccos\dfrac{5}{13}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\dfrac{8}{25}\right)\right)$;

в) $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\dfrac{12}{13}\right)$.

Решите неравенство.

17.17. а) $3\arccos^2 x + 2\pi\arccos x - \pi^2 \geqslant 0$;

б) $18\arccos^2 x + 3\pi\arccos x - \pi^2 < 0$.

17.18. а) $\cos t < 0{,}4$;

б) $\cos t \geqslant -0{,}7$;

в) $\cos t \geqslant \dfrac{2}{3}$;

г) $\cos t < -\dfrac{1}{7}$.

17.19. а) $\dfrac{1}{3} < \cos t \leqslant \dfrac{6}{7}$;

б) $-\dfrac{6}{7} \leqslant \cos t < \dfrac{1}{3}$.

17.20. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \sin x > \dfrac{1}{7}, \\ \cos x < \dfrac{2}{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x < \dfrac{4}{5}, \\ \cos x > -0{,}9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x < -0{,}4, \\ \cos x < \dfrac{2}{3}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sin x > -\dfrac{1}{7}, \\ \cos x > -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

17.21. Найдите область определения функции:

а) $y = \arcsin\dfrac{2x-1}{x+3}$;

б) $y = \arccos\dfrac{x}{3} + \sqrt{\sin x - \dfrac{1}{2}}$;

в) $y = \arccos\dfrac{5x+2}{2-x}$;

г) $y = \arcsin\dfrac{x}{4} - \sqrt{\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

17.22. Постройте график функции:

а) $y = \arcsin x + \arccos x$;

б) $y = x(\text{arccin } x + \arccos x)$;

в) $y = \dfrac{x^2(\arcsin x + \arccos x)}{x}$;

г) $y = \dfrac{\arccos(-x) + \arccos x}{x}$;

д) $y = 2\arcsin x + 3\arccos x$;

е) $y = 3\arcsin x - 2\arccos x$.

Упражнения для повторения

17.23. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{8-2\sqrt{7}} - \sqrt{7}$;

б) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

в) $\sqrt{19-4\sqrt{15}} \cdot \sqrt{19+4\sqrt{15}}$;

г) $\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$;

д) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

е) $\sqrt{18-2\sqrt{17}} \cdot \sqrt{18+2\sqrt{17}}$.

17.24. Решите уравнение:

а) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$;

б) $x - 6\sqrt{x} - 7 = 0$;

в) $10\sqrt{x-1} - \dfrac{3}{\sqrt{x-1}} = 7$;

г) $4x^4 + 35x^2 - 9 = 0$;

д) $x - 5\sqrt{x} - 6 = 0$;

е) $2\sqrt{x+2} - \dfrac{3}{\sqrt{x+2}} = 5$.

17.25. В треугольник со сторонами a, b и c вписана окружность. Найдите длины отрезков, на которые точки касания делят стороны треугольника, если:

а) $a = 11$, $b = 13$, $c = 20$;

б) $a = 9$, $b = 11$, $c = 14$.

17.26. а) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $x^2 - 6|x| + 5p = 0$ имеет два различных действительных корня.

б) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $x^2 - 6|x| + 5p = 0$ имеет более двух различных действительных корней.

§ 18. Функция $y = \operatorname{arctg} x$

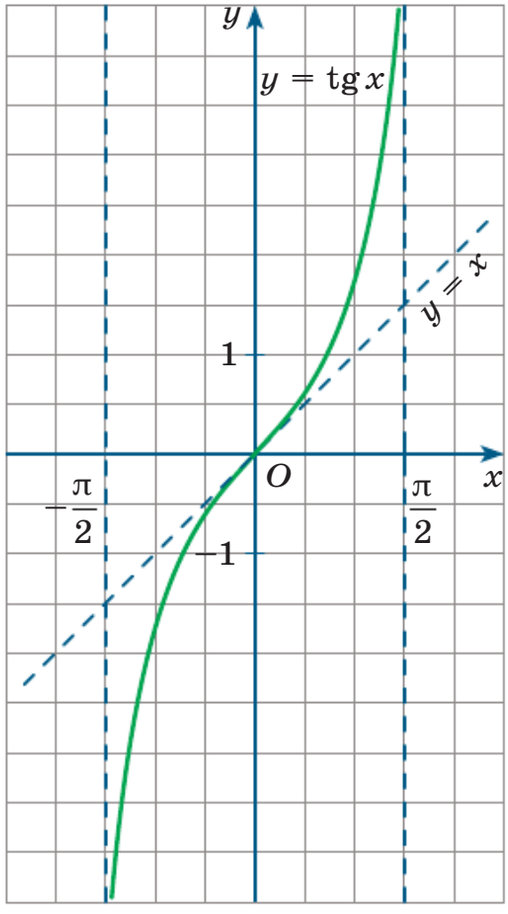


Рис. 128

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 128). Она монотонна (возрастает), значит, обратима; для неё существует обратная функция, её обозначают $x = \operatorname{arctg} y$.

Поменяв, как принято, x и y местами, пишут: $y = \operatorname{arctg} x$.

Итак, $\boldsymbol{y = \operatorname{arctg} x}$ (читают: *арктангенс x*) — это функция, обратная по отношению к функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 129).

Какую информацию о функции $y = \operatorname{arctg} x$ мы можем получить, анализируя её график (см. рис. 129)? Во-первых, область определения функции — вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$, а область значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Во-вторых, функция непрерывна и возрастает на всей числовой прямой. В-третьих, график функции симметричен относительно начала координат, а потому $y = \operatorname{arctg} x$ — нечётная функция, т. е. для неё выполняется соотношение

$$\boldsymbol{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.} \qquad (1)$$

Из сказанного выше следует, что записи $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, выражают одну и ту же взаимосвязь между x и y. Под-

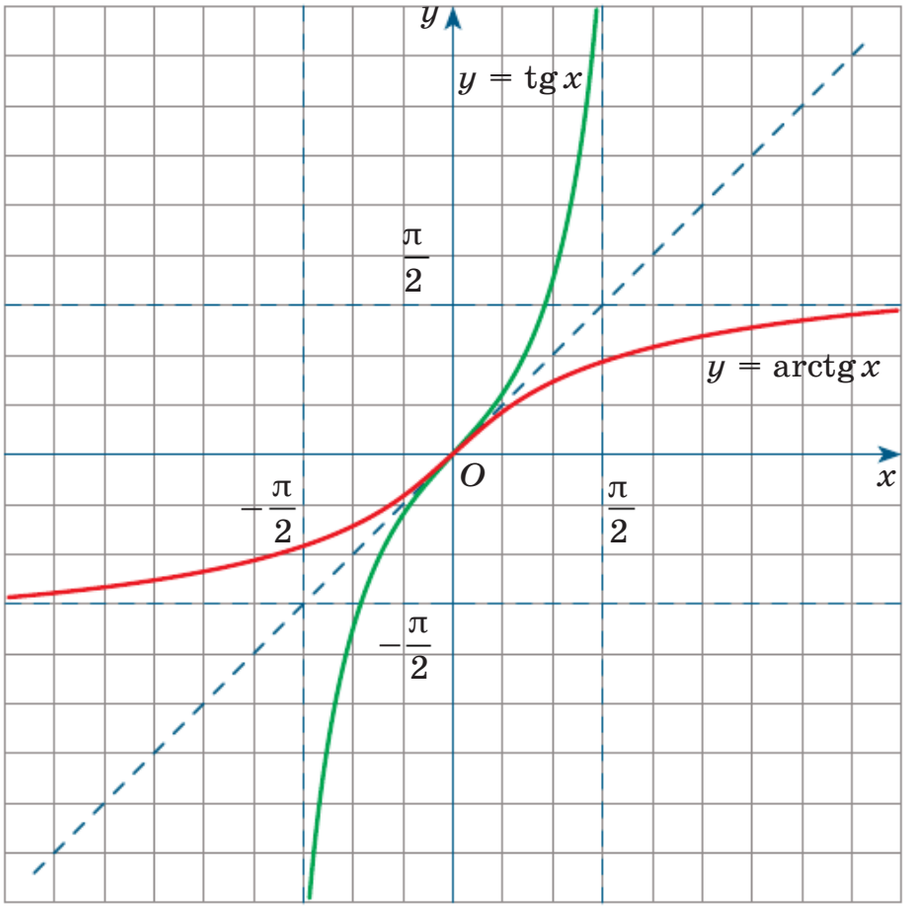


Рис. 129

ставив в равенство $x = \operatorname{tg} y$ вместо y выражение $\operatorname{arctg} x$, получим: $x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$. Следовательно, для любого x имеем:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Соотношения (2) дают возможность определить, что такое *арктангенс* конкретного числа.

Определение. Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ $\operatorname{arctg} a$ — это такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Итак,

$$\operatorname{arctg} a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} t = a, \\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Пример 1 Вычислить:
а) $\operatorname{arctg} 0$; б) $\operatorname{arctg} 1$; в) $\operatorname{arctg}(-1)$.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arctg} 0 = t$. Тогда $\operatorname{tg} t = 0$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $t = 0$, поскольку $\operatorname{tg} 0 = 0$ и $0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

б) Пусть $\operatorname{arctg} 1 = t$. Тогда $\operatorname{tg} t = 1$ и $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $t = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

в) $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) 0; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{4}$.

В примере 1 показано, как вычислять значения арктангенса. Полезной в дальнейшем будет следующая таблица.

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Пример 2 Решить уравнение $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$.

Решение. Построим график линейной функции $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$. Это прямая линия, для построения которой достаточно найти две точки. Из уравнения $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$ получаем: если $x = 0$, то $y = \frac{\pi}{2}$; если $y = 0$, то $x = 2$. Через точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $(2; 0)$ проводим прямую — это и есть график функции $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$ (рис. 130).

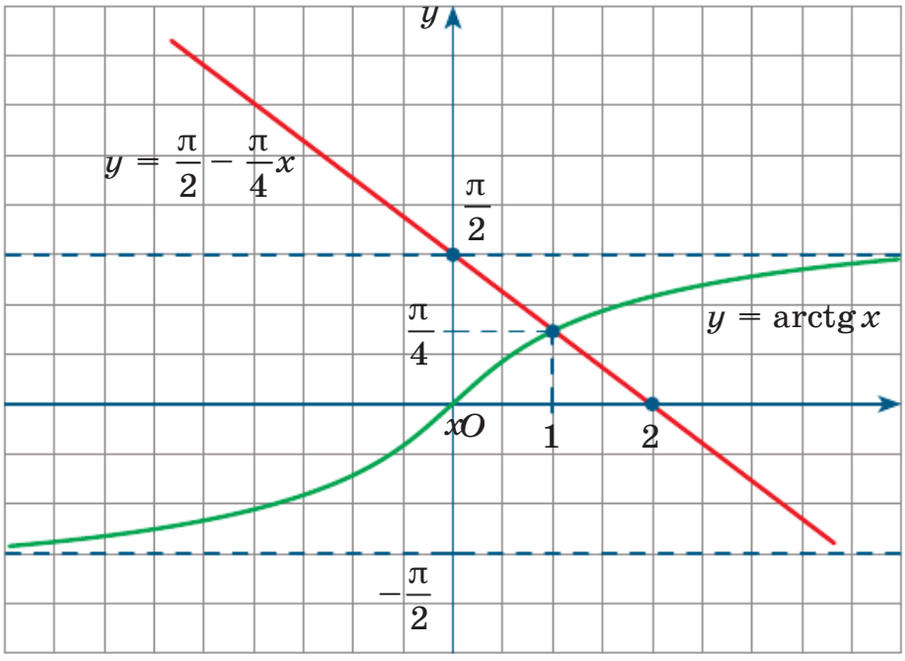


Рис. 130

В той же системе координат построим график функции $y = \operatorname{arctg} x$. Поскольку функция $\operatorname{arctg} x$ возрастает, а функция $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$ убывает, их графики пересекаются только в одной точке (см. рис. 130). Абсцисса этой точки, вероятно, равна 1. Проверим: для функции $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = 1$ получаем $y = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, а для функции $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$ получаем $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, оба графика действительно имеют одну общую точку $\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$, а потому заданное уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 3* Доказать, что если $-1 < x < 1$, то

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Решение. На интервале $(-1; 1)$ функция $y = \operatorname{tg} t$ монотонна (возрастает), поэтому из равенства $\operatorname{tg} t_1 = \operatorname{tg} t_2$ следует равенство $t_1 = t_2$.

Воспользуемся этим утверждением. Имеем:

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Как видите, получилось одно и то же выражение, значит,

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Упражнения

Вычислите.

18.1. а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$;

б) $3\arcsin 0{,}5 + 4\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

18.2. а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1{,}4)$; в) $\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$; д) $\cos(\operatorname{arctg}(-1))$;

б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right)\right)$; г) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; е) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$.

18.3. Исследуйте на чётность функцию:

а) $y = \sin^2 x - x\operatorname{arctg} x$;

б) $y = \arcsin x + \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$;

г) $y = \arccos x - \operatorname{arctg} x^2$;

д) $y = \cos x + \operatorname{arctg}|x|$;

е) $y = \operatorname{ctg} x + \operatorname{arctg} x$.

18.4. Постройте график функции.

а) $y = -\operatorname{arctg} x$; в) $y = \operatorname{arctg}(x-1)$; д) $y = \operatorname{arctg} 2x$;

б) $y = -\operatorname{arctg}(-x)$; г) $y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}$; е) $y = -2\operatorname{arctg} x$.

ИКТ **18.5.** а) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}(x-1)$; г) $y = -3\operatorname{arctg}(x+2)$;

б) $y = -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x - \frac{\pi}{3}$; д) $y = 4\operatorname{arctg}3x + \frac{\pi}{2}$;

в) $y = \operatorname{arctg}2(x+1) - \frac{\pi}{6}$; е) $y = -2\operatorname{arctg}(x-2) + \frac{\pi}{2}$.

ИКТ **18.6.** а) $y = |\operatorname{arctg}x|$; в) $y = \left|\operatorname{arctg}x + \frac{\pi}{6}\right|$;

б) $y = \operatorname{arctg}(|x| - 1)$; г) $y = -2\operatorname{arctg}|2x|$.

18.7. Докажите тождество:

а) $\operatorname{arctg}x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, если $x \geqslant 0$;

б) $\operatorname{arctg}x = -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, если $x \leqslant 0$.

18.8. а) Решите уравнение $4\operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 3) = \pi$;
б) решите неравенство $4\operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 3) \leqslant \pi$.

18.9. Решите уравнение $\arccos x = \operatorname{arctg}x$.

18.10. Вычислите:

а) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$; в) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$;

б) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{15}{8}\right)\right)$; г) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{24}{7}\right)$.

Решите неравенство.

18.11. а) $\operatorname{tg}x \leqslant 2$; в) $\operatorname{tg}x < -3$;

б) $\operatorname{tg}x > \frac{1}{2}$; г) $\operatorname{tg}x \geqslant -2$.

18.12. а) $18\operatorname{arctg}^2 x - 3\pi\operatorname{arctg}x < \pi^2$;
б) $\operatorname{arctg}^2 x + 2\operatorname{arctg}x - 3 \geqslant 0$.

Упражнения для повторения

18.13. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2y^2 - 6xy = -5, \\ 3x + 3y = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2y^2 - 5xy = -2, \\ x - y = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{4y}{x} = 3, \\ x - 3y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{5y}{x} = -6, \\ 2x + 7y = 6. \end{cases}$

18.14. Решите уравнение:

а) $x^2 + |x + 3| - 10 = 0$; в) $x^2 - |3x + 2| + x = 0$;

б) $|x^2 - 1| - 2x = 0$; г) $|x^2 - 3| + 2x + 1 = 0$.

18.15. Постройте график функции $y = -2\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$.

18.16. а) В летнем лагере отдыхает 148 детей. На каждого ребёнка полагается 30 г сахара в день. Хватит ли на неделю на всех детей 6 мешков сахара, если в одном мешке его 5 кг?

б) В школьную библиотеку привезли 30 пачек новых учебников для 10 класса. Учебники упакованы в пачки, по 25 книг в каждой. В книжном стеллаже 8 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Поместятся ли все новые учебники на четырёх стеллажах?

§ 19. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$ (рис. 131). Она монотонна (убывает), значит, обратима; для неё существует обратная функция, её обозначают $x = \operatorname{arcctg} y$. Поменяв, как принято, x и y местами, пишут: $y = \operatorname{arcctg} x$.

Итак, $\boldsymbol{y = \operatorname{arcctg} x}$ (читают: *арккотангенс* x) — это функция, обратная по отношению к функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 132).

Какую информацию о функции $y = \operatorname{arcctg} x$ мы можем получить, анализируя её график (см. рис. 132)? Во-первых, область определения

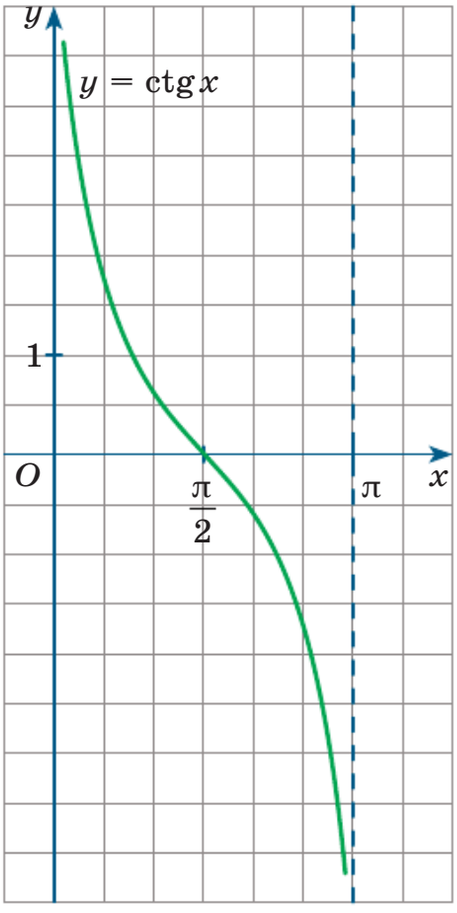


Рис. 131

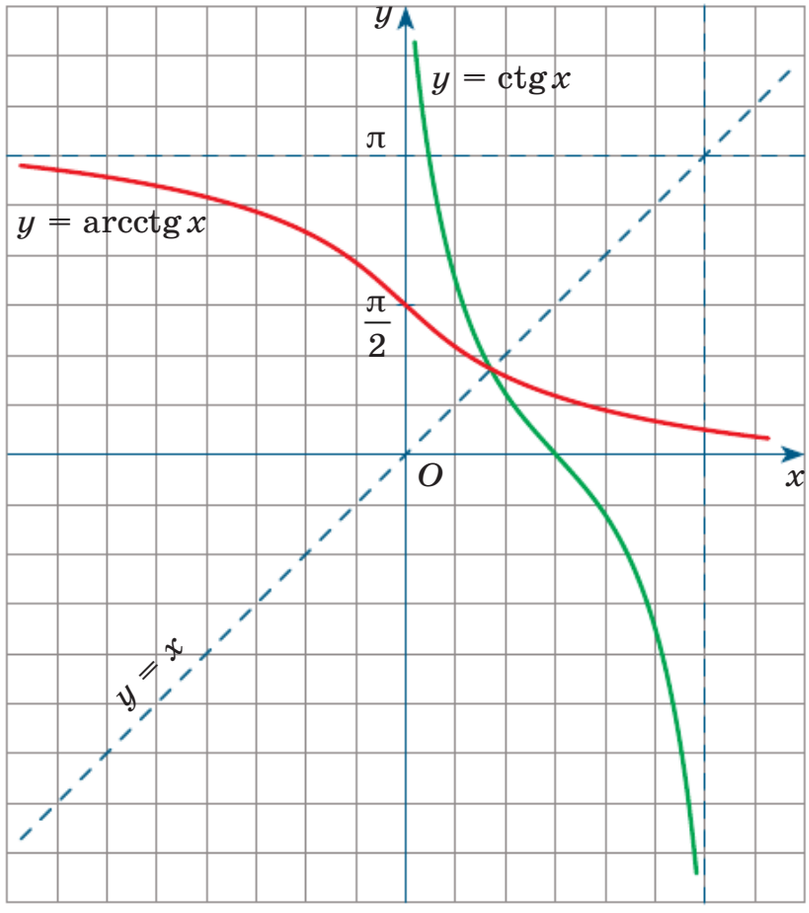


Рис. 132

функции — вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$, а область значений — интервал $(0; \pi)$. Во-вторых, функция непрерывна и убывает на всей числовой прямой. В-третьих, график функции не обладает симметрией ни относительно начала координат, ни относительно оси ординат, а потому $y = \operatorname{arcctg} x$ — функция общего вида (ни чётная, ни нечётная).

Из сказанного выше следует, что записи $y = \operatorname{arcctg} x$ и $x = \operatorname{ctg} y$, $y \in (0; \pi)$, выражают одну и ту же взаимосвязь между x и y. Подставив в равенство $x = \operatorname{ctg} y$ вместо y выражение $\operatorname{arcctg} x$, получим: $x = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$. Следовательно, для любого x имеем:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad 0 < \operatorname{arctg} x < \pi. \qquad (1)$$

Соотношения (1) дают возможность определить, что такое *арккотангенс* конкретного числа.

Определение. Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ $\operatorname{arcctg} a$ — это такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

Итак,

$$\operatorname{arcctg} a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} t = a, \\ 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Для арккотангенса имеет место соотношение, аналогичное соответствующему соотношению для арккосинуса:

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$$

Для обоснования этой формулы можно воспользоваться симметрией графика функции $y = \operatorname{arcctg} x$ относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 133).

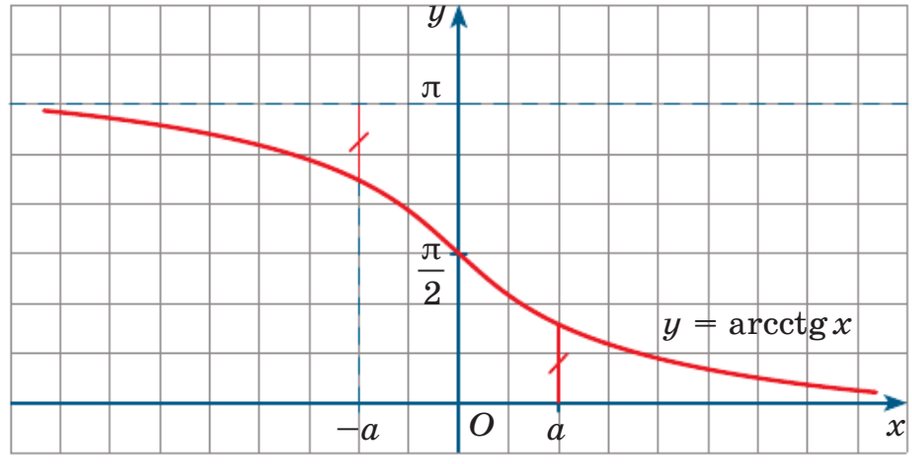


Рис. 133

Упражнения

19.1. Вычислите.

а) $\operatorname{acrctg} 1$;

б) $\operatorname{arcctg}(-1)$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

г) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$;

д) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

е) $\operatorname{arcctg} 0$.

19.2. а) $\operatorname{arcctg}(-1) + \operatorname{arcctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1)$;

б) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arcsin 1$;

в) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19.3. Найдите область определения функции:

а) $y = \arccos x + \operatorname{arcctg} x$;

б) $y = \arcsin x + \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$;

в) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} + \arccos(2x - 1)$;

г) $y = \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} x$;

д) $y = \arccos\frac{1}{x} + \operatorname{arcctg} 2x$;

е) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{-x}} + \arcsin(x^2 - 1)$.

19.4. Постройте график функции.

а) $y = -\operatorname{arcctg} x$;

б) $y = \operatorname{arcctg}(-x)$;

в) $y = \operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{4}$;

г) $y = \operatorname{arcctg}(x + 2)$;

д) $y = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

е) $y = 2\operatorname{arcctg} x$.

19.5. а) $y = \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x)$; б) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x} + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{x}\right)$.

19.6. Докажите тождество:

а) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, если $x > 0$;

б) $\operatorname{arcctg} x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, если $x < 0$.

19.7. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{7}\right)$;

б) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{12}\right)\right)$;

г) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{12}{35}\right)$.

Решите неравенство.

19.8. а) $\operatorname{ctg} x \leqslant 2$; в) $\operatorname{ctg} x < -3$;

б) $\operatorname{ctg} x > \frac{1}{2}$; г) $\operatorname{ctg} x \geqslant -2$.

19.9. а) $16\pi \operatorname{arcctg} x \geqslant 16\operatorname{arcctg}^2 x + 3\pi^2$;

б) $3\operatorname{arcctg}^2 x + \pi \operatorname{arcctg} x > 6\operatorname{arcctg} x + 2\pi$.

Постройте график функции.

19.10. а) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$;

б) $y = \operatorname{arcctg}(-x) - \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \dfrac{x^2(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x)}{x}$;

г) $y = \dfrac{\operatorname{arcctg}(-x) + \operatorname{arcctg} x}{x(\arcsin x + \arccos x)}$;

д) $y = 3\operatorname{arctg} x + 2\operatorname{arcctg} x$;

е) $y = 7\operatorname{arctg} x - 4\operatorname{arcctg} x$.

19.11. а) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$; в) $y = \arcsin(\sin x)$;

б) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$; г) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x)$.

Упражнения для повторения

19.12. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^3 \cdot (2a^{-2}b^{-3})^5}{4a^4 \cdot (2ab^{-4})^3}$; г) $\dfrac{(3a^{-4}b^{-3})^2 \cdot 8a^3}{27a^{-5}(2a^3b^4)^3}$;

б) $\dfrac{15a^3 \cdot (3a^{-3}b^4)^5}{(3a)^2 \cdot (25a^{-4}b^5)^2}$; д) $\dfrac{a^5 \cdot (5a^3b^2)^5}{(2a^2b^3)^{-3} \cdot 4a^3}$;

в) $\dfrac{7a^6b \cdot (4a^{-2}b^{-3})^4}{(7a^{-2}b^{-3})^2 \cdot 14a^2}$; е) $\dfrac{(3a^4b^2)^{-7} \cdot (2a^2b)^6}{81a^3(4a^{-3}b^4)^2}$.

19.13. а) К 40%-ному раствору соли добавили 300 г воды и получили 10%-ный раствор. Найдите массу первоначального раствора соли.

б) Какое количество воды надо добавить к 3 л раствора, содержащего 25 % соли, чтобы получить 15%-ный раствор соли?

19.14. Решите уравнение:

а) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 14 = 0$; в) $x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0$;

б) $x^3 - \left(2\sqrt{2} + 1\right)x^2 + 8 = 0$; г) $x^3 - \left(\sqrt{3} + 1\right)x^2 + 3 = 0$.

19.15. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{9 - x^2} \cdot \operatorname{tg} x$; б) $y = \sqrt{16 - x^2} \cdot \operatorname{ctg} x$.

§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$

В § 4 мы уже решили некоторые уравнения вида $\cos t = a$. Так, в примере 3 из этого параграфа мы видели, что решения уравнения $\cos t = 0$ имеют вид $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, решения уравнения $\cos t = 1$ имеют вид $t = 2\pi n$, решения уравнения $\cos t = -1$ имеют вид $t = \pi + 2\pi n$. А в примере 5 из § 4 мы для уравнения $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получили такой ответ: $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$. Напомним, что во всех упомянутых решениях подразумевается, что параметр n принимает любые целочисленные значения: $n \in \boldsymbol{Z}$. В настоящем параграфе мы обсудим, как обстоит дело с решением уравнения $\cos t = a$ для произвольного значения a.

Если $|a| > 1$, то, поскольку $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$, уравнение $\cos t = a$ не имеет решений.

Если $|a| = 1$, т. е. $a = \pm 1$, то, как решить соответствующие уравнения ($\cos t = 1$, $\cos t = -1$), мы уже напомнили выше.

Пусть $|a| < 1$. По определению $\cos t$ — это абсцисса той точки числовой окружности, которая соответствует числу t. На числовой окружности есть две точки — M и P, абсциссы которых равны a. Эти точки симметричны относительно оси абсцисс, а потому дуги AM и PA равны (рис. 134). Точка M соответствует числу $\arccos a$, а значит, и всем числам вида $\arccos a + 2\pi n$. Точка P соответствует *числу* $-\arccos a$, а значит, и всем числам вида $-\arccos a + 2\pi n$.

Итак,

если $\boldsymbol{|a| < 1}$, то уравнение $\boldsymbol{\cos t = a}$ имеет следующие решения:
$$\boldsymbol{t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.}$$

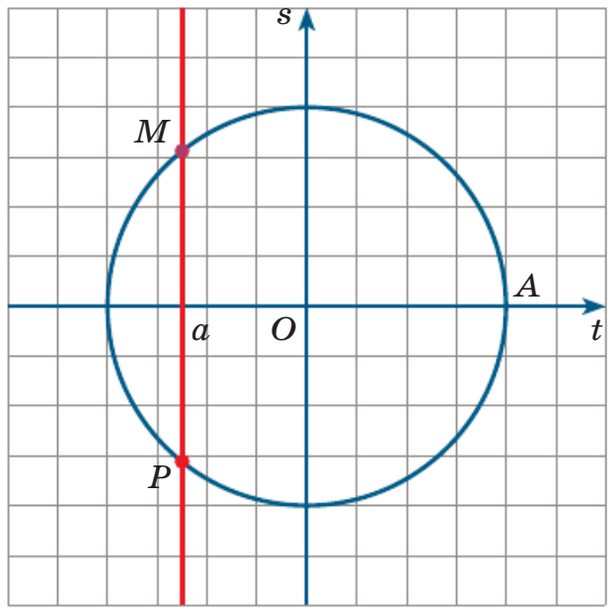


Рис. 134

В § 9 мы отметили, что, говоря о тригонометрических функциях $s = \cos t$, $s = \sin t$, $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$, мы будем использовать более привычные обозначения $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Но если для рассуждений нам нужно будет использовать числовую окружность, аргумент по-прежнему будем обозначать буквой t. Для решения уравнения $\cos t = a$, $|a| < 1$, мы прибегли к помощи числовой окружности, потому-то аргумент и обозначили буквой t. В дальнейшем мы сможем решать соответствующие уравнения по готовой формуле без использования числовой окружности, поэтому вправе вернуться к обозначению аргумента буквой x.

Пример 1 Решить уравнение:

а) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x = -0{,}6$; г) $\cos x = \sqrt{2}$.

Решение. а) Имеем: $x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$.

б) Имеем: $x = \pm\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n$. Вычислим значение арккосинуса: $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n.$$

в) Имеем: $x = \pm\arccos(-0{,}6) + 2\pi n$. Указать точное значение арккосинуса в данном случае мы не сможем, поэтому запись решений уравнения придётся оставить в полученном виде.

г) Поскольку $\sqrt{2} > 1$, уравнение $\cos x = \sqrt{2}$ не имеет решений.

Ответ: а) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = \pm\arccos(-0{,}6) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\varnothing$.

Пример 2 Решить уравнение:

а) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) Имеем:

$$3x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n =$$

$$= \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Разделив обе части соотношения $3x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ почленно на 3, получим: $x = \pm\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$.

б) Имеем: $2x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Рассмотрим полученное соотношение $2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Оно сводится к двум соотношениям:

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n;$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Из первого соотношения получаем: $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Из второго соотношения получаем: $2x = 2\pi n$, $x = \pi n$.

Ответ: а) $x = \pm\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3 Найти те корни уравнения $\cos x = 0{,}5$, которые принадлежат указанному промежутку: а) $[0;\ 2\pi]$; б) $\left[-4\pi;\ -\frac{\pi}{3}\right]$; в) $(1;\ 13)$.

Решение. Имеем: $x = \pm\arccos 0{,}5 + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

а) Нам нужно из найденного бесконечного множества корней заданного уравнения выбрать те, которые принадлежат отрезку $[0;\ 2\pi]$. Поступим так: будем придавать параметру n последовательно значения 0, 1, 2, 3, ..., −1, −2, −3, ... и выяснять, попадает ли соответствующее значение x в заданный промежуток. Если попадает — включаем в ответ, если нет — отбрасываем.

1) $n = 0$. Подставив это значение в формулу решений, получим $x = \pm\frac{\pi}{3}$. Смотрите: $\frac{\pi}{3} \in [0;\ 2\pi]$, а $-\frac{\pi}{3} \notin [0;\ 2\pi]$; значит, $\frac{\pi}{3}$ включаем в ответ, а $-\frac{\pi}{3}$ не берём.

2) $n = 1$. Подставив это значение в формулу решений, получим $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi$. Значит, либо $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$, либо $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$. Смотрите: $\frac{7\pi}{3} \notin [0;\ 2\pi]$, поскольку $\frac{7\pi}{3} > 2\pi$, а $\frac{5\pi}{3} \in [0;\ 2\pi]$; значит, $\frac{5\pi}{3}$ включаем в ответ, а $\frac{7\pi}{3}$ не берём.

3) $n = 2$, тогда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 4\pi$. Оба эти значения не принадлежат отрезку $[0;\ 2\pi]$. И тем более не будут принадлежать отрезку $[0;\ 2\pi]$ те значения x, которые получаются при $n = 3$, 4, 5 и т. д.

4) $n = -1$. Подставив это значение в формулу решений, получим $x = \pm\frac{\pi}{3} - 2\pi$. Оба эти значения не принадлежат отрезку $[0;\ 2\pi]$. И тем

более не будут принадлежать отрезку $[0; 2\pi]$ те значения x, которые получаются при $n = -2, -3, -4$ и т. д.

Итак, на отрезке $[0; 2\pi]$ заданное уравнение имеет два корня: $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

б) Нам нужно из серии $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ выбрать те значения x, которые принадлежат отрезку $\left[-4\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$. Как и в пункте «а», применим способ «перебора по параметру».

1) $n = 0$. Подставив это значение в формулу решений, получим $x = \pm\frac{\pi}{3}$. Из этих двух значений отрезку $\left[-4\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$ принадлежит только $x = -\frac{\pi}{3}$.

2) $n = 1$. Подставив это значение в формулу решений, получим $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi$. Из этих двух значений ни одно не принадлежит отрезку $\left[-4\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$. И тем более не будут принадлежать отрезку $\left[-4\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$ те значения x, которые получаются при $n = 2, 3, 4$ и т. д.

3) $n = -1$. Подставив это значение в формулу решений, получим $x = \pm\frac{\pi}{3} - 2\pi$, т. е. либо $x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$, либо $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$. Оба эти значения $\left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}\right)$ принадлежат отрезку $\left[-4\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$.

4) $n = -2$. Подставив это значение в формулу решений, получим $x = \pm\frac{\pi}{3} - 4\pi$, т. е. либо $x = \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$, либо $x = -\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{13\pi}{3}$. Значение $x = -\frac{11\pi}{3}$ принадлежит отрезку $\left[-4\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$, а $x = -\frac{13\pi}{3}$ — нет. И тем более не будут принадлежать отрезку $\left[-4\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$ те значения x, которые получаются при $n = -3, -4, -5$ и т. д.

Итак, на отрезке $\left[-4\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$ заданное уравнение имеет четыре корня: $-\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{11\pi}{3}$.

в) Нам нужно из серии $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ выбрать те значения x, которые принадлежат интервалу (1; 13). Воспользуемся вычислениями, сделанными в пунктах «а» и «б».

1) $n = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{3}$. Понятно, что $-\frac{\pi}{3} \notin (1; 13)$, а вот $\frac{\pi}{3} \in (1; 13)$. Почему? Потому что $\frac{\pi}{3} > 1$ и уж, конечно, $\frac{\pi}{3} < 13$. Значит, выбираем одно значение: $\frac{\pi}{3}$.

2) $n = 1$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = \frac{7\pi}{3}$. Оба эти значения принадлежат интервалу (1; 13).

3) $n = 2$. Подставив это значение в формулу решений$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, получим: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 4\pi$. Значит, либо $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$, либо $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}$. А теперь смотрите: $\frac{\pi}{3} > 1$, $\frac{13\pi}{3} > 13$, значит, $\frac{13\pi}{3} \notin (1; 13)$. Теперь оценим $\frac{11\pi}{3}$. Имеем:

$$\pi < 3{,}3, \quad \frac{11\pi}{3} < \frac{11 \cdot 3{,}3}{3} = 11 \cdot 1{,}1 = 12{,}1 < 13.$$

Это значит, что $\frac{11\pi}{3} \in (1; 13)$.

4) При $n = 3$ получаем $x = \pm\frac{\pi}{3} + 6\pi$. Оба эти значения явно больше, чем 13, их не берём, как и те значения, которые получаются при $n = 4, 5, 6$ и т. д.

5) При $n = -1, -2, -3$ и т. д. формула $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ приводит к отрицательным значениям x, которые, разумеется, не принадлежат интервалу $(1; 13)$.

Подведём итоги. На интервале $(1; 13)$ заданное уравнение имеет четыре корня: $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{11\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$.

Пример 4 Решить уравнение $\sin 5x + \sin x = 2 + \cos^2 x$.

Решение. Обратим внимание на то, что $\sin 5x + \sin x \leqslant 2$, тогда как $2 + \cos^2 x \geqslant 2$. Значит, равенство левой и правой частей заданного уравнения возможно тогда и только тогда, когда $\sin 5x + \sin x = 2$ и $2 + \cos^2 x = 2$. А это, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три равенства: $\sin 5x = 1$, $\sin x = 1$, $\cos x = 0$. Иными словами, речь идёт о системе уравнений $\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \sin x = 1, \\ \cos x = 0. \end{cases}$

Нужно найти те значения x, которые удовлетворяют всем трём уравнениям системы.

Самое простое уравнение в этой системе — второе: $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Нам повезло: при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $\sin 5x = 1$, и $\cos x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

Решите уравнение.

20.1. а) $\cos x = \frac{1}{3}$; в) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

20.2. а) $\cos 4x = 0$;

б) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$;

д) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$;

е) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

20.3. а) $(2\cos x + 1)\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$;

б) $\cos x(\cos x - 1) = 0$;

в) $\left(\cos x + \sqrt{2}\right)(3\cos x - 1) = 0$;

г) $(\cos x + 1)\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right) = 0$;

д) $\cos x(2\cos x - 1) = 0$;

е) $(4\cos x + 1)\left(\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$.

Найдите корни заданного уравнения на заданном промежутке.

20.4. а) $\cos x - 0{,}5 = 0$, $x \in [0; 2\pi]$;

б) $3\cos x = -2$, $x \in [-\pi; 0]$;

в) $2\cos x + 1 = 0$, $x \in [2; 4]$;

г) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$, $x \in [-\pi; \pi]$;

д) $5\cos x = 4$, $x \in [\pi; 3\pi]$;

е) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$, $x \in [-3; 0]$.

20.5. а) $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $x \in [0; 2\pi]$;

б) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{3} = -1$, $x \in [-3\pi; 3\pi]$;

в) $3\cos 3x = 1$, $x \in [0; 6]$;

г) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$;

д) $2\cos\frac{x}{2} = -1$, $x \in [0; 4\pi]$;

е) $\cos\frac{x}{4} + 1 = 0$, $x \in [3; 13]$.

20.6. Решите уравнение:

а) $\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$;

б) $\sqrt{7x - x^2} \cdot (\cos x - 1) = 0$.

20.7. Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) наибольший отрицательный корень.

ИКТ **20.8.** Найдите значения параметра p, при которых имеет корни уравнение:

а) $\cos x = 4p - 3$; б) $\cos x = 2p^2 - 5p + 1$.

Решите неравенство.

ИКТ **20.9.** а) $\cos x < \frac{1}{2}$; в) $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\cos x \leqslant -\frac{2}{5}$;

б) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$; е) $\cos x > \frac{5}{8}$.

ИКТ **20.10.** а) $0 < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < -\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{3} < \cos x < 0$;

в) $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$; е) $-\frac{2}{3} < \cos x < \frac{1}{3}$.

20.11. Найдите количество корней уравнения

$$(\cos x - 0{,}3)(\cos x + 0{,}7) = 0,$$

принадлежащих отрезку:

а) $[0; 2\pi]$; в) $[0{,}5\pi; 2\pi]$; д) $[-1{,}25\pi; 2{,}5\pi]$;

б) $[0; 1{,}5\pi]$; г) $[0{,}25\pi; 3\pi]$; е) $[-2{,}75\pi; 1{,}5\pi]$.

20.12. Решите уравнение:

а) $\cos^2 x + \cos^2 3x = 0$; в) $\cos^2 x + \cos 3x = 2$;

б) $\cos 2x - \cos 4x = 2$; г) $\cos x + \cos 3x = -2$.

20.13. Решите уравнение с параметром a:

а) $\frac{2a\cos x}{3\cos x - a} = 1$; б) $3a\cos 2x = a^2 - 4$.

Решите неравенство.

20.14. а) $6\sin^2 t + \cos t < 4$; б) $6\sin^2 t + \cos t \geqslant 4$.

20.15. а) $\cos 2x\sqrt{2 + x - x^2} \leqslant 0$; б) $\cos x\sqrt{25 - x^2} > 0$.

Упражнения для повторения

Решите уравнение.

20.16. а) $\sin x \operatorname{ctg} x = 0$; б) $\sqrt{x}\cos x = 0$.

20.17. а) $(x-3)(x-8) = \dfrac{60}{(x-4)(x-7)}$;

б) $2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 9 = 7\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$;

в) $x(x+1) = \dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$;

г) $8\left(x - \dfrac{2}{x}\right) + 4 = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$.

20.18. а) Между числами $-5{,}6$ и $12{,}8$ вставлено n чисел так, что они вместе с данными составляют арифметическую прогрессию. При каком значении n разность этой прогрессии принадлежит области определения функции $y = \sqrt{5|x| - x^2 - 6}$?
б) Между числами $-11{,}2$ и $7{,}9$ вставлено n чисел так, что они вместе с данными составляют арифметическую прогрессию. При каком значении n разность этой прогрессии принадлежит области определения функции $y = \sqrt{6|x| - x^2 - 8}$?

20.19. а) При смешивании 40%-ного раствора соли с 10%-ным раствором получили 800 г раствора, содержащего 21,25 % соли. Сколько граммов каждого раствора было первоначально?
б) При смешивании 500 г 55%-ного раствора соли с 20%-ным раствором получили раствор, содержащий 45 % соли. Сколько граммов раствора получили?

§ 21. Решение уравнения $\sin x = a$

В § 4 мы уже решили некоторые уравнения вида $\sin t = a$. Так, в примере 4 из этого параграфа мы видели, что решения уравнения $\sin t = 0$ имеют вид $t = \pi n$, решения уравнения $\sin t = 1$ имеют вид

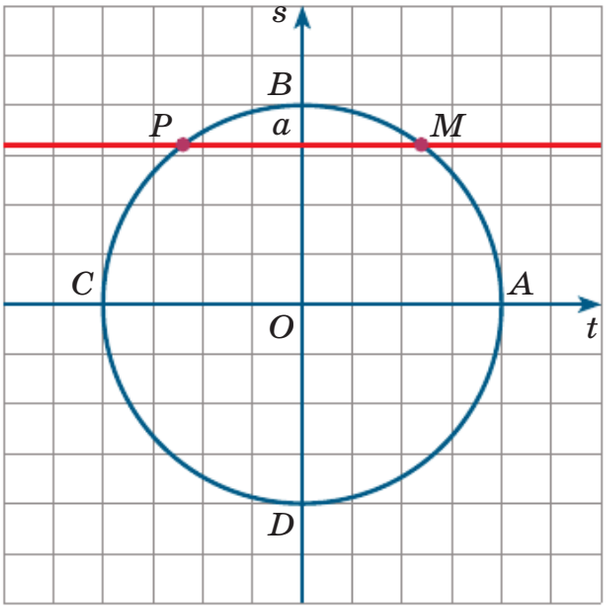


Рис. 135

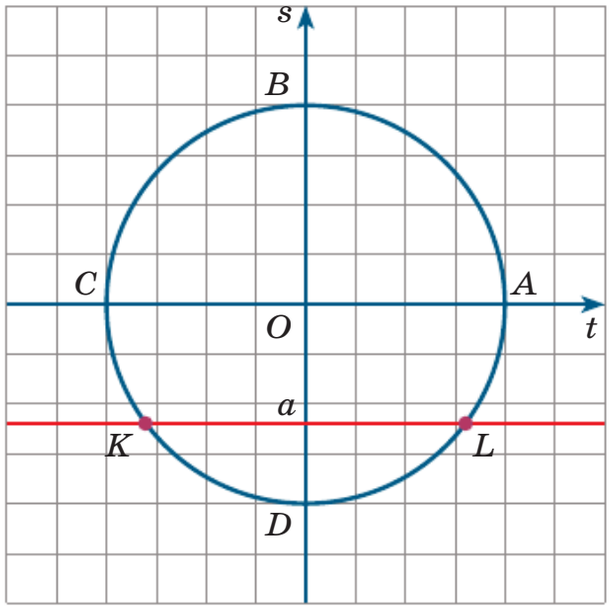


Рис. 136

$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, решения уравнения $\sin t = -1$ имеют вид $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

А в примере 5 из § 4 мы для уравнения $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ получили такой ответ:

$$t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad t = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n.$$

Теперь обсудим, как обстоит дело с решением уравнения $\sin t = a$ для произвольного значения a.

Если $|a| > 1$, то, поскольку $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, уравнение $\sin t = a$ не имеет решений.

Если $|a| = 1$, т. е. $a = \pm 1$, то, как решить соответствующие уравнения ($\sin t = 1$, $\sin t = -1$), мы уже напомнили выше.

Пусть $0 < a < 1$. По определению $\sin t$ — это ордината той точки числовой окружности, которая соответствует числу t. На числовой окружности есть две точки — M и P, ординаты которых равны a. С помощью числовой окружности (рис. 135) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi n, \quad t = t_2 + 2\pi n,$$

где t_1 — длина дуги AM, а t_2 — длина дуги AP. Поскольку $AP = AC - PC$, $AC = \pi$, а $PC = AM$, то получаем, что $t_2 = \pi - t_1$.

Поскольку $t_1 = \arcsin a$, то все решения уравнения $\sin t = a$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arcsin a + 2\pi n, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi n.$$

Теперь рассмотрим уравнение $\sin t = a$, где $-1 < a < 0$. Имеем (рис. 136):

$$t = t_1 + 2\pi n, \quad t = t_2 + 2\pi n,$$

где t_1 — число, соответствующее точке L, а t_2 — число, соответствующее точке K.

Мы знаем (см. рис. 116, *б* на с. 144), что $t_1 = \arcsin a$. Заметим далее, что $AK = AC - CK = AC - LA = AC - AL = \pi - \arcsin a$. Значит, и в этом случае получается, что $t_2 = \pi - t_1$. Это даёт возможность записать все решения уравнения $\sin t = a$ при $0 < a < 1$ следующим образом:

$$t = \arcsin a + 2\pi n, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi n.$$

Итак,

если $|a| < 1$, то уравнение $\sin t = a$ имеет две серии решений:
$t = \arcsin a + 2\pi n, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Пример 1 Решить уравнение:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{1}{2}$; в) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{5}$; г) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Решение. а) Имеем:

$$x = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$x = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

б) Имеем:

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n.$$

Вычислим значение арксинуса:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n.$$

в) Имеем:

$$x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + 2\pi n, \quad x = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + 2\pi n.$$

Число $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ находится в пределах от -1 до 0, это допустимое значение аргумента, значит, можно составить формулы решений:

$$x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + 2\pi n, \quad x = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + 2\pi n.$$

И чуть подкорректируем эту запись:

$$x = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n, \quad x = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n.$$

г) Поскольку $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ не имеет решений.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = -\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\varnothing$.

Пример 2 Найти те корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, которые принадлежат промежутку: а) $[0;\ 2\pi]$; б) $\left[-4\pi;\ -\frac{5\pi}{4}\right]$; в) $\left(\frac{3}{4};\ 12\right)$.

Решение. Имеем:

$$x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$x = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n.$$

а) Нам нужно из найденного бесконечного множества корней

$$\left(x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\right)$$

заданного уравнения выбрать те, которые принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$. Как и в предыдущем параграфе, применим способ «перебора по параметру».

1) $n = 0$. Подставив это значение в формулы решений, получим: $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$. Оба эти значения принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$.

2) $n = 1$. Подставив это значение в формулы решений, получим: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi$. Оба эти значения не принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$, их не берём. Так же обстоит дело при $n = 2, 3, 4, \ldots$.

3) $n = -1$. Подставив это значение в формулы решений, получим: $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$. Оба эти значения не принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$. И тем более не будут принадлежать отрезку $[0; 2\pi]$ те значения x, которые получаются при $n = -2, -3, -4$ и т. д.

Итак, на отрезке $[0; 2\pi]$ заданное уравнение имеет два корня: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

б) Нам нужно из серий $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ выбрать те значения x, которые принадлежат отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{4}\right]$. До сих пор мы при отборе корней применяли способ «перебора по параметру». Сейчас мы познакомим вас с другим способом отбора корней при решении тригонометрических уравнений.

Разберёмся с первой серией: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Нас интересуют те значения из этой серии, которые принадлежат отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{4}\right]$, т. е. удовлетворяют двойному неравенству $-4\pi \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant -\frac{5\pi}{4}$.

Решим это двойное неравенство. Разделим все его части почленно на π:

$$-4 \leqslant \frac{1}{4} + 2n \leqslant -\frac{5}{4}.$$

Умножим все части двойного неравенства на 4 (освободимся от знаменателей):

$$-16 \leqslant 1 + 8n \leqslant -5.$$

Прибавим ко всем частям неравенства -1:

$$-17 \leqslant 8n \leqslant -6.$$

И, наконец, разделим все части неравенства на 8:

$$-\frac{17}{8} \leqslant n \leqslant -\frac{3}{4}.$$

Последнему неравенству удовлетворяют два целочисленных значения параметра n — это значения $n = -2$ и $n = -1$. При $n = -2$ из формулы $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ следует, что $x = \frac{\pi}{4} - 4\pi = -\frac{15\pi}{4}$; при $n = -1$ из формулы $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ следует, что $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$.

Итак, из первой серии решений выбираем два значения: $-\frac{15\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$.

Разберёмся теперь со второй серией: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. Нас интересуют те значения из этой серии, которые принадлежат отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{4}\right]$, т. е. удовлетворяют двойному неравенству $-4\pi \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant -\frac{5\pi}{4}$.

Решим это неравенство:

$$-4 \leqslant \frac{3}{4} + 2n \leqslant -\frac{5}{4},$$
$$-16 \leqslant 3 + 8n \leqslant -5,$$
$$-19 \leqslant 8n \leqslant -8,$$
$$-\frac{19}{8} \leqslant n \leqslant -1.$$

Последнему неравенству удовлетворяют два целочисленных значения параметра n — это значения -2 и -1. При $n = -2$ из формулы $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ следует, что $x = \frac{3\pi}{4} - 4\pi = -\frac{13\pi}{4}$. При $n = -1$ из формулы $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ следует, что $x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$.

Итак, из второй серии решений выбираем два значения: $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{13\pi}{4}$.

Подведём итоги. Уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет на отрезке $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{4}\right]$ четыре корня: $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{13\pi}{4}, -\frac{15\pi}{4}$.

в) Нам нужно из серий $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ выбрать те значения x, которые принадлежат интервалу $\left(\frac{3}{4}; 12\right)$. Вернёмся к способу перебора по параметру.

1) $n = 0, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$. Смотрите: $\frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}, \frac{3\pi}{4} > \frac{3}{4}, \frac{\pi}{4} < 12, \frac{3\pi}{4} < 12$. И значение $\frac{\pi}{4}$, и значение $\frac{3\pi}{4}$ принадлежат интервалу $\left(\frac{3}{4}; 12\right)$.

2) При $n = 1$ из серии $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ получаем $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$, а из серии $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ получаем $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$. Числа $\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$ принадлежат интервалу $\left(\frac{3}{4}; 12\right)$.

3) При $n = 2$ из серии $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ получаем $x = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}$, а из серии $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ получаем $x = \frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{19\pi}{4}$. Оба эти значе-

ния больше 12, т. е. не принадлежат интервалу $\left(\frac{3}{4}; 12\right)$. Аналогично обстоит дело при $n = 3, 4, 5, \ldots$.

При отрицательных значениях параметра n получаются отрицательные решения, которые не принадлежат интервалу $\left(\frac{3}{4}; 12\right)$.

Подведём итоги. На интервале $\left(\frac{3}{4}; 12\right)$ заданное уравнение имеет четыре корня: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$; б) $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{13\pi}{4}, -\frac{15\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$.

До сих пор для решения уравнения $\sin x = a$, где $|a| < 1$, мы применяли две формулы, они характеризовали две серии решений уравнения:

$$x = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$
$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Оказывается, эти две формулы можно объединить, т. е. записать одной формулой. Чтобы её получить, обратим внимание на два обстоятельства.

1) В формуле $x = \arcsin a + 2\pi k$ перед $\arcsin a$ стоит знак «+», а у числа π множителем является *чётное число* $2k$.

2) Если переписать формулу $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$ в виде $x = -\arcsin a + \pi(2k + 1)$, то обнаружим, что перед $\arcsin a$ стоит знак «−», а у числа π множителем является *нечётное число* $2k + 1$.

Эти оба обстоятельства будут учтены, если мы составим общую формулу для решения уравнения $\boldsymbol{\sin x = a}$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.}$$

Проверяйте: при чётном n ($n = 2k$) из неё получается первая из написанных выше формул, а при нечётном — вторая. Вот как тогда

будут выглядеть решения уравнений из примера 1, если воспользоваться общей формулой:

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \quad x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \pi n, \quad x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} + \pi n.$$

Заметим, однако, что в ряде случаев пользоваться полученной общей формулой не очень удобно, и тогда целесообразно применять две формулы решений, как это было в примерах 1 и 2.

Пример 3 Решить уравнение:

а) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Решение. а) Имеем:

$$3x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n = (-1)^n \left(-\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

Разделив обе части соотношения $3x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n$ почленно на 3, получим:

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

б) А вот это как раз тот случай, когда применение общей формулы нецелесообразно. Положим $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$ и решим уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$:

$$t = \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$t = \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Итак, либо $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, либо $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. А теперь вспомним, что $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$. Значит, нам нужно решить два уравнения относительно переменной x. Решим первое уравнение:

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n.$$

Решим второе уравнение:

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{x}{2} = \pi + 2\pi n, \quad x = 2\pi + 4\pi n.$$

Ответ: а) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = 2\pi + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

Решите уравнение.

21.1. а) $\sin 3x = 0$;

б) $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$;

в) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

е) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

21.2. а) $(2\sin 3x - 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$;

б) $\sin\frac{x}{3}\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1\right) = 0$;

в) $\left(\sin x + \sqrt{2}\right)(3\sin x + 1) = 0$;

г) $\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right)\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right) = 0$;

д) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(2\sin 2x+1)=0$;

е) $(5\sin x-1)\left(\sin x-\sqrt{1{,}01}\right)=0$.

21.3. Найдите корни уравнения на указанном промежутке:

а) $\sin x-\frac{1}{2}=0$, $x\in[0;\pi]$;

б) $\sin x+1=0$, $x\in[-3;5]$;

в) $\sqrt{2}\sin 3x-1=0$, $x\in[0;2\pi]$;

г) $2\sin x-\sqrt{3}=0$, $x\in[2\pi;3\pi]$;

д) $2\sin x-\sqrt{2}=0$, $x\in[-\pi;2\pi]$;

е) $3\sin\frac{x}{2}=0$, $x\in[-12;18]$.

ИКТ **21.4.** При каких значениях параметра p имеет корни уравнение:

а) $\sin x=3p-2$; б) $\sin x=p^2-3$?

21.5. Решите уравнение $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) наибольший отрицательный корень.

ИКТ **21.6.** Найдите корни уравнения на заданном отрезке:

а) $\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)(\cos 2x+1)=0$, $x\in[0;2\pi]$;

б) $\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};5\pi\right]$.

21.7. Решите уравнение:

а) $\sin 2x\cdot\sqrt{16-x^2}=0$; б) $(2\sin x-1)\sqrt{5x^2-7x+2}=0$.

21.8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}2\sin x-5\cos y=7,\\5\sin x+\cos y=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}5\sin 2x+3\cos 3y=1,\\8\sin 2x-6\cos 3y=7;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sin\frac{x}{2}-\cos 2y=-0{,}5,\\\sin\frac{x}{2}\cos 2y=0{,}5;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\sin x-\cos y=1,\\2\sin^2 x-3\cos y=2.\end{cases}$

Решите неравенство.

ИКТ **21.9.** а) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$; д) $\sin x < \frac{2}{3}$;

б) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$; е) $\sin x > -\frac{1}{4}$.

ИКТ **21.10.** а) $0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < -0{,}5$; д) $-\frac{1}{3} < \sin x < \frac{1}{3}$;

в) $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$; е) $-\frac{3}{4} < \sin x < \frac{1}{4}$.

21.11. Дано уравнение $(\cos x + 0{,}2)(\sin x - 0{,}2) = 0$. Найдите количество его корней, принадлежащих отрезку:

а) $[0; \pi]$; в) $[\pi; 3\pi]$; д) $[-0{,}5\pi; 3{,}5\pi]$;

б) $[0; 2\pi]$; г) $[0{,}5\pi; 3\pi]$; е) $[-2{,}75\pi; 1{,}5\pi]$.

21.12. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x + \sin^4 5x = 0$; в) $\sin^3 x - \cos 3x = -2$;

б) $\sin 2x - \cos x = 2$; г) $2\sin x + 5\sin 3x = 7$.

21.13. Решите уравнение с параметром a:

а) $\frac{3a\sin x}{\sin x + 2a} = 2$; б) $2a\sin 3x = a^2 - 8$.

Решите неравенство.

21.14. а) $1 - \sin x \leqslant 3\cos^2 x$; б) $10\cos^2 x > 9 - 3\sin x$.

21.15. а) $\sin x\sqrt{16 - x^2} \leqslant 0$; б) $\sin 3x\sqrt{3x - x^2 + 18} > 0$.

Упражнения для повторения

21.16. а) Постройте график функции

$$y = \begin{cases} \operatorname{arcctg} x, \text{ если } x < 1, \\ \operatorname{arctg} x, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

б) При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку?

21.17. Гелевая ручка стоит 44 р. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 480 р. после снижения цены на 25 %?

21.18. а) Клиент взял в банке кредит 100 000 р. на полгода под 12 % годовых. Процентный доход банком начисляется ежемесячно на имеющуюся к этому времени сумму долга. Какую сумму клиент должен будет вернуть банку в конце срока?
б) Клиент взял в банке кредит 120 000 р. на год под 15 % годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

21.19. Решите уравнение:
а) $(x^2 - x + 1)^2 - 4x(x^2 - x + 1) + 3x^2 = 0$;
б) $(x + 1)^2 + (x + 1)\sqrt{11 - x} - 2(11 - x) = 0$;
в) $4(x^2 - x + 1)^2 - 11(x^3 + 1) + 7(x + 1)^2 = 0$;
г) $2(2x + 1)^2 - 3(2x + 1)\sqrt{4 - 7x} + (4 - 7x) = 0$.

§ 22. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = a$ (рис. 137).

Они имеют бесконечно много точек пересечения, абсциссы всех этих точек можно выразить формулой $x = x_0 + \pi n$, где $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} x_0 = a$. Значит, $x_0 = \operatorname{arctg} a$ (см. § 18), а потому *решение уравнения* $\operatorname{tg} x = a$ имеет вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

Аналогично *решение уравнения* $\operatorname{ctg} x = a$ имеет вид

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

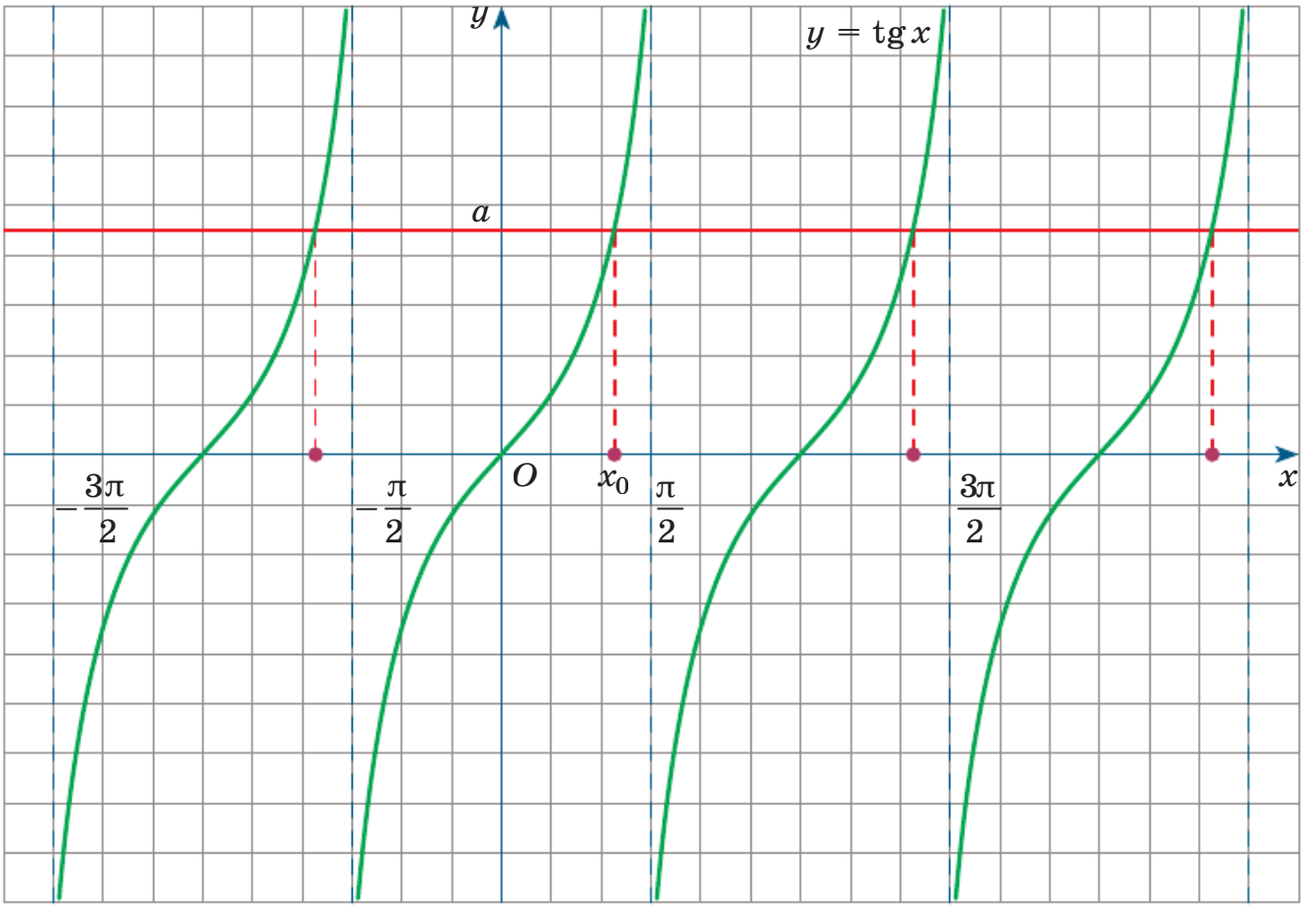


Рис. 137

Пример Решить уравнение:

а) $\operatorname{tg} x = 1$; б) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = 5$.

Решение. а) Имеем: $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$. Учтём, что $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Подставив это значение в формулу решений, получим: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

б) Имеем: $x = \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n$. Вычислим $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$:

$$\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Подставив это значение в формулу решений, получим:

$$x = \frac{5\pi}{6} + \pi n.$$

в) Имеем: $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n$. Указать точное значение арктангенса в данном случае мы не сможем, поэтому запись решений уравнения придётся оставить в полученном виде.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

22.1. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} 4x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$;

г) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

ИКТ **22.2.** Найдите корни заданного уравнения на заданном промежутке:

а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\operatorname{ctg} x = 0$, $x \in [-3\pi; -\pi]$;

в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -3$, $x \in (-1; 3)$;

г) $\operatorname{ctg} 4x = -1$, $x \in \left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$;

д) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

е) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{5}$, $x \in [0; 3]$.

Решите уравнение.

22.3. а) $\operatorname{tg} x \sin 2x = 0$;

б) $\operatorname{tg} 3x \cos x = 0$;

в) $\operatorname{ctg} 2x \sin 3x = 0$;

г) $\operatorname{ctg} x \cos 3x = 0$;

д) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$;

е) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{3} = 0$.

22.4. а) $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) = 0$;

б) $(\operatorname{tg} 2x - 1)\left(\operatorname{ctg} 2x + \sqrt{3}\right) = 0$;

в) $(2 + 3\operatorname{tg} x)\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

г) $\left(\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1\right)\operatorname{ctg} x = 0$;

д) $\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - 3\right)(\operatorname{tg} 3x + 1) = 0$;

е) $\left(\frac{1}{3} + \operatorname{ctg} x\right)\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

22.5. Найдите количество корней уравнения

$$(\sin x - 0{,}1)(\cos x + 0{,}9)(\operatorname{tg} x - 19) = 0,$$

принадлежащих отрезку:

а) $[0;\ 0{,}5\pi]$; в) $[0;\ 1{,}5\pi]$; д) $[0;\ 20{,}5\pi]$;

б) $[0;\ \pi]$; г) $[0;\ 2\pi]$; е) $[-0{,}5\pi;\ 3{,}5\pi]$.

22.6. Решите уравнение и найдите его корни, удовлетворяющие заданному условию:

а) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,\ \sin x < 0;$

б) $\sin 3x\left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1\right) = 0,\ \operatorname{tg} x \leqslant 0;$

в) $\left(\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1\right)\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right) = 0,\ \cos x \geqslant 0;$

г) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)(\sin 3x + 1) = 0,\ \operatorname{ctg} x \leqslant 0.$

Упражнения для повторения

22.7. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a + 2 + \sqrt{a^2 - 4}}{a + 2 - \sqrt{a^2 - 4}} + \dfrac{a + 2 - \sqrt{a^2 - 4}}{a + 2 + \sqrt{a^2 - 4}};$

б) $\left(\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{a - b^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{a - b^2}} - \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{a - b^2}}{\sqrt{a} - \sqrt{a - b^2}}\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a - b^2}}.$

22.8. Постройте график функции:

а) $y = |\operatorname{tg} x|$; б) $y = \operatorname{tg}|x|$.

22.9. а) Вкладчик положил в банк на 3 года на депозит 250 000 р. под 6 % годовых. Какую сумму получит вкладчик в конце срока?

б) Вкладчик положил в банк на год 300 000 р. под 6 % годовых с ежемесячным начислением процентов. Какую сумму получит вкладчик в конце срока?

22.10. Решите уравнение:

а) $\cos^2 x - 3\cos x\left(\sqrt{x}+1\right) + 2\left(\sqrt{x}+1\right)^2 = 0$;

б) $(\sin x + 1)^2 + (\sin x + 1)\left(\sqrt{-x}+1\right) - 2\left(\sqrt{-x}+1\right)^2 = 0$.

§ 23. Методы решения тригонометрических уравнений

Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций. Укажем два основных метода решения тригонометрических уравнений: *метод введения новой переменной* и *метод разложения на множители*. Покажем на примерах, как применяют эти методы.

Пример 1 Решить уравнение:

а) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$;

б) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 7$.

Решение. а) Введём новую переменную: $z = \cos x$. Тогда уравнение примет вид

$$2z^2 - z - 1 = 0,$$

откуда находим: $z_1 = 1$, $z_2 = -\dfrac{1}{2}$. Значит, либо $\cos x = 1$, либо $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

Решив уравнение $\cos x = 1$, получим $x = 2\pi n$; решив уравнение $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, получим

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n =$$

$$= \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

б) Воспользуемся тем, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде $1 - \sin^2 x + \sin x + 1 = 0$ и далее $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$.

Введём новую переменную: $z = \sin x$. Тогда уравнение примет вид $z^2 - z - 2 = 0$, откуда находим: $z_1 = -1$, $z_2 = 2$. Значит, либо $\sin x = -1$, либо $\sin x = 2$. Решив уравнение $\sin x = -1$, получим $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; уравнение $\sin x = 2$ решений не имеет.

в) Решим уравнение $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 7$. Вспомним формулу $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (см. §6). Она позволит нам переписать заданное уравнение в виде $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 + \operatorname{tg}^2 x = 7$ и далее $\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x - 6 = 0$.

Введём новую переменную: $z = \operatorname{tg} x$. Тогда уравнение примет вид $z^2 + \sqrt{3}z - 6 = 0$, откуда находим: $z_1 = \sqrt{3}$, $z_2 = -2\sqrt{3}$.

Значит, либо $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, либо $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{3}$. Решив уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, получим $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$; решив уравнение $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{3}$, получим $x = \operatorname{arctg}\left(-2\sqrt{3}\right) + \pi n$.

Ответ: а) $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Теперь поговорим о методе разложения на множители. Если уравнение $f(x) = 0$ удаётся преобразовать к виду $g(x)h(x) = 0$, то либо $g(x) = 0$, либо $h(x) = 0$. В подобных случаях обычно говорят, что задача сводится к решению *совокупности уравнений* $g(x) = 0$; $h(x) = 0$. Но при этом важно заметить, что переход от уравнения $g(x)\,h(x) = 0$ к совокупности уравнений $g(x) = 0$; $h(x) = 0$ не всегда безопасен с точки зрения равносильности преобразований. Рассмотрим, например, уравнение $\operatorname{tg} x(\sin x - 1) = 0$. Из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ находим: $x = \pi n$; из уравнения $\sin x = 1$ находим: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Но включить обе эти серии в ответ нельзя. Дело в том, что при значениях $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ входящий в заданное уравнение множитель $\operatorname{tg} x$ не определён, т. е. значе-

ния $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ не принадлежат области определения уравнения (области допустимых значений переменной). Так что решение уравнения $\operatorname{tg} x(\sin x - 1) = 0$ таково: $x = \pi n$.

Пример 2 Решить уравнение $2\sin 2x \cos 3x + \cos 3x = 0$.

Решение. В левой части уравнения вынесем $\cos 3x$ за скобки:

$$\cos 3x(2\sin 2x + 1) = 0.$$

Значит, либо $\cos 3x = 0$, либо $2\sin 2x + 1 = 0$.

Из уравнения $\cos 3x = 0$ находим: $3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$.

Из уравнения $2\sin 2x + 1 = 0$ находим:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2},$$

$$2x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,$$

$$2x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

Решите уравнение.

23.1. а) $6\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0$; в) $6\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;

б) $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$; г) $4\cos^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} - 1 = 0$.

23.2. а) $6\cos^2 x + \sin x - 5 = 0$; в) $5\sin^2 x - 9\cos x - 3 = 0$;

б) $\sin^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$; г) $2\cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0$.

23.3. а) $\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0$; в) $5\operatorname{ctg}^2 x - 6\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;

б) $3\operatorname{ctg}^2 2x - 2\operatorname{ctg} 2x - 1 = 0$; г) $2\operatorname{tg}^2 3x - \operatorname{tg} 3x - 1 = 0$.

23.4. а) $2\cos^2 x + \cos x = 0$; в) $\sqrt{2}\sin^2 2x - \sin 2x = 0$;
б) $4\sin^2 2x - 3 = 0$; г) $1 - 4\cos^2 3x = 0$.

23.5. а) $\operatorname{ctg}^2 x - 3 = 0$; в) $3\operatorname{tg}^2 3x - 1 = 0$;
б) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$; г) $3\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$.

23.6. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а) $6\cos^2 \frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 1 = 0$, $x \in [-3\pi; 3\pi]$;

б) $3\cos^2 x - 7\sin x - 7 = 0$, $x \in [-4\pi; -2\pi]$;

в) $4\sin^2 3x - \sin 3x - 3 = 0$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $\operatorname{ctg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{ctg} x = 0$, $x \in (-5; 5)$.

23.7. Решите уравнение и найдите его корни, удовлетворяющие заданному условию:

а) $2\sin^2 x + 7\sin x + 3 = 0$, $\cos x \leqslant 0$;

б) $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$, $\operatorname{tg} x < 0$.

Решите уравнение.

23.8. а) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} - 2 = 0$; в) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 0$;

б) $5 - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{\sin^2 x}$; г) $\frac{\sin x}{\cos x} + 3 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

23.9. а) $\frac{2\cos^2 x - 7\cos x + 3}{\sqrt{\sin x}} = 0$; в) $\frac{4\sin^2 x + 12\sin x + 5}{\sqrt{\cos x}} = 0$;

б) $\frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 1}{\cos^2 x + \cos x} = 0$; г) $\frac{4\cos^2 2x + 3\cos 2x}{\sin 3x} = 0$.

23.10. а) $3\sin x \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 2x - 2 + 6\sin x = 0$;

б) $2\cos x \operatorname{tg} 2x + 1 - 2\cos x = \operatorname{tg} 2x$;

в) $\sin 2x \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 3x + \sin 2x = 1$;

г) $3\cos 3x + 3\cos 3x \operatorname{ctg} x = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}$.

23.11. а) $\frac{\cos^2 x + \cos x}{\sin x} = 0$; б) $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\cos^2 x - \cos x} = 0$.

23.12. а) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 3\sin^2 5x = 3\cos^2 5x$;
б) $\operatorname{ctg}^3 2x - 3\operatorname{ctg} 2x + 3\operatorname{tg} 7x \operatorname{ctg} 7x = \operatorname{ctg}^2 2x$.

23.13. а) $\sqrt{\sin x}\cos x = 0$;
б) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} = 0$;
в) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = 0$;
г) $\sqrt{\cos x}\sin x = 0$;
д) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} = 0$;
е) $2\sqrt{\sin x} + 7\sin x = 0$.

23.14. а) $\dfrac{2\cos x + 1}{\sqrt{-\sin x}} = 0$;
б) $\dfrac{2\cos x - \sqrt{3}}{\sqrt{\sin x}} = 0$;
в) $\dfrac{2\cos x - 1}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0$;
г) $\dfrac{2\cos x - \sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = 0$;
д) $\dfrac{4\cos^2 x - 3}{\sqrt{-\cos x}\sqrt{\sin x}} = 0$;
е) $\dfrac{2\cos^2 x - 1}{\sqrt{\cos x}\sqrt{-\sin x}} = 0$.

23.15. а) $\sqrt{-\sin x}(2\cos x + 1) = 0$;
б) $\sqrt{\sin x}(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$;
в) $\sqrt{-\operatorname{tg} x}(2\cos x - 1) = 0$;
г) $\sqrt{\operatorname{ctg} x} \cdot \sqrt{2\cos x - \sqrt{2}} = 0$;
д) $\sqrt{-\cos x}\sqrt{\sin x}\sqrt{4\cos^2 x - 3} = 0$;
е) $\sqrt{\cos x}\sqrt{-\sin x}\sqrt{2\cos^2 x - 1} = 0$.

23.16. а) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}\sin 3\pi x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
б) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}\cos 2\pi x\right) = 1$.

23.17. а) $(3x - 11)\sin 2x = |\sin 2x|$;
б) $(x^2 - 3) \cdot |\cos 3x| = \cos 3x$.

23.18. а) $\dfrac{\sin x}{(x-4)^2} + |\sin x| = 0$;
б) $(x-4)^2|\cos 2x| + \cos 2x = 0$.

23.19. а) $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$;
б) $\sqrt{3\sin 5x - \cos^2 x - 3} = 1 - \sin x$;
в) $\sqrt{2 + 4\cos x} = 3\cos x + 0{,}5$;
г) $\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{2}\cos 2x$.

23.20. Выясните, сколько корней имеет уравнение:
а) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)\sqrt{16 - 6x - x^2} = 0$;

б) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{8x - 7 - x^2} = 0;$

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - 4x\right)\sqrt{25x - x^3} = 0;$

г) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{x^3 - 5x^2 + 4x}} = 0.$

23.21. Выясните, сколько корней имеет данное уравнение на заданном промежутке:
а) $2\cos^2 x = 1 + \sin x$, $x \in [-7; 10]$;
б) $1 - \cos 2x = \sin^2 2x$, $x \in (-5; 8)$.

Решите систему уравнений.

23.22. а) $\begin{cases} 2\sin x - \cos y = 2, \\ 8\sin x + 3\cos y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\sin y - 4\cos x = 7, \\ \cos x + 3{,}5\sin y = 3. \end{cases}$

23.23. а) $\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos 2y + \cos^2 x = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\cos 2x}\cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = 0. \end{cases}$

Упражнения для повторения

23.24. а) Согласно тарифному плану, компания сотовой связи каждую ночь снимает со счёта абонента 15 р. Если на счёте абонента меньше этой суммы, то номер блокируется до пополнения счёта. Сколько дней абонент сможет пользоваться услугами мобильной связи, если у него на счёте 175 р.?
б) Одна минута разговора стоит 1 р. 20 к. У Кати на счёте мобильного телефона было 65 р., а после разговора с Иваном осталось 55 р. 40 к. Сколько минут длился разговор с Иваном?

23.25. а) Согласно нормам питания, на завтрак каждому человеку полагается 20 г сливочного масла. В санатории 225 человек. Сколько упаковок масла по 180 г понадобится на один завтрак?

б) Для организации кофе-брейка во время семинара в среднем необходимо 90 пакетиков чая. Семинар проходит в течение трёх дней. В пачке чая 50 пакетиков. Какого наименьшего количества пачек чая хватит для организации двух кофе-брейков каждый день в ходе всего семинара?

23.26. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\left(\sqrt{13}-\sqrt{7}\right)^2}{10-\sqrt{91}}$; б) $\dfrac{8+\sqrt{55}}{\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)^2}$.

23.27. Найдите решения данного уравнения на указанном отрезке:

а) $\sin(\pi(x+2))=0$, $2 \leqslant x \leqslant 5$;

б) $\cos(\pi(2x-3))=0$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

§ 24. Однородные тригонометрические уравнения

В этом параграфе мы познакомим вас с тригонометрическими уравнениями специального вида.

Определение. Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, называют **однородным тригонометрическим уравнением первой степени;**
уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$, где хотя бы одно из чисел a, c отлично от нуля, называют **однородным тригонометрическим уравнением второй степени.**

Сначала поговорим о решении однородных тригонометрических уравнений первой степени. Заметим, что в данном случае те значения x, при которых $\cos x = 0$, уравнению $a\sin x + b\cos x = 0$ не удовлетворяют. Смотрите: если $\cos x = 0$, то уравнение $a\sin x + b\cos x = 0$ принимает вид $a\sin x = 0$, т. е. $\sin x = 0$. Получается, что и $\cos x = 0$, и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ обращаются в нуль в различных точках. Значит, мы уверены, что $\cos x \neq 0$, а потому имеем право разделить обе части уравнения $a\sin x + b\cos x = 0$ почленно на $\cos x$.

Разделив обе части уравнения $a\sin x + b\cos x = 0$ почленно на $\cos x$, последовательно получим:

$$\frac{a\sin x}{\cos x} + \frac{b\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}; \quad a\operatorname{tg} x + b = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}; \quad x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n.$$

В более общем виде однородное тригонометрическое уравнение первой степени выглядит так: $a\sin mx + b\cos mx = 0$, где m — любое отличное от нуля число. Решение уравнения начинают с почленного деления обеих его частей на $\cos mx$. (Заметим, что допустимо деление обеих частей уравнения и на $\sin mx$.)

Пример 1 Решить уравнение $2\sin\frac{x}{2} - 5\cos\frac{x}{2} = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos\frac{x}{2}$, получим:

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 5 = 0;$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2{,}5;$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 2{,}5 + \pi n;$$

$$x = 2\operatorname{arctg} 2{,}5 + 2\pi n.$$

Ответ: $x = 2\operatorname{arctg} 2{,}5 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Теперь поговорим о том, как решают однородные тригонометрические уравнения второй степени:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.$$

Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда уравнение $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ принимает вид $a\sin^2 x = 0$, т. е. $\sin x = 0$. Но синус и косинус одновременно в нуль не обращаются, значит, $\cos x \neq 0$ и можно обе части уравнения разделить почленно на $\cos^2 x$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x},$$

т. е. $a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0$.

Это квадратное уравнение относительно новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

коэффициент a равен 0, т. е. отсутствует член $a \sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид

$$b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Это уравнение можно решить методом разложения на множители:

$$\cos x (b \sin x + c \cos x) = 0;$$
$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad b \sin x + c \cos x = 0.$$

Значит, либо $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, либо $\operatorname{tg} x = -\frac{c}{b}$, $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c}{b}\right) + \pi n$. Аналогично рассуждают, если в уравнении отсутствует член $c \cos^2 x$, т. е. если $c = 0$.

Фактически мы выработали алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения второй степени.

Алгоритм решения уравнения $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $a \sin^2 x$.
2. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении содержится (т. е. $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.
3. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении не содержится (т. е. $a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят $\cos x$.

Так же обстоит дело и в однородных уравнениях вида

$$a \sin^2 mx + b \sin mx \cos mx + c \cos^2 mx = 0.$$

Пример 2 Решить уравнение:

а) $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0$;

б) $\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$;

в) $3 \sin^2 4{,}5x + 2 \sin 4{,}5x \cos 4{,}5x = 0$.

Решение. а) Разделив почленно обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$: $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 4 = 0$. Из этого уравнения следует, что либо $\operatorname{tg} x = -1$, либо $\operatorname{tg} x = -4$. Решив уравнение $\operatorname{tg} x = -1$, получим $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. Решив уравнение $\operatorname{tg} x = -4$, получим $x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n$.

б) Уравнение $\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$ можно решить методом разложения на множители. Имеем: $\cos x\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right) = 0$. Значит, задача сводится к решению совокупности двух уравнений: $\cos x = 0$; $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$. Из первого уравнения получаем $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Уравнение $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ — однородное первой степени, которое упрощается с помощью почленного деления обеих его частей на $\cos x$. Получим:

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - 1 = 0;\ \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ x = \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

в) Уравнение $3\sin^2 4{,}5x + 2\sin 4{,}5x\cos 4{,}5x = 0$, как и уравнение из пункта «б», можно решить методом разложения на множители. Имеем:

$$\sin 4{,}5x(3\sin 4{,}5x + 2\cos 4{,}5x) = 0.$$

Значит, задача сводится к решению совокупности двух уравнений:

$$\sin 4{,}5x = 0; \quad 3\sin 4{,}5x + 2\cos 4{,}5x = 0.$$

Из первого уравнения получаем:

$$4{,}5x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{4{,}5} = \frac{2\pi n}{9}.$$

Решим однородное тригонометрическое уравнение первой степени

$$3\sin 4{,}5x + 2\cos 4{,}5x = 0.$$

Разделив почленно обе его части на $\cos 4{,}5x$, получим:

$$3\,\mathrm{tg}\,4{,}5x + 2 = 0; \quad \mathrm{tg}\,4{,}5x = -\frac{2}{3}; \quad 4{,}5x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi n;$$

$$x = -\frac{1}{4{,}5}\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3} + \frac{\pi n}{4{,}5} = -\frac{2}{9}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3} - \pi n\right).$$

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; x = -\mathrm{arctg}\,4 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

б) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

в) $x = \frac{2\pi n}{9},\ n \in \boldsymbol{Z};\ x = -\frac{2}{9}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3} - \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Пример 3 Решить уравнение $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$.

Решение. Это уравнение не является однородным, поскольку в правой его части содержится 2, а не 0. Но, как мы сейчас покажем, нетрудно преобразовать его в однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Смотрите: мы знаем, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, значит, $2 = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$. Заметив это, перепишем заданное уравнение в следующем виде:

$$3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

и далее $\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$. Теперь действуем по отработанной схеме:

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0, \quad \left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right)^2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3},$$

$$x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n = \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

Решите уравнение.

24.1. а) $\sin x - \cos x = 0$;

б) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 0$;

в) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$;

г) $3\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} = 0$.

24.2. а) $\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$;

б) $\sin 2x\cos 2x - \cos^2 2x = 0$;

в) $\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

г) $\sin^2\frac{x}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} = 0$.

24.3. а) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

б) $\sin^2\frac{x}{8} + 4\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8} + 3\cos^2\frac{x}{8} = 0$;

в) $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$;
г) $2\sin^2 4x + \sin 4x \cos 4x - 3\cos^2 4x = 0$.

24.4. а) $\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 1$;
б) $7\sin 2x \cos 2x - 3\cos^2 2x = 2$;
в) $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 1$;
г) $2\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} - 4\cos^2\frac{x}{3} = -3$.

24.5. а) $5\sin^2 x + 14\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2$;
б) $5\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x = 3$;
в) $6\sin^2 5x - \sqrt{3}\sin 5x \cos 5x + 5\cos^2 5x = 5$;
г) $3\sin^2 2x + \sqrt{3}\sin 2x \cos 2x + 4\cos^2 2x = 3$.

24.6. а) $5\sin x - 5\cos x = \sin x \cos x - \sin^2 x$;
б) $\cos^2 x - 7\sin x = 7\cos x - \sin x \cos x$.

Решите заданное уравнение и найдите его корни на заданном промежутке.

24.7. а) $\sqrt{3}\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$, $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]$;
б) $\sin^2 2x = \sqrt{3}\sin 2x \cos 2x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

24.8. а) $\sin 3x - \cos 3x = 2\sin 3x \cos 3x - 2\sin^2 3x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
б) $2\cos^2 1{,}5x - \sin 1{,}5x = \cos 1{,}5x - 2\sin 1{,}5x \cos 1{,}5x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

24.9. а) $2\cos x + |\sin x| = 3\sin x$, $x \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$;
б) $4\sin x + |\cos x| = 5\cos x$, $x \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

24.10. Решите уравнение:
а) $\sin^3 x - 3\sin^2 x \cos x + 2\sin x \cos^2 x = 0$;
б) $\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x = 3\cos^3 x$;
в) $\sin^2 x \cos^2 x - 10\sin x \cos^3 x + 21\cos^4 x = 0$;
г) $\sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x = \sin^3 x \cos^3 x + \sin x \cos^5 x$.

Упражнения для повторения

24.11. а) На соревнованиях по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов. Из них 4 прыгуна из Казани и 10 прыгунов из Москвы. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что первым будет выступать прыгун из Казани, а вторым — прыгун из Москвы.

б) Маша в составе туристической группы из 25 человек отправляется в поход. Туристов вертолётом забрасывают в труднодоступный район в несколько приёмов, по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что Маша полетит третьим рейсом.

24.12. Валя дважды бросает игральный кубик.

а) Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8. Результат округлите до сотых.

б) В сумме у неё выпадает 8 очков. Найдите вероятность того, что при втором бросании кубика выпало 3 очка.

24.13. а) Расстояние 30 км один из двух лыжников прошёл на 20 мин быстрее другого. С какой средней скоростью двигался каждый лыжник, если скорость одного из них была на 3 км/ч больше скорости другого?

б) Теплоход за каждую минуту против течения реки преодолевает на 200 м меньше, чем по течению, и на путь в 480 км против течения реки тратит на 2 ч больше, чем по течению. Найдите собственную скорость теплохода.

24.14. Решите неравенство:

а) $(x + 4)^2(x - 5) < 0$;

б) $(x + 2)(x^2 - x - 6) \geqslant 0$;

в) $(x + 6)(x - 9)^2 > 0$;

г) $(x + 3)(3x - x^2 - 18) \leqslant 0$.

Итак, в главе 2

Познакомились с понятием обратной функции.

Изучили свойства и построили графики обратных тригонометрических функций:

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

Получили формулы для решения основных тригонометрических уравнений:

$$\cos x = a, |a| \leqslant 1 \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z};$$
$$\sin x = a, |a| \leqslant 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \boldsymbol{Z};$$
$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \boldsymbol{Z};$$
$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Обсудили два основных метода решения тригонометрических уравнений: метод замены переменной и метод разложения на множители.

Познакомились с однородными тригонометрическими уравнениями и научились их решать.

Вопросы

1. Что такое обратимая функция?
2. Какую функцию называют функцией, обратной данной?
3. Как на координатной плоскости расположены графики двух взаимно обратных функций?
4. Сформулируйте определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа.
5. Как связаны между собой $\arcsin x$ и $\arcsin(-x)$, $\arccos x$ и $\arccos(-x)$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arctg}(-x)$, $\operatorname{arcctg} x$ и $\operatorname{arcctg}(-x)$?
6. При каком условии уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решения?
7. Запишите в общем виде решение уравнения $\sin x = a$.
8. Запишите в общем виде решение уравнения $\cos x = a$.
9. Запишите в общем виде решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$.
10. Что такое однородное тригонометрическое уравнение? Приведите примеры однородных тригонометрических уравнений первой и второй степени.

Тест

1. Установите соответствие между выражением и его значением.

А. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ Б. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ В. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

1) $\frac{2\pi}{3}$ 2) $-\frac{\pi}{6}$ 3) $-\frac{\pi}{3}$

2. Укажите числа, которые являются корнями уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$.

а) $\frac{7\pi}{6}$ б) $\frac{17\pi}{6}$ в) $-\frac{17\pi}{6}$ г) $-\frac{13\pi}{6}$

3. Укажите число, которое не является корнем уравнения $\cos x = 0$.

а) $\frac{12\pi}{2}$ б) $-\frac{17\pi}{2}$ в) $-\frac{41\pi}{2}$ г) $\frac{\pi}{2}$

4. Укажите числа, которые являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x = -2$.

а) $\operatorname{arctg}(-2)$ в) $\pi + \operatorname{arctg}(-2)$

б) $-\operatorname{arctg} 2$ г) $\pi - \operatorname{arctg}(-2)$

5. Решите уравнение $2\cos\frac{x}{4} = \sqrt{2}$.

а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ в) $\pi + 8\pi n, 3\pi + 8\pi n$

б) $\pm\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$ г) $\pm\pi + 8\pi n$

6. Решите уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ в) $2\pi k$

б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ г) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

7. Укажите количество корней $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

8. Найдите корни уравнения $\sqrt{2}\sin^2 x = -\sin x$, удовлетворяющие условию $\operatorname{tg} x \leqslant 0$.

9. Решите уравнение

$$4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0.$$

В ответе запишите корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

10. Решите уравнение

$$2\sin^2 3x + \sin 3x \cos 3x - 3\cos^2 3x = 0.$$



Грозненский государственный
нефтяной технический университет.
Грозный

§ 25. Формулы приведения
§ 26. Формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов
§ 27. Формулы тангенса суммы и разности аргументов
§ 28. Формулы двойного аргумента
§ 29. Формулы понижения степени
§ 30. Формулы сложения (вычитания) косинусов (синусов)
§ 31*. Формулы преобразования произведения синусов (косинусов) в сумму

Глава 3
Формулы тригонометрии

§ 25. Формулы приведения

В главе 1 мы познакомились с формулами, связывающими тригонометрические функции одного и того же аргумента. Вот эти формулы:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

В этой главе мы изучим ещё ряд формул, которые будем использовать для преобразования тригонометрических выражений и для решения тригонометрических уравнений.

Начнём с так называемых формул приведения. Если под знаком тригонометрической функции T содержится выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm x$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то, оказывается, выражение $T\left(\frac{\pi n}{2} \pm x\right)$ можно привести к более простому виду, при котором под знаком тригонометрической функции будет содержаться только аргумент x. Соответствующие формулы обычно называют *формулами приведения*. Некоторые из этих формул мы получили в главе 1 (см. § 5, 10):

$$\begin{gathered}\sin(\pi + x) = -\sin x;\\ \cos(\pi + x) = -\cos x;\\ \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x;\\ \operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x;\\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\end{gathered}$$

Опираясь на указанные выше пять формул, можно получить и другие формулы приведения.

Возьмём формулу

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Подставим $(-x)$ вместо x. Смотрите, что получится:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin(-x).$$

А теперь учтём, что $\cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, а $\sin(-x) = -\sin x$.

В результате получим шестую формулу приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x.$$

Снова возьмём формулу

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

и подставим $\frac{3\pi}{2} + x$ вместо x:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$$

Поработаем с левой частью полученного тождества:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right) = \cos(-\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

Получим седьмую формулу приведения:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x.$$

Формул приведения много, но есть удобный способ их запоминания. Он состоит из трёх положений.

1. Если под знаком заданной тригонометрической функции содержится выражение $\pi + x$, $\pi - x$, $2\pi + x$ или $2\pi - x$, то наименование тригонометрической функции от аргумента x будет таким же, как у заданной функции.

2. Если под знаком заданной тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2} + x$, $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{3\pi}{2} + x$ или $\frac{3\pi}{2} - x$, то наименование тригонометрической функции от аргумента x следует изменить на родственное (синус — на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс).

3. Перед полученной функцией от аргумента x следует поставить тот знак, который имела бы заданная функция при условии, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Например, применим сформулированное *мнемоническое*[1] *правило* к выражению $\sin(\pi + x)$. Наименование функции сохраняется, т. е. записываем $\sin x$. Далее, если предположить, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\pi + x$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак «минус». Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin(\pi + x) = -\sin x$, как и записано выше на с. 215.

Ещё пример. Применим это правило для преобразования выражения $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$. Наименование функции изменяется, т. е. записываем $\cos x$. Далее, если предположить, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{3\pi}{2} + x$ — аргумент из четвёртой четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак «минус». Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$, как и доказано на с. 216.

Мнемоническое правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан в градусах, т. е. когда под знаком тригонометрической функции содержится выражение $90° + \alpha$, $90° - \alpha$, $180° + \alpha$ и т. д. Преобразуем, например, выражение $\sin(360° - \alpha)$. Наименование функции следует сохранить ($360° = 2\pi$): пишем $\sin\alpha$. Далее, если считать,

[1] От греч. *mnemonikon* — искусство запоминания.

что $0 < \alpha < 90°$, получим, что $360° - \alpha$ — аргумент из четвёртой четверти, в которой преобразуемая функция синус имеет знак «минус». Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Получаем: $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$.

Разумеется, формулы приведения можно применять и в тех случаях, когда место аргумента x занимает более сложное выражение. Например, согласно мнемоническому правилу, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$. Но тогда и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \operatorname{ctg} 3x$, и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ и т. д.

Упражнения

Упростите выражение.

25.1. а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$; в) $\sin(8\pi - t)$; д) $\operatorname{ctg}(2\pi - t)$;

б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$; г) $\cos(9\pi + t)$; е) $\operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{2} + t\right)$.

25.2. а) $\sin(90° + \alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(270° + \alpha)$;
б) $\cos(270° - \alpha)$; д) $\operatorname{tg}(90° - \alpha)$;
в) $\sin(180° + \alpha)$; е) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$.

25.3. Вычислите:

а) $\cos 630° - \sin 1470° - \operatorname{ctg} 1125°$;

б) $2\cos\frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} + \sin(-7\pi)$;

в) $\cos 11\pi + 2\operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{35\pi}{3}\right)$;

г) $\operatorname{tg} 1800° + \cos 945° - \sin 495°$;

д) $2\sin\frac{49\pi}{6} - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right) + \cos(-9\pi)$;

е) $\cos\frac{41\pi}{3} - 3\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + \sin 13\pi$.

25.4. Упростите выражение:

а) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)$;

б) $\dfrac{\sin(-\alpha) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha)}$;

в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}(\pi - x)$;

г) $\dfrac{\sin(\pi + x) \cdot \cos(2\pi + x)}{\operatorname{tg}(\pi + x) \cdot \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}$.

25.5. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)} = \operatorname{tg}^2 x$;

б) $\dfrac{\sin(\pi - x)}{\operatorname{tg}(\pi + x)} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)} \cdot \dfrac{\cos(2\pi - x)}{\sin(-x)} = \sin x$.

Решите уравнение.

25.6. а) $2\sin(2\pi + x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 3$;

б) $2\sin(\pi + x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\dfrac{1}{2}$;

в) $5\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) - 8\cos(2\pi - x) = 1$;

г) $2\cos(\pi + x) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = 3$.

25.7. а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi + x) = \sqrt{2}$;

б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right) - 3\cos\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right) = 0$;

в) $\sqrt{3}\sin\left(\pi - \frac{x}{3}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) = 0$;

г) $\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}$.

25.8. Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а) $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}\cos x$, $x \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1 + \cos(\pi + x)$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$;

г) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$, $x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

д) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\sin x$, $x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

е) $2\sin(\pi + x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1{,}5$, $x \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

25.9. Решите уравнение:

а) $\sin^2(3\pi + 2x) + 4 = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$;

б) $2\sin^2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - 4\sin(2\pi - x) = 3\sin^2 x$.

25.10. Найдите корни уравнения на указанном промежутке:

а) $2\sin^2(\pi + x) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 1$, $x \in (1; 10)$;

б) $4\cos^3(\pi + 2x) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 2x\right) = 0$, $x \in (-5; 3)$.

Решите уравнение.

25.11. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\right)-2\sin\left(5\pi-\frac{x}{3}\right)=0$;

б) $3\cos(2\pi-2x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)$.

25.12. а) $\sin^2(\pi-x)-5\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+6\cos^2(3\pi+x)=0$;

б) $8\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+7\sin(\pi-x)\cos(2\pi-x)+\sin^2(3\pi+x)=0$.

25.13. а) $3\sin^2(6\pi-2x)-\sin 2x\cos(\pi+2x)=2$;

б) $2\sin^2\frac{x}{3}+3\sin\left(\pi+\frac{x}{3}\right)\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+7\cos^2\left(\frac{11\pi}{2}+\frac{x}{3}\right)=3$.

25.14. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\operatorname{tg}(\pi-y)=4,\\ 8\sin(\pi-2x)-3\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+y\right)=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\operatorname{ctg}(7\pi+2x)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-3y\right)=4,\\ 2\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)-7\cos(\pi-3y)=3.\end{cases}$

25.15. Докажите тождество:

а) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$.

25.16. Вычислите:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$;

б) $\arccos\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}8)$;

г) $\arcsin\left(\cos\frac{13\pi}{7}\right)$;

д) $\arccos(\cos 10)$;

е) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{23\pi}{8}\right)$.

Упражнения для повторения

25.17. а) Найдите все значения параметра p, при которых корни уравнения $x^2 - 2x - 2p - 1 = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 - 3x_2 = 19$.

б) Найдите все значения параметра p, при которых квадрат разности корней уравнения $x^2 - 6x + p = 0$ равен 16.

25.18. Постройте график функции $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$. Найдите:

а) область значений функции;
б) основной период функции;
в) нули функции и промежутки знакопостоянства;
г) промежутки возрастания и убывания функции.

25.19. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на чётность:

а) $f(x) = x^3 + x \cdot \cos x$;

б) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin^2 x$;

в) $f(x) = |x| - \frac{\sin x}{x}$;

г) $f(x) = x^3\sqrt{\sin x}$.

25.20. Решите уравнение:

а) $\frac{2x}{|x|} \cdot \sin x = 1$;

б) $\frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg} x}{x - \pi} = 0$;

в) $\frac{|x|}{x} \cdot \cos x = 1$;

г) $\frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg} x}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$.

§ 26. Формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов

В этом параграфе речь пойдёт о четырёх, пожалуй, самых важных формулах тригонометрии, поскольку остальные формулы, с которыми мы познакомимся в остальных параграфах главы, без особого труда получаются из этих четырёх.

Вот эти формулы:

$$\begin{aligned}
&\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,\\
&\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,\\
&\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,\\
&\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.
\end{aligned}$$

Эти четыре формулы объединяют общим названием — *формулы сложения*. Доказать *теорему сложения* очень непросто (для тех, кто интересуется математикой, в приложении к этому параграфу на с. 229 мы приводим доказательство в несколько упрощённом изложении). Для удобства ссылок будем называть первую формулу «косинус разности», вторую — «косинус суммы», третью — «синус разности», четвёртую — «синус суммы». Названия эти, может быть, не очень удачны, как, впрочем, и такое название, как «формулы приведения», но это не так уж важно: главное, что есть некий словесный оборот, позволяющий понять, о чём идёт речь.

Пример 1 Вычислить:

а) $\cos 75°$; б) $\sin 15°$; в) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$; г) $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Решение. а) Представим $75°$ в виде суммы $45° + 30°$ и воспользуемся формулой «косинус суммы»:

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

б) Представим $15°$ в виде разности $45° - 30°$ и воспользуемся формулой «синус разности»:

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Справедливости ради заметим, что можно было вычислить $\sin 15°$ быстрее — с помощью формулы приведения и учитывая результат пункта «а»:

$$\sin 15° = \sin(90° - 75°) = \cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

в) Представим $\frac{7\pi}{12}$ в виде суммы $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ и воспользуемся формулой «синус суммы»:

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

г) Представим $\frac{\pi}{12}$ в виде разности $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ и воспользуемся формулой «косинус разности»:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Заметим, что и здесь можно было вычислить $\cos\frac{\pi}{12}$ быстрее — с помощью формулы приведения и учитывая результат пункта «в»:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: а), б) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; в), г) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

В примере 1 мы показали, как используются четыре формулы, представленные в начале параграфа, слева направо. Естественно, их можно применять и справа налево.

Пример 2 Вычислить:

а) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{13\pi}{12}+\sin\frac{13\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

б) $\cos 73^\circ\cos 13^\circ+\sin 73^\circ\sin 13^\circ$.

Решение. а) Здесь представлена правая часть формулы «синус суммы» аргументов $\frac{\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$.

Значит,

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{13\pi}{12}+\sin\frac{13\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{13\pi}{12}\right)=\sin\frac{7\pi}{\mathbf{6}}=$$

$$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

б) Здесь представлена правая часть формулы «косинус разности» аргументов 73° и 13°. Значит,

$$\cos 73^\circ\cos 13^\circ+\sin 73^\circ\sin 13^\circ=\cos(73^\circ-13^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}.$$

Ответ: а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$.

Пример 3 Дано: $\sin x=\frac{5}{13}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\cos y=-\frac{3}{5}$, $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$. Вычислить $\sin(x-y)$.

Решение. Имеем: $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$. Значения $\sin x$, $\cos y$ даны в условии задачи, а потому, чтобы воспользоваться формулой «синус разности», нам нужно вычислить $\cos x$, $\sin y$.

Имеем: $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$.

Из уравнения $\cos^2 x=\frac{144}{169}$ следует, что либо $\cos x=\frac{12}{13}$, либо $\cos x=-\frac{12}{13}$. В условии сказано, что $0<x<\frac{\pi}{2}$, а в первой четверти косинус принимает положительные значения. Вывод: $\cos x=\frac{12}{13}$.

Далее, $\sin^2 y=1-\cos^2 y=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$. Из уравнения $\sin^2 y=\frac{16}{25}$ следует, что либо $\sin y=\frac{4}{5}$, либо $\sin y=-\frac{4}{5}$. В условии сказано, что $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$, а в третьей четверти синус принимает отрицательные значения. Вывод: $\sin y=-\frac{4}{5}$.

Теперь вычислим $\sin(x-y)$:

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y=$$
$$=\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{33}{65}.$$

Ответ: $\frac{33}{65}$.

Пример 4 Решить уравнение $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$.

Решение. Представим левую часть уравнения в виде $2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$ и обратим внимание на то, что $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$. Значит,

$$\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right).$$

Таким образом, заданное уравнение мы преобразовали к виду $2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1$, т. е. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}$. О решении таких уравнений мы подробно говорили в главе 2:

$$\frac{\pi}{3}+x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,\ x=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Значит, либо

$$x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi n=2\pi n,$$

либо

$$x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi n=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n.$$

Ответ: $x=2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 5* а) Доказать, что графиком функции $y = a\sin x + b\cos x$ при любых действительных значениях x (кроме случая, когда $a = 0$, $b = 0$) является синусоида.

б) Решить уравнение $5\sin x + 12\cos x = 6{,}5$.

Решение. а) Имеем:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right).$$

Для удобства положим $\sqrt{a^2 + b^2} = c$, тогда написанное выше равенство примет более компактный вид:

$$a\sin x + b\cos x = c\left(\frac{a}{c}\sin x + \frac{b}{c}\cos x\right).$$

А теперь смотрите, каким соотношением связаны числа $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1;$$

короче:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Это значит, что числа $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ являются соответственно косинусом и синусом некоторого аргумента t.

Итак, $a\sin x + b\cos x = c(\cos t\sin x + \sin t\cos x) = c\sin(x + t)$. А что представляет собой график функции $y = c\sin(x + t)$? Это синусоида, сдвинутая вдоль оси абсцисс на $|t|$ вправо или влево и растянутая от оси абсцисс с коэффициентом $|c|$ вверх или вниз.

б) Имеем:

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13;$$

$$5\sin x + 12\cos x = 13\left(\frac{5}{13}\sin x + \frac{12}{13}\cos x\right) =$$

$$= 13(\sin t\sin x + \cos t\cos x) = 13\cos(x - t),$$

где $\frac{5}{13} = \sin t$, т. е. $t = \arcsin\frac{5}{13}$.

Вернёмся к нашему уравнению:

$$5\sin x + 12\cos x = 6{,}5;$$
$$13\cos(x - t) = 6{,}5;$$
$$\cos(x - t) = \frac{1}{2};$$
$$x - t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$
$$x = \arcsin\frac{5}{13} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \arcsin\frac{5}{13} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6* Проверить равенство

$$\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{24}{25} = \arcsin\frac{44}{125}.$$

Решение. Имеем: $0 < \arcsin\frac{3}{5} < \frac{\pi}{2}$, $0 < \arccos\frac{24}{25} < \frac{\pi}{2}$. Далее, $y = \arcsin x$ — возрастающая функция, значит, $\arcsin\frac{3}{5} > \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $y = \arccos x$ — убывающая функция, и, поскольку $\frac{24}{25} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, делаем вывод, что $\arccos\frac{24}{25} < \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$. В итоге получаем, что $0 < \arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{24}{25} < \frac{\pi}{2}$. Число $\arcsin\frac{44}{125}$ также принадлежит интервалу $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, чтобы доказать справедливость предложенного равенства, достаточно убедиться в том, что синус (или косинус) левой части равенства равен синусу (или косинусу) правой части равенства. Проведём подсчёты, но сначала напомним, что

$$\sin(\arcsin x) = x,$$
$$\cos(\arccos x) = x,$$
$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2},$$
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Имеем:

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{24}{25}\right)=$$

$$=\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arccos\frac{24}{25}\right)-\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\sin\left(\arccos\frac{24}{25}\right)=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{24}{25}-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}=\frac{72}{125}-\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{25}=\frac{44}{125};$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{44}{125}\right)=\frac{44}{125}.$$

Ответ: проверяемое числовое равенство верно.

Приложение* к § 26
Доказательство теоремы сложения

Поскольку в доказательстве используется модель «числовая окружность на координатной плоскости xOy», нам будет удобнее в формулах вместо x, y писать α, β.

Докажем формулу «косинус разности»:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Ради наглядности ограничимся случаем, когда

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

Отметим на числовой окружности, расположенной в координатной плоскости, точки $A(\alpha)$ и $B(\beta)$. Декартовы координаты этих точек таковы (рис. 138):

$$A(\alpha)=A(\cos\alpha,\ \sin\alpha),$$
$$B(\beta)=B(\cos\beta,\ \sin\beta).$$

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. По определению скалярного произведения векторов (скалярное про-

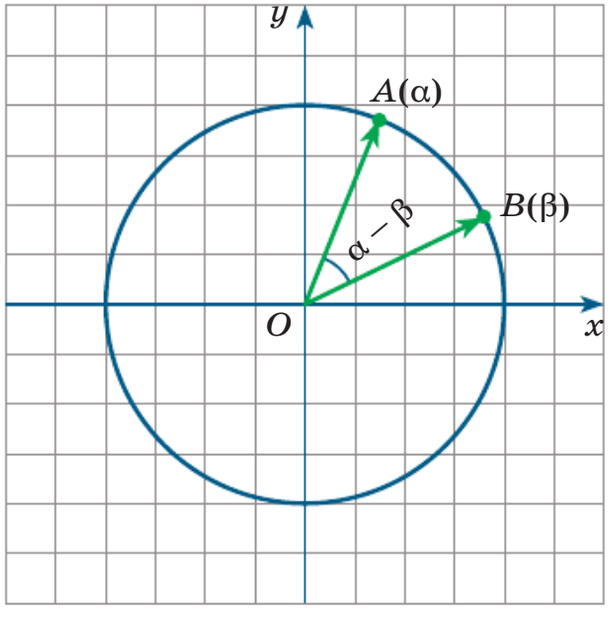


Рис. 138

изведение двух векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними) имеем: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\angle AOB$. Так как радиус числовой окружности равен 1, то $|\overrightarrow{OA}| = 1$ и $|\overrightarrow{OB}| = 1$. Центральный угол AOB равен $(\alpha - \beta)$. Значит,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(\alpha - \beta). \qquad (1)$$

С другой стороны, так как векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют начало в точке (0; 0), то их координаты совпадают с координатами точек A и B, т. е. имеем: $\overrightarrow{OA}$ $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, $\overrightarrow{OB}$ $(\cos\beta; \sin\beta)$. Тогда по свойству скалярного произведения векторов (скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат) выполняется равенство:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Таким образом, из равенств (1) и (2) получаем формулу «косинус разности»:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Для вывода формулы «косинус суммы» воспользуемся свойствами нечётности синуса и чётности косинуса: $\sin(-t) = -\sin t$; $\cos(-t) = \cos t$.

Имеем:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \\ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Для вывода формулы «синус суммы» воспользуемся формулами приведения: $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ и уже доказанной формулой косинуса разности двух аргументов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Итак, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Осталось получить формулу «синус разности», при этом будем использовать уже доказанную формулу «синус суммы»:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \\ = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Упражнения

26.1. Вычислите:
а) $\sin 105°$, используя равенство $105° = 60° + 45°$;
б) $\cos 15°$, используя равенство $15° = 60° - 45°$.

26.2. а) Пользуясь формулой синуса суммы двух углов, докажите справедливость формулы приведения:

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha.$$

б) Пользуясь формулой косинуса разности двух углов, докажите справедливость формулы приведения:

$$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha.$$

Упростите выражение.

26.3. а) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$;
б) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$;
в) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha\cos\beta$;
г) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$;
д) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;
е) $\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)$.

26.4. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \frac{1}{2}\cos\alpha$;
б) $\sqrt{3}\sin\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$;
в) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$;
г) $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \frac{1}{2}\sin\alpha$;
д) $2\cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\alpha$;
е) $\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

26.5. Докажите тождество:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y + \frac{1}{2}\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + y\right)$;

б) $\frac{1}{2}\sin y - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y = \cos\left(\frac{5\pi}{6} - y\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - y\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) = -\sqrt{3}\sin y$;

г) $\frac{1}{2}\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right)$.

Найдите значение выражения.

26.6. а) $\sin 107^\circ \cos 17^\circ - \cos 107^\circ \sin 17^\circ$;
б) $\cos 37^\circ \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \sin 23^\circ$;
в) $\sin 32^\circ \sin 13^\circ - \cos 13^\circ \cos 32^\circ$;
г) $\sin 112^\circ \cos 68^\circ + \cos 112^\circ \sin 68^\circ$;
д) $\cos 46^\circ \cos 16^\circ + \sin 46^\circ \sin 16^\circ$;
е) $-\sin 22^\circ \cos 23^\circ - \cos 22^\circ \sin 23^\circ$.

26.7. а) $\sin\frac{9\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{9\pi}{10}\sin\frac{2\pi}{5}$;

б) $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$;

в) $-\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{3\pi}{16} - \cos\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}$;

г) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{8}$.

26.8. Дано: $\sin t = \frac{4}{5}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Вычислите:

а) $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$; д) $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$; г) $\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$; е) $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.

26.9. Дано: $\cos t = -\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Вычислите:

а) $\sin\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$; д) $\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\sin\left(t + \frac{5\pi}{6}\right)$; е) $\cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)$.

26.10. Дано: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{8}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Вычислите значение выражения:

а) $\sin(\alpha + \beta)$; в) $\sin(\alpha - \beta)$;
б) $\cos(\alpha - \beta)$; г) $\cos(\alpha + \beta)$.

Решите уравнение.

26.11. а) $\cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x = -1$;

б) $\sin 6x \cos 3x + \cos 6x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin 9x \sin x - \cos 9x \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos 5x \cos 8x + \sin 5x \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

26.12. а) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos x = \frac{1}{2}$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1$;

в) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 1$.

26.13. а) $\cos x - \sin x = 0$; в) $\cos x + \sin x = 0$;
б) $\cos x + \sin x = 1$; г) $\sin x - \cos x = -1$.

26.14. Решите уравнение и укажите наименьший положительный корень:
а) $\sin 45^\circ \cos x + \cos 45^\circ \sin x = \cos 11^\circ \cos 19^\circ - \sin 11^\circ \sin 19^\circ$;
б) $\cos 30^\circ \cos x + \sin 30^\circ \sin x = \sin 190^\circ \cos 35^\circ + \cos 190^\circ \sin 35^\circ$.

Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке.

26.15. а) $\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x = 1$, $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\cos 2x \cos 5x + \sin 2x \sin 5x = 0$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

26.16. а) $\sin 0{,}7x \cos 0{,}3x + \cos 0{,}7x \sin 0{,}3x = \cos 4x \cos 3x + \sin 3x \sin 4x$, $x \in [-\pi; 2\pi]$;
б) $\cos 0{,}2x \cos 1{,}8x - \sin 0{,}2x \sin 1{,}8x = \sin 7x \cos 9x - \sin 9x \cos 7x$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

26.17. а) $\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x = \sqrt{3}(\cos 5x\cos 3x + \sin 5x\sin 3x)$, $x \in (-3;\ 5)$;
б) $\cos 0{,}3x\cos 3{,}7x - \sin 0{,}3x\sin 3{,}7x =$
$= \sin 1{,}1x\cos 5{,}1x - \cos 1{,}1x\sin 5{,}1x$, $x \in (-2;\ 3)$.

26.18. Проверьте равенство:
а) $(\sin 7 + 2\cos 4)^2 + (\cos 7 + 2\sin 4)^2 - 5 = 4\sin 11$;
б) $(2\cos 1 + 3\cos 5)^2 + (2\sin 1 + 3\sin 5)^2 - 12\cos 4 = 13$.

26.19. Постройте график функции:
а) $y = \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{8}\right)$;
б) $y = \cos(x^2 + 2x)\cos(x^2 - x) + \sin(x^2 + 2x)\sin(x^2 - x)$;
в) $y = \sin(\pi - 3x)\cos(2\pi + x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + 3x)$;
г) $y = \cos\left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{x}\right) - \sin\left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{x}\right)$.

26.20. Решите уравнение:
а) $8\sin x - 15\cos x + 8{,}5 = 0$; б) $3\cos 2x + 4\sin 2x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

26.21. При каких целочисленных значениях параметра a имеет решение уравнение:
а) $5\sin x + 2\cos x = a - 1$; б) $3\sin 2x - 2\cos 2x = a + 1$?

26.22. Решите неравенство:
а) $\sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x < \frac{1}{2}$;
б) $\cos\frac{2x}{7}\cos\frac{5x}{7} - \sin\frac{2x}{7}\sin\frac{5x}{7} \leqslant -\frac{1}{4}$;
в) $\sin 5x\cos 4x - \cos 5x\sin 4x > \frac{1}{3}$;
г) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4} \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

26.23. Докажите неравенство:
а) $\sin(x + 5)\cos(4 - x) + \cos(x + 5)\sin(4 - x) > 0$;
б) $\sin(12{,}5 - 3x)\sin(3x + 7{,}5) < \cos(12{,}5 - 3x)\cos(3x + 7{,}5)$.

26.24. Сравните числа a и b, если:

а) $a = \dfrac{\sin 5}{\cos 7}$, $b = \dfrac{\cos 5}{\sin 7}$; б) $a = \dfrac{\sin 8}{\sin 13}$, $b = \dfrac{\cos 8}{\cos 13}$.

26.25. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \cos x \cos y = -0{,}5, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}25, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$

26.26. Вычислите:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \arccos\dfrac{12}{13}\right)$; в) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \arcsin\dfrac{4}{5}\right)$;

б) $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5} + \arccos\dfrac{5}{13}\right)$; г) $\sin\left(\arcsin\dfrac{8}{17} - \arccos\dfrac{8}{17}\right)$.

26.27. Проверьте равенство:

а) $\arcsin\dfrac{3}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13} = \arcsin\dfrac{56}{65}$;

б) $\arccos\dfrac{8}{17} + \arccos\dfrac{4}{5} = \pi - \arccos\dfrac{13}{65}$.

Упражнения для повторения

26.28. Решите неравенство:

а) $2x^3 - 5x^2 + 2x > 0$; в) $5x^3 + 2x^2 - 3x^4 < 0$;

б) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{2x - 3} \leqslant 0$; г) $\dfrac{3x + 1}{x^2 + 5x + 6} \geqslant 0$.

26.29. а) Дана арифметическая прогрессия (a_n), у которой $a_3 = 8$, $a_{11} = 32$. Вычислите S_{15}.

б) Дана геометрическая прогрессия (b_n), у которой $b_4 = 3$, $b_7 = 81$. Вычислите S_6.

26.30. а) В обменном пункте банка 1 турецкая лира стоила 10 р. 64 к. Отдыхающие обменяли рубли на турецкие лиры и купили 5 сувениров по цене 13 турецких лир за 1 штуку. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

б) Перед поездкой во Францию Ирина в обменном пункте банка купила евро по курсу 75 р. 40 к. Во время экскурсии в Па-

риже Ирина купила 7 сувениров в виде Эйфелевой башни по цене 1,8 евро за 1 штуку. Во сколько рублей обошлась ей эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

26.31. Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x < 0, \\ -x^2, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -x - \pi, \text{ если } x < -\pi, \\ \cos x, \text{ если } -\pi \leqslant x < \pi, \\ \sqrt{x - \pi}, \text{ если } x \geqslant \pi. \end{cases}$

§ 27. Формулы тангенса суммы и разности аргументов

В предыдущем параграфе мы говорили о том, как синус или косинус суммы или разности аргументов выразить через синусы и косинусы аргументов. Теперь выясним, как обстоит дело в аналогичном случае для тангенса. Вот как выглядят формулы тангенса суммы и тангенса разности аргументов:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y};$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}.$$

Обе формулы верны при допустимых значениях аргументов, т. е. при условии, что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ (для первой формулы), $x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ (для второй формулы).

Докажем формулу «тангенс суммы». Имеем:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Разделим в полученной дроби числитель и знаменатель почленно на $\cos x \cos y$ (это возможно, поскольку $\cos x \cos y \neq 0$ при допустимых значениях x и y):

$$\frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Итак, $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

Аналогично выводится формула «тангенс разности».

Пример 1 Вычислить:

а) $\operatorname{tg} \dfrac{5\pi}{12}$; б) $\operatorname{ctg} 195^\circ$; в) $\dfrac{\operatorname{tg} 77^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ}{1 + \operatorname{tg} 77^\circ \operatorname{tg} 32^\circ}$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$, и применим к выражению $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right)$ формулу тангенса суммы. Получим:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 1\right)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$$

Избавимся от иррациональности в знаменателе, для чего домножим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$ на $\sqrt{3} + 1$ (выражение, сопряжённое знаменателю):

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}{\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} + 1}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} \dfrac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

б) Имеем:

$$\operatorname{ctg}195^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ + 15^\circ) = \operatorname{ctg}15^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 15^\circ) = \operatorname{tg}75^\circ =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}.$$

Здесь нам дважды пришлось воспользоваться формулами приведения:

$$\operatorname{ctg}(180^\circ + 15^\circ) = \operatorname{ctg}15^\circ, \quad \operatorname{tg}(90^\circ - 15^\circ) = \operatorname{ctg}15^\circ.$$

в) Заметим, что выражение $\dfrac{\operatorname{tg}77^\circ - \operatorname{tg}32^\circ}{1 + \operatorname{tg}77^\circ \operatorname{tg}32^\circ}$ представляет собой правую часть формулы тангенса разности для аргументов 77° и 32°. Значит,

$$\frac{\operatorname{tg}77^\circ - \operatorname{tg}32^\circ}{1 + \operatorname{tg}77^\circ \operatorname{tg}32^\circ} = \operatorname{tg}(77^\circ - 32^\circ) = \operatorname{tg}45^\circ = 1.$$

Ответ: а) $2 + \sqrt{3}$; б) $2 + \sqrt{3}$; в) 1.

Пример 2 Вычислить $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, если известно, что $\sin x = -\dfrac{4}{5}$, $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

Решение. Воспользуемся формулой тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x}.$$

Дальнейший план вычислений таков: зная $\sin x$, вычислим $\cos x$, воспользовавшись формулой $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; затем, зная $\cos^2 x$, найдём $\operatorname{tg}x$, воспользовавшись формулой $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Приступим:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\frac{9}{25}} = \frac{25}{9}, \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Итак, $\operatorname{tg}^2 x = \frac{16}{9}$. Значит, либо $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$, либо $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$. По условию аргумент x принадлежит третьей четверти, а в ней тангенс принимает положительные значения. Поэтому из указанных двух возможностей выбираем первую: $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$.

Теперь мы можем вычислить $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{4}{3} + 1}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{7}{3} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -7.$$

Ответ: -7.

Пример 3* Вычислить: $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Упражнения

Вычислите.

27.1. а) $\operatorname{tg} 165°$; б) $\operatorname{tg} 195°$; в) $\operatorname{tg} 75°$; г) $\operatorname{tg} 255°$; д) $\operatorname{tg} 285°$; е) $\operatorname{tg} 315°$.

27.2. а) $\frac{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 18°}{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 18°}$; б) $\frac{\operatorname{tg} 42° - \operatorname{tg} 12°}{1 + \operatorname{tg} 42° \operatorname{tg} 12°}$; в) $\frac{1 - \operatorname{tg} 37° \operatorname{tg} 23°}{\operatorname{tg} 37° + \operatorname{tg} 23°}$; г) $\frac{\operatorname{tg} 57° - \operatorname{tg} 12°}{1 + \operatorname{tg} 57° \operatorname{tg} 12°}$; д) $\frac{\operatorname{tg} 32° + \operatorname{tg} 28°}{1 - \operatorname{tg} 32° \operatorname{tg} 28°}$; е) $\frac{1 + \operatorname{tg} 77° \operatorname{tg} 47°}{\operatorname{tg} 77° - \operatorname{tg} 47°}$.

27.3. а) Дано: $\operatorname{tg} y = \frac{2}{3}$. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + y\right)$.

б) Дано: $\operatorname{ctg} y = \frac{4}{5}$. Вычислите $\operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$.

в) Дано: $\operatorname{tg} y = -\frac{1}{3}$. Вычислите $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - y\right)$.

г) Дано: $\operatorname{tg} y = \frac{4}{3}$. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - y\right)$.

27.4. а) Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Вычислите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

б) Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Вычислите $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

27.5. а) Дано: $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 2$. Вычислите $\operatorname{tg}\alpha$.

б) Дано: $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -2$. Вычислите $\operatorname{ctg}\alpha$.

27.6. а) Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 2$. Вычислите $\operatorname{tg}\beta$.

б) Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 1$. Вычислите $\operatorname{ctg}\beta$.

27.7. а) Дано: $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

б) Дано: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.

27.8. Докажите тождество:

а) $\frac{1 - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 3\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3\alpha\right)$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = 2$.

27.9. Решите уравнение:

а) $\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x} = \sqrt{3}$;

б) $\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}} = 1$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\frac{\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}}{1 - \operatorname{tg} 5x \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}} = -1$.

27.10. Решите уравнение и найдите все его корни из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$:

а) $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x}=-1$;

б) $\frac{1+\operatorname{tg} 5x\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg} 5x-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}=-\sqrt{3}$;

в) $\frac{1-\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 7x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\frac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{1+\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}=1$.

27.11. Докажите тождество:

а) $\frac{\operatorname{tg}^2 2x-\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} x$;

б) $\frac{\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y-1}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y}=\operatorname{ctg}(x+y)$.

27.12. Решите неравенство:

а) $\frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\geqslant -1$;

б) $\frac{\operatorname{tg}(5x-2)-\operatorname{tg}(3x-2)}{1+\operatorname{tg}(5x-2)\operatorname{tg}(3x-2)}\leqslant\sqrt{3}$.

27.13. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\operatorname{tg}(x+y)=-2,\\ 3\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} y=9;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\operatorname{tg}(2x-y)=-1{,}5,\\ \operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} y=0.\end{cases}$

27.14. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{8}{17}-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Проверьте равенство.

27.15. а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$;

б) $\operatorname{arcctg}\frac{2}{3}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{7}\right)=\operatorname{arcctg}\frac{8}{25}$.

27.16. а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{2}{9}=\frac{\pi}{4}$;

б) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\frac{5\pi}{4}$.

Упражнения для повторения

27.17. а) Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Через 50 мин после старта первый автомобиль опережал второй на один круг. Найдите скорость второго автомобиля, если скорость первого равна 102 км/ч.

б) От пункта «СТАРТ» круговой трассы отъехал велосипедист. Через 15 мин от этого же пункта «СТАРТ» следом за ним выехал мотоциклист. Через 3 мин после своего отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а через 15 мин после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 20 км.

27.18. а) Показания счётчика электроэнергии 1 января составили 35 891 кВт·ч, а 1 февраля — 36 060 кВт·ч. Стоимость 1 кВт·ч электроэнергии — 1 р. 60 к. При оплате через платёжный терминал необходимо вносить сумму, кратную 10 р., при этом взимается комиссия в размере 3 %. Какую сумму необходимо внести для оплаты электроэнергии за январь?

б) Показания счётчика холодной воды 1 марта составили 329,32 м^3, а 1 апреля — 332,53 м^3. Стоимость 1 м^3 воды равна 28 р. 60 к. При оплате через платёжный терминал взимается комиссия в размере 1 %. Какую сумму необходимо внести для оплаты холодной воды за март? Ответ округлите до рублей.

27.19. Найдите основной период функции $y=f(x)$, если:

а) $f(x)=\frac{3}{5}\cos 5x$;

б) $f(x)=\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4}$;

в) $f(x)=\frac{3}{4}\sin 7x$;

г) $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}6x$.

27.20. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi} \cdot \sin 2x$;

б) $y = 2\sin^2\sqrt{x} + 2\cos^2\sqrt{x}$;

в) $y = \dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{\left|x+\frac{\pi}{2}\right|} \cdot \cos\dfrac{x}{2}$;

г) $y = \cos^2\sqrt{-x} + \sin^2\sqrt{-x}$.

§ 28. Формулы двойного аргумента

В этом параграфе мы поговорим о формулах тригонометрии, позволяющих выразить $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ через $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Эти формулы называют (для удобства использования) *формулами двойного аргумента*.

Рассмотрим выражение $\sin 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Применим к выражению $\sin(x + x)$ формулу синуса суммы:

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2\sin x \cos x.$$

Итак,

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

Приведём примеры использования формулы синуса двойного аргумента:

$$\sin 8x = 2\sin 4x \cos 4x; \quad \sin\frac{t}{2} = 2\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4};$$

$$\sin\left(2z + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(z + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(z + \frac{\pi}{6}\right).$$

А вот примеры использования формулы синуса двойного аргумента справа налево:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin(\alpha+\beta);$$

$$\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2}\sin 6x.$$

Рассмотрим выражение $\cos 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Применим к выражению $\cos(x + x)$ формулу косинуса суммы:

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Итак,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Приведём примеры использования формулы косинуса двойного аргумента:

$$\cos 64^\circ = \cos^2 32^\circ - \sin^2 32^\circ;$$
$$\cos 7t = \cos^2 3{,}5t - \sin^2 3{,}5t;$$
$$\cos^2 \frac{2x-3y}{2} - \sin^2 \frac{2x-3y}{2} = \cos(2x-3y).$$

Рассмотрим выражение $\operatorname{tg} 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Применим к выражению $\operatorname{tg}(x + x)$ формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Формула тангенса двойного аргумента справедлива лишь для допустимых значений аргумента x, при которых определены $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$, а также отличен от нуля знаменатель дроби, т. е. $1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0$.

Пример 1 Доказать тождество:
а) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$; б) $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ и формулой синуса двойного аргумента:
а) $1 + \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$;
б) $1 - \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x = (\sin x - \cos x)^2$.

Пример 2 Вычислить:
а) $\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)$; б) $\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}$.

Решение. а) $\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)=\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=$

$=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

б) $\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\right)\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{24}\right)\cos\frac{\pi}{12}=$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{8}$.

Пример 3 Решить уравнение $3\sin 2x+\cos 2x=1$.

Решение. Воспользовавшись формулами синуса и косинуса двойного аргумента и представив 1 в виде $\cos^2 x+\sin^2 x$, запишем заданное уравнение так:

$$3\cdot 2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x.$$

Далее имеем:

$$6\sin x\cos x-2\sin^2 x=0;$$
$$2\sin x(3\cos x-\sin x)=0.$$

Значит, либо $\sin x=0$, откуда получаем $x=\pi n$,
либо

$$3\cos x-\sin x=0.$$

Это однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Способ решения таких уравнений мы обсудили в § 24.

Разделим почленно обе части уравнения $3\cos x-\sin x=0$ на $\cos x$; получим:

$$3-\operatorname{tg}x=0,$$
$$\operatorname{tg}x=3,$$
$$x=\operatorname{arctg}3+\pi n.$$

Ответ: $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $x=\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 4* Решить уравнение $5\sin 2x - 11(\sin x + \cos x) + 7 = 0$.

Решение. Положим $y = \sin x + \cos x$. Тогда

$$y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x;$$
$$\sin 2x = y^2 - 1.$$

Относительно новой переменной заданное уравнение принимает следующий вид:

$$5(y^2 - 1) - 11y + 7 = 0.$$

Далее:

$$5y^2 - 11y + 2 = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 0{,}2.$$

Задача, как видите, сводится к решению совокупности двух уравнений:

$$\sin x + \cos x = 2; \quad \sin x + \cos x = 0{,}2.$$

Первое уравнение не имеет решений (подумайте, почему это так), а со вторым уравнением поступим так:

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 0{,}2;$$

$$\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) = 0{,}2;$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10};$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi n.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 5* Доказать, что в любом отрезке $[a; b]$ найдётся точка t такая, что $\sin t$, $\cos t$ — рациональные числа.

Решение. То, что пара $(\sin t; \cos t)$ может состоять из рациональных чисел, вам известно. Если, например, $\sin t = 0$, то $\cos t = \pm 1$; если

$\sin t = \pm\frac{3}{5}$, то $\cos t = \pm\frac{4}{5}$; если $\sin t = \pm\frac{5}{13}$, то $\cos t = \pm\frac{12}{13}$. Речь идёт о другом, о том, что в любом отрезке даже достаточно малой длины найдётся точка t такая, что $\sin t$, $\cos t$ — рациональные числа. Это и требуется доказать.

Пусть l — длина отрезка $[a;\ b]$. Если $l \geqslant \frac{\pi}{2}$, то данному отрезку принадлежит хотя бы одна точка $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в этой точке $\sin t$, $\cos t$ — рациональные числа (и даже целые). Так же обстоит дело, если $l < \frac{\pi}{2}$, но опять данному отрезку принадлежит хотя бы одна точка $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, единственный случай, представляющий интерес, это случай, когда $l < \frac{\pi}{2}$ и оба конца отрезка принадлежат одной четверти числовой окружности. Для определённости возьмём первую четверть.

Идея дальнейших рассуждений состоит в следующем. Имеют место следующие тождества: $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ (ниже, в № 28.17 вам предлагается доказать справедливость этих тождеств, что сравнительно несложно). Эти формулы, выражающие синус и косинус через тангенс половинного аргумента, принято называть *универсальной подстановкой*. Если мы докажем, что в отрезке $[a;\ b]$ есть такая точка $\frac{t}{2}$, в которой $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ — рациональное число, то из указанных выше двух формул будет следовать, что $\sin t$, $\cos t$ — рациональные числа. Приступим.

Рассмотрим рисунок 139. В стандартной модели «Числовая окружность на координатной плоскости» проведём прямую $x = 1$ и отметим в первой четверти окружности точки $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. Из точки O проведём лучи через точки $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$. Они пересекают прямую $x = 1$ в точках M и N соответственно. Рассмотрим треугольник OAM. Величина угла MOA

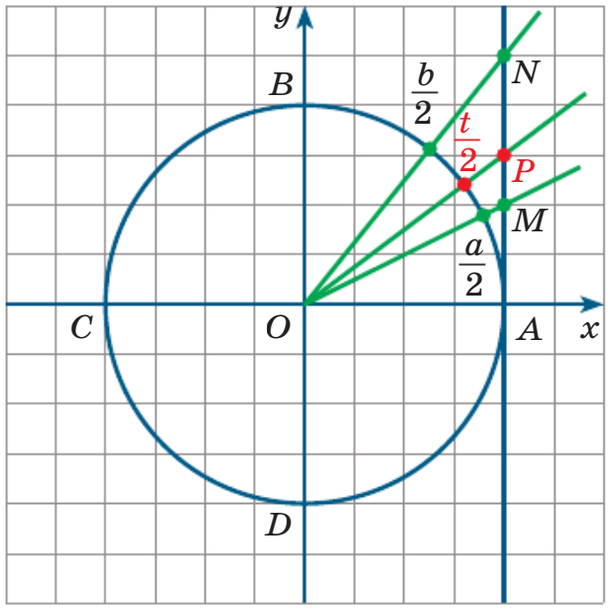


Рис. 139

равна $\frac{a}{2}$ (в радианах), $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{AM}{OA} = \frac{AM}{1} = AM$. Соответственно, $\operatorname{tg}\frac{b}{2} = AN$. На отрезке MN, как на любом отрезке числовой прямой, бесконечно много рациональных чисел, возьмём одно из них — ему соответствует точка P на отрезке MN. Луч OP пересекает окружность в точке $\frac{t}{2}$, значит, $AP = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ — рациональное число.

Итак, мы доказали, что в отрезке $[a; b]$ есть такая точка $\frac{t}{2}$, в которой $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ — рациональное число. Значит, из указанных выше двух формул универсальной подстановки следует, что $\sin t$, $\cos t$ — рациональные числа.

Упражнения

Вычислите.

28.1. а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$;

в) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{8}}$;

г) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

д) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

е) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$.

28.2. а) $\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)^2$;

б) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$;

г) $2\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}$.

28.3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 2t}{\cos t} - \sin t$;

б) $\dfrac{\cos 2t}{\cos t - \sin t} - \sin t$;

в) $\dfrac{2\cos 2t}{\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t}$;

г) $\cos^2 t - \cos 2t$;

д) $\dfrac{\sin 6t}{\cos^2 3t}$;

е) $\dfrac{\sin 3t}{\sin t} - \dfrac{\cos 3t}{\cos t} - 1$.

Докажите тождество.

28.4. а) $2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$;

б) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$;

в) $2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$;

г) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$.

28.5. а) $\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cos 2\alpha$;

б) $\sin 6\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha - 1 = \cos 6\alpha$;

в) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$;

г) $\cos 4\alpha + \sin 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha = 1$.

28.6. Вычислите $\sin 2t$, $\cos 2t$, $\operatorname{tg} 2t$, $\operatorname{ctg} 2t$, если:

а) $\sin t = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

б) $\operatorname{tg} t = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$;

в) $\cos t = -\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$;

г) $\operatorname{ctg} t = -\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$.

Решите уравнение.

28.7. а) $\sin 2x = 2\cos x$;

б) $\dfrac{1}{2}\sin 4x - \cos 2x = 0$;

в) $2\sin x - \sin 2x = 0$;

г) $\sin 4x + \sin 2x = 0$.

28.8. а) $\sin 4x \cos 4x = \dfrac{1}{4}$;

б) $3\sin 2x + \cos 2x = 1$;

в) $\sin 2x \cos 2x = \dfrac{1}{2}$;

г) $2\sin 4x + \cos 4x = 1$.

28.9. Найдите наибольший отрицательный корень (в градусах) уравнения:

а) $\sin x = \dfrac{\sin 67{,}5^\circ \cos 67{,}5^\circ}{\cos^2 22{,}5^\circ - \sin^2 22{,}5^\circ}$;

б) $4\cos x = \dfrac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ}$.

28.10. Решите уравнение и найдите все его корни на заданном отрезке.

а) $3\sin x + \cos 2x = 1$, $x \in [-\pi; 2\pi]$;

б) $4\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$;

в) $\sin^2 x + \cos 2x = \frac{1}{2}$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.

28.11. а) Дано: $\cos 2t = \frac{5}{13}$. Вычислите $\sin^4 t + \cos^4 t$.

б) Дано: $\cos 2t = \frac{5}{13}$. Вычислите $\sin^8 t - \cos^8 t$.

28.12. Вычислите:

а) $\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}$;

б) $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$;

в) $\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}$;

г) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$.

28.13. Решите уравнение:

а) $\sin 2x + 2\sin x = 2 - 2\cos x$;

б) $4\sin 2x + 8(\sin x - \cos x) = 7$.

в) $\sin 2x + 5\sin x + 5\cos x + 1 = 0$;

г) $4 - 4\cos x = \sin 2x - 4\sin x$.

28.14. а) Известно, что $\sin x = 0{,}21$. Вычислите $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$.

б) Известно, что $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Вычислите $\sin^4 x + \cos^4 x$.

в) Известно, что $\sin x + \cos x = 0{,}8$. Вычислите $\sin^3 x + \cos^3 x$.

г) Известно, что $\sin x + \cos x = 0{,}5$. Вычислите $\sin^6 x + \cos^6 x$.

28.15. Докажите тождество:
а) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; б) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

28.16. а) Известно, что $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Вычислите: $\sin 3x$, $\cos 3x$, $\operatorname{tg} 3x$, $\operatorname{ctg} 3x$.

б) Известно, что $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{12}$, $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$. Вычислите: $\sin 3x$, $\cos 3x$, $\operatorname{tg} 3x$, $\operatorname{ctg} 3x$.

28.17. Докажите тождество (*универсальная подстановка*) и укажите область его определения:

а) $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; б) $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

28.18. Воспользовавшись универсальной подстановкой, решите уравнение:
а) $6\sin x + 3\cos x = 1{,}2$; б) $2\sin x + \cos x = 2$.

28.19. Решите неравенство:

а) $\sin x \cos x < -\frac{1}{4}$; в) $\cos^2\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3} > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos^2 3x - \sin^2 3x \geqslant -\frac{1}{3}$; г) $\sin 0{,}2x \cos 0{,}2x \leqslant 0{,}2$.

28.20. Сколько корней имеет данное уравнение на указанном промежутке:
а) $\cos 4x + \cos 2x = 2$, $x \in (0; 10)$;
б) $\cos 4x + \dfrac{10\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 3$, $x \in (-7; 4)$?

Решите уравнение.

28.21. а) $2\cos^3\frac{x}{2} + \sqrt{2}\sin x = 4\cos\frac{x}{2}$; б) $\frac{7}{4}\cos\frac{x}{4} = \cos^3\frac{x}{4} + \sin\frac{x}{2}$.

28.22. а) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$; б) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x$.

28.23. а) $\sqrt{25 - 4x^2}(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$;

б) $\sqrt{49 - x^2}(\sin 2x - 3\cos x) = 0$.

Постройте график функции.

28.24. а) $y = \dfrac{\sin 4x}{\cos 2x}$;

б) $y = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{4}}$;

в) $y = \dfrac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$;

г) $y = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$.

28.25. а) $y = \dfrac{\sqrt{2}\cos 2x}{\cos x - \sin x}$;

б) $y = \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x + \cos 2x} + 2\sin 2x$.

28.26. а) $y = \dfrac{|\sin 2x|}{\sin x}$;

б) $y = \dfrac{\sin 2x}{|\cos x|}$.

Упражнения для повторения

28.27. а) Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 20 % этих стёкол, вторая — 80 %. Первая фабрика выпускает 2 % бракованных стёкол, а вторая — 1 %. Какова вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным?

б) При производстве на фабрике 12 % произведённых чайников имеют какой-либо дефект. При отправке на продажу чайники проходят контроль качества, в ходе которого выявляется 95 % дефектных чайников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный при покупке чайник не имеет дефектов.

28.28. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на чётность:

а) $f(x) = x^3\,|x| + \sin x \cos x$;

б) $f(x) = x^3\sqrt{x} \cdot \sin x$;

в) $f(x) = \dfrac{x^5 \cdot \cos x - x^3}{\sin^3 x}$;

г) $f(x) = 5x^3 - \sin|x|$;

д) $f(x) = x^4 \cdot \cos x - x \operatorname{tg} x$;

е) $f(x) = \dfrac{x^5 \sin x}{x^2 + \cos x}$.

28.29. а) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$. Докажите, что $f(\cos x) = -4\cos x - 2\sin^2 x$.

б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 7 + 3x - 7x^2$. Докажите, что $f(\sin x) = 3\sin x + 7\cos^2 x$.

28.30. Решите уравнение:

а) $\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0$;

б) $(\sin x - 1) \cdot \sqrt{6 + x - x^2} = 0$;

в) $\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{9 - x^2} = 0$;

г) $(\cos x + 1) \cdot \sqrt{3 + x - 2x^2} = 0$.

§ 29. Формулы понижения степени

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, то получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Таким образом, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Значит,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, то получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Таким образом, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Значит,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Для удобства использования полученных формул будем называть их *формулами понижения степени*. Почему так? Потому что в левой части обеих формул тригонометрическая функция представлена во второй степени, а в правой — в первой степени. Но вам может встретиться и другой вариант названия этих формул — *формулы половинного аргумента*. Почему так? Потому что аргумент у тригонометрической функции в левой части обеих формул равен половине аргумента тригонометрической функции в правой части.

Применяя указанные две формулы, будьте внимательны: степень понижается, зато аргумент удваивается.

Пример 1 Доказать тождество $2\sin^2 3t = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6t\right)$.

Решение. Применим к левой части доказываемого тождества формулу понижения степени:

$$2\sin^2 3t = 2 \cdot \frac{1 - \cos 6t}{2} = 1 - \cos 6t.$$

Теперь поработаем с правой частью доказываемого тождества. Используя формулу приведения, находим, что $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6t\right) = -\cos 6t$. Правая часть доказываемого тождества принимает вид $1 - \cos 6t$.

Итак,

$$2\sin^2 3t = 1 - \cos 6t, \quad 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6t\right) = 1 - \cos 6t,$$

значит,

$$2\sin^2 3t = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6t\right),$$

что и требовалось доказать.

Пример 2 Вычислить $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{\pi}{8}$.

Решение.

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4};$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4};$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Ответ: $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Пример 3 Вычислить $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\operatorname{ctg} x = \frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Поступим так: сначала вычислим $\operatorname{tg} x$, затем с его помощью найдём $\cos x$, а, зная $\cos x$, с помощью формул понижения степени найдём синус и косинус половинного аргумента.

1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \frac{4}{3}$.

2) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2$, $\cos^2 x = \frac{9}{25}$, $\cos x = -\frac{3}{5}$ (мы учли, что x принадлежит третьей четверти числовой окружности — так сказано в условии).

3) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{4}{5}$.

Значит, либо $\sin\frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, либо $\sin\frac{x}{2} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

По условию $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, а потому $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$.

Это значит, что $\frac{x}{2}$ находится во второй четверти числовой окружности, а потому $\sin\frac{x}{2} > 0$. Итак,

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

4) $\cos^2\frac{x}{2} = 1 - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$; $\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

5) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} : \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -2$.

6) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\sin\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -2$, $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$.

Пример 4 Сколько корней имеет уравнение $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ в интервале $(0; 2\pi)$?

Решение. Вроде бы напрашивается такой способ решения: извлечь из обеих частей уравнения квадратный корень и получить два более простых уравнения:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

а затем решить каждое из этих двух простейших тригонометрических уравнений, применяя соответствующие формулы.

Но целесообразнее воспользоваться формулой понижения степени:

$$\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)}{2}.$$

Тогда заданное уравнение примет вид $\frac{1 + \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{3}{4}$ и далее $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Как видите, теперь решать придётся не два уравнения, а одно.

Имеем: $4x - \frac{\pi}{3} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$, $4x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. Значит,

либо $4x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $4x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$,

либо $4x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $4x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi n}{2}$.

Итак, получили две серии решений заданного уравнения:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z};\quad x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Осталось выяснить, сколько корней из найденного бесконечного множества содержится в интервале $(0;\ 2\pi)$. Из серии $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ выбираем $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{3}$; всего четыре корня. Из серии $x = \frac{\pi n}{2}$ выбираем $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$; всего три корня.

Ответ: в интервале $(0;\ 2\pi)$ заданное уравнение имеет семь корней.

Упражнения

29.1. Вычислите с помощью формул понижения степени:

а) $\cos\frac{\pi}{12}$; в) $\cos 67{,}5°$; д) $\cos\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin 22{,}5°$; г) $\sin 15°$; е) $\sin\frac{3\pi}{8}$.

Докажите тождество.

29.2. а) $2\cos^2 3\alpha = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6\alpha\right)$;

б) $1 - \cos\alpha = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \cdot (1 + \cos\alpha)$;

в) $2\sin^2 2\alpha = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)$;

г) $\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

29.3. а) $1 + \sin 6\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3\alpha\right)$; в) $1 - \sin 4\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$;

б) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{6}\right) = 1 - \sin\frac{\alpha}{3}$; г) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right) + \sin\frac{\alpha}{2} = 1$.

29.4. Вычислите:

а) $\dfrac{1+\cos 50^\circ+\cos 100^\circ}{\sin 100^\circ+\sin 50^\circ}\cdot \operatorname{tg} 50^\circ$;

б) $\dfrac{1-\sin 20^\circ-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ-\cos 20^\circ}-\operatorname{ctg} 70^\circ$;

в) $\dfrac{1-\cos 10^\circ+\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ-\sin 10^\circ}-\operatorname{tg} 80^\circ$;

г) $\dfrac{1+\sin 40^\circ-\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ+\sin 80^\circ}\cdot \operatorname{ctg} 40^\circ$.

29.5. Упростите выражение $\sqrt{1-\cos 2t}+\sqrt{1+\cos 2t}$, если:

а) $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\,0\right]$; в) $t\in\left[\dfrac{\pi}{2};\,\pi\right]$;

б) $t\in\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$; г) $t\in\left[\pi;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

29.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y=2\cos 6x+\sin^2 3x$; в) $y=2\sin^2 2x-\cos 4x$;

б) $y=\cos^2 6x-2\sin^2 6x$; г) $y=4\sin^2\dfrac{x}{6}-2\cos^2\dfrac{x}{6}$.

29.7. а) Дано: $\sin t=0{,}8$, $\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$. Вычислите: $\sin\dfrac{t}{2}$, $\cos\dfrac{t}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$.

б) Дано: $\operatorname{tg} 2t=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$. Вычислите: $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

в) Дано: $\cos t=-\dfrac{5}{13}$, $\pi<t<\dfrac{3\pi}{2}$. Вычислите: $\sin\dfrac{t}{2}$, $\cos\dfrac{t}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$.

г) Дано: $\operatorname{ctg} 2t=\dfrac{4}{3}$, $0<t<\dfrac{\pi}{2}$. Вычислите: $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

29.8. Решите уравнение:

а) $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$;

б) $\cos^2\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 1$;

в) $\cos^2\frac{x}{2} = 0{,}25$;

г) $\sin^2\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

29.9. Решите уравнение и найдите все его корни на заданном промежутке:

а) $1 - \cos 4x = 2\sin 2x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$;

б) $\cos^2\frac{x}{2} + \cos x = 1$, $x \in [0; 3\pi]$;

в) $2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \sin x$, $x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

г) $1 - \cos x = \sin x \sin\frac{x}{2}$, $x \in [0; 3\pi]$.

29.10. Решите уравнение:

а) $(4\sin^2 x + \sin^2 2x - 3)\sqrt{16 - x^2} = 0$;

б) $(4\cos^2 2x + 8\cos^2 x - 7)\sqrt{9 - x^2} = 0$.

29.11. Постройте график функции: а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \cos^2\frac{x}{4}$.

Решите уравнение.

29.12. а) $8\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin x - 4 = 0$;

б) $4\cos^2 2x + 8\cos^2 x = 7$;

в) $6\cos^2 x - 3 = \sin 2x$;

г) $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$.

29.13. а) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$;

б) $8\sin^6 x + 3\cos 2x + 2\cos 4x + 1 = 0$.

29.14. Решите неравенство: а) $4\cos^2 2x \geqslant 3$; б) $4\sin^2\frac{x}{4} \leqslant 1$.

29.15. а) Известно, что $\sin^2 x = \sin y \cos y$. Докажите, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2y\right) = 1.$$

б) Известно, что $\cos^2\frac{x}{2} = \sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$. Докажите, что

$$\sin(\pi - y) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1.$$

29.16. Вычислите $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, если:

а) $2x = \arccos\left(-\frac{5}{13}\right)$;

б) $2x = \arcsin 0{,}6$;

в) $2x = \operatorname{arctg} 0{,}75$;

г) $2x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)$.

Упражнения для повторения

29.17. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{54x} - 4\sqrt[3]{16x} + 15\sqrt[3]{250x}$;

б) $\sqrt[3]{24x^5} + 4\sqrt[3]{81x^5} - 5\sqrt[3]{192x^5}$;

в) $4\sqrt[3]{40x} - 2\sqrt[3]{135x} + 3\sqrt[3]{320x}$;

г) $\sqrt[3]{432xy^4} + 3\sqrt[3]{250xy^4} - 8\sqrt[3]{54xy^4}$.

29.18. Запишите числа в порядке возрастания:

а) $\sqrt{3}$; $\cos 3$; $\sin 1$; $\sin 0{,}5$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg} 5$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

в) $\sqrt{2}$; $\sin 3$; $\cos 1$; $\cos 0{,}5$;

г) $\sqrt{3}$; $\operatorname{tg} 1$; $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$; $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$.

29.19. Укажите все значения x, при которых определено выражение:

а) $\sqrt{\sqrt{2}\cos x - 1}$;

б) $\frac{5}{\sqrt{\cos x} - 1}$;

в) $\sqrt{2\sin x - 1}$;

г) $\frac{3}{\sqrt{\sin x} - 1}$.

29.20. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 2\cos 2x, \text{ если } x < 0, \\ x^2 + 2, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \cos 3x, \text{ если } x < -\pi, \\ \sqrt{x + \pi} - 1, \text{ если } x \geqslant -\pi. \end{cases}$

§ 30. Формулы сложения (вычитания) косинусов (синусов)

Вы знаете, что одним из основных методов решения тригонометрических уравнений является метод разложения на множители. В этом параграфе речь пойдёт о четырёх формулах, особенно полезных при решении тригонометрических уравнений, поскольку они позволяют сумму или разность синусов или косинусов разложить на множители. Замечательно, что эти новые четыре формулы могут быть получены из уже известных формул (§ 26), которые мы запишем, поменяв наименования переменных:

$$\cos(z - t) = \cos z \cos t + \sin z \sin t, \quad (1)$$
$$\cos(z + t) = \cos z \cos t - \sin z \sin t, \quad (2)$$
$$\sin(z - t) = \sin z \cos t - \cos z \sin t, \quad (3)$$
$$\sin(z + t) = \sin z \cos t + \cos z \sin t. \quad (4)$$

Теорема 1 («сумма синусов»). Сумма синусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих аргументов на косинус их полуразности.

Доказательство. Почленно сложим равенства (4) и (3):

$$\sin(z + t) + \sin(z - t) =$$
$$= (\sin z \cos t + \cos z \sin t) + (\sin z \cos t - \cos z \sin t) = 2 \sin z \cos t.$$

Итак, $\sin(z + t) + \sin(z - t) = 2 \sin z \cos t$.

Обозначим $x = z + t$, $y = z - t$. Тогда $x + y = 2z$, $x - y = 2t$, $z = \frac{x + y}{2}$, $t = \frac{x - y}{2}$ и, значит,

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}. \quad (5)$$

Теорема 2 («разность синусов»). Разность синусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих аргументов на косинус их полусуммы.

Доказательство. Можно действовать, как и выше, вычитая равенство (3) из равенства (4). Но можно действовать и быстрее. В равенство (5) вместо y подставим $-y$. Учитывая нечётность синуса, получим $\sin x + \sin(-y) = 2\sin\dfrac{x+(-y)}{2}\cos\dfrac{x-(-y)}{2}$, или

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}. \qquad (6)$$

Теорема 3 («сумма косинусов»). Сумма косинусов двух аргументов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности этих аргументов.

Доказательство. Почленно сложим равенства (2) и (1):

$$\cos(z+t) + \cos(z-t) =$$
$$= (\cos z\cos t - \sin z\sin t) + (\cos z\cos t + \sin z\sin t) = 2\cos z\cos t.$$

Итак, $\cos(z+t) + \cos(z-t) = 2\cos z\cos t$.

Действуя далее, как в теореме 1, получим:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \qquad (7)$$

Теорема 4 («разность косинусов»). Разность косинусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на синус полуразности этих аргументов, взятому с противоположным знаком.

Доказательство. Из равенства (2) почленно вычтем равенство (1):

$$\cos(z+t) - \cos(z-t) =$$
$$= (\cos z\cos t - \sin z\sin t) - (\cos z\cos t + \sin z\sin t) = -2\sin z\sin t.$$

Итак, $\cos(z+t) - \cos(z-t) = -2\sin z\sin t$.

Вновь введя обозначения:

$$x = z + t,$$
$$y = z - t,$$
$$z = \frac{x + y}{2},$$
$$t = \frac{x - y}{2},$$

получим:

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}. \qquad (8)$$

Итак, формулы (1)—(4) косинуса (или синуса) суммы (или разности) двух аргументов позволили нам получить формулы (5)—(8) преобразований суммы (или разности) косинусов (или синусов) двух аргументов в произведение.

Отметим, что формулу (8) иногда записывают так:

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{y - x}{2}. \qquad (8')$$

Тогда в правой части говорят о произведении синуса полусуммы на синус *противоположной* полуразности.

Пример 1 Преобразовать в произведение:

а) $\sin 7x + \sin 3x$;

б) $\sin 19^\circ + \sin 41^\circ$.

Решение. а) $\sin 7x + \sin 3x = 2\sin\frac{7x + 3x}{2}\cos\frac{7x - 3x}{2} =$

$= 2\sin 5x\cos 2x.$

б) $\sin 19^\circ + \sin 41^\circ = 2\sin\frac{19^\circ + 41^\circ}{2}\cos\frac{19^\circ - 41^\circ}{2} =$

$= 2\sin 30^\circ\cos(-11^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2}\cos 11^\circ = \cos 11^\circ.$

Ответ: а) $2\sin 5x\cos 2x$; б) $\cos 11^\circ$.

Пример 2 Преобразовать в произведение:
а) $\cos 5t + \cos 7t$; б) $\cos(2x - 3y) - \cos(4x - y)$.

Решение. а) $\cos 5t + \cos 7t = 2\cos\dfrac{5t + 7t}{2}\cos\dfrac{5t - 7t}{2} =$

$= 2\cos 6t \cos(-t) = 2\cos 6t \cos t.$

б) $\cos(2x - 3y) - \cos(4x - y) =$

$= -2\sin\dfrac{(2x - 3y) + (4x - y)}{2}\sin\dfrac{(2x - 3y) - (4x - y)}{2} =$

$= -2\sin(3x - 2y)\sin(-x - y) = 2\sin(x + y)\sin(3x - 2y).$

Ответ: а) $2\cos 6t \cos t$; б) $2\sin(x + y)\sin(3x - 2y)$.

В следующих примерах мы покажем, как полученные в этом параграфе четыре формулы используются при решении тригонометрических уравнений.

Пример 3 Решить уравнение:
а) $\sin x + \sin 3x = 0$; б) $\cos 5x + \sin 3x = 0$.

Решение.
а) Имеем:

$$2\sin\frac{x + 3x}{2}\cos\frac{x - 3x}{2} = 0;$$

$$\sin 2x \cos x = 0.$$

Значит, либо $\sin 2x = 0$, $2x = \pi n$, $x = \dfrac{\pi n}{2}$; либо $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$. Обратите внимание: серия $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ содержится в серии $x = \dfrac{\pi n}{2}$, так что в ответе можно ограничиться только первой полученной серией $x = \dfrac{\pi n}{2}$.

б) Чтобы задача свелась к сложению *одноимённых* функций, воспользуемся формулой приведения $\sin 3x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right)$:

$$\cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0; \quad 2\cos\frac{5x + \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{2}\cos\frac{5x - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{2} = 0;$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad 4x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}.$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4 Решить уравнение:

а) $\cos x - \cos 3x + \cos 5x = 0$; б) $5\sin x - 12\cos x + 13\sin 3x = 0$.

Решение.

а) $(\cos x + \cos 5x) - \cos 3x = 0$; $2\cos 3x \cos 2x - \cos 3x = 0$;

$$\cos 3x(2\cos 2x - 1) = 0;$$

$$\cos 3x = 0,\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3};$$

$$2\cos 2x - 1 = 0,\ \cos 2x = \frac{1}{2},\ 2x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

б) Воспользуемся приёмом, о котором мы говорили в § 26 (см. пример 5): поскольку $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, разделим почленно обе части уравнения на 13, получим:

$$\frac{5}{13}\sin x - \frac{12}{13}\cos x + \sin 3x = 0.$$

Далее, поскольку $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$, существует такое число t, что $\cos t = \frac{5}{13}$, $\sin t = \frac{12}{13}$. Что это за число? Например, $\arcsin\frac{12}{13}$. Теперь выражение $\frac{5}{13}\sin x - \frac{12}{13}\cos x$ будет выглядеть так:

$$\sin x \cos t + \cos x \sin t,$$

т. е. $\sin(x + t)$.

В итоге заданное уравнение нам удалось привести к довольно простому виду:

$$\sin(x + t) + \sin 3x = 0.$$

Имеем:

$$2\sin\frac{x + t + 3x}{2}\cos\frac{x + t - 3x}{2} = 0;$$

$$\sin\left(2x + \frac{t}{2}\right)\cos\left(x - \frac{t}{2}\right) = 0;$$

$$\sin\left(2x + \frac{t}{2}\right) = 0,\ 2x + \frac{t}{2} = \pi n,\ x = -\frac{t}{4} + \frac{\pi n}{2};$$

$$\cos\left(x - \frac{t}{2}\right) = 0,\ x - \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = -\frac{t}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $t = \arcsin\frac{12}{13}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $t = \arcsin\frac{12}{13}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

30.1. Представьте в виде произведения.

а) $\sin 56° + \sin 32°$;
б) $\cos 84° + \cos 36°$;
в) $\sin 76° - \sin 48°$;
г) $\cos 68° - \cos 24°$.

30.2. а) $\sin\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{12}$; в) $\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{10}$;

б) $\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{15}$; г) $\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{5\pi}{13}$.

30.3. а) $\sin 4t+\sin 2t$; в) $\cos t+\cos 5t$;

б) $\cos(t+2z)-\cos(3t-z)$; г) $\sin(t-3z)+\sin(5t+7z)$.

30.4. а) $\operatorname{tg}55^\circ+\operatorname{tg}15^\circ$; в) $\operatorname{tg}70^\circ+\operatorname{tg}20^\circ$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}-\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$.

30.5. а) $\frac{1}{2}-\cos\alpha$; в) $\cos\alpha+\sin\alpha$; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\alpha$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\alpha$; г) $1+2\cos\alpha$; е) $\cos\alpha-\sin\alpha$.

30.6. а) $\sin 3\alpha+\sin 7\alpha+2\sin 5\alpha$;
б) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha$;
в) $\cos 4\alpha+\cos 2\alpha+2\cos\alpha$;
г) $\cos 2\alpha-\cos 4\alpha-\cos 6\alpha+\cos 8\alpha$.

30.7. Вычислите:

а) $\frac{\cos 42^\circ+\cos 48^\circ}{\cos 3^\circ}$; в) $\frac{\sin 42^\circ+\sin 48^\circ}{\sin 87^\circ}$;

б) $\frac{\sin 52^\circ+\sin 38^\circ}{\cos 52^\circ+\cos 38^\circ}$; г) $\frac{\cos 63^\circ-\cos 27^\circ}{\sin 63^\circ-\sin 27^\circ}$.

30.8. Докажите, что верно равенство:
а) $\cos 115^\circ-\cos 35^\circ+\cos 65^\circ+\cos 25^\circ=\sin 5^\circ$;
б) $\sin 87^\circ-\sin 59^\circ+\sin 61^\circ-\sin 93^\circ=\sin 1^\circ$.

30.9. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$;

б) $\frac{\cos 2\alpha+\cos 8\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 8\alpha}=\operatorname{ctg}3\alpha\cdot\operatorname{ctg}5\alpha$;

в) $\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$;

г) $\frac{\sin 6\alpha-\sin 2\alpha}{\cos 6\alpha-\cos 2\alpha}=-\operatorname{ctg}4\alpha$.

Решите уравнение.

30.10. а) $\sin x + \sin 3x = 0$;
б) $\cos 12x - \cos 4x = 0$;
в) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x$;
г) $\cos x + \cos 5x = 0$;
д) $\sin 3x - \sin 17x = 0$;
е) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$.

30.11. а) $\sin 6x = \cos 2x$;
б) $\sin(\pi - x) = \cos(\pi + 2x)$;
в) $\cos(5\pi - 3x) = \sin(7\pi + 5x)$;
г) $\cos 3x = \sin 7x$;
д) $\sin(\pi + 6x) = \cos(\pi + 2x)$;
е) $\cos(9\pi + 7x) = \sin(3\pi - 5x)$.

30.12. а) $1 + \cos 4x = 2\sin^2 5x$;
б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 5x = 0$;
в) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{ctg} 3x$;
г) $\cos^2 3x = \cos^2 5x$;
д) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 4x = 0$;
е) $\operatorname{ctg} \frac{5x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0$.

30.13. Сколько корней имеет на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение:
а) $\sin 2x + \sin 8x = \cos 3x$;
б) $2\cos^2 3x - 1 = \sin 4x$?

30.14. Решите уравнение и найдите все его корни на указанном промежутке:
а) $2\sin^2 x + \cos 3x = 1$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;
б) $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$, $x \in [-\pi; \pi]$;
в) $\sin 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$, $x \in (0; 2{,}5)$;
г) $2\sin^2 2x - 1 = \cos^2 3x - \sin^2 3x$, $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;
д) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$, $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$;
е) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$, $x \in (-0{,}5; 3)$.

30.15. При каких значениях x числа a, b и c образуют арифметическую прогрессию, если:
а) $a = \cos 7x$, $b = \cos 2x$, $c = \cos 11x$;
б) $a = \sin 3x$, $b = \cos x$, $c = \sin 5x$?

Решите уравнение.

30.16. а) $\sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x$;

б) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$.

30.17. а) $2\sin^2 3x + \sin^2 4x = 1 + \cos^2 4x$;

б) $\cos^2 6x + \cos^2 8x + \cos^2 10x = 1{,}5$.

30.18. а) $\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\cos 13x$;

б) $2\sin 17x + \sin 5x = \sqrt{3}\cos 5x$.

30.19. а) $3\sin x - 5\sin 7x = 4\cos x$;

б) $8\sin 2x + 17\cos 3x = 15\cos 2x$.

Упражнения для повторения

30.20. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^3 \cdot (2a^{-2}b^{-3})^5}{4a^4 \cdot (2ab^{-4})^3}$;

б) $\dfrac{(5a)^3 \cdot (3a^{-3}b^4)^3}{(3a)^2 \cdot (25a^{-4}b^5)^2}$;

в) $\dfrac{(3a^{-4}b^{-3})^2 \cdot 8a^3}{27a^{-5}(2a^3b^4)^3}$;

г) $\dfrac{a^5 \cdot (5a^3b^2)^3}{(2a^2b^3)^{-3} \cdot (5a)^5}$.

30.21. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \cos t \geqslant \frac{1}{2}, \\ \sin t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos t \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin t \geqslant \frac{1}{3}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos t \leqslant \frac{1}{3}, \\ \sin t \geqslant -0{,}6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \cos t \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin t \leqslant \frac{1}{2}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \cos t \geqslant \frac{2}{5}, \\ \sin t \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \cos t \geqslant -0{,}7, \\ \sin t \geqslant \frac{1}{4}. \end{cases}$

30.22. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Найдите:
а) основной период функции;
б) значения аргумента из промежутка $[0; \pi]$, при которых $f(x) = 0$; $f(x) = -3$; $f(x) = 3$.

30.23. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x + \pi, \text{ если } x \leqslant -\pi, \\ \sin 2x, \text{ если } -\pi < x < \pi, \\ -x - \pi, \text{ если } x \geqslant \pi. \end{cases}$$

§ 31*. Формулы преобразования произведения синусов (косинусов) в сумму

В предыдущем параграфе речь шла о преобразовании суммы (разности) синусов (косинусов) в произведение. Но любая математическая формула применяется как справа налево, так и слева направо. В частности, бывает полезно преобразовывать произведение тригонометрических функций в сумму. Об этом и пойдёт речь в настоящем параграфе.

При доказательстве теоремы 1 в § 30 мы получили следующее соотношение:

$$\sin(z + t) + \sin(z - t) = 2\sin z \cos t.$$

Значит,

$$\sin z \cos t = \frac{1}{2}(\sin(z + t) + \sin(z - t)). \qquad (1)$$

При доказательстве теоремы 3 в § 30 мы получили следующее соотношение:

$$\cos(z + t) + \cos(z - t) = 2\cos z \cos t.$$

Значит,

$$\cos z \cos t = \frac{1}{2}(\cos(z+t) + \cos(z-t)). \qquad (2)$$

При доказательстве теоремы 4 из § 30 мы получили следующее соотношение:

$$\cos(z+t) - \cos(z-t) = -2\sin z \sin t.$$

Значит,

$$\sin z \sin t = -\frac{1}{2}(\cos(z+t) - \cos(z-t)). \qquad (3)$$

Вот так выглядят три формулы, позволяющие преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму.

Пример 1 Преобразовать произведение в сумму:
а) $\sin 5x \cos 3x$; б) $\cos(3x - y)\cos(x - 3y)$; в) $\sin 5x \sin 3x$.

Решение. а) Воспользуемся формулой (1):

$$\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin(5x + 3x) + \sin(5x - 3x)) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x).$$

б) Воспользуемся формулой (2):

$$\cos(3x - y)\cos(x - 3y) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos((3x - y) + (x - 3y)) + \cos((3x - y) - (x - 3y)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(4x - 4y) + \cos(2x + 2y)).$$

в) Воспользуемся формулой (3):

$$\sin 5x \sin 3x = -\frac{1}{2}(\cos(5x + 3x) - \cos(5x - 3x)) = -\frac{1}{2}(\cos 8x - \cos 2x).$$

Ответ: а) $\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$; б) $\frac{1}{2}(\cos(4x - 4y) + \cos(2x + 2y))$; в) $-\frac{1}{2}(\cos 8x - \cos 2x)$.

Пример 2 Решить уравнение $\sin 3x \cos x = \sin 2{,}5x \cos 1{,}5x$.

Решение. И в левой, и в правой части уравнения воспользуемся формулой (1), опустив в обоих случаях коэффициент $\frac{1}{2}$:

$$\sin 4x + \sin 2x = \sin 4x + \sin x.$$

А дальше всё довольно просто:

$$\sin 2x - \sin x = 0;$$
$$2\sin x \cos x - \sin x = 0;$$
$$\sin x(2\cos x - 1) = 0;$$
$$\sin x = 0, \quad x = \pi n;$$
$$2\cos x - 1 = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

Представьте в виде суммы синусов или косинусов.

31.1. а) $\sin 48^\circ \sin 22^\circ$; в) $\sin 56^\circ \cos 18^\circ$;

б) $\sin\frac{3\pi}{12}\cos\frac{\pi}{8}$; г) $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{12}$.

31.2. а) $\cos(\alpha + 2\beta)\cos\beta$; в) $\sin(2\alpha + \beta)\sin 2\beta$;

б) $\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$; г) $\cos(\alpha - \beta)\cos(2\alpha + 3\beta)$.

31.3. а) $\sin 12^\circ \cos 10^\circ \cos 8^\circ$; в) $\sin 38^\circ \cos 28^\circ \cos 10^\circ$;

б) $4\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$; г) $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{24}$.

31.4. Докажите тождество:

а) $\sin\alpha(1 + 2\cos 2\alpha) = \sin 3\alpha$;

б) $\sin 2\alpha \sin\alpha + \frac{1}{2}\cos 3\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha$;

в) $4\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = 1$;

г) $\cos 2\alpha(2\cos 4\alpha - 1) = \cos 6\alpha$.

31.5. Дана функция $y = f(x)$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции, если:

а) $f(x) = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{24}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$;

б) $f(x) = 0{,}5\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

31.6. Проверьте равенство:

а) $8\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \sqrt{3}$;

б) $\sin 2t + 2\sin\left(\frac{3\pi}{8} - t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8} + t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos 2t - 2\cos\left(\frac{5\pi}{12} - t\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12} + t\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $4\sin t \cos\left(\frac{\pi}{6} - t\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right) - \sin 3t = 0$.

31.7. Решите уравнение:

а) $\sin 3x \sin 6x = \sin 8x \sin 5x$;

б) $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$;

в) $\cos 4x \cos 2x = \sin 3x \sin 5x$;

г) $\sin 6x \sin 2x = \sin 5x \sin 3x - \sin 2x$.

31.8. Решите уравнение и найдите наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения:

а) $\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos 3x \cos 5x$;

б) $\sin 3x \cos x = \sin x \cos 3x$;

в) $\sin 6x \cos 2x = \sin\frac{11x}{2}\cos\frac{3x}{2}$;

г) $\sin 7x \sin 2x = 2\sin 7x \sin x \cos x$.

31.9. Вычислите:

а) $\cos 7^\circ \cos 3^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 5^\circ$;

б) $\cos 80^\circ \cos 40^\circ + \sin^2 20^\circ$;

в) $\cos 5^\circ \cos 55^\circ \cos 65^\circ$;

г) $\sin 40^\circ \cos 10^\circ \cos 70^\circ$.

31.10. Решите неравенство:

а) $\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\leqslant 0$;

б) $\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{3\pi}{8}\right)>0$;

в) $\cos\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)\cos\left(x-\frac{7\pi}{12}\right)>0$;

г) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{8}\right)<0$.

31.11. Постройте график функции:

а) $y=4\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)$;

б) $y=\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

31.12. Решите уравнение:

а) $\left(\sin 2x\sin x-\cos^2\frac{x}{2}\right)\sqrt{6+x-2x^2}=0$;

б) $(\sin 3x\cos x-\sin 2x)\sqrt{2+x-x^2}=0$;

в) $(\cos 3x\cos x+\sin^2 2x)\sqrt{3+2x-x^2}=0$;

г) $(\cos 5x\sin x+\sin 4x)\sqrt{-x^2-x+2}=0$.

31.13. Сравните числа a и b:

а) $a=\sin 2\sin 5$, $b=\cos 6\cos 9$;

б) $a=\sin 5\cos 4$, $b=\sin 7\cos 2$.

31.14. Докажите неравенство:

а) $\sin(5x+3)\cos(5x-3)>\sin(5x+2)\cos(5x-10)$;

б) $\cos(8x+5)\cos(8x-5)<\cos(8x+3)\cos(8x-3)$.

31.15. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\sin\frac{2x+3y}{2}\cos\frac{2x-3y}{2}=\frac{3}{4},\\ \sin\frac{2x-3y}{2}\cos\frac{2x+3y}{2}=\frac{1}{4};\end{cases}$

б) $\begin{cases}\cos\frac{5x+y}{2}\cos\frac{5x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin\frac{5x-y}{2}\sin\frac{5x+y}{2}=0.\end{cases}$

Упражнения для повторения

31.16. а) Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 кг изюма, если виноград содержит 90 % воды, а изюм — 10 %?
б) В 1 л воды растворили 1 кг сахара и варят сироп. При кипении раствора вода испаряется. Сколько получится сиропа, содержащего 62,5 % сахара?

31.17. Решите уравнение:
а) $\sqrt{x+5}-2=\sqrt{x-3}$;
б) $(2x-1)\sqrt{x^2+2}=2x^2-3x+1$;
в) $\sqrt{2x-1}=2+\sqrt{x-4}$;
г) $(2x+3)\sqrt{x^2+1}=2x^2-x-6$.

31.18. Известно, что $\sin t=0{,}3$. Вычислите:
а) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)$;
г) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$;
б) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$;
д) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)$;
в) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)$;
е) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)$.

31.19. Дана функция $y=f(x)$, где $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right)$. Найдите:
а) основной период функции;
б) значения аргумента из промежутка $[-2\pi;\ 4\pi]$, при которых $f(x)=0$; $f(x)=-2$; $f(x)=2$;
в) значение параметра p, при котором уравнение $f(x)=1$ имеет ровно один корень на отрезке $[-p;\ p]$.

Итак, в главе 3

В этой главе мы получили достаточно много формул тригонометрии. Составим общий список этих формул.

1. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:

1) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$;

2) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$;

3) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$;

4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

5) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

6) $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

2. Формулы, связывающие функции аргументов, из которых один вдвое больше другого:

1) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$;

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

3) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

4) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$;

5) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

3. Формулы сложения (вычитания) аргументов:

1) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$;

2) $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$;

3) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;

4) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$;

5) $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$;

6) $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

4. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

1) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;

2) $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$;

3) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;

4) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

5. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

1) $\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$;

2) $\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$;

3) $\sin x\sin y = -\dfrac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$.

6. Формулы приведения (см. правило в § 25).

Тест

1. Укажите неверные равенства.

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = \sin x$

б) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

в) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right) = \operatorname{tg} x$

г) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right) = -\cos x$

2. Установите соответствие между тригонометрическим выражением и его значением.

А. $\sin 495°$ Б. $\operatorname{tg} 570°$ В. $\cos(-420°)$

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 2) $\dfrac{1}{2}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3. Найдите значение $\cos\frac{41\pi}{3}$.

а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $-0{,}5$ в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ г) $0{,}5$

4. Упростите выражение $\frac{16\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}$.

5. Найдите значение выражения $\frac{36}{\sin^2 54^\circ+\cos^2 594^\circ}$.

6. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{25}$.

7. Вычислите $\frac{1}{17}\cos 2t$, если $\cos t=0{,}4$.

8. Вычислите $\cos\frac{5\pi}{24}\cos\frac{11\pi}{24}-\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}$.

а) $-0{,}5$ б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ г) 0

9. Решите уравнение $\sin 7x+\sin x=0$.

10. а) Решите уравнение $\cos 2x=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

б) Укажите все корни данного уравнения на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Из истории математики

Тригонометрические формулы, которые приведены в этой главе, по существу, были известны учёным многих древних цивилизаций. Впрочем, прямой перевод этих утверждений и формул на современный язык всегда вызывает заметные сложности в силу различий и обозначений, и самих подходов к определению и использованию научных терминов. Ведь сами обозначения sin, cos, tg, ctg и т. п. утвердились только к концу XVIII в. после появления работ Леонарда Эйлера.

Ранее многие математики вычисляли не сами значения тригонометрических функций угла, а значения хорд окружностей, опирающихся на угол. Например, в Древней Греции широко использовали тот факт, что квадрат диаметра равен сумме квадрата хорды и квадрата хорды, опирающейся на дополнительный (до развёрнутого) угол, т. е. версию теоремы Пифагора и основного тригонометрического тождества.

Связь между косинусом удвоенного угла и синусом самого угла (см. § 28) была хорошо известна уже Архимеду (287—212 до н. э.). Эти же соотношения, как и формулы приведения для углов от 0° до 90° (или до 180°), широко применялись в Древней Индии. Например, Ариабхата (476—550) из тождества $\text{sinvers}\, 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, или, в наших обозначениях, $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ получал значения синусов для 45°, 30°, 22,5°, 15°, 7,5°, 3,75°... . Далее по формулам приведения находил синусы дополнительных углов 86,25°, 82,5°, 75°, 67,5°, ..., потом синусы половин этих углов, дополнений половин и т. д. Позже Бхаскара II (1114—1185) использовал формулы синуса и косинуса суммы и разности углов для получения таблиц синусов с шагом в 1°.

Арабские учёные X—XII вв., познакомившись с индийскими «сиддхантами», довели искусство тригонометрических вычислений до удивительного совершенства: их вычисления были точны до восьмого десятичного знака после запятой. Им хорошо был известен способ нахождения синуса угла по его тангенсу (см. § 28). Работы арабских математиков сделали тригонометрию отдельной наукой, а переводы их работ стали основой для развития тригонометрии в средневековой Европе.

Регионтан перевёл на латынь работы Клавдия Птолемея и труды арабских математиков, составил тригонометрические таблицы для углов с шагом в 1 минуту. После его основного труда «Пять книг о треугольниках всех видов», напечатанного в 1533 г., плоская и сферическая тригонометрия заняли прочное место в европейской математике. Отметим, что у него радиус тригонометрического круга равнялся 10 000 000 для того, чтобы ответы для синусов и косинусов были бы целыми.

Тригонометрия сыграла существенную роль в появлении десятичных дробей (С. Стевин, «Thiende», 1585 г.) и логарифмов (Дж. Непер, «Описание удивительной таблицы логарифмов», 1614 г.). Семизначные таблицы Непера были таблицами логарифмов именно *тригонометрических* функций — синусов, косинусов и тангенсов для углов от 0° до 90° с шагом 1°.

Франсуа Виет, считающийся одним из создателей современной алгебры, по существу первым стал систематически переходить от *logistica numerosa* к *logistica speciosa*, т. е. кратко — от чисел к символам. Один из его основных трудов, «Математический канон» (1579 г.), был посвящён именно тригонометрии. Виет, в частности, свёл задачу о *трисекции угла* к кубическому уравнению, которое решал с помощью тригонометрических формул. Введение буквенных выражений позволило Виету в 1593 г. получить формулы для синусов и косинусов кратных углов, т. е. для $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$. Используя сведения о связи между функциями удвоенного угла и функциями самого угла, он получил замечательную формулу

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots,$$

одну из первых формул *бесконечных* произведений.

В работах Г. Лейбница начала XVIII в. было отмечено, что синусы и косинусы, как функции, не являются ни многочленами, ни рациональными функциями, а дают примеры функций нового типа, *трансцендентных* функций. После работ Л. Эйлера тригонометрия как самостоятельная наука уже практически полностью сложилась и в XIX в. в основном перешла в разряд учебных, а не научных дисциплин. Перечень основных тригонометрических формул, пожалуй, неизменен с тех пор, и в главе 3 приведён, разумеется, не полностью, а ограничен только базовыми фактами. Развёрнутый список тригонометрических формул можно найти, например, в Википедии.

Ответы

Глава 1

§ 1 **1.10.** г) $\pm\frac{\pi}{5}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{8}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; е) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **1.12.** г) Первой четверти; д) первой четверти; е) четвёртой четверти. **1.13.** а) 4; б) 1; в) 3; г) 3. **1.14.** в) $\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi n}{6}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **1.15.** а) 1; б) 2; в) 7; г) 13; д) 37; е) 62. **1.16.** а) 17:15; б) 23:30; в) 5:45; г) 3:05; д) 8:10; е) 18:15. **1.17.** а) 90; б) 180; в) 150; г) 330; д) 390; е) 72. **1.18.** а) 30; б) 150; в) 225; г) 397,5; д) 652,5; е) 1765. **1.19.** а) 0; б) 30; $\frac{\pi}{6}$; в) 105; $\frac{7\pi}{12}$; г) 75; $\frac{5\pi}{12}$; д) 127,5; $\frac{17\pi}{24}$; е) 155; $\frac{31\pi}{36}$. **1.20.** г) 13 ч $5\frac{5}{11}$ мин; д) 14 ч $10\frac{10}{11}$ мин; е) 22. **1.21.** а) $43\frac{7}{11}$ мин; б) $109\frac{1}{11}$ мин; в) 240 мин; г) $10\frac{10}{11}$ мин; д) $141\frac{9}{11}$ мин; е) $207\frac{3}{11}$ мин. **1.23.** б) Во 2-м подъезде на 7-м этаже. **1.24.** г) 1; 3; 9; д) 1; 2; 4; 8; е) 1; 2; 4. **1.25.** б) $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=6$; в) $(-6;\,1)$, $(-4;\,2)$, $(-1;\,6)$, $(0;\,3)$, $(1;\,2)$, $(2;\,3)$, $(4;\,4)$, $(6;\,5)$; г) $p=2$; $5<p<6$.

§ 2 **2.4.** б) $\frac{11\pi}{6}$; г) $\frac{3\pi}{4}$; е) $\frac{4\pi}{3}$. **2.5.** в) $-\frac{5\pi}{3}$; г) $-\frac{3\pi}{4}$. **2.8.** в) $x>0$, $y<0$; г) $x>0$, $y<0$. **2.9.** г) $x>0$, $y>0$; д) $x>0$, $y>0$; е) $x<0$, $y<0$. **2.10.** г) $x>0$, $y<0$; д) $x<0$, $y<0$; е) $x<0$, $y>0$. **2.11.** в) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **2.12.** в) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **2.13.** г) 4; д) 8; е) 6. **2.17.** б) $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=5$; в) $-6<x<-2$, $4<x\leqslant 5$; г) $-4\leqslant p<-2$; $p=5$.

§ 3 **3.2.** в) $\frac{\pi}{4}+2\pi k\leqslant t\leqslant\pi(1+2k)$, $k\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **3.3.** в) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<t<\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k<t<\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **3.4.** б) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k<t<\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$;

е) $2\pi k < t < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **3.5.** б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3.6. б) $\pi + 2\pi k < t < 2\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

е) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **3.7.** г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

д) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{11\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{13\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3.8. е) Таких точек нет. **3.10.** г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

д) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3.14. а) $p = \pm 2\sqrt{2}$; б) $p = 0$; $p = 8$.

§ 4 **4.7.** в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) -1. **4.8.** в) $\frac{5 + 4\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$. **4.11.** в) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) нет корней; е) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **4.12.** г) Нет корней; д) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **4.13.** г) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

д) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **4.14.** б) 1; 2. **4.16.** г) Да; д) да; е) нет. **4.18.** г) +;

д) +; е) −. **4.19.** г) +; д) +; е) 0. **4.20.** г) $\cos\frac{\pi}{9} > \cos\frac{\pi}{7}$; д) $\cos 1 < \sin 1$;

е) $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right) > \cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$. **4.21.** г) $\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$; $\sin\frac{8\pi}{7}$; $\sin(-5\pi)$; $\sin\frac{7\pi}{9}$; $\sin\frac{2\pi}{3}$; $\sin\frac{5\pi}{11}$;

д) $\cos 3$; $\cos 4$; $\cos 7$; $\cos 6$; е) $\cos 3$; $\sin 5$; $\sin 4$; $\cos 2$. **4.22.** б) 1.

4.27. в) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4.28. в) $\frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3} \leqslant t \leqslant \frac{11\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} < t < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4.29. в) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4.30. а) 4; б) 13; в) 12; г) 11; д) 9; е) 13. **4.31.** а) 10; б) 14; в) 9; г) 8; д) 8; е) 13.
4.32. а) 5; б) 7; в) 20; г) 6; д) 12; е) 18. **4.33.** а) 2; б) 0; 2. **4.34.** а) 1,5; б) 0,5.

4.35. $\left(1;\ \frac{\pi n}{2}\right)$, $\left(-1;\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.38.** б) 1 %. **4.39.** в) 4; г) -1.

§ 5 **5.6.** в) 5; г) $\frac{1}{2}$. **5.7.** в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-1\frac{1}{6}$. **5.8.** г) $-$; д) $-$; е) $+$. **5.10.** г) $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{2\pi}{3}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **5.11.** г) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **5.12.** в) $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **5.13.** г) $(21; +\infty)$; д) $(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$; е) $(-\infty; -2{,}5] \cup [2{,}5; +\infty)$. **5.14.** а) $\cos 1$, $\sin 1$, 1, $\operatorname{tg} 1$; б) $\sin\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}$. **5.15.** 1. **5.18.** г) $\frac{1}{486x^4y^{21}}$; д) $\frac{15625}{32}x^8y^9$; е) $\frac{x^7}{1458y^9}$. **5.19.** а) $(x+2)^2+(y-1)^2=32$; б) $(x-2)^2+(y-3)^2=20$.

§ 6 **6.2.** в) 0; г) $-\frac{1}{\sin^2 t}$. **6.6.** в) $\cos t=-0{,}6$; $\operatorname{tg} t=-\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} t=-\frac{3}{4}$; г) $\sin t=-0{,}8$; $\operatorname{tg} t=-\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} t=-\frac{3}{4}$. **6.7.** в) $\cos t=\frac{3}{5}$; $\sin t=-\frac{4}{5}$; $\operatorname{ctg} t=-\frac{3}{4}$; г) $\sin t=-\frac{24}{25}$; $\cos t=-\frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} t=\frac{24}{7}$. **6.8.** б) $\frac{7}{17}$. **6.9.** б) $\frac{15}{8}$. **6.10.** б) $-2{,}0752$. **6.11.** б) $\frac{23}{17}$. **6.12.** в) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **6.13.** г) $y_{\text{наиб}}=1$, $y_{\text{наим}}=0$; д) $y_{\text{наиб}}=-2$, $y_{\text{наим}}=-4$; е) $y_{\text{наиб}}=2$, $y_{\text{наим}}=1$. **6.17.** б) $\frac{\pi}{2}$; 1,(57); $\frac{11}{7}$; $\sqrt{2}$. **6.18.** б) 6. **6.19.** в) 6; г) $\frac{4}{2\sqrt{y}-\sqrt{x}}$. **6.20.** в) $2-\sqrt{5}$; $2+\sqrt{5}$; г) -5; -1.

§ 7 **7.7.** б) $\sin 140^\circ$, $\sin 50^\circ$, $\sin 110^\circ$, $\sin 80^\circ$. **7.8.** в) $\frac{-1+2\sqrt{2}}{4}$; г) 2,5. **7.9.** г) 1081; д) 50; е) 136. **7.10.** г) $y_{\text{наиб}}=510$, $y_{\text{наим}}=-3$; д) $y_{\text{наиб}}$ не существует, $y_{\text{наим}}=-5$; е) $y_{\text{наиб}}$, $y_{\text{наим}}$ не существуют. **7.11.** б) При $p<-\frac{29}{20}$. **7.12.** а) $-3 \leqslant x \leqslant 1$; $x=5$; б) $x \leqslant -5$; $x \geqslant 3$; $x=-1$; е) $-\frac{1}{3}<x<-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}<x<-\frac{1}{6}$. **7.13.** а) 9; б) 5; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{9}$.

§ 8 **8.3.** б) $f(-4)$ не существует; $f(-2)=0{,}5$; $f(0)=-0{,}75$; $f(6)=-1$; $f(12)=3$; в) ни при каких; $x=\frac{8}{3}+5k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $6+5k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $y_{\text{наиб}}$ не существует, $y_{\text{наим}}=-1$. **8.5.** в) $2+3k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $[3k; 1+3k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **8.8.** б) $\frac{2\pi}{3}$. **8.9.** б) $\frac{\pi}{3}$. **8.10.** б) 6π. **8.11.** б) $\frac{6\pi}{5}$. **8.12.** а) 15; б) 6. **8.13.** б) 53. **8.14.** в) $x \leqslant -4$, $x=-\sqrt[3]{63}$; г) $x \leqslant 5$, $x=\sqrt[3]{150}$, $x \geqslant 6$. **8.15.** г) $-4<x<0$, $x>0$.

§ 9 **9.3.** б) $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$; г) $\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$; е) 0. **9.4.** б) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $y_{\text{наим}} = -1$, $y_{\text{наиб}} = 1$; е) $y_{\text{наим}} = -1$, $y_{\text{наиб}} = 1$. **9.9.** г) 0; д) 0; е) 0. **9.10.** г) 0; д) π; е) 0. **9.15.** г) 2; д) 2; е) бесконечно много. **9.16.** а) $-\infty < x < +\infty$; б) $x = 2\pi$. **9.17.** б) $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 7$; $x = -2$. **9.18.** в) $x \leqslant 1$, $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $x \geqslant 10$, $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n = 10, 11, 12, \ldots$; г) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x \leqslant 2$; $x \geqslant 3$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. **9.22.** б) 500 г. **9.23.** в) -3; -2; -1; 0; 1; 2; г) целых решений нет. **9.24.** в) $\left(-4\frac{9}{41}; \frac{26}{41}\right)$, $(5; -2)$; г) $(2; 1)$; $(-0{,}5; -4)$.

§ 10 **10.4.** б) $y_{\text{наим}} = -\frac{1}{2}$, $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$; г) $y_{\text{наим}} = -\frac{1}{2}$, $y_{\text{наиб}} = 1$; е) $y_{\text{наим}} = -1$, $y_{\text{наиб}} = 1$. **10.8.** г) 2; д) 2; е) бесконечно много. **10.9.** г) 0; д) π; е) $-\frac{\pi}{2}$. **10.17.** б) $-2 \leqslant x \leqslant 0$; $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$; $x = 8$. **10.18.** в) $x \leqslant 1$, $x \neq \frac{\pi n}{3}$, $n = 0, -1, -2, \ldots$; $x \geqslant 7$, $x \neq \frac{\pi n}{3}$, $n = 7, 8, 9, \ldots$; г) $-6 \leqslant x < -\pi$, $-\pi < x \leqslant -3$, $x \geqslant 0$, $x \neq \pi n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. **10.24.** в) 1, 2, 8; г) 1, 2, 3, 4, 5. **10.25.** в) -19; г) $-18{,}5$; 20. **10.26.** б) 10 км/ч и 15 км/ч. **10.27.** б) $y_{\text{наиб}} = 8$; $y_{\text{наим}} = 3$; в) $-2 < x < 0$, $x = 2$; г) $3 \leqslant p \leqslant 4$.

§ 11 **11.5.** в) $y_{\text{наиб}} = 0{,}5$, $y_{\text{наим}} = -7{,}5$; г) $y_{\text{наиб}} = -1{,}5$, $y_{\text{наим}} = -2{,}5$. **11.9.** г) 0; д) $-\frac{\pi}{2}$; е) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$. **11.10.** г) 2; д) бесконечно много; е) бесконечно много. **11.12.** б) 1 кг 350 г. **11.13.** б) 2,5. **11.14.** б) $\pm\sqrt{2}$; $4 \pm 3\sqrt{2}$. **11.15.** а) $\frac{1}{120}$; б) $\frac{1}{20}$; в) $\frac{1}{12}$; г) $\frac{17}{24}$.

§ 12 **12.5.** г) $y_{\text{наиб}} = -3$, $y_{\text{наим}} = -3{,}5$; д) $y_{\text{наиб}} = 1$, $y_{\text{наим}} = -1$; е) $y_{\text{наиб}} = 2$, $y_{\text{наим}} = -4$. **12.6.** г) $\frac{3\pi}{8}$; д) $-\frac{\pi}{4}$; е) $-\frac{3\pi}{4}$. **12.7.** а) $\pi(4n + 2)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6} + 4\pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$. **12.8.** г) 2; д) бесконечно много; е) решений нет. **12.14.** а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) 2; г) 0,5; 1,5. **12.15.** б) 35 821 р. **12.16.** б) 27; 43; 59. **12.17.** б) 39. **12.18.** в) 85; г) -9; 9.

§ 13 **13.5.** в) $(-2; 5)$; г) $(360; 56)$. **13.6.** б) $4(x - y)^4(x^2 + xy + y^2)$. **13.7.** б) 3 км/ч. **13.8.** в) $(-\infty; -8] \cup \{5\}$; г) $(-\infty; -8)$.

§ 14 **14.1.** г) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

14.2. г) $\left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) $\left[\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi(k+1)\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **14.4.** г) $x \neq \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) $x \neq \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; е) $x \neq \frac{\pi}{2} + 3\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

14.7. б) $\operatorname{tg} x = \frac{4}{9}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{9}{4}$. **14.8.** г) $-$; д) $+$; е) $+$. **14.10.** в) $-\frac{3\pi}{4} + 3\pi n \leqslant x \leqslant \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **14.11.** в) $-4{,}5 \leqslant x < -\pi$, $-\pi < x < \pi$, $\pi < x < 4{,}5$; г) $-5 \leqslant x < -\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$; $x \geqslant 5$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. **14.14.** а) 6 ч, 10 ч; б) 4 ч. **14.15.** $p = -12$, $q = 308$. **14.16.** $p = 2$, $q = 32$.

Тест **1.** б), в). **2.** $-3{,}5$. **3.** А — 2, Б — 1, В — 3. **4.** $-0{,}28$. **5.** а). **6.** в). **7.** 4. **8.** г). **9.** $[-1; 5]$. **10.** $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Глава 2

§ 15 **15.5.** г) $y = \frac{4}{x} + 3$; д) $y = x^2 + 4$, $x \in [0; +\infty)$; е) $y = -(x-3)^3$.

15.6. б) $y = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, $x \in [0; +\infty)$; е) $y = \sqrt[3]{x-2}$.

15.7. в) $y = -\sqrt{x+12} - 2$, $x \in [-12; +\infty)$; г) не является обратимой.

15.8. в) $y = \begin{cases} -\sqrt[3]{0{,}5x}, & x \geqslant 0, \\ x^2, & x < 0; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1}, & x \geqslant 1, \\ \frac{1}{4}x + 1, & x < 1. \end{cases}$ **15.9.** г) $y = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & x \geqslant 0, \\ 2x, & x < 0; \end{cases}$

д) функция необратима; е) $y = \begin{cases} -\sqrt{x-2}, & x \geqslant 2, \\ \sqrt{2-x}, & x > 2. \end{cases}$ **15.10.** г) $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; д) $-1{,}2$; 1; е) ± 6.

15.12. $\frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **15.13.** а) 3 км/ч; б) 16 км/ч.

§ 16 **16.5.** в) $[1; 2]$; г) $\left[-\frac{2}{3}; 0\right]$; д) $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. **16.6.** г) Да; д) нет; е) да.

16.7. г) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; д) $[-\pi; \pi]$; е) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. **16.8.** г) Чётная; д) чётная; е) нечётная.

16.12. а) 0, $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) 1, $-\frac{1}{2}$. **16.14.** Корней нет, если $p < -1$; один корень, если $p = -1$; два корня, если $-1 < p < 0$, $p > 1$; три корня, если $p = 0$, $p = 1$; четыре

корня, если $0 < p < 1$. **16.15.** в) $\frac{5}{13}$; г) $\frac{24}{7}$. **16.16.** а) 1; б) $\frac{\pi}{6}$. **16.17.** а) $-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \geqslant \frac{1}{2}$. **16.18.** в) $\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\pi + \arcsin\frac{1}{7} + 2\pi n < t < 2\pi - \arcsin\frac{1}{7} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

16.19. а) $\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n < t \leqslant \arcsin\frac{6}{7} + 2\pi n$;

$\pi - \arcsin\frac{6}{7} + 2\pi n \leqslant t < \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $-\arcsin\frac{6}{7} + 2\pi n \leqslant t < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$;

$\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n < t \leqslant \pi + \arcsin\frac{6}{7} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **16.20.** г) $-\cos^2\alpha$; д) $\cos^2 2\alpha$;

е) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **16.21.** в) $2{,}5\pi$; г) $1{,}2\pi$. **16.22.** б) $-3 \leqslant x \leqslant 5$; г) $x < 0$; $x > 1$; е) $x < 0$;
$x \geqslant 3$. **16.23.** в) $p = -6$; $3 < p \leqslant 4$; г) $-6 \leqslant x < -4$; $-2 < x < -1$.

§ 17 **17.5.** в) $[-2; 2]$; д) $[0; 1]$; е) $[1; 2]$. **17.6.** г) Нет; д) нет; е) да. **17.7.** г) $[0; \pi]$;
д) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$; е) $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. **17.8.** г) Чётная; д) нечётная; е) ни чётная, ни нечётная.

17.14. а) 0,5; б) 0. **17.16.** в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{12}{5}$. **17.17.** а) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; $x = -1$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 1$.

17.18. в) $-\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \arccos\frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

17.19. а) $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n < t \leqslant -\arccos\frac{6}{7} + 2\pi n$;

$\arccos\frac{6}{7} + 2\pi n \leqslant t < \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n < t \leqslant \arccos\frac{6}{7} + 2\pi n$;

$2\pi - \arccos\frac{6}{7} + 2\pi n \leqslant t < 2\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

17.20. в) $\pi + \arcsin 0{,}4 + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos\frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

г) $-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n < x < -\arcsin\frac{1}{7} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **17.21.** в) $-1 \leqslant x \leqslant 0$;

г) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **17.23.** г) 4; д) 1; е) 16. **17.24.** г) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; д) 6;

е) 7. **17.25.** а) 9 и 2; 2 и 11; 11 и 9; б) 6 и 3; 3 и 8; 8 и 6. **17.26.** а) $p = -4$; $p > 5$; б) $-9 < p \leqslant 0$.

§ 18 **18.1.** б) $\frac{11\pi}{3}$. **18.2.** б) $-\sqrt{2}$; г) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{1}{2}$. **18.3.** г) Ни чётная, ни нечётная; д) чётная; е) нечётная. **18.8.** а) 1; 2; б) $1 \leqslant x \leqslant 2$. **18.9.** $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **18.10.** в) $-\frac{5}{13}$; г) $\frac{7}{25}$. **18.11.** в) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg}(-3) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\operatorname{arctg}(-2) + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **18.12.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \sqrt{3}$; б) $x \leqslant -\operatorname{tg} 1$; $x \geqslant \operatorname{tg} 3$. **18.13.** в) (1; 2); (−2; −1); $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$; г) (10; −2); (−1,2; 1,2). **18.14.** в) $1 + \sqrt{3}$; $-2 - \sqrt{2}$; г) $1 - \sqrt{5}$; $-1 - \sqrt{3}$. **18.16.** а) Нет; б) да.

§ 19 **19.3.** г) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; е) $\left[-\sqrt{2}; 0\right)$. **19.7.** в) $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{35}{37}$. **19.8.** в) $\operatorname{arcctg}(-3) + \pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\pi n < x \leqslant \operatorname{arcctg}(-2) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **19.9.** а) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; б) $x < \operatorname{ctg} 2$. **19.12.** г) $\frac{1}{3a^9b^{18}}$; д) $6250a^{23}b^{19}$; е) $\frac{4}{177147a^{13}b^{16}}$. **19.13.** а) 100 г; б) 2 л. **19.14.** в) $\sqrt{3}$; $-2\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}$; $\frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$. **19.15.** б) $-4 \leqslant x < -\pi$; $-\pi < x < 0$; $0 < x < \pi$; $\pi < x \leqslant 4$.

§ 20 **20.3.** г) $\pi(2n+1)$, $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **20.4.** г) $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; д) $-\arccos\frac{4}{5} + 2\pi$, $\arccos\frac{4}{5} + 2\pi$; е) $-\frac{5\pi}{6}$. **20.5.** г) $-\frac{13\pi}{18}$; $-\frac{11\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{18}$; $\frac{\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{13\pi}{18}$; д) $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; е) 2π, 4π. **20.6.** б) 0; 2π; 7. **20.7.** б) $-\frac{3\pi}{4}$. **20.8.** б) При $0 \leqslant p \leqslant 0{,}5$, $2 \leqslant p \leqslant 2{,}5$. **20.9.** б) $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\left[-\arccos\frac{5}{8} + 2\pi n; \arccos\frac{5}{8} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **20.10.** г) $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\left(-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

е) $\left(-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi n;\ -\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;\ \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **20.11.** а) Четыре; б) три; в) три; г) шесть; д) семь; е) девять. **20.12.** а) $\frac{\pi+2\pi n}{6}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\varnothing$; в) $\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi+2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **20.13.** а) Если $1<a<3$, то решений нет; если $a\leqslant 1$, $a\geqslant 3$, то $x=\pm\arccos\frac{a}{3a-2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; если $a<-4$, $-1<a<1$, $a>4$, то решений нет; если $-4\leqslant a\leqslant -1$, $1\leqslant a\leqslant 4$, то $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a^2-4}{3a}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **20.14.** а) $-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n<t<\arccos\frac{2}{3}+2\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\arccos\frac{2}{3}+2\pi n\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $\frac{4\pi}{3}+2\pi n\leqslant t\leqslant 2\pi-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **20.15.** а) $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2$; $-1\leqslant x\leqslant -\frac{\pi}{4}$; б) $-5<x<-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<x<5$. **20.16.** б) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. **20.17.** а) 2; 9; б) 2; 0,5; в) $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$; г) $\pm\sqrt{2}$; $4\pm 3\sqrt{2}$. **20.18.** а) 7; 8; 9; б) 5; 6; 7; 8; 9. **20.19.** а) 500 г и 300 г; б) 700 г.

§ 21

21.1. б) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\pi(2n-1)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **21.2.** г) $\pi(2n+1)$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; д) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; е) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **21.3.** г) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; д) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; е) -2π; 0; 2π; 4π. **21.4.** б) $p\in\left[-2;\ -\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};\ 2\right]$. **21.5.** б) $-\frac{\pi}{6}$. **21.6.** б) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; 4π; 5π. **21.7.** а) 0; $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\pi$; ± 4; б) 0,4; 1; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$. **21.8.** в) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $y=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $n,\ k\in\boldsymbol{Z}$; г) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $y=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $n,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **21.9.** б) $\left(-\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; е) $\left(-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n;\ \pi+\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

21.10. г) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; д) $\left(-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n;\ \arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n;\ \pi+\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right)$,

$n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\left(-\arcsin\frac{3}{4}+2\pi n;\ \arcsin\frac{1}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n;\ \pi+\arcsin\frac{3}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **21.11.** а) Три; б) четыре; в) четыре; г) шесть, д) восемь; е) девять.

21.12. а) $x=\frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\varnothing$; г) $x=\pi+4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

21.13. а) Если $a<-2$, $a>\frac{2}{7}$, то решений нет; если $-2 \leqslant a \leqslant \frac{2}{7}$, то $x=(-1)^n\arcsin\frac{4a}{3a-2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) если $a<-4$, $-2<a<2$, $a>4$, то решений нет; если $-4 \leqslant a \leqslant -2$, $2 \leqslant a \leqslant 4$, то $x=\frac{1}{3}\left((-1)^n\arcsin\frac{a^2-8}{2a}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

21.14. а) $-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n<x<\pi+\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\arcsin\frac{1}{5}+2\pi n<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n<x<\pi+\arcsin\frac{1}{5}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **21.15.** а) $-\pi \leqslant x \leqslant 0$; б) $0<x<\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}<x<\pi$, $\frac{4\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{4\pi}{3}<x<-\pi$. **21.16.** б) $m=1$. **21.17.** 14 ручек. **21.18.** а) 197 383 р.; б) 11 500 р.

21.19. а) $2\pm\sqrt{3}$; 1; б) 2; в) $-0{,}25$; 0; 2; 3; г) $\frac{1}{4}$; 0.

§ 22 **22.1.** в) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4}+3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **22.2.** г) $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{7\pi}{16}$; $\frac{11\pi}{16}$; $\frac{15\pi}{16}$; $\frac{19\pi}{16}$; $\frac{23\pi}{16}$; д) $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; е) $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$. **22.3.** г) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\pi(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **22.4.** г) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $-\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+\pi(n+1)$, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **22.5.** г) 8; д) 62; е) 16. **22.6.** в) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **22.7.** б) $-\frac{4}{b^2}$. **22.9.** а) 297 754 р.; б) 318 504 р. **22.10.** а) 0; б) 0.

§ 23 **23.1.** в) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\pm 2\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+4\pi n$, $4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **23.2.** в) $\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **23.3.** в) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arcctg}\frac{1}{5}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

23.4. в) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.5.** в) $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.6.** в) $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{4}$; $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{4}$; $-\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{4}$; г) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

23.7. б) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.8.** в) Нет корней; г) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

23.9. в) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

23.10. в) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{3}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

23.11. а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.12.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.13.** а) πn, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) нет решений; г) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; д) $2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; е) πn, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.14.** а) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; д) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.15.** а) πn, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) πn, $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) πn, $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; д) $\pi(2n+1)$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; е) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.16.** а) $x=\frac{(-1)^n}{18}+\frac{n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $x=n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.17.** а) $x=4$, $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $x=\pm2$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.18.** а) 5, πn, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) 5, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.19.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **23.20.** а) Восемь; б) девять; в) пятнадцать; г) бесконечное множество. **23.21.** а) Восемь; б) двенадцать. **23.22.** б) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $n,k\in\boldsymbol{Z}$. **23.23.** а) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$, $n,k\in\boldsymbol{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $n,k\in\boldsymbol{Z}$. **23.24.** а) 11; б) 8. **23.25.** а) 25; б) 11. **23.26.** б) 0,5. **23.27.** а) 2; 3; 4; 5; б) 1,5; 2,5; 3,5.

§ 24 **24.1.** в) $\frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $2\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **24.2.** в) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $3\pi n$, $\pi(3n + 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **24.3.** в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **24.4.** в) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$, $3\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **24.5.** в) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **24.6.** б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **24.7.** б) $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{6}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$. **24.8.** б) $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{2}$. **24.9.** б) $-\frac{7\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 1{,}5 - 3\pi$. **24.10.** в) $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **24.11.** а) $\approx 0{,}026$; б) 0,2. **24.12.** а) 0,14; б) 0,2. **24.13.** а) 15 км/ч и 18 км/ч; б) 48 км/ч. **24.14.** в) $-6 < x < 9$; $x > 9$; **г)** $x = -3$; $x \geqslant 6$.

Тест **1.** А — 3, Б — 1, В — 2. **2.** а), в), г). **3.** а). **4.** а), б), в). **5.** г). **6.** а). **7.** 5. **8.** πn, $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **9.** $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$. **10.** $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 1{,}5 + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Глава 3

§ 25 **25.3.** г) $-\sqrt{2}$; д) 1; е) $-2{,}5$. **25.4.** в) $2\cos x$; г) $-\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$. **25.6.** в) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.7.** в) $-\pi + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.8.** г) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; д) πn, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\pi$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$; е) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. **25.9.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{14} - 2}{5} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.10.** а) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{19\pi}{6}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$. **25.11.** а) $3\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.12.** а) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\operatorname{arctg} 8 + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.13.** а) $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $3\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 3\pi n$, $-\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.14.** а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $y = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 5 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $y = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

25.16. а) $-\frac{\pi}{5}$; б) $\frac{7\pi}{10}$; в) $8-3\pi$; г) $-\frac{5\pi}{14}$; д) $4\pi-10$; е) $-\frac{3\pi}{8}$. **25.17.** а) $p=7$; б) $p=5$. **25.19.** в) Чётная; г) не является ни чётной, ни нечётной. **25.20.** в) $2\pi n$, $n\in N$; $-\pi+2\pi k$, $k\leqslant 0$, $k\in Z$; г) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

§ 26 **26.4.** г) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$; д) $-\sin\alpha$; е) $-\sqrt{2}\sin\alpha$. **26.6.** г) 0; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **26.7.** в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 0. **26.8.** г) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$; д) $-0{,}6$; е) $0{,}8$. **26.9.** г) $-\frac{5\sqrt{3}+12}{26}$; д) $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$; е) $\frac{7\sqrt{2}}{26}$. **26.10.** б) $\frac{36}{85}$; г) $-\frac{13}{85}$. **26.11.** в) $\pm\frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in Z$; г) $\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. **26.12.** в) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; г) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$. **26.13.** в) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; г) $2\pi n$, $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **26.14.** а) $15^\circ+360^\circ n$, $75^\circ+360^\circ n$, $n\in Z$; 15°; б) $165^\circ+360^\circ n$, $-105^\circ+360^\circ n$, $n\in Z$; 165°. **26.15.** а) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; $-\frac{7\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}$; б) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$. **26.16.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; $-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; $\frac{15\pi}{8}, \frac{19\pi}{8}, \frac{23\pi}{8}$. **26.17.** а) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$; $-\frac{9\pi}{16}, -\frac{5\pi}{16}, -\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{15\pi}{16}$. **26.20.** а) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\arccos\frac{8}{17}+\pi k$, $k\in Z$; б) $(-1)^k\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. **26.21.** а) При $-\sqrt{29}+1\leqslant a\leqslant\sqrt{29}+1$; б) при $-\sqrt{13}-1\leqslant a\leqslant\sqrt{13}-1$. **26.22.** а) $-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; б) $\pi-\arccos\frac{1}{4}+2\pi n\leqslant x\leqslant\pi+\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; в) $\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n<x<\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; г) $-\frac{10\pi}{3}+8\pi n\leqslant x\leqslant\frac{10\pi}{3}+8\pi n$, $n\in Z$. **26.24.** а) $a<b$; б) $a>b$. **26.25.** а) $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi(2n-1+k)$, $y=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $n, k\in Z$; б) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(n+k)$, $y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)$, $n, k\in Z$. **26.26.** а) $\frac{1}{26}\left(12+5\sqrt{3}\right)$; б) $-\frac{16}{65}$; в) $\frac{1}{10}\left(3+4\sqrt{3}\right)$; г) $-\frac{161}{289}$. **26.28.** в) $x<-\frac{1}{3}$, $x>2$; г) $-3<x<-2$, $x\geqslant-\frac{1}{3}$. **26.29.** а) 345; б) $40\frac{4}{9}$. **26.30.** а) 692 р.; б) 950 р.

§ 27 **27.3.** в) 0,5; г) $-\frac{1}{7}$. **27.4.** а) 1; б) $\frac{1}{7}$. **27.5.** а) -3; б) $\frac{1}{3}$. **27.6.** а) $\frac{1}{7}$; б) -7.

27.7. а) $\frac{17}{7}$; б) $\frac{3\sqrt{3}+4}{4\sqrt{3}-3}$. **27.9.** в) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $-0{,}13\pi + 0{,}2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.10. в) $\frac{\pi}{27}+\frac{\pi n}{9}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{2\pi}{27}, -\frac{5\pi}{27}, -\frac{8\pi}{27}, -\frac{11\pi}{27}$; г) $\frac{3\pi}{20}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{11\pi}{60}$.

27.12. а) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

27.13. а) $x_1 = \frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $y_1 = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{13}{6}+\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$;

$y_2 = \operatorname{arctg}\frac{5}{4}+\pi t$, $t \in \boldsymbol{Z}$; б) $x_1 = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}-2}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$y_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}-2}{3}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{13}}{3}+\frac{\pi m}{2}$, $m \in \boldsymbol{Z}$;

$y_2 = -\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{13}}{3}+\pi t$, $t \in \boldsymbol{Z}$. **27.14.** а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{17}{7}$; в) $\frac{\sqrt{3}-3}{1+3\sqrt{3}}$; г) $\frac{8+15\sqrt{3}}{15-8\sqrt{3}}$.

27.17. а) 66 км/ч; б) 96 км/ч. **27.18.** а) 280 р.; б) 93 р. **27.19.** в) $\frac{2\pi}{7}$; г) $\frac{\pi}{6}$.

§ 28 **28.2.** в) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **28.3.** г) $\sin^2 t$; д) $2\operatorname{tg} 3t$; е) 1. **28.6.** в) $-\frac{120}{169}, \frac{119}{169}$,

$-\frac{120}{119}, -\frac{119}{120}$; г) $-\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, -\frac{24}{7}, -\frac{7}{24}$. **28.7.** в) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi n}{2}, \pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

28.8. в) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi n}{2}, \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.9.** а) $-210°$; б) $-30°$.

28.10. в) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, \frac{2\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$\frac{5\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{5\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$. **28.11.** а) $\frac{97}{169}$; б) $-\frac{485}{2197}$. **28.12.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{32}$; в) $\frac{1}{16}$; г) $\frac{1}{8}$.

28.13. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n, \frac{5\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n$,

$n \in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **28.14.** а) $\pm 1{,}1$; б) $\frac{7}{8}$;

в) 0,656; г) $\frac{55}{64}$. **28.16.** а) $\sin 3x = -\frac{117}{125}$; $\cos 3x = \frac{44}{125}$; $\operatorname{tg} 3x = -\frac{117}{44}$;

$\operatorname{ctg} 3x = -\frac{44}{117}$; б) $\sin 3x = -\frac{828}{2197}$; $\cos 3x = \frac{2035}{2197}$; $\operatorname{tg} 3x = -\frac{828}{2035}$; $\operatorname{ctg} 3x = -\frac{2035}{828}$.

28.18. а) $2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n, -2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

28.19. а) $-\frac{5\pi}{12}+\pi n<x<-\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

б) $-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{6}\arccos\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}\arccos\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

в) $-\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{3}<x<\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

г) $-2{,}5\pi-2{,}5\arcsin 0{,}4+5\pi n\leqslant x\leqslant 2{,}5\arcsin 0{,}4+5\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **28.20.** а) 10; б) 7.

28.21. а) $\pi(1+2n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $2\pi(1+2n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **28.22.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) πn, $\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **28.23.** а) $-2{,}5$; -2; -1; 0; 1; 2; 2,5; б) -7; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 7.

28.27. а) 0,12; б) 0,994. **28.30.** а) ±4, $\pm\frac{\pi}{4}$; б) -2; 3; $\frac{\pi}{2}$; в) ±3; $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$; г) -1; 1,5.

§ 29

29.4. а) 1; б) 0; в) 0; г) 1. **29.6.** в) $y_{\text{наиб}}=3$, $y_{\text{наим}}=-1$; г) $y_{\text{наиб}}=4$, $y_{\text{наим}}=-2$. **29.7.** в) $\sin\frac{t}{2}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\frac{t}{2}=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=-\frac{3}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=-\frac{2}{3}$;

г) $\sin t=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos t=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}t=\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}t=3$. **29.8.** в) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi n}{8}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **29.9.** в) $2\pi n$, $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 0, $\frac{\pi}{3}$; г) $2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 0, 2π. **29.10.** а) ±4, $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{3\pi}{4}$, $\pm\frac{5\pi}{4}$; б) $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{5\pi}{6}$, ±3. **29.12.** в) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **29.13.** а) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) πn, $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(3-\sqrt{10}\right)+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

29.14. а) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{2\pi}{3}+4\pi n\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

29.16. а) $\sin x=\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos x=\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}$, $\operatorname{ctg}x=\frac{2}{3}$; б) $\sin x=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos x=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}x=\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}x=3$; в) $\sin x=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos x=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}x=\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}x=3$; г) $\sin x=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos x=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}x=3$, $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{3}$.

29.19. в) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

§ 30

30.7. в) $\sqrt{2}$; г) -1. **30.10.** г) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi n}{10}$, $\frac{\pi n}{7}$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

е) $\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **30.11.** г) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$,

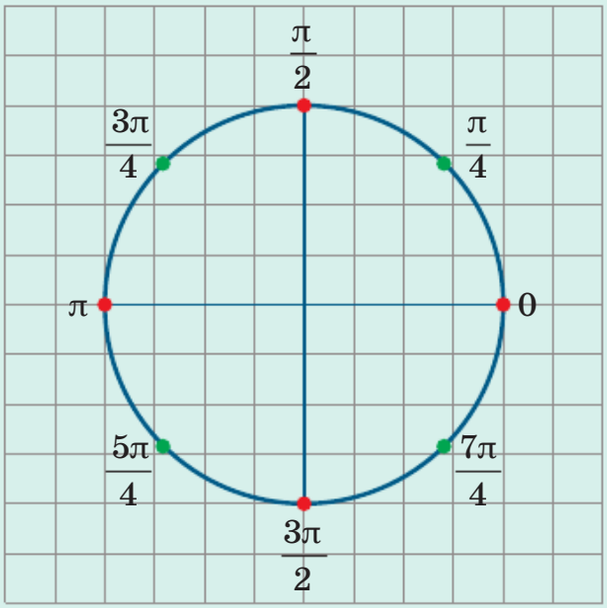
$\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; е) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **30.12.** г) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi n}{8}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; е) $\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **30.13.** а) Четыре корня; б) три корня. **30.14.** г) $-\frac{9\pi}{10}$, $-\frac{7\pi}{10}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{10}$, $\pm\frac{\pi}{10}$; д) $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{11\pi}{18}$; е) 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$. **30.15.** а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{2\pi n}{9}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **30.16.** а) πn, $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **30.17.** а) $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{16}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **30.18.** а) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{9}$, $\frac{5\pi}{32}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{66}+\frac{\pi n}{11}$, $\frac{5\pi}{18}+\frac{\pi n}{6}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **30.19.** а) $-\frac{1}{6}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{1}{8}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $-\arccos\frac{15}{17}+2\pi n$, $\frac{1}{5}\arccos\frac{15}{17}+\frac{5\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **30.20.** в) $\frac{1}{3a^9b^6}$; г) $\frac{8}{25}a^3b^3$. **30.21.** г) $-\arccos\frac{2}{5}+2\pi n\leqslant t\leqslant-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; д) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n\leqslant t\leqslant\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; е) $\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n\leqslant t\leqslant\arccos(-0{,}7)+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

§ 31 **31.5.** а) $y_{\text{наиб}}=\frac{9}{4}$, $y_{\text{наим}}=-\frac{3}{4}$; б) $y_{\text{наиб}}=\frac{1}{8}$, $y_{\text{наим}}=-\frac{3}{8}$. **31.7.** в) $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) πn, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **31.8.** в) $-\frac{\pi}{15}$, $\frac{\pi}{15}$; г) $-\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{18}$. **31.9.** а) 1; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{8}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **31.10.** в) $-\frac{\pi}{12}+\pi n<x<\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{15\pi}{8}+3\pi n<x<\frac{3\pi}{8}+3\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **31.12.** в) -1; 3; $\frac{\pi}{2}$; г) -2; 0; 1; $-\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{5}$. **31.13.** а) $a>b$; б) $a>b$. **31.15.** а) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $y=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) $x=\pm\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $y=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **31.16.** а) 180 кг; б) 1,6 л. **31.17.** в) 5; г) $-1{,}5$. **31.18.** г), д), е) 0,35.

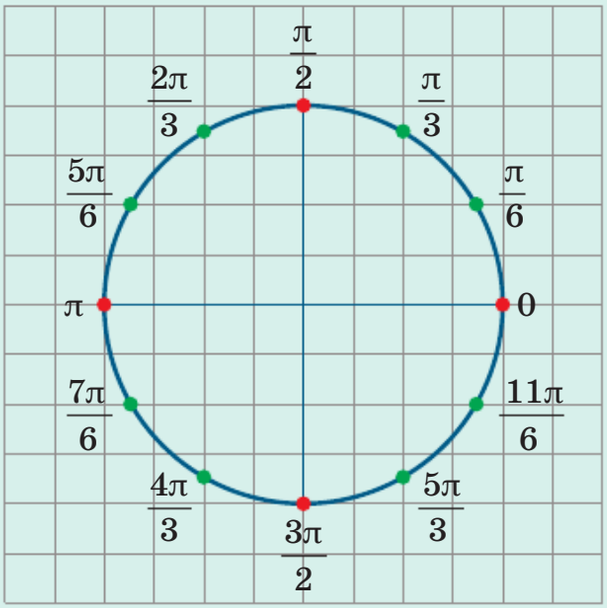
Тест **1.** а), в). **2.** А — 4; Б — 1; В — 2. **3.** г). **4.** -8. **5.** 36. **6.** 49. **7.** $-0{,}04$. **8.** а). **9.** $\frac{\pi n}{4}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **10.** а) $\pi+2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{3}$.

Справочные материалы

Макет № 1



Макет № 2



$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$$

Тригонометрические функции

Если точка M числовой окружности на координатной плоскости xOy соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом числа t** и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют **синусом числа t** и обозначают $\sin t$:

$$\text{если } M(t) = M(x;\, y), \text{ то } x = \cos t,\ y = \sin t.$$

Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют **тангенсом числа t** и обозначают $\operatorname{tg} t$. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют **котангенсом числа t** и обозначают $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t};\quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Таблицы значений $\cos t$, $\sin t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$
$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

Периодические функции

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют **периодической**, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого $x \in X$ выполняется двойное равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T называют **периодом функции**.

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$, имеет период T, то любое число, кратное T (т. е. число вида nT, $n \in \boldsymbol{Z}$), также является её периодом.

Функции $y = \cos x$, $y = \sin x$ являются периодическими, причём основной период обеих функций равен 2π.

Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ являются периодическими, причём основной период обеих функций равен π.

Если T — основной период функции $y = f(x)$, то $\dfrac{T}{n}$ — основной период для функции $y = f(nx)$.

Обратные тригонометрические функции

Если $|a| \leqslant 1$, то $\boldsymbol{\arcsin a}$ — это такое число из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Если $|a| \leqslant 1$, то $\boldsymbol{\arccos a}$ — это такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

$\boldsymbol{\operatorname{arctg} a}$ — это такое число из интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

$\boldsymbol{\operatorname{arcctg} a}$ — это такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

$$\begin{aligned}
\arcsin(-x) &= -\arcsin x \\
\arccos(-x) &= \pi - \arccos x \\
\operatorname{arctg}(-x) &= -\operatorname{arctg} x \\
\operatorname{arcctg}(-x) &= \pi - \operatorname{arcctg} x
\end{aligned}$$

Таблицы значений $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Основные тригонометрические формулы

Формулы приведения

1. Если под знаком заданной тригонометрической функции содержится выражение $\pi + x$, $\pi - x$, $2\pi + x$ или $2\pi - x$, то наименование тригонометрической функции от аргумента x будет таким же, как у заданной функции.

2. Если под знаком заданной тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2} \pm x$ или $\frac{3\pi}{2} \pm x$, то наименование тригонометрической функции от аргумента x следует изменить на родственное (синус — на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс).

3. Перед полученной функцией от аргумента x следует поставить тот знак, который имела бы заданная функция при условии, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента

1) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$;

2) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$;

3) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$;

4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

5) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

6) $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Формулы, связывающие функции аргументов, из которых один вдвое больше другого

1) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

3) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

4) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$;

5) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

Формулы сложения (вычитания) аргументов

1) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$;

2) $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$;

3) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;

4) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$;

5) $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$;

6) $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

1) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;

2) $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$;

3) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;

4) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

1) $\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$;

2) $\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$;

3) $\sin x\sin y = -\dfrac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$.

Тригонометрические уравнения

Если $|a| < 1$, то уравнение $\cos t = a$ имеет следующие решения:

$$t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Если $|a| < 1$, то уравнение $\sin t = a$ имеет следующие решения:

$$t = \arcsin a + 2\pi n,\quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Обе эти серии можно объединить одной записью:

$$x = (-1)^n\arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ имеет вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Для любого $a \in \boldsymbol{R}$ решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ имеет вид

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Оглавление

Глава 1. **Тригонометрические функции** 5

§ 1. Что такое числовая окружность 5
§ 2. Числовая окружность на координатной плоскости 18
§ 3. Дуги числовой окружности на координатной плоскости 28
§ 4. Понятия косинуса и синуса числа 35
§ 5. Понятия тангенса и котангенса числа 48
§ 6. Соотношения между тригонометрическими функциями 53
§ 7. Тригонометрические функции углового аргумента 61
§ 8. Периодические функции 65
§ 9. Свойства и график функции $y = \cos x$ 73
§ 10. Свойства и график функции $y = \sin x$ 83
§ 11. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = kf(x)$ 93
§ 12. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(mx)$ 103
§ 13*. График гармонического колебания 114
§ 14. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ 118

Итак, в главе 1 128
Вопросы 128
Тест 129

Из истории математики 131

Глава 2. **Обратные тригонометрические функции. Решение тригонометрических уравнений** 135

§ 15. Понятие обратной функции 135
§ 16. Функция $y = \arcsin x$ 142
§ 17. Функция $y = \arccos x$ 153
§ 18. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ 162
§ 19. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ 168
§ 20. Решение уравнения $\cos x = a$ 173
§ 21. Решение уравнения $\sin x = a$ 182
§ 22. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ 194
§ 23. Методы решения тригонометрических уравнений 198
§ 24. Однородные тригонометрические уравнения 204

Итак, в главе 2 211
Вопросы 211
Тест 212

Глава 3. **Формулы тригонометрии** 215
§ 25. Формулы приведения 215
§ 26. Формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов . . . 222
§ 27. Формулы тангенса суммы и разности аргументов 236
§ 28. Формулы двойного аргумента 243
§ 29. Формулы понижения степени 253
§ 30. Формулы сложения (вычитания) косинусов (синусов) 261
§ 31*. Формулы преобразования произведения синусов (косинусов) в сумму 270
Итак, в главе 3 276
Тест 277
Из истории математики 279
Ответы 281
Справочные материалы 296



Учебное издание

Серия «Лаборатория А. Г. Мордковича»

Мордкович Александр Григорьевич
Семенов Павел Владимирович
Александрова Лидия Александровна
Мардахаева Елена Львовна

МАТЕМАТИКА
Алгебра и начала математического анализа

10 класс

Базовый и углублённый уровни

Учебное пособие
В двух частях

Часть 1

Центр информатики, технологии и профильного обучения

Ответственный за выпуск *Л. В. Кузнецова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Внешнее оформление *В. А. Андрианова*
Художественный редактор *А. А. Павлов*
Иллюстрации: *«Фотобанк Лори»*
Компьютерная вёрстка *А. А. Павлова*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *О. Ч. Кохановская*

Подписано в печать 02.10.2025. Формат 70×90/16.
Усл. печ. л. 22,23. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва,
ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, помещение 1Н.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru.**